Tarea Examen 1

Física Matemática 2
Thomas Martinod

Problema 1. Hallar la serie de Stirling para $z!$, y en particular hallar su cuarto y quinto coeficiente.

Para resolver este problema, se usará la expansión en series de potencias incluida por defecto en las funciones `PowerExpand[Series[ ...]]` de Mathematica.

Considerando que la serie de Stirling para $z!$ tiene la forma:

$$z! = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2}\, e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288 z^2} - \frac{139}{51840} + \cdots\right)$$

Para lograr una expansión correcta (como una sumatoria de solo potencias de z), es posible despejar la sumatoria de la expresión anterior para obtener,

$$f(z) = z!\,(2\pi z)^{-1/2}\, z^{-z}\, e^{z} = \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288 z^2} - \frac{139}{51840} + \cdots\right)$$

Entonces, se puede expandir $f(z)$ en serie de Taylor (evaluada en $z \to \infty$) para obtener la serie deseada, puesto que la serie de potencias es única.

El código para esta expansión (solo enseñando hasta el coeficiente de n^{10} es:

In[64]:=
```
Simplify[PowerExpand[Series[n!/Sqrt[2Pi n]/n^n Exp[n], {n,∞,10}]]]
```

Out[64]=

$$1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{51\,840\,n^3} - \frac{571}{2\,488\,320\,n^4} + \frac{163\,879}{209\,018\,880\,n^5} + \frac{5\,246\,819}{75\,246\,796\,800\,n^6} - \frac{534\,703\,531}{902\,961\,561\,600\,n^7} - \frac{4\,483\,131\,259}{86\,684\,309\,913\,600\,n^8} + \frac{432\,261\,921\,612\,371}{514\,904\,800\,886\,784\,000\,n^9} + \frac{6\,232\,523\,202\,521\,089}{86\,504\,006\,548\,979\,712\,000\,n^{10}} + O\left[\frac{1}{n}\right]^{11}$$

De modo que los coeficientes buscados son $x = -571/2\,488\,320$ y $y = 163\,879/209\,018\,880$.

Problema 2. Estimar 11! y calcular el error obtenido frente al cálculo de 11! directamente con Mathematica.

Para solucionar este numeral, se debe convertir la anterior expresión, en una función que calcule $f(z)$ para cualquier $z \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos una función `f[z_]` como:

In[65]:=
```
f[z_] := Normal[Simplify[PowerExpand[
Series[z! /Sqrt[2Pi z]/z^z  Exp[z] ,{z,∞,10}]]]]
```

Esta función trunca la serie evaluando hasta el décimo término, parámetro que se puede cambiar en el último elemento de la llave, por si se desea mayor precisión o menor precisión.
De este modo, solo falta multiplicar por $(2\,\pi\,z)^{1/2}\,z^z\,e^{-z}$ para obtener z!. Luego, definimos:

In[66]:=
```
prod[z_, serie_] := Sqrt[2 Pi z] z^z Exp[-z] serie
```

Entonces, 11! se calcula como:

In[67]:=
```
Z = 11;
aux = N[f[Z]];
serie11 = prod[Z, aux]
```

Out[69]=

3.99168×10^{7}

Mientras que el 11! calculado por Mathematica teóricamente es:

In[70]:=
```
11!
```

Out[70]=

39 916 800

Luego, el error porcentual (relativo) entre el valor que calculó Mathematica y la serie truncada es:

In[71]:=
```
e% = Abs[11! - serie11]/11! 100
```

Out[71]=

3.73306×10^{-14}

Mientras que el error absoluto, E se calcula como la diferencia entre los valores:

In[72]:=
```
E = 11!- serie11
```

Out[72]=

-1.49012×10^{-8}

Es fácil ver que estos errores son diminutos, y conforme n crece, estos se hacen cada vez menores. Por ejemplo, al calcular 52!, se obtiene:

In[73]:=
```
Z2 = 52;
aux2 = N[f[Z2]];
serie52 = prod[Z2, aux2];
E2 = 52! - serie52
e2% = Abs[52! - serie52]/52! 100
```

Out[76]=

-1.19726×10^{52}

Out[77]=

1.48437×10^{-14}

Donde los anteriores son el error absoluto y relativo respectivamente.