Solución Péndulo Acoplado

Parcial 2. Mecánica Clásica

Thomas Martinod[1]

[1]Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, *tmartinods@eafit.edu.co*

Problema. Considere un sistema de dos péndulos idénticos de masa m y longitud L acoplados por un resorte de constante k como se muestra en la figura . Asuma que la longitud en reposo del resorte es tal que el resorte no ejerce fuerzas sobre los péndulos cuando estos se encuentran en reposo. Además, asuma que el movimiento de los dos péndulos se restringe al plano que se muestra en la misma figura.

Halle el lagrangiano del sistema en términos de los ángulos, deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange, calcule las frecuencias normales y los modos normales del sistema para pequeñas desviaciones del equilibrio, y escriba la solución general del sistema. **Consejo:** Aplique las aproximaciones para pequeñas oscilaciones justo después de deducir el lagrangiano.

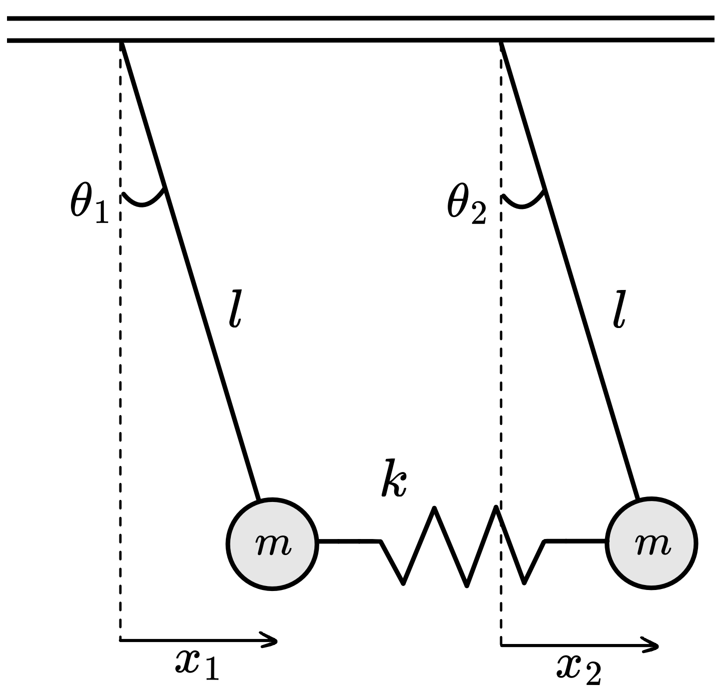

Figura 1: Péndulos acoplados.

Solución.

Inicialmente, las coordenadas cartesianas en términos de los ángulos (las ligaduras del sistema), son:

$$x_j = l\sin\theta_j, \quad y_j = l\cos\theta_j \tag{1}$$

donde se mide hacia arriba y positivo desde los puntos de equilibrio, y $j \in \{1,2\}$. Sus derivadas son:

$$\dot{x}_j = l\cos(\theta_j)\,\dot{\theta}_j, \quad \dot{y}_j = -l\sin(\theta_j)\,\dot{\theta}_j \tag{2}$$

Ahora bien, la energía cinética del sistema es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \tag{3}$$

Luego, al reemplazar las velocidades (2) en (3), y simplificar, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^{\ 2} \tag{4}$$

Por otro lado, la energía potencial del sistema es:

$$V = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}kX^2 \tag{5}$$

donde X es la elongación del resorte fuera de su punto de equilibrio. Es fácil ver que, con el sistema de referencia elegido:

$$X^2 = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] \tag{6}$$

y reemplazando (6) en (5), se obtiene:

$$V = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] \tag{7}$$

Y sustituyendo las posiciones cartesianas (1):

$$V = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2\left[(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2\right] \tag{8}$$

De modo que el Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^{\ 2} + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \frac{1}{2}kl^2\left[(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2\right] \tag{9}$$

Ahora bien, si consideramos que las oscilaciones son pequeñas, se cumple que $\sin\theta_j \approx \theta_j$, y que $\cos\theta_j \approx 1$ por el primer término de la serie de Taylor de ambas funciones. Linealizando el lagrangiano se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^{\ 2} + 2mgl - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \tag{10}$$

A partir del Lagrangiano anterior, podemos obtener dos ecuaciones de Euler-Lagrange (EL), una para cada θ_j. Para θ_1 se obtiene la ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -kl^2\theta_1 + kl^2\theta_2 \tag{11}$$

y mientras que la segunda es:

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = kl^2\theta_1 - kl^2\theta_2 \tag{12}$$

Ahora bien, definiendo:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2\end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2\end{bmatrix} \tag{13}$$

obtenemos que las ecuaciones EL deducidas anteriormente son en realidad el oscilador armónico:

$$M\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -K\boldsymbol{\theta} \tag{14}$$

Para explorar las oscilaciones del sistema, comenzamos con un Ansatz que describe las coordenadas θ_j en términos de oscilaciones armónicas:

$$\theta_1 = \alpha_1 \cos(\omega t - \delta_1), \quad \theta_2 = \alpha_2 \cos(\omega t - \delta_2) \tag{15}$$

Se destaca que este otro Ansatz igual de válido es:

$$\iota_1 = \alpha_1 \sin(\omega t - \delta_1), \quad \iota_2 = \alpha_2 \sin(\omega t - \delta_2) \tag{16}$$

Ahora, definimos las cantidades complejas z_1 y z_2 como:

$$z_1 = \theta_1 + i\iota_1 = \alpha_1 e^{-i(\omega t - \delta_1)} = \alpha_1 e^{-i\delta_1} e^{i\omega t} = a_1 e^{i\omega t} \tag{17}$$

$$z_2 = \theta_2 + i\iota_2 = \alpha_2 e^{-i(\omega t - \delta_2)} = \alpha_2 e^{-i\delta_2} e^{i\omega t} = a_2 e^{i\omega t} \tag{18}$$

donde $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$ es el vector de amplitudes complejas que da los modos normales del sistema. Además, definimos $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T = \mathbf{a}e^{iwt}$ y notamos con facilidad que $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{Re}(\mathbf{z})$.

Observe que con las definiciones anteriores, se cumple que $\ddot{\mathbf{z}} = -\omega^2\mathbf{z}$. Al reemplazar esto en la ecuación (14), obtenemos:

$$-\omega^2 M\mathbf{z} = -K\mathbf{z} \implies -\omega^2 M\mathbf{a}e^{i\omega t} = -K\mathbf{a}e^{i\omega t} \implies \left(K - \omega^2 M\right)\mathbf{a} = 0_2 \tag{19}$$

Para obtener soluciones no triviales, la matriz $K - \omega^2 M$ debe ser no invertible, lo que implica que su determinante es cero. Por lo tanto, obtenemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} kl^2 - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

lo que se simplifica a:

$$\left[kl^2 - \omega^2 ml^2\right]^2 - \left[-kl^2\right]^2 = 0 \tag{21}$$

Entonces:

$$kl^2 - \omega^2 ml^2 = \pm kl^2 \tag{22}$$

o equivalentemente:

$$\omega^2 = \frac{kl^2 \mp kl^2}{ml^2} = \frac{k \mp k}{m} \tag{23}$$

y al considerar $\omega \geq 0$, se obtienen dos soluciones:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = 0 \tag{24}$$

que son las frecuencias normales del sistema. Para hallar los modos normales del sistema, debemos hallar los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que corresponden a los autovectores de los autovalores ω_1 y ω_2 respectivamente. Reemplazando ω_1 en 19, se obtiene:

$$\left(\begin{bmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{bmatrix} - {\omega_1}^2 \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{bmatrix} - \frac{2k}{m} \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

luego:

$$\left(\begin{bmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2kl^2 & 0 \\ 0 & 2kl^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

y entonces se obtiene el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -kl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

que hace que las a_i deban tener signo contrario. El modo de vibración asociado es:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\delta_1} \tag{29}$$

Es fácil ver que el modo de vibración asociado para el segundo autovalor es:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\delta_2} \tag{30}$$

Estos dos resultados nos indican que los dos modos de movimiento para el péndulo acoplado son cuando los péndulos están ambos oscilando en la misma dirección ($\mathbf{b}$) y cuando los péndulos están oscilando en direcciones opuestas ($\mathbf{a}$).

La solución general compleja del sistema es:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\left(t\sqrt{2k/m}-\delta_1\right)} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\delta_2} \tag{31}$$

La solución general, tomando $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{Re}(\mathbf{z})$, está dada por:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t - \delta_1\right) + B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$