El Principio de Fermat y los Caminos de la Luz.

Autores:
Juan Fernado Riascos
Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
jfriascosg@eafit.edu.co
Thomas Martinod
Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
tmartinods@eafit.edu.co

Profesor:
Nicolás Guarín Zapata.
Correo electrónico:
nguarinz@eafit.edu.co

Universidad Eafit.
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería.
Ingeniería Física.
Medellín, Colombia.
Febrero de 2024.

Índice

1. Introducción

El siguiente documento corresponde al anteproyecto del proyecto final de la asignatura de Mecánica Clásica ofrecida en la Universidad EAFIT. En este se expone la idea central del proyecto, que consiste en emplear la formulación variacional del principio de Fermat para determinar las trayectorias de la luz en distintos medios.

La pregunta fundamental sobre el camino que sigue la luz durante su propagación ha intrigado a científicos y filósofos a lo largo de la historia. Desde la era de los antiguos griegos hasta los avances científicos contemporáneos, esta interrogante ha impulsado investigaciones y descubrimientos en el campo de la óptica, el electromagnetismo y la física en general.

En el contexto de la óptica clásica, el teorema de Fermat establece que la luz sigue el camino óptico que minimiza el tiempo de propagación entre dos puntos. Esto nos permite comprender fenómenos como la reflexión y la refracción, donde la luz elige una ruta específica para minimizar su tiempo de recorrido según las propiedades del medio.

La propuesta del proyecto planteado en este documento consiste en formular el principio de Fermat como un problema de cálculo variacional, para posteriormente someter la luz a materiales con diferentes propiedades (no lineales, anisotrópicos o inhomogéneos) y determinar las trayectorias de la luz en estos materiales. Esta formulación en forma variacional permite establecer una analogía directa con la mecánica lagrangiana, lo que nos brinda la oportunidad de utilizar elementos de esta para abordar el problema de los caminos de la luz de manera más intuitiva y efectiva.

El anteproyecto inicia con una breve justificación sobre la importancia de desarrollar este proyecto, seguido por la definición formal de los objetivos a alcanzar durante el semestre. Posteriormente, se plantea de manera general el problema a resolver y se proporciona un ejemplo que ilustra las conclusiones que permite obtener la metodología del principio de Fermat. Finalmente, se delimita el alcance del proyecto y se presenta el cronograma correspondiente.

2. Justificación

La comprensión de la trayectoria de la luz es esencial en diversas áreas científicas y tecnológicas, desde la óptica geométrica hasta el diseño de sistemas ópticos y las comunicaciones ópticas. En particular, es vital comprender las trayectorias de la luz en medios anisotrópicos, inhomogéneos o no lineales.

Por ejemplo, en comunicación óptica, esto permite optimizar la transmisión de datos a través de fibras ópticas sujetas a tensiones mecánicas o cambios de temperatura. En el diseño de dispositivos ópticos, ayuda a garantizar el rendimiento óptimo de lentes y prismas en materiales con propiedades no lineales o anisotrópicas.

En aplicaciones médicas, comprender las trayectorias de la luz en medios biológicos inhomogéneos es crucial para desarrollar técnicas de diagnóstico y tratamiento en campos como la microscopía y la tomografía óptica. Esto permite visualizar con precisión tejidos y fluidos biológicos, así como comprender fenómenos físicos más profundos, como la interacción luz-tejido.

Para justificar la elección del cálculo variacional, es importante destacar las múltiples ventajas que ofrece este método. En primer lugar, el principio de Fermat proporciona una explicación intuitiva y fácilmente comprensible sobre el comportamiento de la luz en diferentes medios, lo que lo hace accesible para una amplia audiencia y facilita su divulgación.

Además, el formalismo del cálculo variacional es altamente efectivo al abordar problemas de optimización que implican maximizar o minimizar un funcional objetivo. Esto permite resolver de manera eficaz problemas complejos relacionados con la propagación de la luz en medios anisotrópicos, inhomogéneos o no lineales, donde las trayectorias de la luz pueden ser difíciles de determinar mediante métodos convencionales basados en el electromagnetismo y la óptica clásica.

Por último, la mecánica lagrangiana también se formula en términos de un problema variacional, que consiste en minimizar la acción. Esta conexión entre la mecánica clásica y la óptica no solo enriquece nuestra comprensión de ambos campos, sino que también proporciona herramientas adicionales para abordar problemas complejos de manera efectiva.

3. Objetivos

En esta sección, se plantean tanto el objetivo general del proyecto como los objetivos específicos que se abordarán para lograr dicho propósito.

3.1. Objetivo general

Evaluar las trayectorias de los rayos de luz en medios no lineales, inhomogéneos o isotrópicos.

3.2. Objetivos específicos

- Formular matemáticamente el principio de Fermat utilizando el cálculo de variaciones y establecer una analogía con la mecánica clásica.
- Calcular las trayectorias de mínimo camino óptico para diferentes configuraciones del índice de refracción, considerando las propiedades específicas del medio (no linealidad, inhomogeneidad o anisotropía).

- Realizar simulaciones computacionales para visualizar las trayectorias de la luz en los medios abordados.
- Divulgar los resultados parciales y finales del proyecto a través del blog del curso, dirigido a estudiantes de últimos años de bachillerato y primeros años de universidad interesados en la física.

4. Planteamiento matemático del Problema

4.1. El Principio de Fermat

Consideremos la situación física en la que un rayo de luz se emite en un punto A y se detecta en un punto B, como se observa en la figura 1. La pregunta que nos compete resolver es: ¿qué trayectoria siguió el rayo de luz para recorrer el camino entre A Y B?

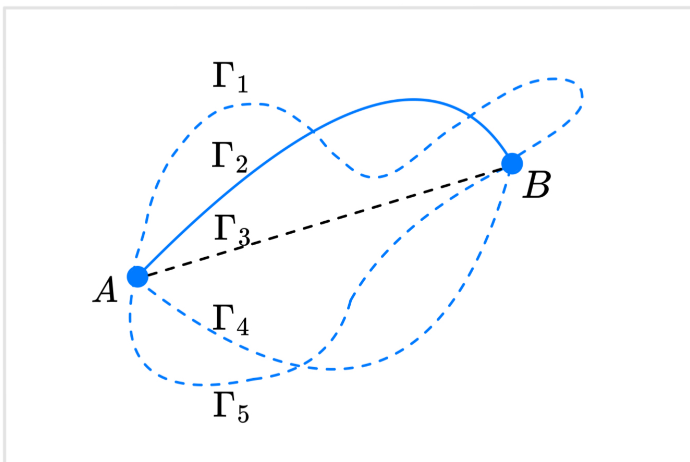

Figura 1: Trayectorias de la luz en un medio arbitrario

Aunque la óptica y el electromagnetismo plantean varios métodos para resolver esta cuestión, nos enfocaremos en el **Principio de Fermat**, que como se verá más adelante, se puede formular usando el cálculo variacional. Una versión primaria del principio de Fermat se estipula como:

Teorema 1 (Principio de Fermat para T)**.** *El camino recorrido por un rayo de luz entre dos puntos es aquel que toma el menor tiempo para recorrerse.*

Escribamos esto formalmente. Sea Γ la trayectoria que minimiza el tiempo recorrido por la luz y sean A, B puntos en el espacio 2D con coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) respectivamente (ver figura 2).

El camino Γ tiene una longitud de arco total S medida desde A hasta B, y se define T como el tiempo que se tarda en recorrer el camino Γ. Claramente, este tiempo de recorrido se puede calcular como:

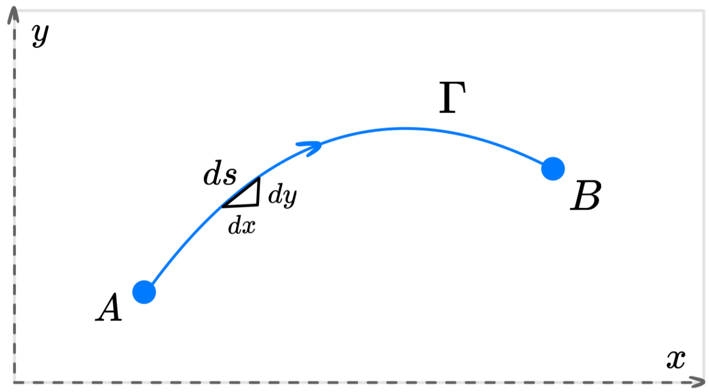

Figura 2: Camino que minimiza el tiempo del rayo entre A y B.

$$T = \int_A^B dt \tag{1}$$

además, si consideramos la velocidad del rayo de luz en el medio v (que es un campo escalar cuando el medio es inhomogéneo y que es distinta en las dos direcciones en caso de materiales anisotrópicos), el tiempo T se puede reformular como:

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} \tag{2}$$

como se verá en la subsección siguiente, la condición de primer orden que satisface Γ para ser el camino con menor tiempo de recorrido es que la veariación de este tiempo sea nula, es decir,

$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0 \tag{3}$$

Ahora, consideremos una versión más fuerte del teorema de Fermat en términos de la *longitud de camino óptico* (OPL). La OPL corresponde a la distancia en el vacío equivalente a la distancia S atravesada en el medio con índice de refracción n. Es decir $OPL/\lambda_0 = S/\lambda$ con λ_0 la longitud de onda de la luz en el vacío, y se preserva la fase conforme la luz avanza.

Entonces $t = OPL/c$ con c la velocidad de la luz en el vacío, y se puede reformular el principio de Fermat como se sigue:

Teorema 2 (Principio de Fermat para la longitud de camino óptico)**.** *La luz, para ir del punto A al punto B recorre aquella trayectoria que tenga la menor longitud de camino óptico.*

Ahora, con las definiciones antes hechas, $S = OPL$ y se tiene que $ds = c\,dt$, de modo que $OPL = S = cT$. Multiplicando la ecuación 2 por c:

$$cT = S = \int_A^B c\,dt \tag{4}$$

y con las definiciones de la velocidad en el medio $v = ds/dt$, y el índice de refracción $n = c/v$, se tiene:

$$S = \int_A^B \frac{c}{v} ds = \int_A^B n\,ds \tag{5}$$

Usando esta última expresión, la condición de primer orden se traduce a:

$$\delta S = \delta \int_A^B n\,ds = 0 \tag{6}$$

por lo que, para hallar las trayectorias de la luz en un medio, se debe minimizar el funcional S, la longitud de camino óptico. Si se asume un medio isotrópico, pero inhomogéno, el índice de refracción n es un campo escalar $n : \mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}$. Además, usando el teorema de pitágoras para el diferencial de arco (ver figura 2), tomando a x como la variable independiente y considerando la notación de Lagrange para las derivadas $y'(x) = dy/dx$, el diferencial de arco se puede escribir como:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{7}$$

de modo que el problema de optimización (o cálculo de variaciones) a resolver es:

$$\begin{cases} \min\limits_{y} S[y] = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} n(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx \end{cases} \tag{8}$$

con $y(x)$ una función **admisible**, es decir, de clase C^2, tal que $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$. En la siguiente subsección se analizarán más a profundidad los tecnisismos del cálculo variacional.

4.2. Formulación del problema de cálculo de variaciones

¿Existe un mínimo para el problema que acabamos de plantear?, ¿Qué significa minimizar un funcional?¿Y la función admisible? Comencemos analizando el problema de cálculo de variaciones que se desea resolver. Sean x_0, x_1 números reales con $x_0 < x_1$. Se define el conjunto de funciones Ω como:

$$\Omega = \{f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} | f \text{ posee derivadas primera y segunda continuas en } [t_0, t_1]\} \tag{9}$$

En este conjunto de funciones, se consideran las operaciones usales de suma y producto por un número real. Sean $f_1, f_2 \in \Omega$, $x \in [x_0, x_1]$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ y $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$. Claramente la terna $(\Omega,\ +,\ \cdot_{\mathbb{R}})$ es un *espacio vectorial.*

En Ω, se define ahora la siguiente norma:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \Omega \to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\| = \max_{x \in [x_0, x_1]} |f(x)| \end{aligned} \tag{10}$$

de modo que $(\Omega, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Similarmente, se induce la noción de *distancia*, mediante:

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \max_{x\in[x_0,x_1]} |f_1(x) - f_2(x)| \tag{11}$$

de modo que $(\Omega, d(\cdot,\cdot))$ es un *espacio métrico*. Finalmente, definimos un **funcional** J como una aplicación:

$$\begin{aligned} J \,:\, \Omega &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J[f] = J[f(x)] \end{aligned} \tag{12}$$

Habiendo definido entonces el espacio al que van a pertenecer las funciones de interés, y lo que es un funcional, veamos que es minimizar un funcional J. Ya que los funcionales de interés a resolver son integrales entre las posiciones inicial y final,

$$J[f] = \int_{x_0}^{x_1} F[f(x), \dot{f}(x), x]\, dx \tag{13}$$

definamos el conjunto de funciones **admisibles** como:

$$\Psi = \{f \in \Omega : f^*(x_0) = x_0, f^*(x_1) = x_1\} \tag{14}$$

Se dice entonces que f^* es un mínimo global para J si $f \in \Psi$ y $J[f^*] \leq J[f], \forall f \in \Psi$. Y similarmente, se define un mínimo local f^* si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall f \in B_\delta(f^*)$, se cumple que $J[f^*] \leq J[f]$, donde B es una bola de radio δ centrada en f^* definida mediante la distancia $d(\cdot,\cdot)$.

Luego, ya estamos en capacidad de discernir mínimos locales para el funcional J, y de plantear entonces el problema de optimización $(\mathbf{P})$ a resolver:

$$(\mathbf{P}) \quad \left\{ \min_{f\in\Psi} J[f] = \int_{x_0}^{x_1} F[f(x), \dot{f}(x), x]\, dx \right. \tag{15}$$

Sea f^* aquella función que minimiza el funcional del problema $(\mathbf{P})$. La condición de primer orden que debe satisfacer se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3 (Condición de Euler)**.** *Si $f \in \Psi$, y f es un mínimo o máximo local del problema $(\mathbf{P})$, entonces f verifica la siguiente condición:*

$$\delta J[f] = \frac{d}{d\varepsilon} J[f + \varepsilon\eta] \bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{16}$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\eta = \eta(x)$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ arbitrarias. Esta variación igualada a cero implica que f satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) = 0 \tag{17}$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

En el primer avance se estudiará la condición necesaria de segundo orden (que permite discernir mínimos de máximos) para la resolución de este problema.

4.3. Analogía con la mecánica lagrangiana

Analizando lo mencionado en las dos subsecciones anteriores, es posible crear una analogía entre la mecánica de Lagrange y el problema de los caminos de la luz. En este contexto, el índice de refracción actúa como un potencial mecánico y el problema puede resolverse utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Retomando el problema de optimización, y ya habiendo definido el conjunto de funciones admisibles, en un material inhomogeneo e isotrópico se debe resolver:

$$\left\{ \min_{y\in\Psi} S[y] = \int_{x_0}^{x_1} n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \right. \tag{18}$$

Mientras que, el problema de la mecánica lagrangiana se basa en la minimización de la acción S', problema que se escribe en una dimensión $x' = x'(t)$ como:

$$\left\{ \min_{y} S'[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x,x',t)\,dt \right. \tag{19}$$

entonces, haciendo una correspondencia entre los elementos de la mecánica clásica y el problema de la óptica, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & t \\ y & \longleftrightarrow & x' \\ n(x,y)\sqrt{1+y'^2} & \longleftrightarrow & L \\ S & \longleftrightarrow & S' \end{array} \tag{20}$$

entonces, aunque la dinámica de los sistemas sea supremamente distinta, la teoría de la mecánica lagrangiana logra modelar el problema de las trayectorias de la luz.

Esto representa una herramienta supremamente poderosa en la resolución de los problemas acá propuestos, puesto que nos permite el acceso a conceptos de la mecánica de Lagrange, como las cantidades conservadas, las simetrías y las ligaduras.

4.4. Avance

Para ilustrar un poco de lo que se va a llevar a cabo, se ejemplificará un caso de un material inhomogeneo e isotrópico:

4.4.1. Medio con velocidad de propagación proporcional a la altura.

Consideremos un medio lineal e isotrópico con velocidad del medio $v(y) \propto y$. Claramente, $n(x,y) = k/y$ para alguna constante de proporcionalidad k.

El funcional a minimizar viene dado por:

$$S[y] = \int_A^B n(x,y)\,ds = \int_A^B \frac{k}{y}\,ds = \tag{21}$$

y usando $ds^2 = dx^2 + dy^2$ en la longitud de arco, se tiene:

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{k}{y}\sqrt{1+y'^2}dx \tag{22}$$

de modo que nuestro "lagrangiano" es:

$$L = f(y)\sqrt{1+y'^2} = \frac{k\sqrt{1+y'^2}}{y} \tag{23}$$

para hallar la ecuación de Euler-Lagrange (condición de primer orden), usaremos el siguiente lema (demostrado en el anexo).

Teorema 4. *Sea $f(y)$ una función de y. Entonces la función $y(x)$ que optimiza el funcional:*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{24}$$

satisface la ecuación diferencial,

$$1 + y'^2 = Bf(y)^2 \tag{25}$$

donde $B \in \mathbb{R}$ es una constante de integración.

Entonces, usando el resultado anterior con $f(y) = k/y$, se obtiene la EDO:

$$1 + y'^2 = \frac{B}{y^2} \tag{26}$$

Solucionando para y'^2, se tiene que:

$$y'^2 = \frac{B}{y^2} + 1 = \frac{B+y^2}{y^2} \tag{27}$$

de modo que al tomar la raíz cuadrada:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{B+y^2}{y} \tag{28}$$

y separando variables e integrando:

$$\int dx = \pm\int \frac{y\,dy}{\sqrt{B-y^2}} \tag{29}$$

de modo que mediante la sustitución simple $u = B - y^2$, se llega a:

$$x + A = \mp\sqrt{B-y^2} \tag{30}$$

y por lo tanto a $(x+A)^2 + y^2 = B$ que es la ecuación de una circunferencia. Es fácil notar que la circunferencia está centrada en el borde del semiplano.

5. Alcance

El ejemplo visto en la sección anterior resulta muy ilustrativo en cuanto al tipo de problemas que se planeará resolver. En esta breve sección, se enlistarán detalles relacionados con el alcance del proyecto.

- El proyecto se basará en el análisis bidimensional de la trayectoria de la luz, no obstante, su descripción bastante formal matematicamente permite una fácil generalización a la tercera dimensión.
- El énfasis del proyecto es la determinación de la trayectoria de la luz en medios inhomogeneos, no obstante, se evaluará la posibilidad del análisis de las trayectorias en medios anisotrópicos (donde hay componentes n_x y n_y del índice de refracción), y medios no lineales (donde los campos de densidad de flujo de campo **D** o **B**, tienen relación no lineal con los campos **E** o **H**). Incluso se evaluará la posibilidad de analizar medios cuyo indice de refracción varíe con el tiempo.
- En la resolución de las ecuaciones diferenciales y las integrales que de allí emergan, se emplearán métodos numéricos para hallar sus soluciones (en caso de ser requeridos).
- Se asumirá la concavidad de muchas de las funciones trabajadas dentro del funcional, para no hacer referencia muy directa al criterio de segundo orden (máximo o mínimo local).

6. Cronograma

Se presenta un cronograma de actividades detallando las tareas planificadas junto con sus fechas de inicio y finalización. Este plan proporciona una guía clara para coordinar eficientemente los esfuerzos del equipo y cumplir con los plazos establecidos, asegurando el éxito del proyecto.

Naturalmente, este está sujeto a cambios, pero se sugiere su seguimiento estricto.

Cronograma de Actividades		Semanas																	
Actividad	**Estado**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Consultar documentación	100%		■	■															
Redactar Anteproyecto	100%				■	■													
Plantear las ecuaciones que modelan el fenómeno	35%						■	■	■										
Plantear una metodología de desarrollo	10%							■	■	■									
Solucionar teóricamente el fenómeno	0%									■	■	■	■						
Desarrollar la simulación en Software	0%											■	■	■	■				
Verificar los resultados del algoritmo	0%														■	■			
Redactar artículo científico	0%															■	■	■	

Figura 3: Cronograma de actividades

Anexo

Demostración Teorema 4. Se sigue la demostración expresada en [?]. La idea es hallar la función $y(x)$ que extremalice la integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{31}$$

El “lagrangiano” es $L = f(y)\sqrt{1+y'^2}$, y la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(f\cdot y\cdot(1+y'^2)^{-1/2}\right) = f'\sqrt{1+y'^2} \tag{32}$$

usando la triple regla del producto en el lado izquierdo se obtiene:

$$\frac{f'y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{fy''}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{yf'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f'\sqrt{1+y'^2} \tag{33}$$

multiplicando por $(1+y'^2)^{3/2}$ y simplificando, se obtiene:

$$fy'' = f'(1+y'^2) \tag{34}$$

ahora, multiplicando en ambos lados por y' y reordenando, se obtiene la EDO:

$$\frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{f'y'}{f} \tag{35}$$

que al considerar que $f = f(y(x))$, mediante el uso de la regla de la cadena, se puede reescribir como:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1+y'^2\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln(f)\right) \tag{36}$$

integrando con respecto a x se obtiene:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y'^2\right) = \ln(f) + C \tag{37}$$

y tomando la función exponencial, se llega a:

$$1 + y'^2 = Bf(y)^2 \tag{38}$$

donde $B = e^{2C}$, que es el resultado planteado. Como anotación, se empleó $f' = df/dy$.

Referencias

[1] Emilio Cerdá Tena. *Optimización dinámica.* Garceta, Grupo Editorial, Madrid, España, 1 edition, 2011.

[2] Richard Fitzpatrick. History of geometric optics.

[3] Eugene Hecht and Alfred Zajac. *Óptica.* 4 edition, 2003.

[4] Michael Sean Mahoney. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665.* Princeton University Press, 2nd edition, 1994.

[5] Pavlos Mihas. Use of history in developing ideas of refraction, lenses and rainbow. *Demokritus University, Thrace, Greece*, 2005.

[6] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions.* Cambridge University Press, 10 2008.