Péndulo Simple y Mecánica Newtoniana

Tarea 1. Mecánica Clásica

Juan Fernado Riascos[1] and Thomas Martinod[2]

[1]Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, *jfriascosg@eafit.edu.co*
[2]Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, *tmartinods@eafit.edu.co*

Resumen

El siguiente escrito expone la solución a la primera tarea del curso Mecánica Clásica impartido en la Universidad EAFIT. Los numerales 2 y 4 tienen el código en Python documentado en el repositorio ubicado en https://github.com/thomas-martinod/mecanica-clasica.

Problema 1. Deduzca las ecuaciones de movimiento para un péndulo en coordenadas cartesianas.

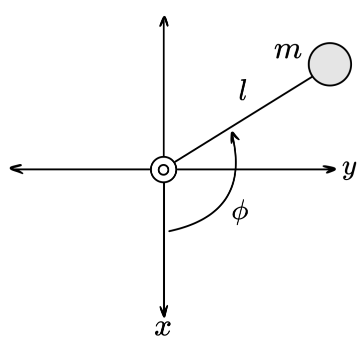

Figura 1: Caption

Utilizando la relación de inextensibilidad ($x^2 + y^2 = l^2$), escriba las ecuaciones de movimiento para la compomente y del desplazaimento.

Solución.

Partiendo de la segunda ley de Newton de forma genenal, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, y considerando que el péndulo permanece sobre el plano $z = 0$, se tienen dos ecuaciones escalares de movimiento, en dirección de los vectores unitarios $\hat{e}_x$ y $\hat{e}_y$, que son respectivamente $\sum F_x = m\ddot{x}$ y $\sum F_y = m\ddot{y}$.

Las fuerzas involucradas en el problema son el peso $\mathbf{w} = mg\hat{e}_x$ y la tensión de la cuerda, que siempre tiene dirección hacia el pivote. Para descomponer las componentes de la tensión, ayuda visualizar la figura 2.

A partir de la figura, es claro que la sumatoria de fuerzas en dirección $\hat{e}_x$, se puede escribir como:

$$\sum F_x = mg + T \operatorname{sen}\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = m\ddot{x} \tag{1}$$

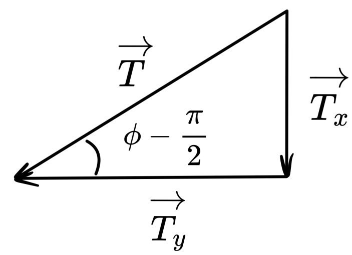

Figura 2: Descomposición de la tensión T

Y al usar la fase entre el seno y el coseno, se puede escribir:

$$-T\cos\phi = m(\ddot{x} - g) \tag{2}$$

Por otro lado, usando la segunda ley de Newton en dirección $\hat{e}_y$, se obtiene:

$$-T\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = m\ddot{y} \tag{3}$$

donde, de nuevo, al usar el desfase entre las funciones trigonométricas, se obtiene:

$$-T\operatorname{sen}\phi = m\ddot{y} \tag{4}$$

Buscando eliminar la tensión T del problema, se pueden dividir las ecuaciones 4 y 2, cuyo resultado es:

$$\tan\phi = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x} - g} \tag{5}$$

Ahora, usando la geometría del problema, podemos escribir el ángulo ϕ en términos de las coordenadas cartesianas. En particular, bajo el sistema de referencia elegido, se puede ver que:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{6}$$

y reemplazando la función tangente en la ecuación 5, se llega a la ecuación de movimiento:

$$\frac{y}{x} = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x} - g} \tag{7}$$

o inversamente:

$$\frac{x}{y} = \frac{\ddot{x} - g}{y} = \frac{D^2 x - g}{y} \tag{8}$$

Ahora, esta última ecuación diferencial de segundo orden en conjunto con la restricción de inextensibilidad:

$$x^2 + y^2 = l^2 \tag{9}$$

forman un SDA (sistema diferencial algebráico). Para encontrar una EDO en términos de solo una variable x o y, la estrategia es despejar la variable a reemplazar en términos de la otra en la ecuación algebráica. Despejando x de 9, se obtiene:

$$x = \pm\left(l^2 - y^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

Ahora, se tomará la solución positiva en x para preservar la inyectividad del mapeo, obteniendo según el sistema de referencia planteado, la descripción solo del semicírculo inferior. Luego, al reemplazar 10 en 8, se obtiene:

$$\frac{\left(l^2-y^2\right)^{1/2}}{y}=\frac{D^2\left[\left(l^2-y^2\right)^{1/2}\right]-g}{\ddot{y}} \tag{11}$$

donde el operador D corresponde a la derivada temporal de la función. Ahora, realizando la primera derivada de x con respecto al tiempo, usando la regla de la cadena:

$$D\,x=D\,\left(l^2-y^2\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\cdot(-2y)\cdot=-y\dot{y}\left(l^2-y^2\right)^{-1/2} \tag{12}$$

y usando la triple regla del producto para hallar la segunda derivada de x, se obtiene:

$$\begin{aligned} D^2x&=-D\left[y\dot{y}\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\right]\\ &=-\left[\dot{y}^2\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}+y\ddot{y}\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}+y\dot{y}(-\frac{1}{2})\left(l^2-y^2\right)^{-3/2}\cdot(-2y)\cdot\dot{y}\right]\\ &=-\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\left[\dot{y}^2+y\ddot{y}+y^2\dot{y}^2\left(l^2-y^2\right)^{-1}\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Luego, al reemplazar esta última expresión en la ecuación 11, se llega a:

$$\frac{\left(l^2-y^2\right)^{1/2}}{y}=\frac{-\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\left[\dot{y}^2+y\ddot{y}+y^2\dot{y}^2\left(l^2-y^2\right)^{-1}\right]-g}{\ddot{y}} \tag{14}$$

multiplicando por $y\ddot{y}$ a ambos lados y reordenando términos se obtiene:

$$\left(l^2-y^2\right)^{1/2}\ddot{y}=-y\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\left[\dot{y}^2+y\ddot{y}+\frac{y^2\dot{y}^2}{l^2-y^2}\right]-gy \tag{15}$$

Para finalmente arribar la ecuación de movimiento:

$$\left(l^2-y^2\right)^{1/2}\ddot{y}+y\left(l^2-y^2\right)^{-1/2}\left[\dot{y}^2+y\ddot{y}+\frac{y^2\dot{y}^2}{l^2-y^2}\right]=-gy \tag{16}$$

Problema 2. Resuelva numéricamente la ecuación resultante 16 e interprete los resultados, teniendo en cuenta que una vez conocido el valor de y se puede calcular el valor de x.

Solución.

Para resolver la ecuación numéricamente, utilizaremos el método de **Verlet**. La dinámica del péndulo simple se describe mediante la ecuación 16, donde l representa la longitud del péndulo y y es su posición horizontal, mientras que $\dot{y}$ denota su velocidad horizontal.

Para discretizar esta ecuación empleando el método de Verlet, introducimos una variable auxiliar que representa la velocidad angular del péndulo. Esto nos permite expresar la ecuación en forma de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{y}&=v\\ \dot{v}&=\ddot{y}\end{aligned}$$

Sustituimos la derivada primera de y en la primera ecuación utilizando la la variable auxiliar que definimos:

$$(l^2 - y^2)^{1/2}\dot{v} + \frac{y}{(l^2 - y^2)^{1/2}}\left[v^2 + y\dot{v} + \frac{y^2v^2}{l^2 - y^2}\right] = -gy$$

Dividimos toda la ecuación por $(l^2 - y^2)^{1/2}$ para simplificar:

$$\dot{v} + \frac{y}{(l^2 - y^2)}\left[v^2 + y\dot{v} + \frac{y^2v^2}{l^2 - y^2}\right] = -\frac{gy}{(l^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$\dot{v} = -\frac{gy}{(l^2 - y^2)} - \frac{y}{(l^2 - y^2)}\left[v^2 + y\dot{v} + \frac{y^2v^2}{l^2 - y^2}\right]$$

Usando las dos ecuaciones diferenciales resultantes, debemos seguir la receta a continuación:

Instrucciones:

1. Calcular la nueva posición y_{i+1} utilizando la fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t v_i + \frac{1}{2}\Delta t^2 a_i$$

2. Calcular la nueva aceleración a_{i+1} utilizando la fórmula:

$$a_{i+1} = -\frac{gy_{i+1}}{(l^2 - y_{i+1}^2)^{1/2}} - \frac{y_{i+1}}{(l^2 - y_{i+1}^2)^{1/2}}\left[v_i^2 + y_{i+1}\dot{v}_i + \frac{y_{i+1}^2v_i^2}{l^2 - y_{i+1}^2}\right]$$

3. Calcular la nueva velocidad v_{i+1} utilizando la fórmula:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{2}(a_i + a_{i+1})$$

Este proceso se repite para cada paso de tiempo hasta llegar al tiempo final deseado, usando las condiciones iniciales y_0, v_0 para inicializar el proceso.

Los resultados se almacenan en matrices y luego se grafican las posiciones y velocidades en función del tiempo. El código completo, documentado, se puede visualizar en el archivo `punto2,3.py` ubicado en el repositorio (ver resumen).

Ahora, hagamos 3 casos prueba para la solución obtenida mediante el método de Verlet. Consideremos:

- **a.** Longitud: $l = 2$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = -55$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = 0$ rad/s, Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2
- **b.** Longitud: $l = 5$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = 0$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = -3{,}0$ rad/s (hacia la izquierda en y), Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2
- **c.** Longitud: $l = 3$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = -45$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = 2$ rad/s, Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

Luego de calcular las condiciones iniciales para y y $\dot{y}$, aplicamos el método de Verlet. Posteriormente, obtenemos las siguientes gráficas que ilustran el comportamiento de las variables de velocidad y posición en los tres ejemplos propuestos:

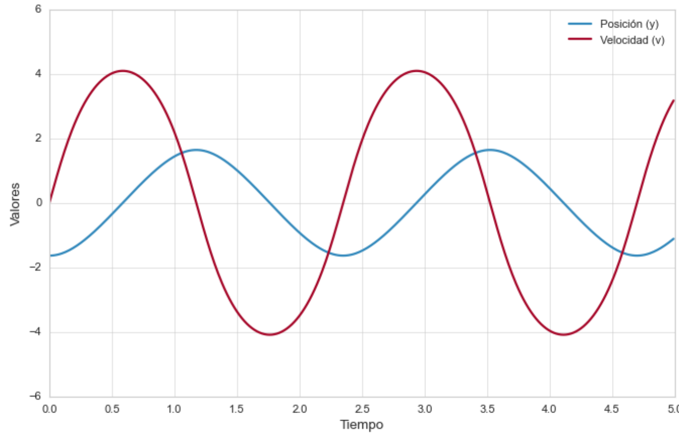

Figura 3: Posición y Velocidad (a)

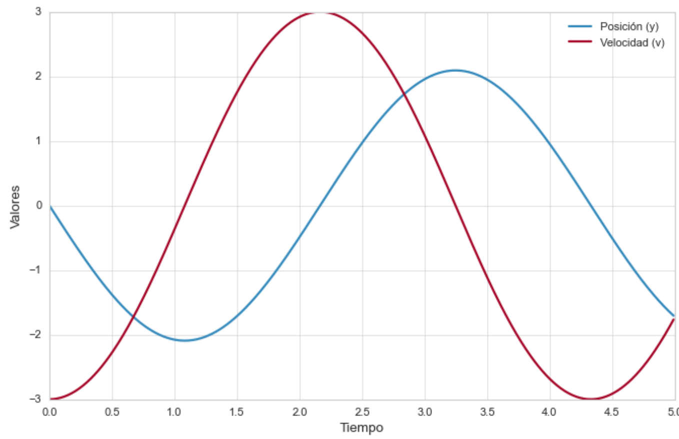

Figura 4: Posición y Velocidad (b)

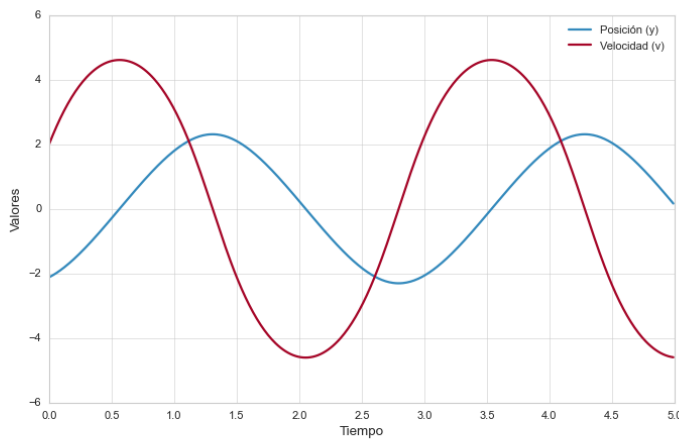

Figura 5: Posición y Velocidad (c)

Ahora bien, si graficamos posición vs velocidad, obtenemos el comportamiento de un sistema con características de oscilador armónico simple, como se observa en las siguientes figuras:

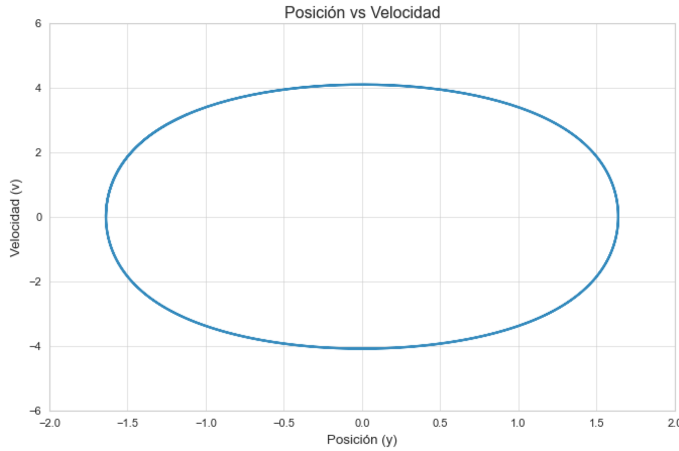

Figura 6: Posición vs Velocidad (a)

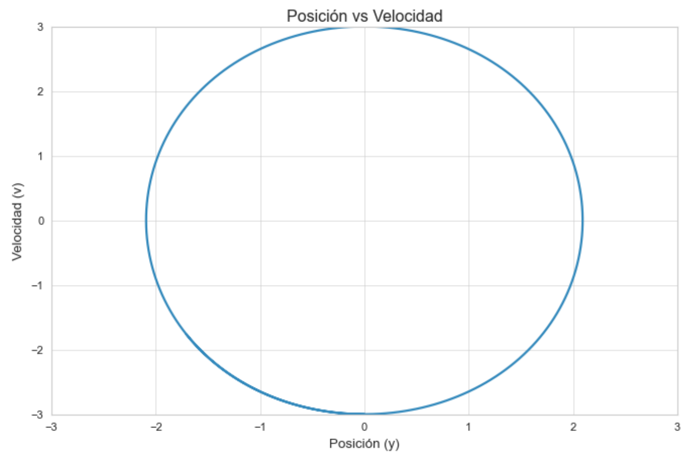

Figura 7: Posición vs Velocidad (b)

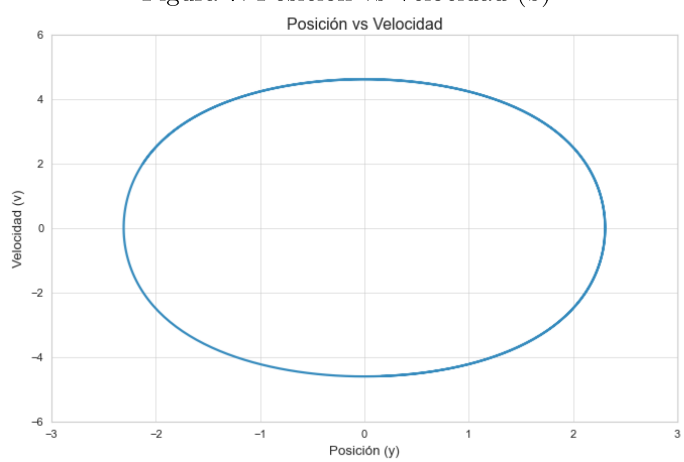

Figura 8: Posición vs Velocidad (c)

Dicho comportamiento se observa mejor en una gráfica 3D donde podemos apreciar con claridad el comportamiento del oscilador armónico simple, como se muestra en la siguiente figura:

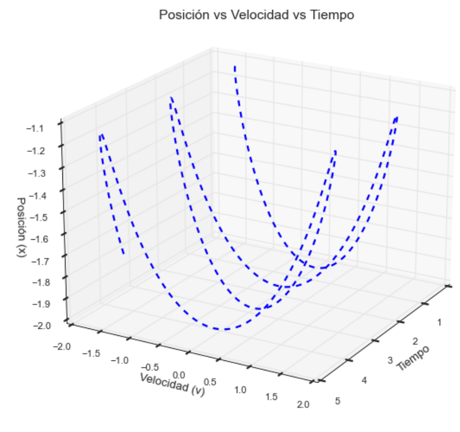

Figura 9: Posición vs Velocidad vs Tiempo (a)

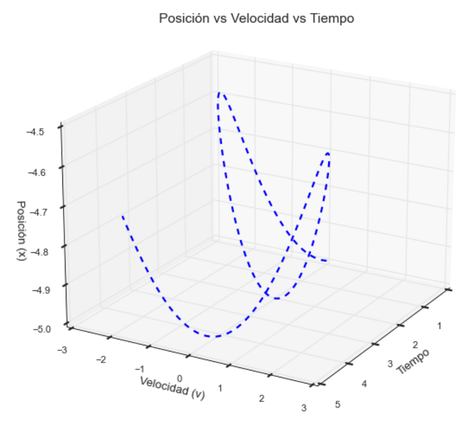

Figura 10: Posición vs Velocidad vs Tiempo (b)

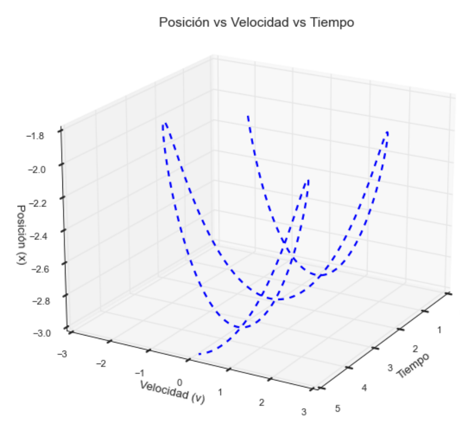

Figura 11: Posición vs Velocidad vs Tiempo (c)

Y ya que el valor de x lo podemos conocer de la restricción de inextensibilidad $(x^2 + y^2 = l^2)$ podemos graficar la variación de la posición en x y la variación de la posición en y simultáneamente como se observaría en las siguientes gráficas:

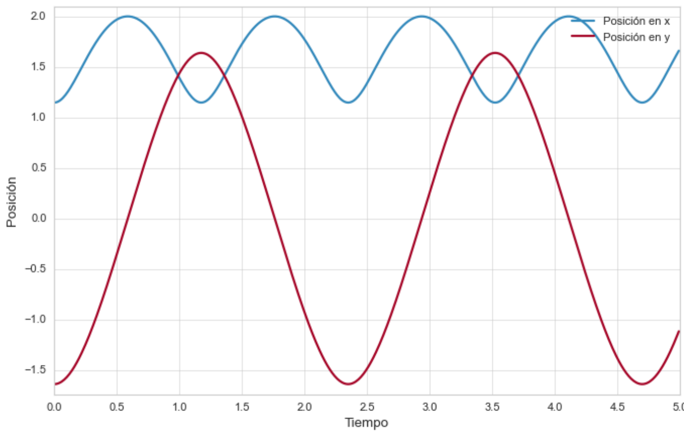

Figura 12: Posición (x,y) (a)

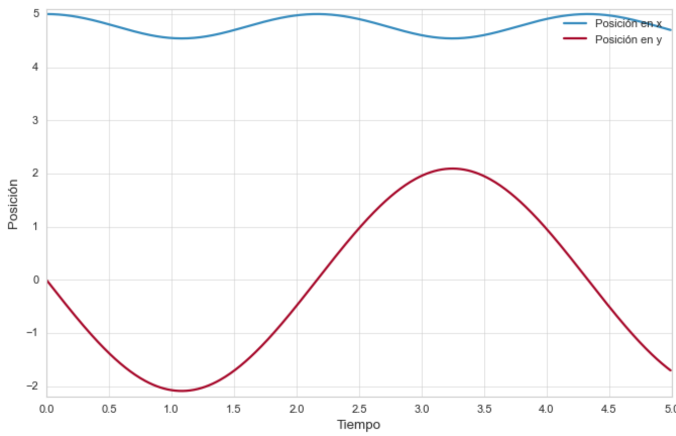

Figura 13: Posición (x,y) (b)

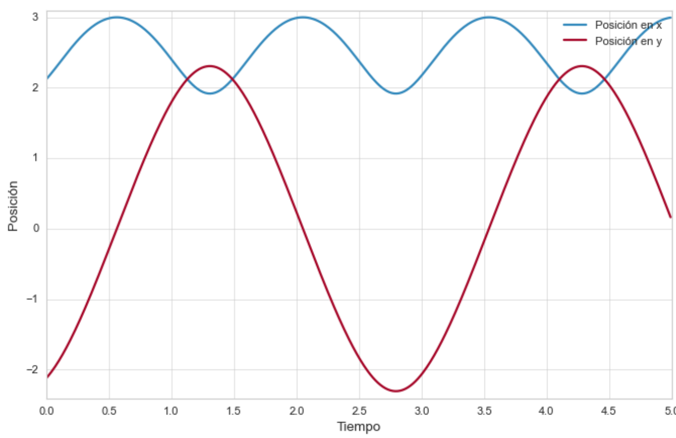

Figura 14: Posición (x,y) (c)

Podemos observar cómo evoluciona el ángulo a lo largo del tiempo bajo las condiciones iniciales establecidas en las siguientes graficas:

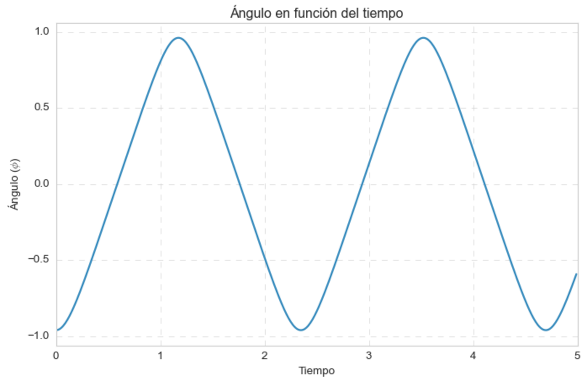

Figura 15: Ángulo ϕ vs tiempo (a)

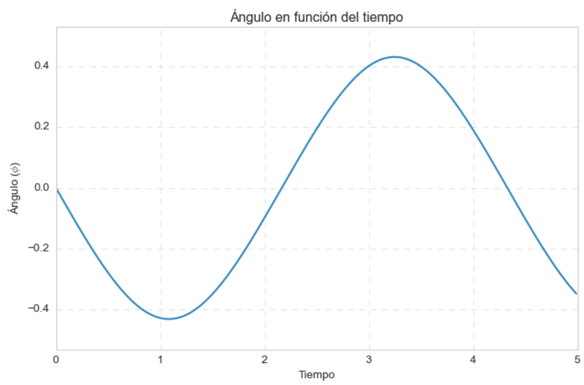

Figura 16: Ángulo ϕ vs tiempo (b)

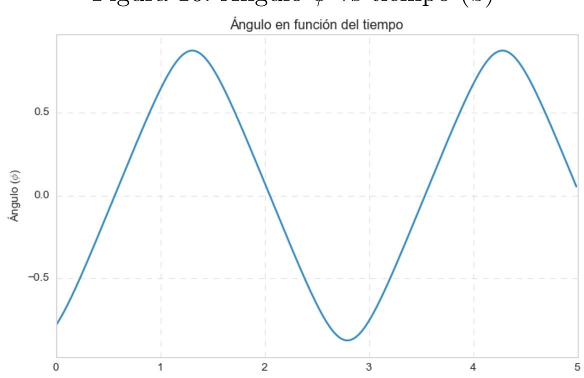

Figura 17: Ángulo ϕ vs tiempo (c)

Problema 3. Grafique e interprete la solución para diferentes condiciones iniciales y grafique las energías cinética (T) y potencial (V). Adicionalmente, grafique las componentes del moméntum ($\mathbf{p}$), la energía total del sistema ($E = T + V$) y el lagrangiano ($L = T - V$).

Solución.

Para la solución de este problema partimos de las ecuaciones del sistema para la energía cinética y potencial:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{17}$$

$$V = mgh = mg(l - x) \tag{18}$$

donde se ubicó el 0 de energía potencial en $x = l$. Mediante dichas ecuaciones, realizamos el cálculo de la energía total y el lagrangiano:

$$E = T + V \tag{19}$$

$$L = T - V \tag{20}$$

y esto con las condiciones iniciales planteadas:

a. Longitud: $l = 2$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = -55$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = 0$ rad/s, Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

b. Longitud: $l = 5$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = 0$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = -3{,}0$ rad/s (hacia la izquierda en y), Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

c. Longitud: $l = 3$ m, Masa: $m = 3$ kg, Ángulo inicial: $\phi_0 = -45$ rad, Velocidad inicial: $\dot{\phi}_0 = 2$ rad/s, Gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

Nos permite obtener los siguientes resultados:

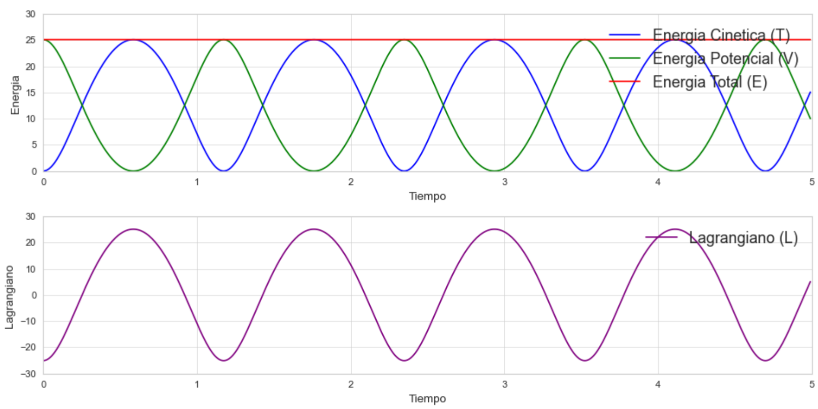

Figura 18: Cálculo de las energías y lagrangiano (a)

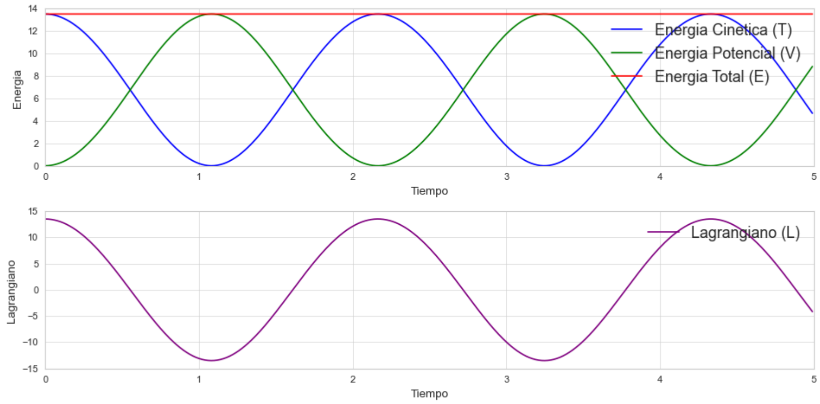

Figura 19: Cálculo de las energías y lagrangiano (b)

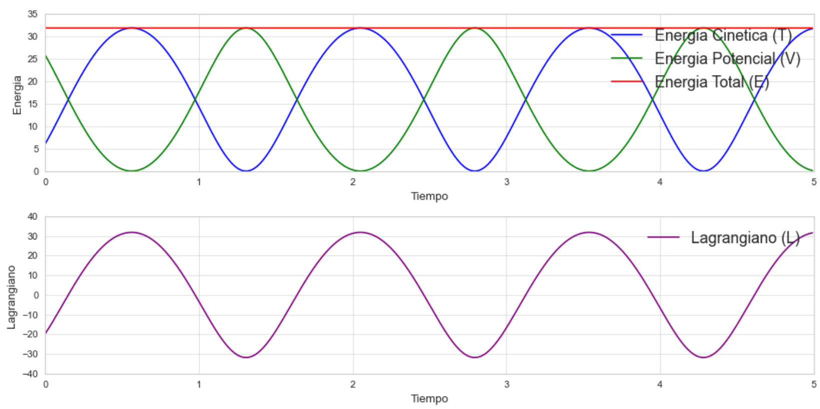

Figura 20: Cálculo de las energías y lagrangiano (c)

Analicemos la energía asociada al movimiento del péndulo, es decir, la energía cinética. A medida que el péndulo se mueve, su energía cinética varía. Cuando el péndulo alcanza su punto más bajo, toda su energía potencial se convierte en energía cinética, mientras que en el punto más alto de su trayectoria, la energía cinética se convierte en potencial.

Esto se puede observar claramente, por ejemplo, en la gráfica 18, donde observamos que en el segundo 4 la energía cinética es 0 mientras que la potencial es máxima.

La energía cinética y potencial entonces realizan una danza de funciones casi opuestas durante el periodo de oscilación. Con ángulos pequeños, esta danza es la superposición de dos funciones seno separadas por una fase de 180 grados.

De la ecuación 19, podemos observar que la energía total E es la suma de la energía potencial y la energía cinética. Al analizar su relación inversa, deducimos que esta suma resulta constante, lo que se traduce en una línea recta en un gráfico. Esto se debe a la conservación de la energía, donde la energía cinética y la energía potencial se intercambian entre sí a medida que el péndulo se mueve.

Los tres gráficos anteriores nos ayudan a visualizar esta relación. En un momento dado, una energía está en su mínimo y la otra en su máximo. Este comportamiento confirma que la energía total siempre se conserva, lo que muestra que se cumple la ley de conservación de la energía.

El lagrangiano de un péndulo simple alcanza valores máximos y mínimos en determinados puntos de su movimiento. El máximo ocurre en el punto más alto de oscilación, donde la energía cinética es máxima debido a la velocidad angular máxima, y la energía potencial es mínima debido a la altura máxima sobre el punto de equilibrio. En comparación, el mínimo lagrangiano ocurre en el punto más bajo de la oscilación, donde la energía cinética es mínima cuando el péndulo llega a un reposo temporal, y la altura máxima sobre el punto de equilibrio hace que la energía potencial sea máxima. Esto se puede visualizar en las gráficas proporcionadas al comparar los valores en los diferentes puntos que se visualizan.

Continuando con el problema, se nos pide calcular las componentes del momento. Este se calcula como el producto de la masa por la velocidad en la coordenada en la cual queremos determinar el momento lineal, por lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$p_y = m \cdot v_y \tag{21}$$

$$p_x = m \cdot v_x \tag{22}$$

Mientras que el momentum total se calcula como la magnitud del vector que resulta de combinar los momentos p_y y p_x. Haciendo uso del el teorema de Pitágoras, donde la magnitud del vector resultante es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector obteniendo la siguiente ecuación:

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \tag{23}$$

Ya con esto podemos calcular el momentum en la componente x así como el momentum en la componente y que bajo las mismas condiciones iniciales planteadas obtenemos:

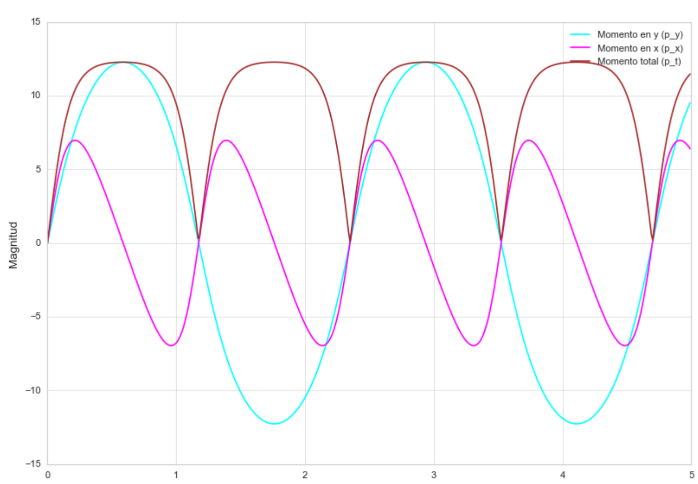

Figura 21: Momentums (a)

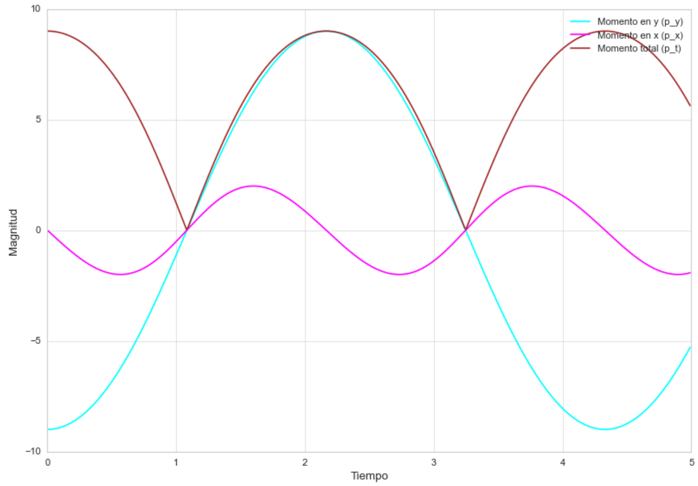

Figura 22: Momentums (b)

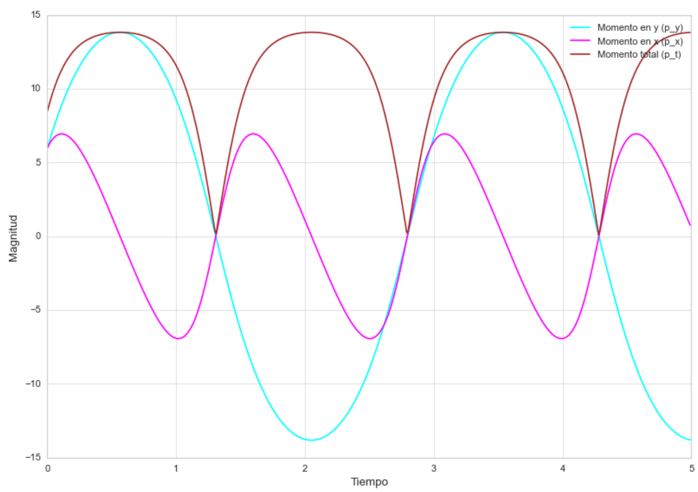

Figura 23: Momentums (c)

Problema 4. Comenzando con la ecuación de movimiento para la componente vertical del desplazamiento, realice el cambio de variable $y = l \operatorname{sen} \phi$ y observe si se obtiene una ecuación de movimiento más simple.

Solución.

Partiendo de que se hará la sustitución $y = l \operatorname{sen}(\phi)$, es conveniente calcular de antemano las derivadas de y. Al computar su primera y segunda derivada se obtiene:

$$\dot{y} = D(l \operatorname{sen} \phi) = l \cos(\phi)\dot{\phi} \tag{24}$$

$$\ddot{y} = D(l \cos(\phi)\dot{\phi}) = -l \operatorname{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + l \cos(\phi)\ddot{\phi} \tag{25}$$

Entonces, reemplazando estas derivadas en la ecuación 16, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\left(l^2 - l^2\sin^2(\phi)\right)^{1/2}\left[-l\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + l\cos(\phi)\ddot{\phi}\right] \\
&+ \frac{l\sin\phi}{\left(l^2 - l^2\sin^2(\phi)\right)^{1/2}}\Bigg[l^2\cos^2(\phi)\dot{\phi}^2 + l\sin\phi(-l\sin(\phi)\dot{\phi}^2 \\
&+ l\cos(\phi)\ddot{\phi}) + \frac{l^2\sin^2(\phi)\cdot l^2\cos^2(\phi)\dot{\phi}^2}{l^2 - l^2\sin^2(\phi)}\Bigg] = -gl\sin(\phi)
\end{aligned} \tag{26}
$$

Simplificando $l^2 - l^2\,\mathrm{sen}^2(\phi) = l^2\cos^2(\phi)$ mediante la identidad pitagórica y expandiendo:

$$
\begin{aligned}
&l\cos(\phi)\left[-l\,\mathrm{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + l\cos(\phi)\ddot{\phi}\right] + \frac{l\,\mathrm{sen}(\phi)}{l\cos(\phi)}\Bigg[l^2\cos^2(\phi)\dot{\phi}^2 \\
&- l^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)\dot{\phi}^2 + l^2\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)\ddot{\phi} + \frac{l^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)\cdot l^2\cos^2(\phi)\dot{\phi}^2}{l^2\cos^2(\phi)}\Bigg] = -gl\,\mathrm{sen}(\phi)
\end{aligned} \tag{27}
$$

Simplificando los términos $l^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)\dot{\phi}^2$ y distrubuyendo los paréntesis restantes se obtiene:

$$
-l^2\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + l^2\cos^2(\phi)\ddot{\phi} + l^2\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + l^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)\ddot{\phi} = -gl\,\mathrm{sen}(\phi) \tag{28}
$$

Así, luego de cancelar términos semejantes y agrupar, se obtiene:

$$
l^2\ddot{\phi}(\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)) = -gl\,\mathrm{sen}(\phi) \tag{29}
$$

Finalmente, usando la identidad pitagórica, y dividiendo a ambos lados por l^2, se llega a la ecuación diferencial que usualmente se usa para describir el movimiento de un péndulo:

$$
\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\phi) = 0 \tag{30}
$$

Ahora bien, con el propósito de abordar formalmente la resolución numérica de la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo 16, es esencial identificar una limitación en la solución presentada en los problemas 2 y 3.

La restricción de inextensibilidad, expresada por la relación $x^2 + y^2 = l^2$, define la ecuación de una circunferencia de radio l. Como es conocido, esta ecuación no representa una función en términos de las variables x e y. Por ejemplo, al ejecutar el código del problema 2 con las condiciones iniciales $\phi(0) = 3$ radianes y $\dot{\phi}(0) = 0$ rad/s, se obtiene $y = l\sin(3\text{ rad}) \approx l\,0{,}1411$. Si bien esta es una coordenada válida en la circunferencia, existen dos posibles valores para x en el eje vertical, dados por $x = \pm\sqrt{l^2 - y^2}$. Por tanto, al deducir la ecuación diferencial para y, se asumió la imagen positiva de x, lo que implica que el ángulo inicial no es de 3 radianes, sino que corresponde al ángulo reflejado sobre el eje y ($\pi - 3$ radianes), para garantizar que x sea positivo.

Por consiguiente, la solución propuesta en los problemas anteriores no abarca los ángulos alcanzables en el semicírculo superior del péndulo. Para resolver esta discrepancia, evitando asumir la imagen negativa o positiva para x en la condición de inextensibilidad, se puede emplear la expresión 30.

Entonces, al resolver la Ecuación Diferencial Ordinaria 30 en términos del ángulo $\phi = \phi(t)$, podemos utilizar las relaciones entre ϕ y las coordenadas cartesianas $x = l\cos(\phi)$ y $y = l\sin(\theta)$ para obtener todas las cantidades requeridas en los numerales anteriores.

Esta solución se presenta en el archivo `problema4.ipynb` ubicado en el repositorio. Para evitar redundancias en la aplicación del método numérico, es importante aclarar que esta solución alternativa utiliza la reducción de orden de la EDO 30 en dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego, estas ecuaciones se resuelven utilizando el método `scipy.odeint`, que internamente implementa el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

Ahora, para ilustrar la principal fortaleza de este método alternativo, consideremos el caso $m = 3$, $l = 2$, $\phi(0) = 3\text{rad}$, y $\dot{\phi}(0) = 0$ y veamos el comportamiento claramente no sinusoidal del sistema. Como anotación, el archivo **ej4.gif** ubicado en el repositorio reproduce una animación del comportamiento dinámico del péndulo.

El ángulo y la posición angular $\phi, \dot{\phi}$ en función del tiempo, se muestran en la gráfica a continuación:

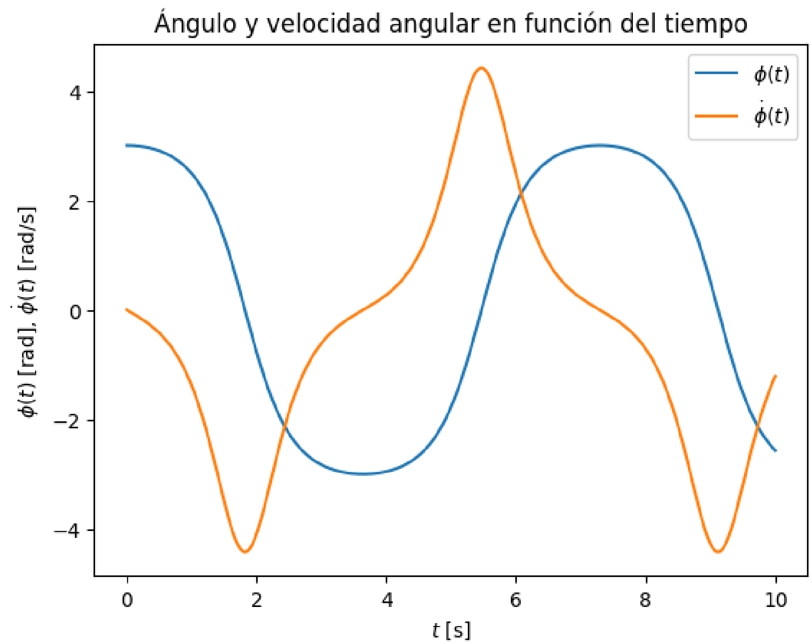

Figura 24: $\phi, \dot{\phi}$ en función de t.

En esta figura se puede apreciar que se forma un comportamiento sinusoidal achatado, porque el péndulo tarda mucho más en caer luego de tener una posición tan vertical como 3 radianes. En la figura 25, se presenta la danza de las componentes cartesianas x y y.

A continuación, se exponen las gráficas para las velocidades lineales, para las energías (T, V, L, E) y para los momentos ($|\mathbf{p}_x|$, $|\mathbf{p}_y|$ y $|\mathbf{p}|$) en las figuras 26, 27 y 28 respectivamente.
Finalmente, la conservación de la energía se sigue cumpliendo, como se observa en la figura 27, solo que la potencial y cinética tienen danzas más complicadas, donde la energía potencial es casi máxima durante gran parte de la trayectoria.

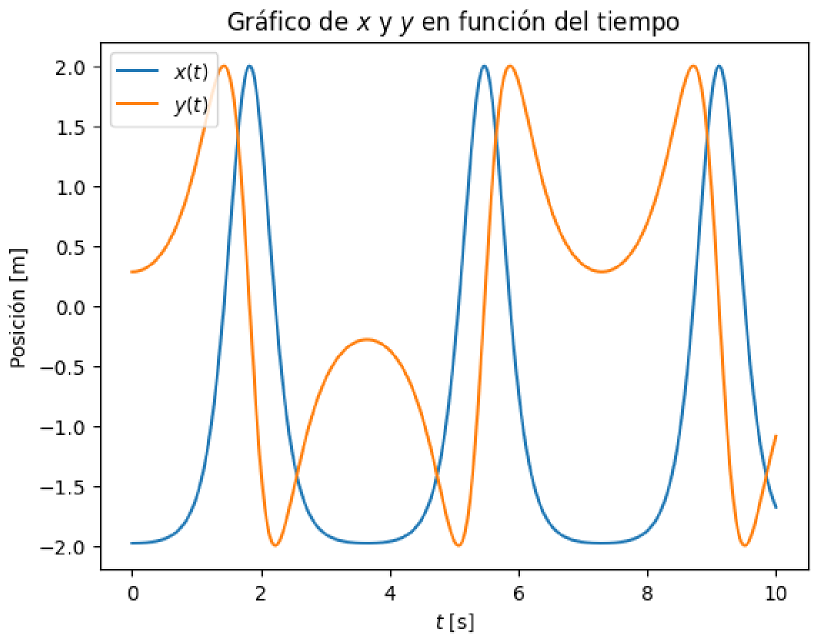

Figura 25: x, y en función de t.

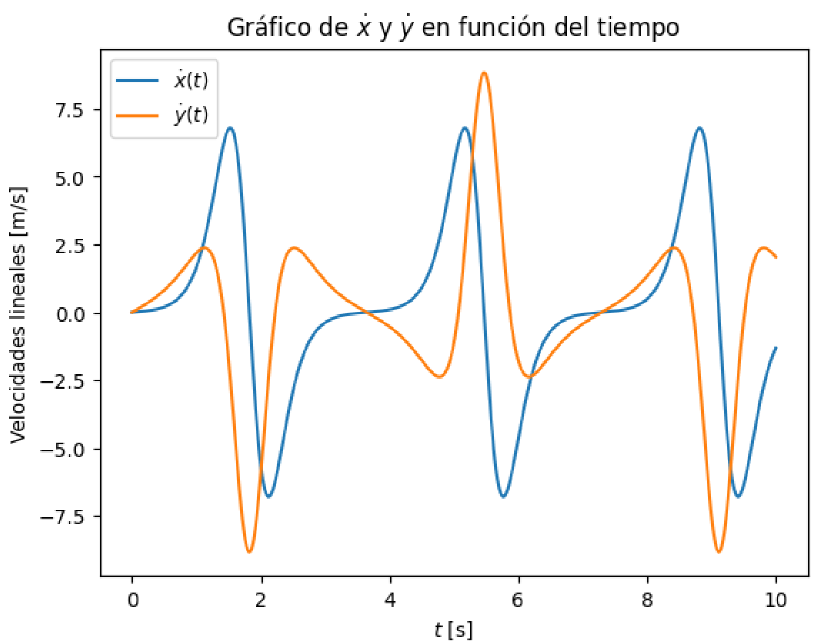

Figura 26: $\dot{x}, \dot{y}$ en función de t.

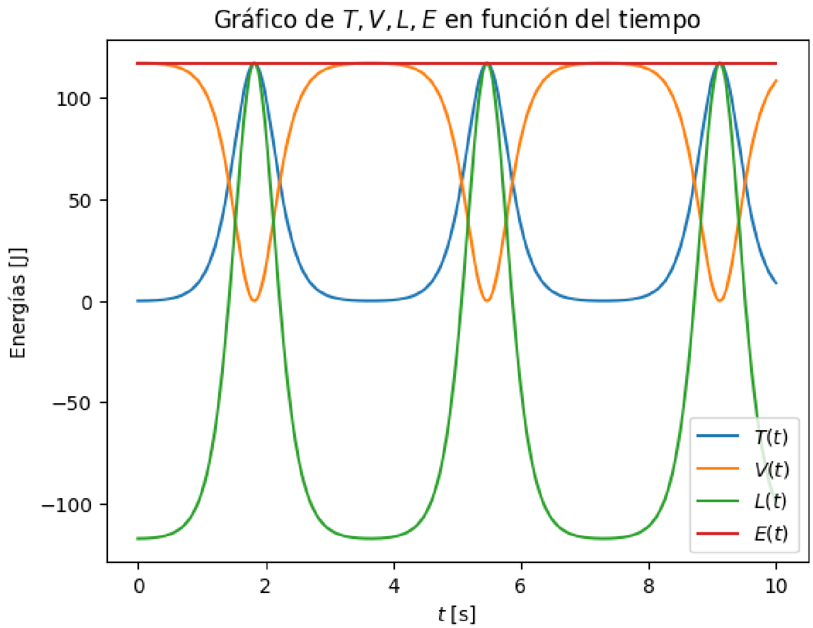

Figura 27: T, V, L, E en función de t.

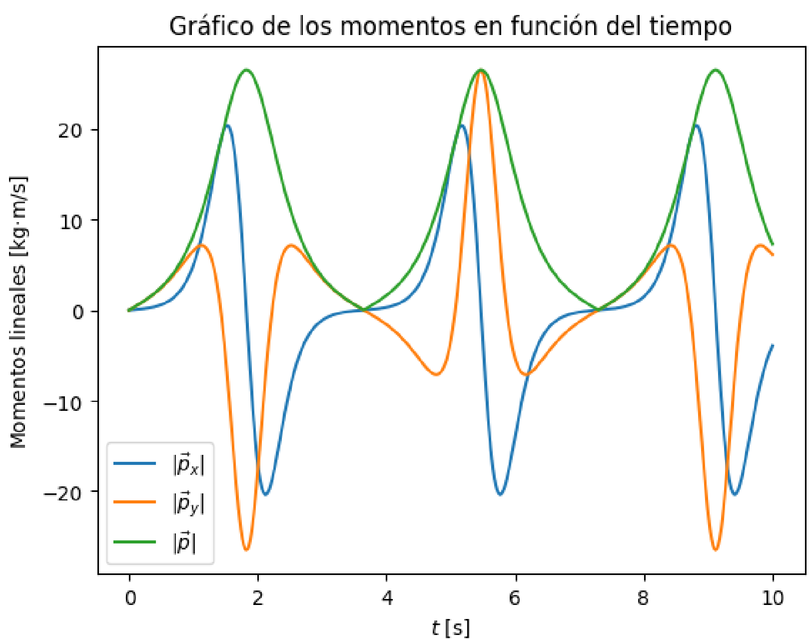

Figura 28: $|\mathbf{p}_x|$, $|\mathbf{p}_y|$ y $|\mathbf{p}|$ en función de t.