
El Principio de Fermat y los Caminos de la Luz

Avance 1

Autores:

Juan Fernando Riascos

Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

jfriascosg@eafit.edu.co

Thomas Martinod

Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

tmartinods@eafit.edu.co

Profesor:

Nicolás Guarín Zapata

Correo electrónico:

nguarinz@eafit.edu.co

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Ingeniería Física
Medellín, Colombia
Abril de 2024

Índice

1. Introducción	3
2. Revisión del Principio de Fermat en Medios Inhomogéneos	3
3. Estrategia General	5
4. Medio con Velocidad Proporcional a la altura: $v \propto y$	5
5. Índice de Refracción Radical: $n = \sqrt{1+y}$	8
6. Trayectoria Exponencial: $n = \sqrt{1+y^2}$	11
7. Principio de Fermat para Medios Anisotrópicos	12

1. Introducción

En este documento se presenta el primer avance del proyecto de la asignatura de Mecánica Clásica titulado *El Principio de Fermat y los Caminos de la Luz*, realizado para la Universidad EAFIT. Los códigos para la entrega de este primer avance se alojan en el [repositorio del equipo](#).

En el anteproyecto previamente entregado se introdujo la idea del proyecto, que consiste en investigar las trayectorias que la luz sigue en materiales inhomogéneos y/o anisotrópicos utilizando principios variacionales y de la mecánica de Lagrange.

En esta entrega inicial, se retoma inicialmente la formulación del principio de Fermat en materiales inhomogéneos, para luego presentar tres casos de aplicación del problema (determinación de trayectorias).

Finalmente, se presenta una versión preliminar del principio de Fermat aplicado a materiales anisotrópicos e inhomogéneos. Sin embargo, su aplicación se pospone para la entrega final, junto con la interpretación *física* de los resultados obtenidos hasta el momento.

2. Revisión del Principio de Fermat en Medios Inhomogéneos

En esta sección se retoma el teorema de Fermat en materiales inhomogéneos sin profundizar. El teorema de Fermat se formula en términos de la longitud del camino óptico $OPL = S$ de la siguiente manera:

Teorema 1 (Principio de Fermat para la longitud de camino óptico). *La luz, al viajar desde el punto A hasta el punto B , sigue la trayectoria que minimiza la longitud del camino óptico S .*

En general, el diferencial de arco (diferencial de camino óptico) se define como $ds = c dt$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y dt es un diferencial de tiempo. Así, la longitud del camino óptico es $OPL = S = cT$, donde T es el tiempo total de viaje.

Sean A y B dos puntos en $\mathbb{R}^{2,3}$ (según si consideramos el problema en un plano o en el espacio) por los cuales la luz viaja en el material estudiado, entonces, es evidente que:

$$cT = S = \int_A^B c dt \quad (1)$$

Si asumimos que el material es isotrópico e inhomogéneo, es decir, la velocidad de los rayos v_r es igual a la velocidad de fase v , el índice de refracción del material n será un campo escalar $n : \mathbb{R}^{2,3} \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego, la velocidad del rayo en el medio se define como $v_r = ds/dt$, donde $v_r = v$, y $n = c/v$, y de esta forma obtenemos:

$$S = \int_A^B \frac{c}{v} ds = \int_A^B n ds \quad (2)$$

Para determinar las trayectorias de la luz en un medio, según el teorema de Fermat, debemos minimizar el funcional S . Utilizando esta última expresión, la condición necesaria de primer orden para la minimización del funcional S se convierte en:

$$\delta S = \delta \int_A^B n ds = \delta \int_A^B n(x, y, z) ds = 0 \quad (3)$$

Empleando nociones de cálculo multivariable, si parametrizamos la trayectoria del rayo con respecto al parámetro $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, suave en su dominio, obtenemos el diferencial:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (4)$$

donde $\dot{y} = dy/dt = y'$ es la notación para las derivadas con respecto al parámetro. El problema de optimización (o cálculo de variaciones) que se debe resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } S = \int_{t_0}^{t_1} n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \end{array} \right. \quad (5)$$

Aunque se ha enunciado de forma general la condición de primer orden para el teorema de Fermat, para el proyecto se resolverán problemas 2D, donde se asume que la curva puede parametrizarse sobre x . En este caso, el problema de minimización a resolver es:

$$(\mathbf{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mín}_y S = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx \end{array} \right. \quad (6)$$

donde $y(x)$ es una función **admisible**, es decir, de clase C^2 , tal que $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$.

Analizando lo mencionado en las dos subsecciones anteriores, es posible crear una analogía entre la mecánica de Lagrange y el problema de los caminos de la luz. En este contexto, el índice de refracción actúa como un potencial mecánico y el problema puede resolverse utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El problema de la mecánica lagrangiana se basa en la minimización de la acción S' , problema que se escribe en una dimensión $x' = x'(t)$ como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín}_x S'[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, x', t) dt \end{array} \right. \quad (7)$$

Entonces, haciendo una correspondencia entre los elementos de la mecánica clásica y el problema propuesto en el proyecto, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & t \\ y & \longleftrightarrow & x' \\ n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} & \longleftrightarrow & L \\ S & \longleftrightarrow & S' \end{array} \quad (8)$$

Por lo tanto, aunque la naturaleza de ambos problemas sea supremamente distinta, la teoría de la mecánica lagrangiana logra modelar el problema de las trayectorias de la luz.

3. Estrategia General

En esta breve sección, se presenta la estrategia general de la resolución de problemas de hallar el camino que sigue la luz en un material inhomogéneo.

1. Definir la forma del índice de refracción $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, como una función de x y y , $n(x, y)$ (no se considerarán otros sistemas coordenados).
2. Escribir el lagrangiano del sistema definido como:

$$L := n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (9)$$

3. Escribir la ecuación de Euler-Lagrange, equivalente a la condición de primer orden (3) del sistema, como se especifica a continuación:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (10)$$

4. Resolver la ecuación de Euler-Lagrange de forma analítica si existe solución general, o empleando métodos numéricos en caso de no conocerse con facilidad la solución analítica, sujeto a las condiciones de frontera $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$.
5. Graficar la trayectoria de la luz como la solución a la ecuación diferencial presentada.

Como anotaciones, la solución para la trayectoria de la luz se considerará en el semiplano $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, o se indicará su dominio si ha de modificarse. En caso de, para la entrega final, resolver problemas en tres dimensiones, se generaliza de forma sencilla el recetario anterior teniendo en cuenta que se obtienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange.

A continuación, se presentan tres ejemplos de aplicación del algoritmo anterior, todos con solución analítica. Al menos un ejemplo de resolución numérica se presentará en el informe final.

4. Medio con Velocidad Proporcional a la altura: $v \propto y$

Antes de comenzar con las aplicaciones, se expone un teorema útil ya presentado y demostrado en el anteproyecto.

Teorema 2. *Sea $f(y)$ una función de y . Entonces la función $y(x)$ que optimiza el funcional:*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(y) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (11)$$

satisface la ecuación diferencial,

$$1 + y'^2 = B f(y)^2 \quad (12)$$

donde $B \in \mathbb{R}$ es una constante de integración.

Ahora, como primer ejemplo de aplicación, se considerará un medio donde la velocidad de propagación de la luz es proporcional a la altura, $v = v_r \propto y$. De esta forma, por la definición del índice de refracción:

$$n(x, y) = \frac{k}{y} \quad (13)$$

Al haber definido entonces $n(x, y)$ el funcional a minimizar estaría dado entonces por:

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{k}{y} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (14)$$

Siguiendo con el desarrollo se plantearía el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$L = f(y) \sqrt{1 + y'^2} = \frac{k \sqrt{1 + y'^2}}{y} \quad (15)$$

La condición necesaria de primer orden en la minimización del funcional $S = S[y]$ es la ecuación de Euler-Lagrange del sistema. Empleando el teorema 2, la ecuación diferencial que ha de describir la trayectoria de la luz, si esta minimiza la longitud de camino óptico es:

$$1 + y'^2 = B f(y)^2 \quad (16)$$

Donde $f(y) = k/y$. Al sustituir $f(y)$ en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden:

$$1 + y'^2 = \frac{k^2 B}{y^2} \quad (17)$$

Resolviendo para y'^2 , se obtiene:

$$y'^2 = \frac{k^2 B}{y^2} - 1 = \frac{k^2 B - y^2}{y^2} \quad (18)$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos lados, se tiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{k^2 B - y^2}{y^2}} \quad (19)$$

Separando variables y tomando integrales a ambos lados, se llega a:

$$\int dx = \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{k^2 B - y^2}} \quad (20)$$

Realizando la sustitución $u = k^2 B - y^2$, se hace con facilidad la integral de la derecha. El resultado de estas operaciones es,

$$x + A = \mp \sqrt{k^2 B - y^2} \quad (21)$$

donde A es otra constante de integración. Por lo tanto, la trayectoria que sigue la luz en un material con índice de refracción $n(x, y) = k/y$ es la de un arco de circunferencia dada por $(x + A)^2 + y^2 = k^2 B$. Es evidente que la circunferencia está centrada en el borde del semiplano H^+ , y que para escribir $y = y(x)$, se tomará la solución positiva a la raíz siguiendo la convención del semiplano positivo.

En particular, esta forma del índice de refracción puede encontrar aplicación en la modelización de lentes y sistemas ópticos con gradientes de índice de refracción, donde la forma y propiedades de las superficies ópticas se diseñan cuidadosamente para lograr efectos específicos, como en lentes con aberraciones corregidas o en guías de onda con características especiales de propagación de luz [3].

En la figura 1 se expone el campo escalar $n(x, y)$ del índice de refracción (recordemos que este es un número adimensional). Como observación, todas las unidades en los ejes x y y de este documento son unidades arbitrarias.

Índice de refracción $n = k/y$, con $k = 3$

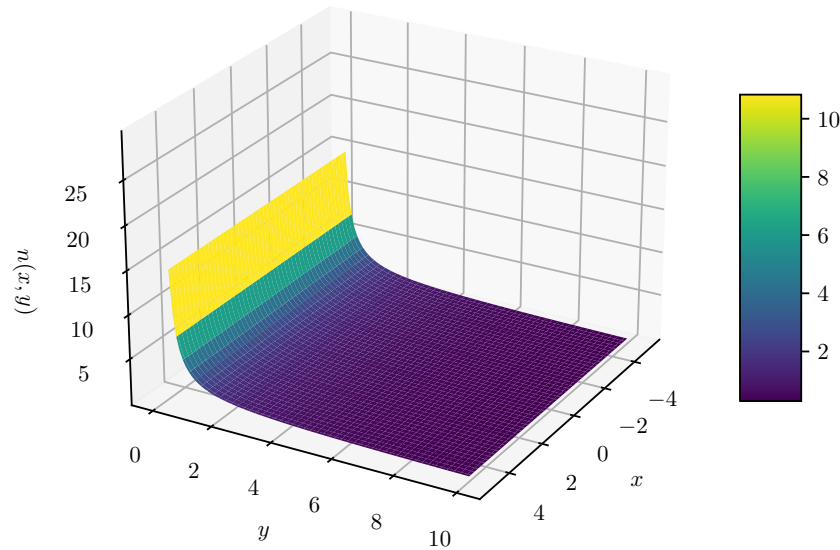


Figura 1: Campo escalar del índice de refracción $n(x, y) = k/y$ con $k = 3$.

Por otro lado, en la figura 2, se exponen las trayectorias calculadas para diferentes condiciones iniciales en el medio previamente analizado con $k = 3$.

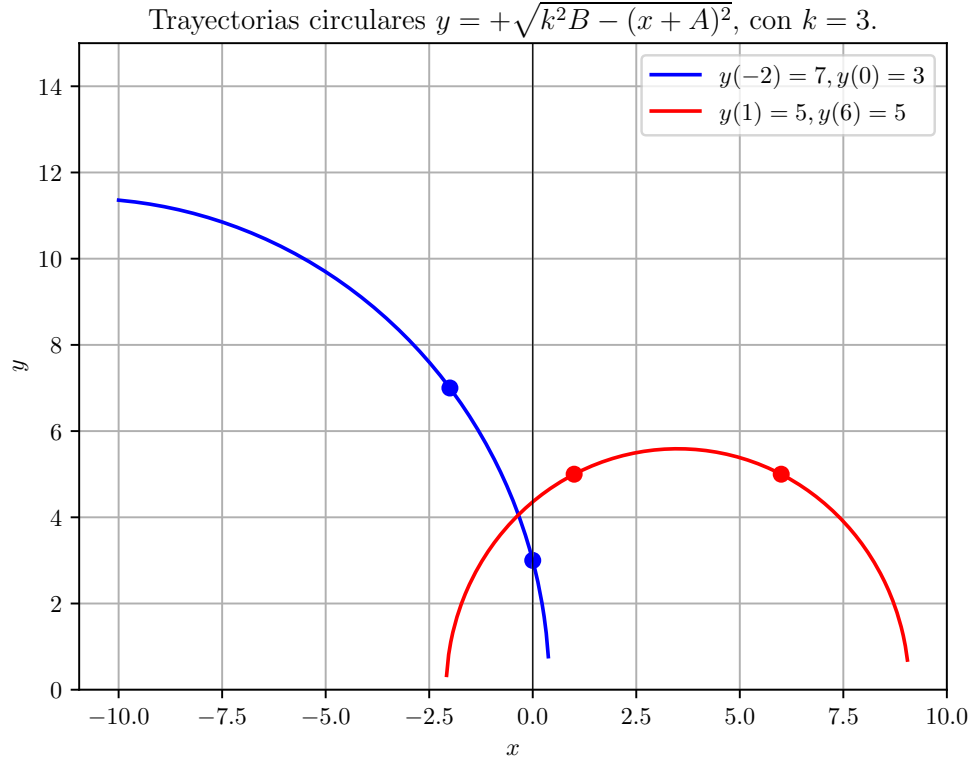


Figura 2: Trayectorias circulares de la luz en el medio $n(x, y) = k/y$, con $k = 3$.

5. Índice de Refracción Radical: $n = \sqrt{1 + y}$

Para la siguiente aplicación del principio de Fermat se considera una de los índices de refracción estrellas en la óptica computacional, el campo escalar $n(x, y) = \sqrt{1 + y}$. Para el seguimiento de la estrategia general, se simplificará en gran medida la explicación del desarrollo considerando el gran nivel de detalle con el que se expuso el primer ejemplo.

Luego de definir el índice de refracción, el Lagrangiano del sistema óptico es:

$$L = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + y} \sqrt{1 + y'^2} = f(y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (22)$$

De modo que la acción a minimizar es:

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (23)$$

La condición necesaria de primer orden para que la trayectoria $y(x)$ sea un *camino de la luz* (que minimice la longitud de camino óptico) se escribe empleando el teorema 2. La ecuación resultante del teorema es:

$$1 + y'^2 = Bf(y)^2 \quad (24)$$

Reemplazando, $f(y) = n(x, y)$, se obtiene,

$$1 + y'^2 = B(1 + y) \quad (25)$$

de modo que al despejar y' , se llega a:

$$y' = \pm \sqrt{B(1 + y) - 1} \quad (26)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden separable. Al escribir $y' = dy/dx$ y separar la EDO se obtiene:

$$\int dx = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{B(1 + y) - 1}} \quad (27)$$

Empleando la sustitución $u = B(1 + y) - 1$, se soluciona la integral de la derecha, quedando:

$$x + A = \pm \frac{2}{B} \sqrt{B(1 + y) - 1} \quad (28)$$

Finalmente, elevando la ecuación al cuadrado, y despejando y , se obtiene la parametrización $y = y(x)$ de la trayectoria que sigue la luz en este medio,

$$y(x) = \frac{B}{4}(x + A)^2 + \left(\frac{1}{B} - 1\right) \quad (29)$$

que corresponde a una parábola que abre hacia abajo con vértice ubicado sobre el eje y :

$$y(x) = a(x + h)^2 + b \quad (30)$$

Luego fue visto que para el material inhomogéneo con índice de refracción radical $n = \sqrt{1 + y}$, la trayectoria entre cualesquiera dos puntos de su dominio viene dada por una parábola con foco en el eje y .

En la figura 3 se expone el campo escalar $n(x, y)$ para el cual se acaba de resolver el problema de optimización de la longitud de camino óptico.

Por otro lado, con las condiciones de frontera adecuadas: (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es posible reconstruir trayectorias gráficas para estos caminos que recorre la luz. Un par de ejemplos de estas condiciones de frontera y las trayectorias resultantes se exponen en la figura 4.

Índice de refracción $n = \sqrt{1+y}$

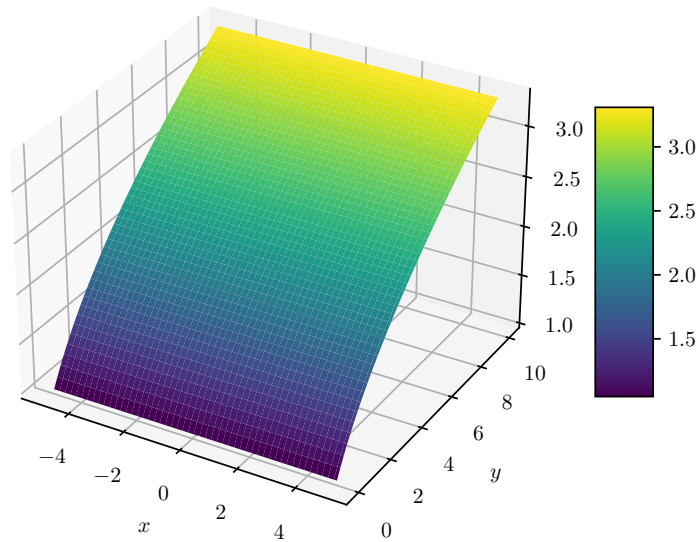


Figura 3: Campo escalar del índice de refracción $n(x, y) = \sqrt{1+y}$.

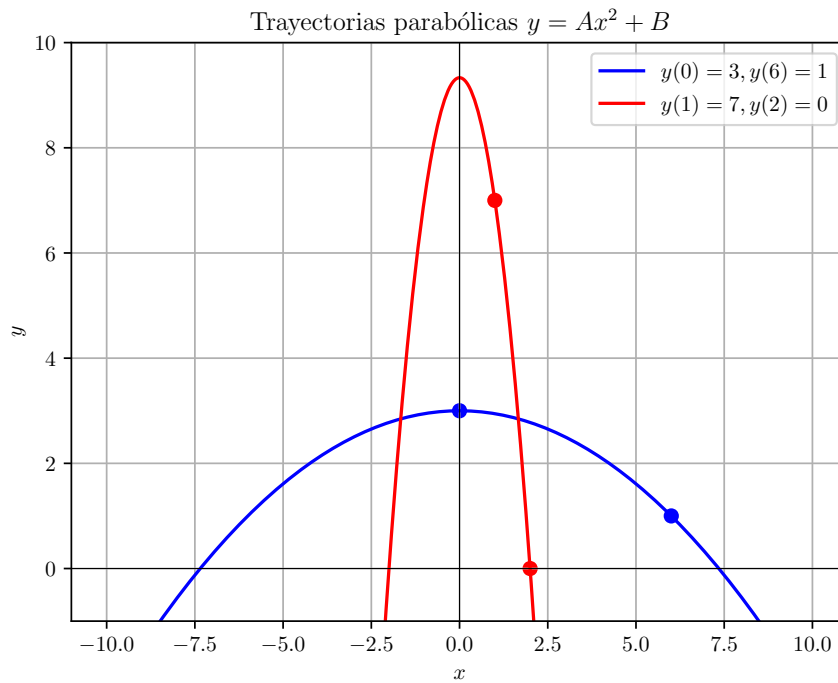


Figura 4: Trayectorias parabólicas de la luz en el medio $n(x, y) = \sqrt{1+y}$.

6. Trayectoria Exponencial: $n = \sqrt{1 + y^2}$

A continuación, se repiten los procedimientos previos para un nuevo material inhomogéneo. Se plantea inicialmente un índice de refracción dado por la expresión:

$$n(x, y) = \sqrt{1 + y^2} \quad (31)$$

Esto permite formular el funcional $OPL = S$ asociado de la siguiente manera:

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (32)$$

Además, se define el Lagrangiano como:

$$L = \sqrt{1 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} = f(y) \sqrt{1 + y'^2} \quad (33)$$

Al aplicar el teorema 2, se deduce la ecuación de Euler-Lagrange para el sistema:

$$1 + y'^2 = B f(y)^2 \quad (34)$$

Sustituyendo $f(y)$, se obtiene:

$$1 + y'^2 = B(1 + y^2) \quad (35)$$

Despejando y'^2 , se realiza el siguiente proceso algebraico:

$$y'^2 = B(1 + y^2) - 1 \quad (36)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{B(1 + y^2) - 1} \quad (37)$$

Resolviendo la ecuación de variables separables, se obtiene:

$$\int dx = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{B(1 + y^2) - 1}} \quad (38)$$

$$x + A = \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{B}y}{\sqrt{B-1}}\right)}{\sqrt{B}} \quad (39)$$

Y al despejar la variable y , se obtiene:

$$y = \sqrt{\frac{B-1}{B}} \sinh\left(\sqrt{B}(x + A)\right) \quad (40)$$

La figura 5 muestra el campo escalar $n(x, y)$ del índice de refracción $n(x, y) = \sqrt{1 + y^2}$, donde se destaca que este valor es adimensional. Es importante recordar que las unidades en los ejes x y y de este documento son arbitrarias.

Este material puede ser relevante en el estudio de fenómenos ópticos que requieren un medio con gradiente de índice de refracción, como en la formación de lentes cilíndricas

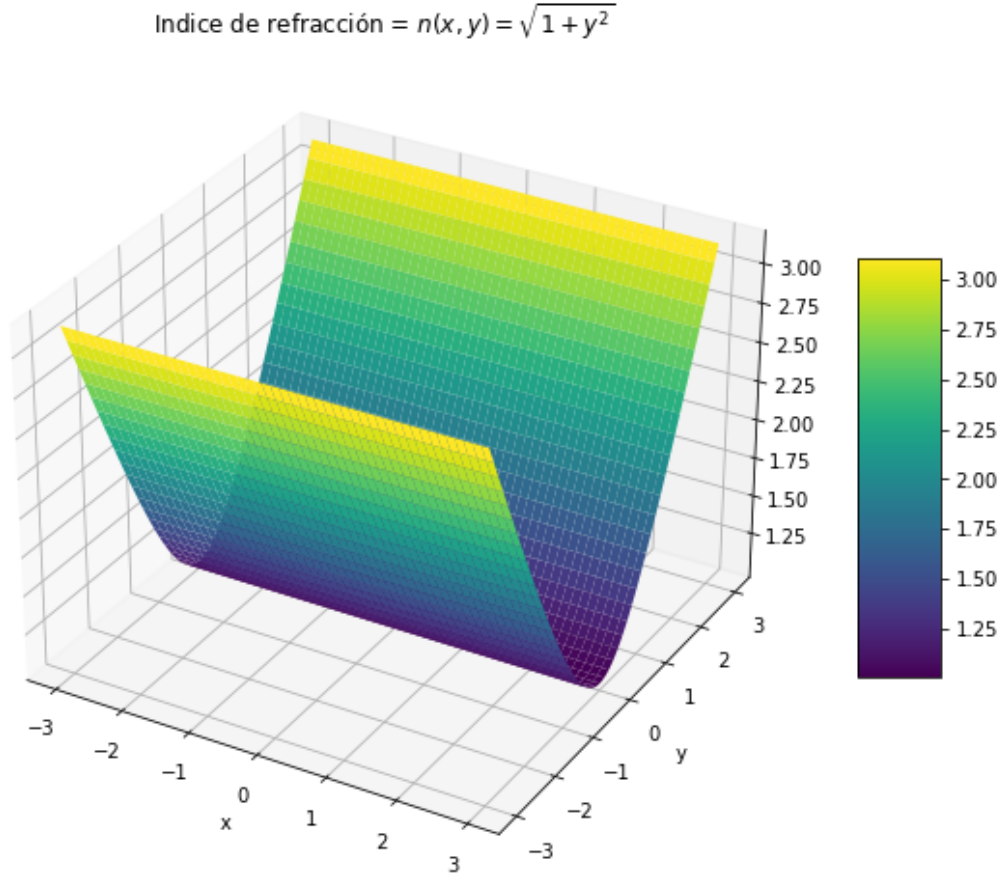


Figura 5: Campo escalar $n(x, y) = \sqrt{1 + y^2}$ del índice de refracción.

o en el diseño de guías de onda, donde la variación del índice de refracción en una dirección específica puede influir en la propagación de la luz a lo largo de esa dirección. Posteriormente, graficando las trayectorias exponenciales obtenemos para diferentes condiciones de frontera, se obtienen las trayectorias presentadas en a figura 6.

Como observación, las trayectorias de medios con este índice de refracción se dicen exponenciales, puesto que la solución a la ecuación de Euler-Lagrange arroja un seno hiperbólico, que puede ser escrito como una combinación lineal de funciones exponenciales crecientes y decrecientes como:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (41)$$

7. Principio de Fermat para Medios Anisotrópicos

En esta sección final se enseña un avance en el modelo matemático del planteamiento del principio de Fermat para materiales anisotrópicos e inhomogéneos, sin ejemplos aún.

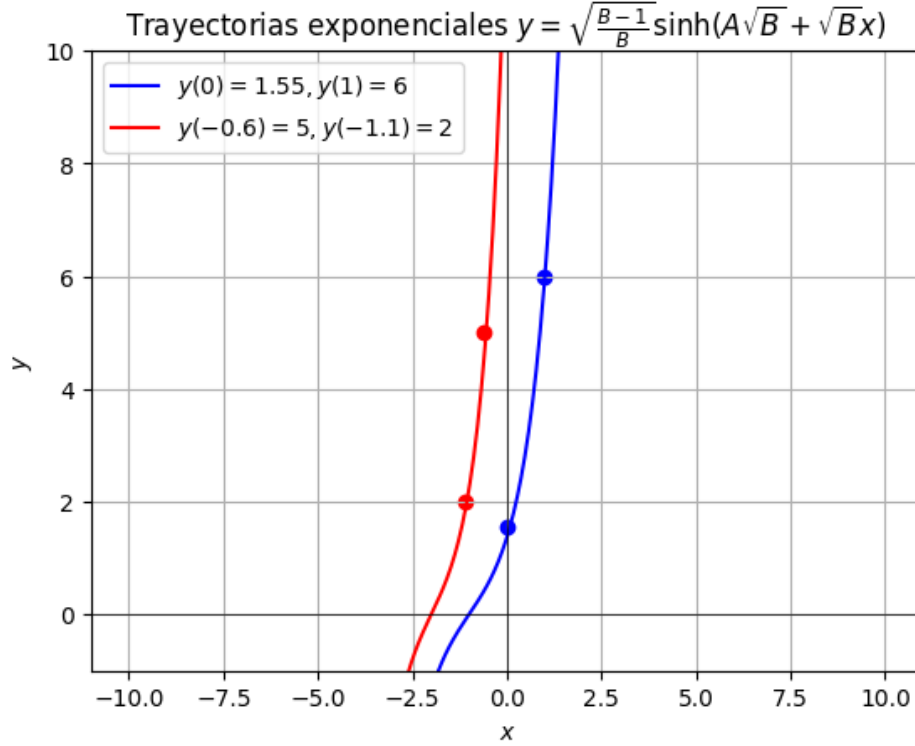


Figura 6: Trayectorias exponenciales de la luz en el medio $n(x, y) = \sqrt{1 + y^2}$.

En un medio anisotrópico, el índice de refracción n se convierte en una función tensorial, lo que significa que puede variar según la dirección. Esto se puede expresar en términos de un tensor de índice de refracción $n_{ij} = n_{ij}(x, y, z)$, donde i y j representan las direcciones espaciales, y la dependencia espacial en (x, y, z) indica que el medio es inhomogeneo.

Si consideramos un sistema de coordenadas cartesianas, el tensor de índice de refracción se puede escribir como:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_{xx} & n_{xy} & n_{xz} \\ n_{yx} & n_{yy} & n_{yz} \\ n_{zx} & n_{zy} & n_{zz} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Cada elemento del tensor n_{ij} representa el índice de refracción en la dirección i cuando la luz se propaga en la dirección j . La diagonal principal de este tensor corresponde a los índices de refracción principales en las direcciones principales del medio anisotrópico.

Para evitar lidiar de forma directa con el tensor, se usará un enfoque geométrico como se propone en [?]. Inicialmente, se debe hacer un hincapié en una distinción en medios anisotrópicos.

En tales medios, se debe distinguir entre la velocidad de propagación de la luz en la dirección del rayo v_r y la velocidad en la dirección normal a la superficie de onda v . Así, se tiene que n es inversamente proporcional a v_r .

Además, n también depende de la dirección, y es una función no solo de x, y, z , sino también de los cosenos:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \quad (43)$$

En particular, en [3] se propone que una forma equivalente de enunciar la anisotropía de un medio es, en vez de considerar un tensor de segundo orden, decir que n es de nuevo un campo escalar pero ahora dependiente también de los cosenos directores (43).

Ahora, se empleará este enfoque para escribir la condición necesaria de primer orden $\delta S = 0$ para los medios anisotrópicos. Si por conveniencia, se denota:

$$\frac{dx}{ds} := \lambda, \quad \frac{dy}{ds} := \mu, \quad \frac{dz}{ds} := \nu, \quad (44)$$

entonces, la **variación total** de $n = n(x, y, z, \lambda, \mu, \nu)$ se convierte en:

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z + \frac{\partial n}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial n}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial n}{\partial \nu} \delta \nu. \quad (45)$$

donde los tres cosenos directores λ, μ, ν están sujetos a la condición de normalización:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad (46)$$

Sin embargo, no es necesario introducir esta condición adicional, ya que la relación anterior resulta simplemente de la igualdad

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \quad (47)$$

que se empleó en el caso isotrópico y homogéneo.

Calculemos la variación de esta integral S bajo la suposición de que n depende no solo de las coordenadas, sino también de los cosenos directores. Con límites fijos, $A, B \in \mathbb{R}^3$ obtenemos:

$$\delta S = \delta \int_A^B n ds = \int_A^B \delta n ds + \int_A^B n \delta ds = 0 \quad (48)$$

Transformaremos el segundo integral de la misma manera que en el caso de los medios isotrópicos, es decir, mediante las igualdades:

$$\delta ds = \lambda \delta dx + \mu \delta dy + \nu \delta dz = \lambda d\delta x + \mu d\delta y + \nu d\delta z \quad (49)$$

La tercera integral se convierte en:

$$\int_A^B n \delta ds = \int_A^B n(\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z) \quad (50)$$

y, integrando por partes, se obtiene:

$$\int_A^B n \delta ds = n(\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z) \Big|_A^B - \int_A^B [d(n\lambda)\delta x + d(n\mu)\delta y + d(n\nu)\delta z] \quad (51)$$

Ahora, si por otro lado, si en 48 consideramos la segunda integral con la regla de la cadena:

$$\int_A^B \delta n ds = \int_A^B \frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z + \frac{\partial n}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial n}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial n}{\partial \nu} \delta \nu ds \quad (52)$$

Transformemos $\delta \lambda, \delta \mu, \delta \nu$:

$$\begin{aligned} \delta \lambda &= \delta \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{\delta dx}{ds} - \frac{dx \delta ds}{ds^2} = \frac{d\delta x}{ds} - \frac{dx}{ds} \frac{\delta ds}{ds} = \frac{d\delta x}{ds} - \lambda \frac{\delta ds}{ds} \\ \delta \mu &= \delta \left(\frac{dy}{ds} \right) = \frac{\delta dy}{ds} - \frac{dy \delta ds}{ds^2} = \frac{d\delta y}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{\delta ds}{ds} = \frac{d\delta y}{ds} - \lambda \frac{\delta ds}{ds} \\ \delta \nu &= \delta \left(\frac{dz}{ds} \right) = \frac{\delta dz}{ds} - \frac{dz \delta ds}{ds^2} = \frac{d\delta z}{ds} - \frac{dz}{ds} \frac{\delta ds}{ds} = \frac{d\delta z}{ds} - \lambda \frac{\delta ds}{ds} \end{aligned} \quad (53)$$

y sustituimos δds por su expresión mostrada en la ecuación 49, lo que resulta en

$$\begin{aligned} \delta \lambda &= \frac{d\delta x}{ds} - \lambda \left(\lambda \frac{d\delta x}{ds} + \mu \frac{d\delta y}{ds} + \nu \frac{d\delta z}{ds} \right) \\ \delta \mu &= \frac{d\delta y}{ds} - \lambda \left(\lambda \frac{d\delta x}{ds} + \mu \frac{d\delta y}{ds} + \nu \frac{d\delta z}{ds} \right) \\ \delta \nu &= \frac{d\delta z}{ds} - \lambda \left(\lambda \frac{d\delta x}{ds} + \mu \frac{d\delta y}{ds} + \nu \frac{d\delta z}{ds} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_A^B \delta n ds &= \int_A^B \left[\frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z \right] ds \\ &+ \int_A^B \frac{\partial n}{\partial \lambda} [d\delta x - \lambda(\lambda d\delta x + \mu d\delta y + \nu d\delta z)] ds \\ &+ \int_A^B \frac{\partial n}{\partial \mu} [d\delta y - \lambda(\lambda d\delta x + \mu d\delta y + \nu d\delta z)] ds \\ &+ \int_A^B \frac{\partial n}{\partial \nu} [d\delta z - \lambda(\lambda d\delta x + \mu d\delta y + \nu d\delta z)] ds. \end{aligned} \quad (55)$$

Aplicando el proceso de integración por partes a las últimas tres integrales del lado derecho, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
\int_A^s \delta n \, ds &= \left[\frac{\partial n}{\partial \lambda} [\delta x - \lambda \psi] + \frac{\partial n}{\partial \mu} [\delta y - \mu \psi] + \frac{\partial n}{\partial \nu} [\delta z - \nu \psi] \right]_A^B \\
&+ \int_A^B \left[\frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z \right] ds \\
&- \int_A^B \delta x \, d \left[(1 - \lambda^2) \frac{\partial n}{\partial \lambda} - \lambda \mu \frac{\partial n}{\partial \mu} - \lambda \nu \frac{\partial n}{\partial \nu} \right] \\
&- \int_A^B \delta y \, d \left[-\mu \frac{\partial n}{\partial \lambda} + (1 - \mu^2) \frac{\partial n}{\partial \mu} - \mu \nu \frac{\partial n}{\partial \nu} \right] \\
&- \int_A^B \delta z \, d \left[-\nu \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} - \nu \mu \frac{\partial n}{\partial \mu} + (1 - \nu^2) \frac{\partial n}{\partial \nu} \right].
\end{aligned} \tag{56}$$

donde, para conveniencia, hemos denotado

$$\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z =: \psi. \tag{57}$$

Sumando las ecuaciones 52 y 56 término a término, reorganizando y, para conveniencia, y denominando:

$$\lambda \frac{\partial N}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial N}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial N}{\partial \nu} =: H, \tag{58}$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}
\delta \int_A^s n \, ds &= \left\{ \left[\lambda(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right] \delta x + \left[\mu(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \mu} \right] \delta y + \left[\nu(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \nu} \right] \delta z \right\}_A^B \\
&+ \int_A^B \left[\frac{\partial n}{\partial x} ds - d(n\lambda) - d \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} - H\lambda \right) \right] \delta x \\
&+ \int_A^B \left[\frac{\partial n}{\partial y} ds - d(n\mu) - d \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} - H\mu \right) \right] \delta y \\
&+ \int_A^B \left[\frac{\partial n}{\partial z} ds - d(n\nu) - d \left(\frac{\partial n}{\partial \nu} - H\nu \right) \right] \delta z.
\end{aligned} \tag{59}$$

Los términos integrados se anulan, ya que, en los puntos fijos A y B , las variaciones $\delta x, \delta y, \delta z$ deben desaparecer. En cuanto a las integrales, sabemos que deben anularse al establecer en cero los coeficientes de $\delta x, \delta y, \delta z$. De esta manera, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left[\lambda(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right] - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{ds} \left[\mu(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \mu} \right] - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{ds} \left[\nu(n - H) + \frac{\partial n}{\partial \nu} \right] - \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{60}$$

que expresan el principio de Fermat para un medio anisotrópico e inhomogéneo.

Referencias

- [1] Emilio Cerdá Tena. *Optimización dinámica*. Garceta, Grupo Editorial, Madrid, España, 1 edition, 2011.
- [2] Richard Fitzpatrick. History of geometric optics.
- [3] Eugene Hecht and Alfred Zajac. *Óptica*. 4 edition, 2003.
- [4] Michael Sean Mahoney. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. Princeton University Press, 2nd edition, 1994.
- [5] Pavlos Mihas. Use of history in developing ideas of refraction, lenses and rainbow. *Demokritus University, Thrace, Greece*, 2005.
- [6] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 10 2008.
- [7] Alonso Sepúlveda. *Física Matemática*. Editorial Universidad de Antioquia, 2nd edition, 1 2019.