

# Lagrange y Teoría de la Transformación

## Tarea 2. Mecánica Clásica

Juan Fernando Riascos<sup>1</sup> Thomas Martinod Saldarriaga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, [jfriascosg@eafit.edu.co](mailto:jfriascosg@eafit.edu.co)

<sup>2</sup>Ingeniería Física, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia, [tmartinods@eafit.edu.co](mailto:tmartinods@eafit.edu.co)

### Resumen

El siguiente escrito expone la solución a la segunda tarea del curso Mecánica Clásica impartido en la Universidad EAFIT. En esta se enseña una aplicación gráfica del método de Ritz y la deducción de algunas cantidades mecánicas en coordenadas esféricas y parabólicas 2D.

**Nota:** Todos los códigos de la tarea se encuentran alojados en los respectivos repositorios de [Thomas](#) y [Juan Fernando](#). **Toda** la componente computacional del tercer punto se expone en el Jupyter notebook titulado `punto-3.ipynb`.

## 1. Método de Ritz viga de Euler-Bernouli

La idea de este método consiste en buscar el extremo de un funcional:

$$f(u) = \int I(u, u_x, \dots, x) d\Omega \quad (1)$$

considerando sólo las combinaciones lineales posibles de funciones admisibles de la forma

$$u^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (2)$$

donde  $\alpha_i$  son las constantes y el sistema  $\phi_i(x)$ , denominado sistema de funciones coordenadas, es tal que las funciones  $\phi_i(x)$  son linealmente independientes y forman un sistema en el espacio analizando un sistema de funciones.

Se tiene la condición de que  $u_\alpha(x)$  son funciones admisibles que imponen sobre las funciones coordenadas  $\phi_i(x)$  algunas condiciones adicionales tales como condiciones de suavidad o de contorno. En tales combinaciones lineales, el funcional  $f(u_\alpha(x))$  se convierte en una función de argumentos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$F(\alpha_i) = \int I(u^\alpha, u_x^\alpha, \dots, x) d\Omega \quad (3)$$

Para encontrar los valores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  para los cuales la función  $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  alcanza un valor extremo, se resuelve el sistema de ecuaciones, en general, lineales respecto a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$\frac{\partial F(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

El problema a desarrollar se inicia desde la formulación variacional de la deflexión de una viga de Euler-Bernoulli ( $w(x)$ ) minimizada bajo el siguiente funcional de energía potencial

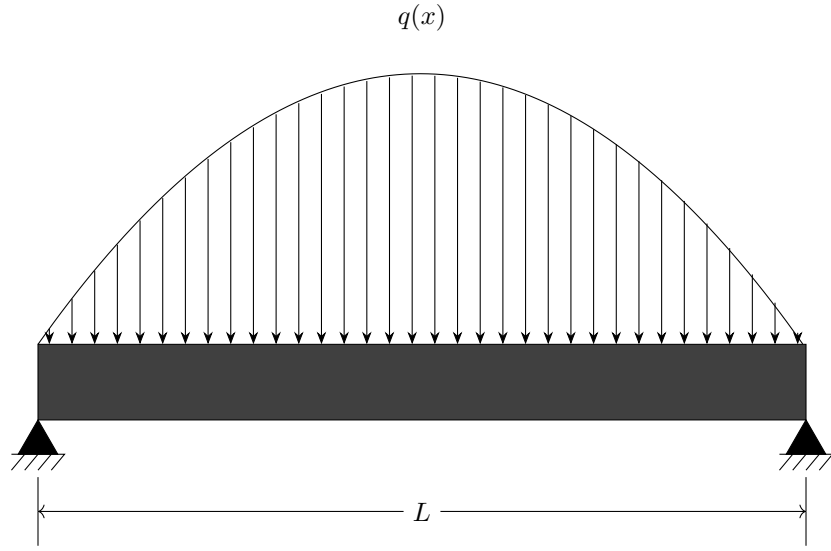
$$\Pi[w] = \int_a^b \left[ \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - q(x)w(x) \right] dx \quad (5)$$

con  $EI$  la rigidez a flexión y  $q(x)$  la fuerza por unidad de longitud.

Para el cual es necesario calcular la solución aproximada para 1,2 y 3 términos en la base y compararlo con la solución general teniendo en cuenta que:

$$q(x) = \pi^4 EI \sin(\pi x) \quad (6)$$

Para el planteamiento de aproximación de Ritz que satisface las condiciones esenciales  $w(0) = w(L) = 0$ :



Dado este planteamiento del problema podemos notar que el funcional que minimiza la energía potencial  $\Pi$  podría reescribirse de la siguiente manera:

$$\Pi[w] = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - q(x)w(x) \right] dx \quad (7)$$

Para facilitar el manejo algebraico en el análisis estructural, se propone un proceso de normalización del funcional  $\Pi[w]$  mediante la eliminación del término de rigidez a la flexión  $EI$ , bajo la premisa de que  $EI \neq 0$ . Este proceso es matemáticamente legítimo, dado que  $EI$ , siendo un factor escalar, puede ser factorizado y eliminado de la expresión integral sin alterar la estructura fundamental de la ecuación. La operación conduce a la definición de un nuevo funcional normalizado,  $\tilde{\Pi}[w]$ , expresado como:

$$\tilde{\Pi}[w] = \frac{1}{EI} \cdot \Pi[w] = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \pi^4 \sin(\pi x)w(x) \right] dx \quad (8)$$

Este enfoque normaliza el funcional, facilitando la comparación entre los patrones de deformación de diversas vigas más allá de sus especificaciones de rigidez. La normalización modifica únicamente la escala de respuesta, centrando el análisis en las características de deformación en vez de sus valores absolutos. Este procedimiento es completamente válido desde una perspectiva matemática y mantiene la integridad de cualquier análisis derivado del funcional normalizado, permitiendo interpretaciones amplias sobre el comportamiento estructural sin comprometer la exactitud de las conclusiones.

Por lo que siguiendo el planteamiento del método de Ritz hacemos uso de la ecuación 2 y planteamos los polinomios de 1, 2 y 3 términos respectivamente:

$$\omega^{\alpha_1}(x) = \alpha_1 x(x - L) \quad (9)$$

$$\omega^{\alpha}(x) = \alpha_1 x(x - L) + \alpha_2 x^2(x - L) \quad (10)$$

$$\omega^{\alpha}(x) = \alpha_1 x(x - L) + \alpha_2 x^2(x - L) + \alpha_3 x^3(x - L) \quad (11)$$

Consideramos el término  $(x - L)$ , el cual satisface las condiciones de contorno  $\omega(0) = \omega(1) = 0$ . Además, este término asegura la continuidad y completitud de un polinomio linealmente independiente. Por ejemplo, en  $x = 0$  el desplazamiento vertical es nulo, al igual que en  $x = L$ .

Continuando con la implementación del método de Ritz, planteamos la ecuación 4 utilizando los polinomios de 1, 2 y 3 términos previamente definidos. Para ilustrar el procedimiento completo, nos enfocaremos en el polinomio de 2 términos. Es importante destacar que el proceso es análogo para los polinomios de 1 y 3 términos, por lo que con el propósito de remplazar el polinomio en la ecuación del funcional por lo que calculando la segunda derivada de el polinomio obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \omega^{\alpha}}{\partial x^2} = 2\alpha_1 + (6x - 2L)\alpha_2 \quad (12)$$

Y remplazando en 7:

$$\Pi(\alpha_i) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (2\alpha_1 + (6x - 2L)\alpha_2)^2 - q(x)(\alpha_1(x^2 - Lx) + \alpha_2(x^3 - Lx^2)) \right] dx \quad (13)$$

Y así continuando con el desarrollo de la ecuación 4 al desarrollar la derivada respecto a  $\alpha_1$  se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi(\alpha_i)}{\partial \alpha_1} = \int_0^L [(2\alpha_1 + (6x - 2L)\alpha_2)(2) - (\pi^4 \sin(\pi x))(x^2 - Lx)] dx \quad (14)$$

$$= 2L^2 c_2 + 4Lc_1 - \pi^2 L \sin(\pi L) - 2\pi \cos(\pi L) + 2\pi = 0 \quad (15)$$

Y al desarrollar la derivada respecto a  $\alpha_2$  se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi(\alpha_i)}{\partial \alpha_2} = \int_0^L [(2\alpha_1 + (6x - 2L)\alpha_2)(6x - 2L) - (\pi^4 \sin(\pi x))(x^3 - Lx^2)] dx \quad (16)$$

$$= 4L^3 c_2 + 2L^2 c_1 + (6 - \pi^2)L \sin(\pi L) - 4\pi L \cos(\pi L) - 2\pi L = 0 \quad (17)$$

Con esto podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Pi(\alpha_i)}{\partial \alpha_1} = 4Lc_1 + 2L^2 c_2 - \pi^2 L \sin(\pi L) - 2\pi \cos(\pi L) + 2\pi = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Pi(\alpha_i)}{\partial \alpha_2} = 2L^2 c_1 + 4L^3 c_2 + (6 - \pi^2)L \sin(\pi L) - 4\pi L \cos(\pi L) - 2\pi L = 0 \quad (19)$$

Dado un sistema de ecuaciones, se plantea un enfoque matricial al considerar la premisa de que la ecuación total debe ser igual a cero. Esto implica que la suma de los términos dentro del paréntesis debe ser igual a cero. Por lo tanto, al analizar los términos internos, se formula el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 4L & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-\pi^2 L \sin(\pi L) - 2\pi \cos(\pi L) + 2\pi) \\ -((6 - \pi^2)L \sin(\pi L) - 4\pi L \cos(\pi L) - 2\pi L) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ahora, para despejar finalmente las constantes, trasladamos la matriz de rigidez de la viga al otro lado de la ecuación, utilizando la teoría del álgebra lineal en su forma inversa, lo que nos permite finalmente despejar  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3L} & -\frac{1}{6L^2} \\ -\frac{1}{6L^2} & \frac{1}{3L^3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -(-\pi^2 L \sin(\pi L) - 2\pi \cos(\pi L) + 2\pi) \\ -((6 - \pi^2)L \sin(\pi L) - 4\pi L \cos(\pi L) - 2\pi L) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi^2 L \sin(\pi L) - \pi^2 \sin(\pi L) - 6\pi + 6 \sin(\pi L)}{6L} \\ \frac{-\pi^2 L \sin(\pi L) + 2\pi^2 \sin(\pi L) + 6\pi + 6\pi \cos(\pi L) - 12 \sin(\pi L)}{6L^2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi^2 L \sin(\pi L) - \pi^2 \sin(\pi L) - 6\pi + 6 \sin(\pi L)}{6L} \quad (23)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\pi^2 L \sin(\pi L) + 2\pi^2 \sin(\pi L) + 6\pi + 6\pi \cos(\pi L) - 12 \sin(\pi L)}{6L^2} \quad (24)$$

Ahora bien para la viga de Euler-Bernoulli, al definir la longitud característica  $L$  como la unidad  $L = 1$ , podemos reescalar nuestro análisis dimensional original aplicable a cualquier longitud  $L$ . Bajo esta normalización, los coeficientes de las series de soluciones, o parámetros relevantes del modelo, se simplifican de acuerdo con la unidad de longitud establecida y obtendríamos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Por lo que remplazando en la ecuación 10 obtenemos que el polinomio para la solución aproximada seria:

$$\omega^\alpha(x) = -\pi x(x - 1) \quad (26)$$

Y de esta forma obtendríamos nuestra combinación lineal posible de funciones admisibles que se planteo originalmente en la ecuación 2

Como dedujimos en trabajos anteriores la solución general del problema con:

$$q(x) = \pi^4 EI \sin(\pi x)$$

y condiciones de frontera  $w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0$  esta dada de la forma:

$$\omega(x) = \sin(\pi x) \quad (27)$$

y comparando la solución con el método de Ritz para 1 y 2 términos debido a que se llega a la misma expresión como se demostró previamente obtenemos:

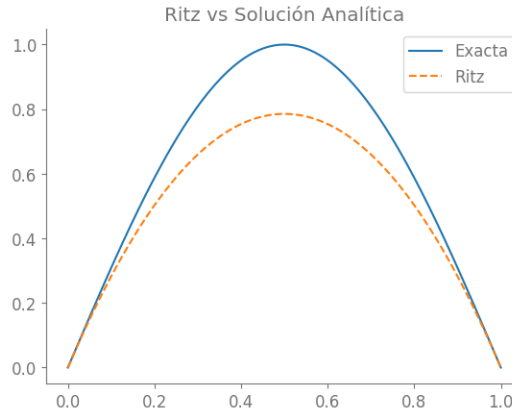


Figura 1: Solución general vs Método de Ritz 2 términos

Observamos que, al incorporar únicamente dos términos en la aproximación proporcionada por el método de Ritz, la discrepancia entre la solución aproximada y la exacta, cuantificada mediante la norma relativa, se traduce en un error porcentual del 19,19 %.

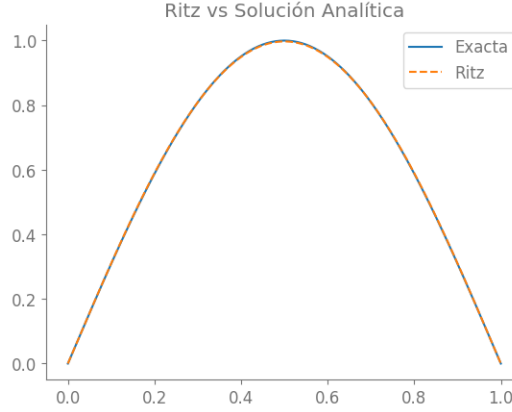


Figura 2: Solución general vs Método de Ritz 2 términos

La implementación de un tercer término en la aproximación del método de Ritz resulta en una reducción significativa del error. Al evaluar la solución obtenida frente a la solución exacta mediante la norma relativa, se constata que el error porcentual decrece hasta un 0,20 %, evidenciando una mejora notable en la precisión de la aproximación.

## 2. Coordenadas Esféricas

En esta sección se pretende calcular la expresión para la energía cinética y las aceleraciones en el sistema de coordenadas esféricas. Comencemos por introducir un poco de teoría de la transformación.

### 2.1. Teoría de la Transformación

En esta sección se mencionarán algunas definiciones básicas sobre teoría de la transformación que serán de utilidad en esta sección y la siguiente. Para ahondar en esta temática, se recomienda el primer capítulo de [1]. Los sistemas de coordenadas esféricas 3D (esta sección) y de coordenadas parabólicas 2D (siguiente sección) son sistemas de coordenadas **curvilíneas ortogonales**.

De forma general, los factores de escala son aquellos que normalizan la base introducida por la intersección de tres superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Estos se calculan como:

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad (28)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición (en general en coordenadas cartesianas), y  $(u_1, u_2, u_3)$  una tripla de coordenadas escrita a partir de la intersección de las tres superficies.

En general, la transformación entre coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  y las coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$  de otro sistema ortonormal viene dada por:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbb{A} \hat{\mathbf{e}} \quad (29)$$

donde  $\hat{e} = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , es la base cartesiana tridimensional,  $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  es la nueva base, y  $\mathbb{A}$  es llamada la matriz de transformación.

Para concluir esta subsección, los vectores se definen como formas lineales invariantes ante transformaciones de coordenadas. En particular, un vector  $\mathbf{A}$  es:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 B_i \hat{e}_i \quad (30)$$

donde los coeficientes  $A_i$  son los coeficientes de expansión en el sistema de coordenadas cartesianas y  $B_i$  son los coeficientes de expansión en el nuevo sistema coordenado.

## 2.2. El vector posición

Gráficamente, la relación entre el sistema de coordenadas esféricas y el sistema de coordenadas cartesianas se presenta en la figura 3.

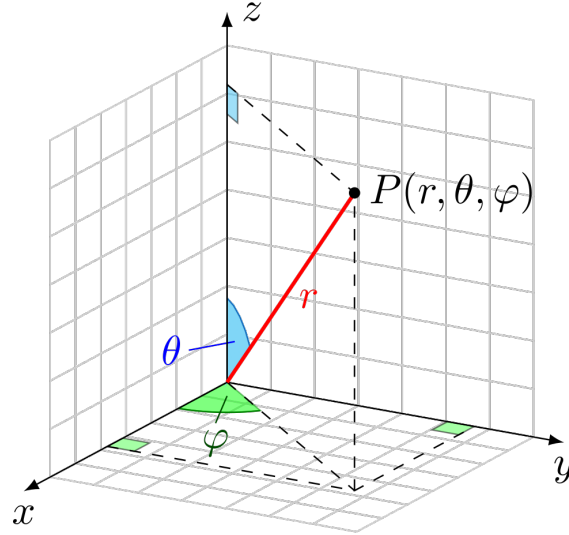


Figura 3: Relación entre coordenadas esféricas y cartesianas [2].

Las reglas de transformación entre las coordenadas  $(x, y, z)$  y  $(r, \theta, \varphi)$  son:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (31)$$

De modo que el vector posición se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \\ &= \hat{i}r \sin \theta \cos \varphi + \hat{j}r \sin \theta \sin \varphi + \hat{k}r \cos \theta \end{aligned} \quad (32)$$

Ahora bien, la base sistema de coordenadas esféricas nace de la intersección entre una esfera, un cono y un plano vertical. Los vectores unitarios  $\hat{e}_r = \hat{r}$ ,  $\hat{e}_\theta = \hat{\theta}$  y  $\hat{e}_\varphi = \hat{\varphi}$  se presentan en la figura 4.

A partir de la figura 4 es fácil ver que el vector posición en coordenadas esféricas tiene la forma:

$$\mathbf{r} = \hat{e}_r r \quad (33)$$

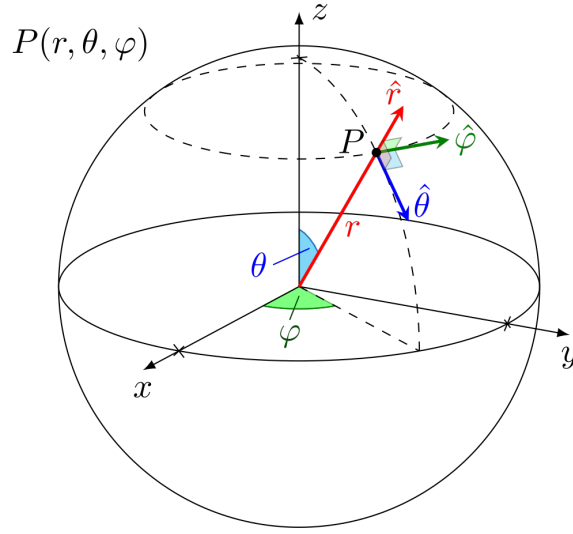


Figura 4: Base en coordenadas esféricas [2].

Este hecho se puede probar desde la teoría de la transformación. Para ver un ejemplo de esta deducción, véase la sección siguiente.

### 2.3. El vector velocidad

En cualquier sistema coordenado, el vector velocidad  $\mathbf{v}$  se define como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (34)$$

Entonces, en coordenadas esféricas, se escribe:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{e}}_r r) = \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} r + \hat{\mathbf{e}}_r \frac{dr}{dt} \quad (35)$$

Para hallar la derivada temporal del vector unitario  $\hat{\mathbf{e}}_r$ , se puede emplear la regla de la cadena como:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (36)$$

Por otro lado, en [1], se expone que las derivadas parciales de los vectores unitarios se pueden hallar como:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\hat{\mathbf{e}}_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial u_i} \quad (37)$$

donde la primera ecuación se emplea cuando se desea hallar la derivada del  $i$ -ésimo vector unitario con respecto a su respectiva  $i$ -ésima coordenada, mientras que la segunda se utiliza cuando los índices  $i \neq j$  no coinciden.

No es difícil demostrar que, en coordenadas esféricas, las derivadas parciales de los vectores unitarios no nulas son:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \theta \quad (38)$$

es decir, las derivadas parciales que no aparezcan en esta lista son cero.

Entonces, la derivada temporal del vector unitario  $\hat{\mathbf{e}}_r$  (empleando 36) es:

$$\begin{aligned} \frac{d \hat{\mathbf{e}}_r}{dt} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\theta \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \sin \theta \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (39)$$

y por ende, el vector velocidad queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left( \hat{\mathbf{e}}_\theta \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \sin \theta \dot{\varphi} \right) r + \hat{\mathbf{e}}_r \dot{r} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r \dot{r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta r \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (40)$$

y por ende, al usar la ecuación 34 el vector velocidad queda:

$$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{e}}_r r) = \frac{d \hat{\mathbf{e}}_r}{dt} r + \hat{\mathbf{e}}_r \frac{dr}{dt} \quad (41)$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left( \hat{\mathbf{e}}_\theta \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \sin \theta \dot{\varphi} \right) r + \hat{\mathbf{e}}_r \dot{r} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_r \dot{r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta r \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (42)$$

## 2.4. Energía cinética

En un sistema coordenado general, la energía cinética se define como:

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (43)$$

entonces, tomando el producto punto de  $\mathbf{v}$  consigo mismo, y considerando que las coordenadas esféricas son una base ortonormal, es decir, que  $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ , se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j} v_i v_j \delta_{ij} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (44)$$

donde se usaron los índices,  $r = 1, \theta = 2$  y  $\varphi = 3$ . De este modo, la expresión para la energía cinética en coordenadas esféricas es:

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (45)$$

## 2.5. El vector aceleración

De forma homóloga al vector velocidad, en coordenadas curvilíneas generalizadas, el vector aceleración  $\mathbf{a}$  se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (46)$$

Por lo tanto, partiendo de la expresión para el vector velocidad en esféricas 42, se computa,



$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{e}}_r \dot{r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta r \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \right) \\
&= \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} \dot{r} + \hat{\mathbf{e}}_r \ddot{r} + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\theta}{dt} r \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \dot{r} \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\theta r \ddot{\theta} \\
&\quad + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{dt} r \sin \theta \dot{\varphi} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin \theta \ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{47}$$

luego de emplear la regla del producto para las derivadas. Similar al caso del vector velocidad, la expresión obtenida depende de las derivadas temporales de los vectores unitarios. Para solucionar este dilema, se emplea la misma estrategia presentada antes, se usa la regla de la cadena, donde ya son conocidas las derivadas parciales de los vectores unitarios (ver 38). Usando la regla de la cadena para  $d\hat{\mathbf{e}}_\theta/dt$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\theta}{dt} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_r \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \cos \theta \dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{48}$$

y para  $d\hat{\mathbf{e}}_\varphi/dt$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{dt} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\
&= (-\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \theta) \dot{\varphi} \\
&= -\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta \dot{\varphi} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \theta \dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{49}$$

Finalmente, al emplear estas últimas dos expresiones, reemplazarlas en la ecuación 47 y agrupar por vectores unitarios, se obtiene la expresión para el vector aceleración en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \hat{\mathbf{e}}_r \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + \hat{\mathbf{e}}_\theta \left( 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right) \\
&\quad + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \left( 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi} \right)
\end{aligned} \tag{50}$$

donde entonces la **aceleración radial**  $a_r$  está dada por  $\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$ , la componente **meridional**  $a_\theta$  está dada por  $2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$ , y la componente **azimutal**  $a_\varphi$  es  $2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}$ .

### 3. Coordenadas Parabólicas 2D

En esta sección se pretende calcular la expresión para la velocidad, la energía cinética, el lagrangiano de una partícula libre en el sistema de coordenadas parabólicas 2D  $(\tau, \sigma)$ . Además, se resolverán numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange para dos conjuntos de condiciones iniciales dado el modelo de partícula libre.

#### 3.1. El vector posición

Inicialmente, las relaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas planas  $(x, y)$  y las coordenadas parabólicas  $(\tau, \sigma)$  vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x &= \tau \sigma \\
y &= \frac{1}{2}(\tau^2 + \sigma^2)
\end{aligned} \tag{51}$$

definiendo dos familias de parábolas donde  $\tau = \text{cte}$  y  $\sigma = \text{cte}$  representan curvas cuadráticas abriendo hacia lados opuestos (ver figura 5).

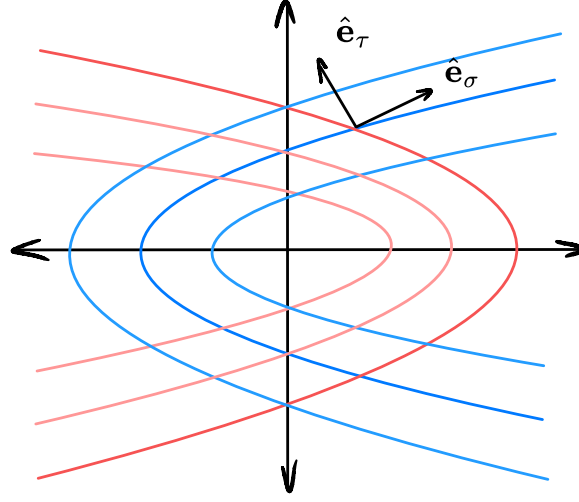


Figura 5: Vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_\tau$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$  y las curvas parabólicas.

Ahora bien, al igual que se hizo con las coordenadas cilíndricas, el vector posición en coordenadas se escribe en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} x + \hat{\mathbf{j}} y \quad (52)$$

Es decir, en términos de  $\tau$  y  $\sigma$ :

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \sigma \tau + \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \quad (53)$$

A diferencia del numeral anterior, el vector posición en coordenadas parabólicas no resulta ser tan intuitivo como en coordenadas esféricas, en cambio se presentará una deducción algebraica. Inicialmente, los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_\tau$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$  se definen como los vectores unitarios tangentes a las parábolas que definen el sistema coordenado. Escrito matemáticamente, los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_i$  (con  $i = \tau, \sigma$ ) son:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad (54)$$

donde  $h_i$  es el factor de escala que los normaliza. Tomando la norma o magnitud de esta expresión, está claro que,

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad (55)$$

donde estas derivadas pueden ser computadas a partir del vector posición en cartesianas [53](#). Los factores de escala para las coordenadas  $(\tau, \sigma)$  son entonces:

$$h_\tau = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \tau} (\hat{\mathbf{i}} \sigma \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \right) \right| = \left| \hat{\mathbf{i}} \sigma + \hat{\mathbf{j}} \tau \right| = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \quad (56)$$

$$h_\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} (\hat{\mathbf{i}} \sigma \tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \right) \right| = \left| \hat{\mathbf{i}} \tau - \hat{\mathbf{j}} \sigma \right| = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \quad (57)$$

de modo que  $h_\tau = h_\sigma$ . A continuación los nuevos vectores base  $\hat{\mathbf{e}}_{tau}$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$  pueden ser hallados en términos de  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  usando la expresión [54](#). Empleando los factores de escala calculados, estos vectores quedan:

$$\hat{\mathbf{e}}_\tau = \frac{1}{h_\tau} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \left( \hat{\mathbf{i}} \sigma + \hat{\mathbf{j}} \tau \right) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \quad (58)$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \left( \hat{\mathbf{i}} \tau - \hat{\mathbf{j}} \sigma \right) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} - \hat{\mathbf{j}} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \quad (59)$$

y escribiendo este sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\tau \\ \hat{\mathbf{e}}_\sigma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} & \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} & -\frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix} \quad (60)$$

donde la matriz  $\mathbb{A}$  es la matriz de transformación entre coordenadas cartesianas y parabólicas. No es difícil invertir esta matriz y encontrar que:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T = \mathbb{A} \quad (61)$$

de modo que la transformación de coordenadas es ortogonal y unitaria. Invirtiendo la anterior ecuación matricial se obtienen las ecuaciones invertidas para los vectores unitarios cartesianos:

$$\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \quad (62)$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} - \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \quad (63)$$

Por lo tanto, si se reemplazan los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  obtenidos justo arriba en la expresión 53, se halla el vector posición  $\mathbf{r}$  en coordenadas parabólicas. Realizando este procedimiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \hat{\mathbf{i}} \sigma \tau + \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \\ &= \left( \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \right) \sigma \tau + \left( \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} - \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \right) \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\tau \left( \frac{\sigma^2 \tau + \frac{1}{2} \tau^3 - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \left( \frac{\tau^2 \sigma - \frac{1}{2} \tau^2 \sigma + \frac{1}{2} \sigma^3}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \right) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{2} \frac{\tau^2 + \sigma^2}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{2} \frac{\tau^2 + \sigma^2}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \end{aligned} \quad (64)$$

### 3.2. El vector velocidad

Para hallar el vector velocidad, debemos derivar con respecto al tiempo la ecuación 64. En cuanto a las derivadas temporales de los vectores unitarios, estas no tienen interpretación, sino que debemos usar la regla de la cadena como se hizo en la sección anterior:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\tau}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\tau}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\tau}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\sigma}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} \quad (65)$$

donde según [1], acudimos a las relaciones 37 para hallar las derivadas parciales de los vectores unitarios. Las cuatro derivadas parciales son entonces:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\hat{\mathbf{e}}_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial u_i} \quad (66)$$

entonces hallemos primero las derivadas de los vectores unitarios:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\tau}{\partial \tau} = - \frac{\hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} = - \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (67)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\tau}{\partial \sigma} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} = \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (68)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\partial \tau} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (69)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\sigma}{\partial \sigma} = - \frac{\hat{\mathbf{e}}_\tau}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} = - \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (70)$$

En consecuencia, usando la notación  $d\tau/dt = \dot{\tau}$ , y la regla de la cadena 65, las derivadas temporales de los vectores unitarios son:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\tau}{dt} = - \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma \dot{\tau}}{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau \dot{\sigma}}{\tau^2 + \sigma^2} = \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau \dot{\sigma} - \sigma \dot{\tau}}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (71)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\sigma}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma \dot{\tau}}{\tau^2 + \sigma^2} - \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau \dot{\sigma}}{\tau^2 + \sigma^2} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma \dot{\tau} - \tau \dot{\sigma}}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (72)$$

Ahora, por definición del vector velocidad (34):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \right) \\ &= \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\tau}{dt} \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \right) + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\sigma}{dt} \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (73)$$

Al computar las derivadas faltantes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \right) = \frac{\sigma^2 \dot{\tau} + \sigma \tau \dot{\sigma} + 2\tau^2 \dot{\tau}}{2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \quad (74)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \right) = \frac{2\sigma^2 \dot{\sigma} + \sigma \tau \dot{\tau} + \tau^2 \dot{\sigma}}{2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \quad (75)$$

Se obtiene la el vector velocidad en el nuevo sistema de referencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left( \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\tau \dot{\sigma} - \sigma \dot{\tau}}{\tau^2 + \sigma^2} \right) \frac{\tau}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma^2 \dot{\tau} + \sigma \tau \dot{\sigma} + 2\tau^2 \dot{\tau}}{2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \\ &\quad + \left( \hat{\mathbf{e}}_\tau \frac{\sigma \dot{\tau} - \tau \dot{\sigma}}{\tau^2 + \sigma^2} \right) \frac{\sigma}{2} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{2\sigma^2 \dot{\sigma} + \sigma \tau \dot{\tau} + \tau^2 \dot{\sigma}}{2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \end{aligned} \quad (76)$$

De modo que al simplificar se obtiene:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_\tau \dot{\tau} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} + \hat{\mathbf{e}}_\sigma \dot{\sigma} \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \quad (77)$$

### 3.3. Energía Cinética y Lagrangiano

Se parte de nuevo de la definición de energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (78)$$

Calculando el producto punto de  $\mathbf{v}$  consigo mismo, contando con que la base es ortogonal, se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j} v_i v_j \delta_{ij} = \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) = (\tau^2 + \sigma^2)(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2) \quad (79)$$

Por lo tanto, la expresión para la energía cinética en coordenadas parabólicas es:

$$T = \frac{1}{2}m(\tau^2 + \sigma^2)(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2) \quad (80)$$

Por otro lado, el enunciado exige hallar el lagrangiano de una partícula en este sistema coordenado. La energía potencial para una partícula libre en cualquier sistema coordenado  $(u_1, u_2, u_3)$  es:

$$V(u_i, \dot{u}_i) = 0 \quad (81)$$

Entonces, como  $L = T - V$ , en el caso de una partícula libre, el lagrangiano y la energía cinética son equivalentes. Entonces:

$$L = \frac{1}{2}m(\tau^2 + \sigma^2)(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2) \quad (82)$$

### 3.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Recordemos que la ecuación de Euler-Lagrange es una **ley física**, que en coordenadas generalizadas, y en ausencia de fuerzas externas tiene la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = 0 \quad (83)$$

Para deducir las dos ecuaciones de movimiento en coordenadas parabólicas simplemente ha de computarse las derivadas que aparecen con respecto a  $\tau, \dot{\tau}, \sigma$  y  $\dot{\sigma}$  y conformar la expresión 83. Comenzando con la ecuación de Euler-Lagrange para  $\tau$ , las derivadas requeridas son:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = m(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)\tau \quad (84)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}} = m(\tau^2 + \sigma^2)\dot{\tau} \quad (85)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}} \right) = m[(2\tau\dot{\tau} + 2\sigma\dot{\sigma})\dot{\tau} + (\tau^2 + \sigma^2)\ddot{\tau}] \quad (86)$$

Reemplazando las derivadas en 83, y despejando  $\ddot{\tau}$  con el fin de llegar a la expresión más masticada para el uso de métodos numéricos, se obtiene la primera ecuación de movimiento del sistema (recordemos que  $\tau = \tau(t)$ ):

$$\ddot{\tau} = \frac{-2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} + \tau\dot{\sigma}^2 - \tau\dot{\tau}^2}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (87)$$

De forma análoga, para deducir la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada  $\sigma$ , se deben calcular primero las derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = m(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)\sigma \quad (88)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} = m(\tau^2 + \sigma^2)\dot{\sigma} \quad (89)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}} \right) = m \left[ (2\tau\dot{\tau} + 2\sigma\dot{\sigma})\dot{\sigma} + (\tau^2 + \sigma^2)\ddot{\sigma} \right] \quad (90)$$

y al reemplazar estas la primera y tercera de estas expresiones en la ecuación 83, se obtiene la segunda ecuación de Euler-Lagrange de el sistema:

$$\ddot{\sigma} = \frac{-2\tau\dot{\sigma}\dot{\tau} + \sigma\dot{\tau}^2 - \sigma\dot{\sigma}^2}{\tau^2 + \sigma^2} \quad (91)$$

Es fácil ver que ninguna de estas ecuaciones depende de la masa de la partícula libre. La interpretación de este hecho, es que al contar con una partícula libre, esta tendrá comportamiento cinético, y no dinámico, descrito por un MRU. Esto implica que la velocidad de la partícula se mantiene constante con el tiempo, conforme a la primera ley del movimiento de Newton, que establece que un objeto en movimiento permanece en movimiento a menos que una fuerza externa actúe sobre él. (Recordemos que sabemos que no hay ninguna fuerza actuando sobre la partícula porque  $F = -\nabla V = 0$ ).

La pregunta realmente interesante es... ¿cómo se ve un MRU en coordenadas parabólicas?

### 3.5. Condiciones iniciales para la partícula libre

En esta sección se emplea un Jupyter Notebook para resolver numéricamente (usando `odeint`) las ecuaciones de movimiento previamente deducidas. La documentación y por ende explicación del código se aloja en el archivo `punto-3.ipynb` alojado en el [repositorio](#) de los autores. Con el fin de que la lectura del código y del documento se hagan en paralelo, se optó por exponer de forma detallada todo en el Jupyter Notebook.

## Referencias

- [1] Alonso Sepúlveda. “Física Matemática”. Editorial Universidad de Antioquia, 2da edición, 1 2019.
- [2] Wikipedia. Coordenadas esféricas [Online]. Available: <https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas esféricas>