Laboratorio 2

Control Óptimo

Thomas Martinod[1]

[1]Ingeniería Matemática, Universidad EAFIT, Colombia, *tmartinods@eafit.edu.co*

Resumen

El presente documento se refiere a la entrega del segundo laboratorio correspondiente al curso de Optimización 2 en la Universidad EAFIT. En este informe, se abordan inicialmente dos problemas teóricos que exploran la relación entre los problemas de Bolza, Lagrange y Mayer. Posteriormente, se resuelve un problema relacionado con las condiciones necesarias de primer y segundo orden en el contexto del control óptimo. Finalmente, se presenta la solución de un problema de control óptimo utilizando el principio del máximo de Pontryagin.

Nota: En este documento se exponen solamente el primer punto y parte del segundo del laboratorio, por ser teóricos. La solución numérica al segundo problema y los dos problemas finales se encuentran resueltos y descritos a profundidad en un Jupyter Notebook ubicado en el repositorio de GitHub https://github.com/thomas-martinod/Optimizacion-2 en la carpeta **lab2**, en conjunto con este mismo documento.

1. Equivalencia Bolza - Mayer - Lagrange

Problema 1. Demostrar es equivalente formular el problema de control óptimo en las formas de Bolza, Lagrange y Mayer.

En primer lugar se definen las tres formulaciones del problema de control óptimo. El problema de control óptimo en tiempo continuo se define de forma usual como:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned} \tag{1}$$

y el nombre acuñado para este problema es el **problema de Bolza**. En general, el nombre o la forma del problema de control óptimo dependen de la forma del funcional objetivo J.

Por otro lado, el término **problema de Mayer** se emplea cuando el funcional es del tipo es $J = S(x(t_1))$. Así, este se escribe como:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, el **problema de Lagrange** se define como:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J \ &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Ahora, debemos demostrar que los problemas (1), (2), y (3) son equivalentes. La equivalencia entre dos problemas de control óptimo se interpreta como la capacidad de escribir un problema en términos del otro. Entonces, para demostrar las tres equivalencias, debemos demostrar seis implicaciones.

(1) $\implies$ **(2)** : Se lee, "el problema de Bolza (1), se puede escribir como un problema de Mayer (2)".

Se parte del problema:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J \ &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

Si se define una nueva variable de estado $x_{n+1}(t)$ con:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t), \quad \text{tal que } x(t_0) = 0 \\ \dot{x}_{n+1}(t) &:= F(x,u,t), \quad \text{tal que } x_{n+1}(t_0) = 0 \end{aligned}$$

luego, usando el teorema fundamental del cálculo, el funcional objetivo del problema de Bolza se transforma en:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n+1}(t)\,dt + S(x(t_1)) = x_{n+1}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + S(x(t_1)) = x_{n+1}(t_1) - \underbrace{x_{n+1}(t_0)}_{0} + S(x(t_1)) = S'(x'(t_1))$$

donde $x' = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ y S' es una función de x'. Además, si se define $x'_0 = (x_0, 0)$ se obtiene el problema:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J \ &= S'(x'(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x'(t_0) = x'_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

que es un problema de Mayer.

(2) $\implies$ **(1)**
Si tenemos el funcional objetivo de la forma $J = S(x(t_1))$, podemos ver que el problema de Mayer es simplemente un caso especial del problema de Bolza con $F = 0$, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J \ &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt}_{0} + S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

(1) $\implies$ **(3)**
Se parte de nuevo del problema:

$$\begin{aligned}\max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + S(x(t_1))\\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t)\\ \text{con } &: x(t_0) = x_0\\ & \quad u(t) \in \Omega(t)\end{aligned}$$

Notemos que, mediante el uso del teorema fundamental del cálculo (derivando e integrando), y la regla de la cadena se puede ver que:

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x)\,\dot{x}(t)\,dt$$

Y para cada función admisible que nos interesa se cumple que $S(x(t_0)) = S(x_0) = \text{cte}$, de modo que el funcional objetivo es:

$$\begin{aligned}J' &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + S(x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x)\,\dot{x}(t)\,dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{F(x,u,t) + \nabla S(x)\,f(x,u,t)}_{F'(x,u,t)}\,dt\end{aligned}$$

por lo que el problema de Bolza queda como:

$$\begin{aligned}\max_{u(t)} J' &= \int_{t_0}^{t_1} F'(x,u,t)\,dt\\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t)\\ \text{con } &: x(t_0) = x_0\\ & \quad u(t) \in \Omega(t)\end{aligned}$$

que tiene la forma de un problema de Lagrange.

(3) $\implies$ **(1)**
De forma similar al problema de Mayer, el problema de Lagrange es un caso especial del problema de Bolza, simplemente en (1) se hace $S(x(t_1)) = 0$, obteniendo el problema:

$$\begin{aligned}\max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\,dt + \underbrace{S(x(t_1))}_{0}\\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t)\\ \text{con } &: x(t_0) = x_0\\ & \quad u(t) \in \Omega(t)\end{aligned}$$

que es un problema de Bolza.

(2) $\implies$ **(3)**
Partimos del problema de Mayer:

$$\begin{aligned}\max_{u(t)} J &= S(x(t_1))\\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t)\\ \text{con } &: x(t_0) = x_0\\ & \quad u(t) \in \Omega(t)\end{aligned}$$

y debemos encontrar la manera de meter $S(x(t_1))$ en una integral en el intervalo $[t_0, t_1]$. Para ello, veamos que:

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x)\, \dot{x}(t)\, dt$$

Es decir, podemos integrar y derivar $S(x(t))$ para obtener $S(x(t_1))$. Luego, el funcional objetivo, habiendo eliminando $S(x(t_0)) = x_0 = \text{cte}$ es:

$$J' = S(x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x)\, \dot{x}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x)\, f(x,u,t)\, dt$$

y entonces se obtiene el problema de Lagrange:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J' &= \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\nabla S(x)\, f(x,u,t)}_{F'(x,u,t)}\, dt \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

$\mathbf{(3)} \implies \mathbf{(2)}$
Se parte del problema de Lagrange:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x,u,t)\, dt \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x(t_0) = x_0 \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

veamos que este se puede escribir como un problema de Mayer.

Si se define una nueva variable de estado $x_{n+1}(t)$ con:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t), \quad \text{tal que } x(t_0) = 0 \\ \dot{x}_{n+1}(t) &:= F(x,u,t), \quad \text{tal que } x_{n+1}(t_0) = 0 \end{aligned}$$

luego, usando el teorema fundamental del cálculo, el funcional objetivo del problema de Lagrange se transforma en:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n+1}(t)\, dt = x_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = x_{n+1}(t_1) - \underbrace{x_{n+1}(t_0)}_{0} = S'(x'(t_1))$$

donde $x' = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ y S' es una función de x'. Además, si se define $x_0' = (x_0, 0)$ se obtiene el problema:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= S'(x'(t_1)) \\ \text{sujeto a } &: \dot{x} = f(x,u,t) \\ \text{con } &: x'(t_0) = x_0' \\ & \quad u(t) \in \Omega(t) \end{aligned}$$

que es un problema de Mayer.

Finalmente, al demostrar las seis implicaciones, se demostró que la formulación de los tres problemas es equivalente.

Como observación, cada vez que se "despreció" $S(x(t_0))$ a la hora de redefinir el nuevo funcional objetivo J', se basó en el hecho que maximizar $J + c$ equivale a maximizar J.

2. Aplicación de la equivalencia

Problema 2. Dado el siguiente problema de control óptimo, con funcional objetivo en forma de Bolza, encontrar y resolver la formulación equivalente con funcional en forma de Lagrange:

$$\begin{aligned} \min J(x) &= \int_0^2 u^2\,dt + 4x(2) \\ \text{sujeto a}: \ & \dot{x} = 2x + 3u \\ \text{con}: \ & x(0) = 5 \\ & 0 \leq u \leq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Empleando el numeral anterior, vemos que la solicitada es una transformación **(1)** $\Longrightarrow$ **(3)**. Para ello, veamos que mediante el teorema fundamental del cálculo:

$$4x(2) - 4x(0) = \int_0^2 4\dot{x}\,dt$$

luego, usando la condición inicial:

$$4x(2) = 20 + \int_0^2 4\dot{x}\,dt = 20 + \int_0^2 4(2x + 3u)\,dt = 20 + \int_0^2 (8x + 12u)\,dt$$

Así, resolver el problema 4 es equivalente a resolver:

$$\begin{aligned} \min J(x) &= \int_0^2 (u^2 + 12u + 8x)\,dt \\ \text{sujeto a}: \ & \dot{x} = 2x + 3u \\ \text{con}: \ & x(0) = 5 \\ & 0 \leq u \leq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Este problema (y los últimos dos del laboratorio) se resuelven y comentan en el archivo `.ipynb` ubicado en el repositorio mencionado en la nota inicial. Hasta este punto llega la parte teórica del laboratorio.