ANÁLISIS DE MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN EN EL MÉTODO DE HOLOGRAFÍA ACÚSTICA DE CAMPO CERCANO (NAH)

Avance 1

Thomas Martinod

Tutor: Nicolás Guarín

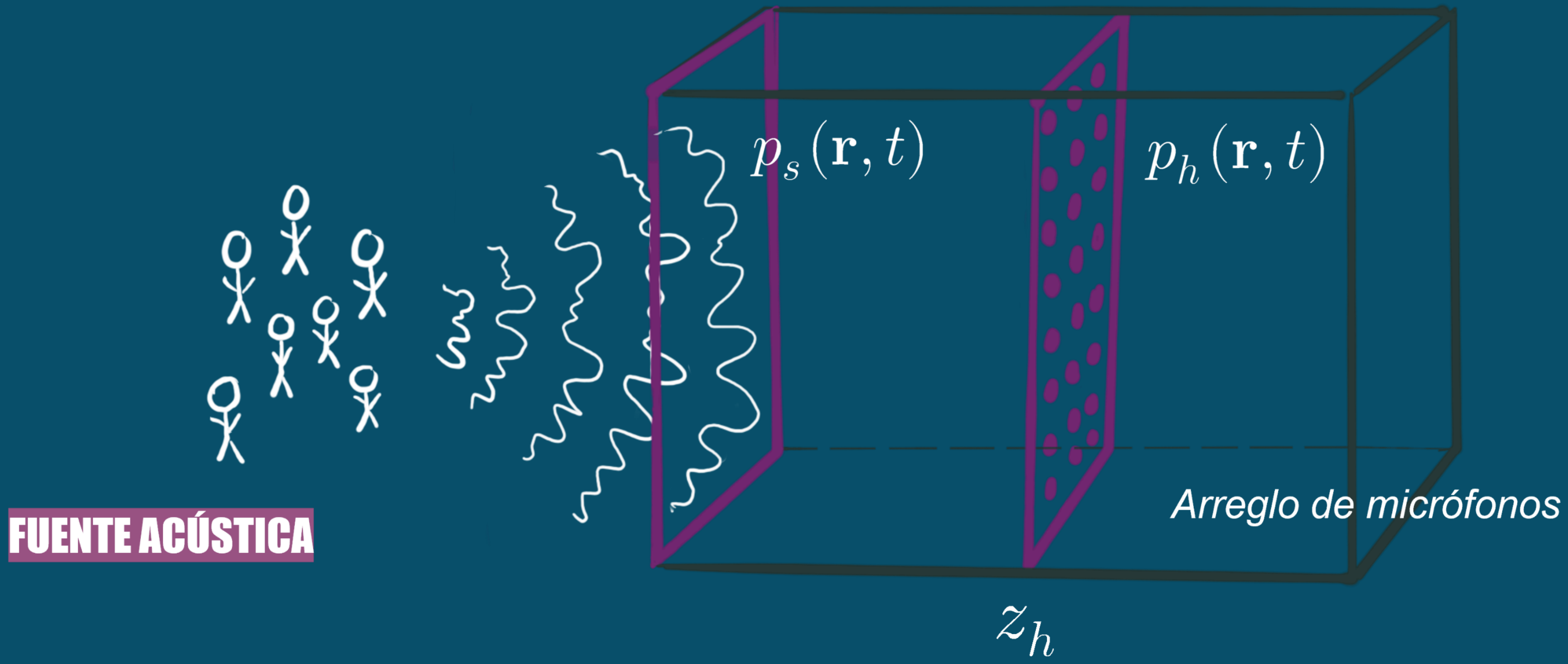
UNIVERSIDAD EAFIT | Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería

Contenidos

1. Motivación

Cámaras que pueden ver el sonido...

2. Resumen


$p_s(\mathbf{r}, t)$
$p_h(\mathbf{r}, t)$
Arreglo de micrófonos
FUENTE ACÚSTICA
z_h

¿Qué es la holografía?

La holografía es una técnica que permite **registrar un frente de onda** y luego reconstruirlo. En principio, es posible realizar un holograma para **cualquier tipo de onda** [1].

> "Es importante señalar que la **interferencia** y la **difracción** son fenómenos comunes a todas las formas de energía cuya propagación puede describirse en términos de movimiento ondulatorio. Todo lo que se requiere es la capacidad de registrar un patrón de interferencia en el tipo particular de radiación que estemos utilizando.
>
> La energía acústica es un tipo de radiación que tiene propiedades extremadamente útiles, siendo la más importante su capacidad para penetrar sólidos y líquidos. Por lo tanto, se pueden imaginar objetos en fluidos opacos, identificar defectos en metales, o quizás detectar el crecimiento canceroso en tejidos" [2].

3. Objetivos y cronograma

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A.
Modelar matemáticamente el problema inverso del NAH, comprendiendo los elementos del análisis de Fourier, acústica y las condiciones de frontera del problema.

B.
Implementar el NAH para un arreglo de sensores plano.

Actividad	Estado	Semama																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Revisión y apropiación matemática	***80%***																		
Revisión de bibliografía del NAH y regularización.	*80%*																		
Estudio de la acústica	*100%*																		
Estudio del análisis de Fourier y modelación inversa	*90%*																		
Implementación del NAH	***25%***																		
Acceso a la base de datos	*100%*																		
Implementación del NAH en Python	*45%*																		
Regularización	***30%***																		
Implementación de la regularización de Tikhonov	*50%*																		
Implementación de la regularización por *sparcity*	*0%*																		
Implementación de la regularización por ML	*30%*																		
Deducción de la regularización por funciones de Green	*100%*																		
Implementación de la regularización por funciones de Green	*0%*																		
Generación de Imágenes	*0%*																		
Análisis de resultados y comparativa	*0%*																		
Documentación	***20%***																		
Entregas intermedias	*50%*																		
Redacción informe final	*5%*																		
Documentación en Github	*30%*																		

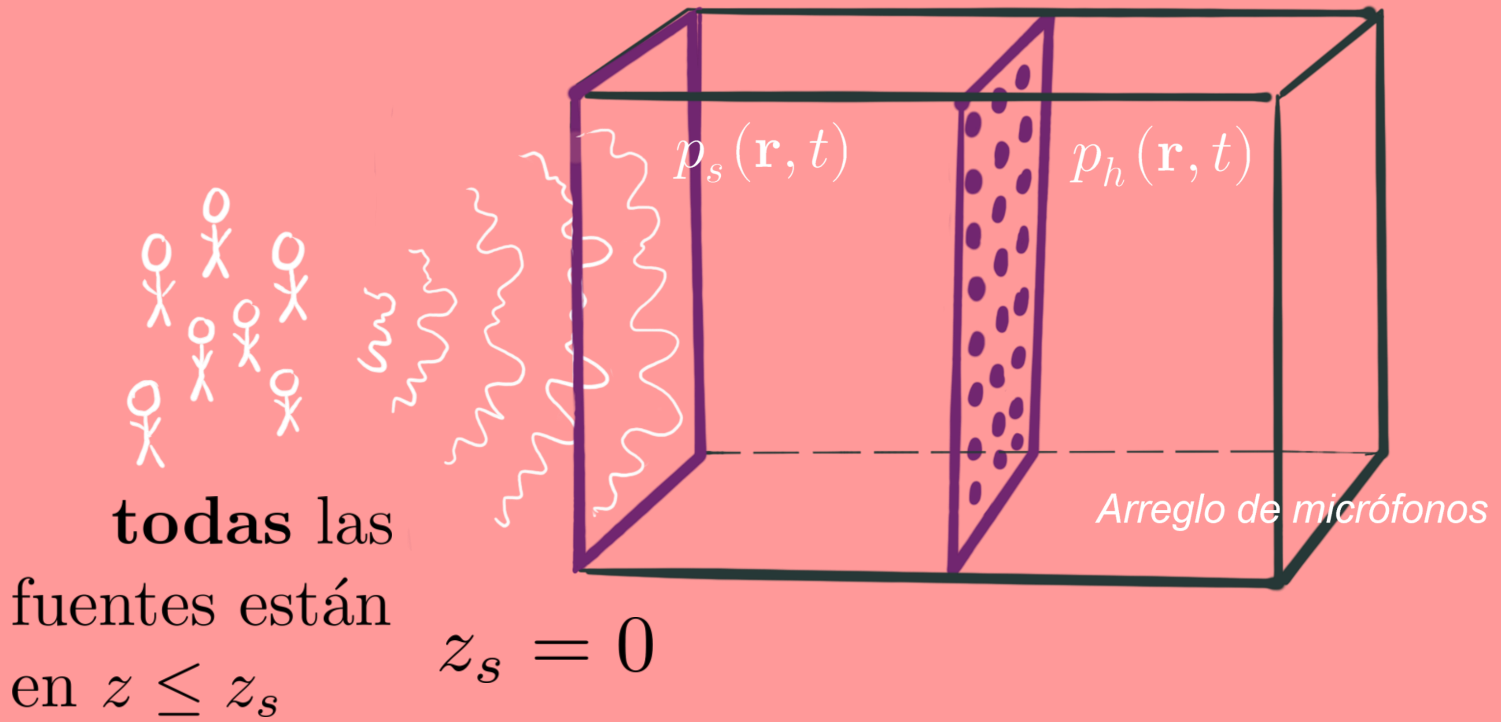
4. Modelo matemático del problema inverso.

Sea $p(x, y, z, t)$ el campo **escalar** de presión acústica del fluido. Las perturbaciones en este campo se ven descritas por la ecuación de ondas [3]:

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} p(x, y, z, t) = 0$$

donde c es la velocidad del sonido en el medio. Ahora, se puede usar la FT para escribir el campo de presión acústica en el dominio de la frecuencia como:

$$\tilde{p}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-i\omega t} dt$$



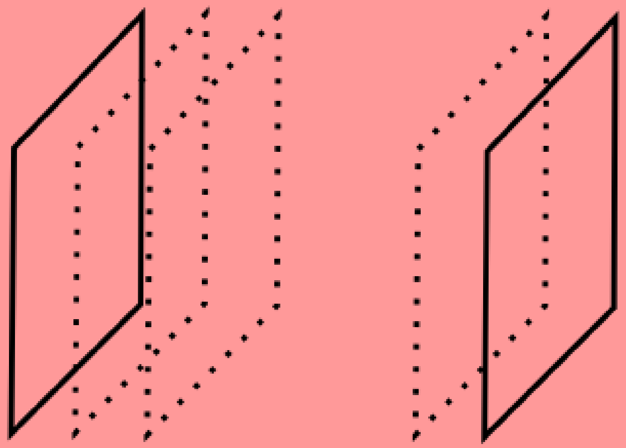
En el semiplano libre de fuentes, la información planar del campo acústico se observa como una función de x y y paralela al plano de la fuente. Sin usar las coordenadas espaciales, se puede escribir el campo de presión acústica como:

$$\hat{\tilde{p}}(k_x, k_y, z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{p} e^{-i(k_x x + k_y y)} \, dx \, dy$$

Entonces, dada la condición de espacio sin fuentes en el semiplano $z > 0$, se debe cumplir que:

$$\hat{\tilde{p}}(k_x, k_y, z, w) = \hat{\tilde{p}}(k_x, k_y, 0, w)e^{ik_z z}$$

Donde al término $e^{ik_z z}$ se le llama el **propagador**.



Y usando la ecuación de Euler para reconstruir el campo de velocidades $v_z = v_z(x, y, z, t)$, se obtiene:

$$\hat{\tilde{v}}_z(k_x, k_y, z, \omega) = \hat{\tilde{p}}(k_x, k_y, 0, \omega)\frac{k_z}{\rho c_0 k}e^{ik_z z}$$

Parece sencillo, ¿no?, solo falta hallar la transformada inversa espacial y temporal...

¿ y el modelo discreto?

$$\sqcap_X(x) = \begin{cases} 1, & |x| < X/2 \\ \frac{1}{2}, & |x| = X/2 \\ 0, & |x| > X/2 \end{cases}$$

Muestreo espacial en forma de un número limitado de posiciones de sensores:

$$\sqcup(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - x_n\right)$$

La función de muestreo para el dominio espacial en la dirección x se representa en forma de una función **peine** de Dirac.

Muestrear espacialmente un plano limitado se describe entonces como:

$$\tilde{p}_z\left(x_n, y_m\right) = \tilde{p}_z(x, y) \sqcap_X (x) \sqcap_Y (y) \sqcup (x) \sqcup (y)$$

Sin tomar precauciones con respecto a la **fuga** y el **aliasing**, su espectro angular correspondiente se calcula mediante:

$$\hat{\tilde{p}}_z\left(k_x, k_y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_z\left(x_n, y_m\right) e^{-i\left(k_x x + k_y y\right)} dx dy$$

Pero esto aún codifica un problema continuo, ¿no? Cambiando la integral por su hermana discreta:

$$\hat{\tilde{p}}_d\left(k_x, k_y\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \tilde{p}_d\left(x_n, y_m\right) e^{-2\pi i\left(k_x \frac{n}{N} + k_y \frac{m}{M}\right)}$$

En donde N y M son las "dimensiones del arreglo de micrófonos".

La solución discreta de la ecuación de onda en el espacio k de una distribución de presión desconocida y en estado **estacionario** en un semiespacio libre de fuentes, $z > 0$, se define como:

$$\hat{\tilde{p}}_d\left(k_{x_n}, k_{y_m}, z\right) = \hat{\tilde{p}}_d\left(k_{x_n}, k_{y_m}, z_h\right) e^{ik_z(z-z_h)}$$

Donde $z = z_h$ es la distancia de holograma. Tapo... ¿Quiénes son las k?

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\begin{aligned} k_x^2 + k_y^2 &= 0 && \text{plane wave in } z\text{-direction,} \\ 0 < k_x^2 + k_y^2 &\leq k^2 && \text{propagating waves; } k_z \text{ real,} \\ k_x^2 + k_y^2 &> k^2 && \text{evanescent waves; } k_z \text{ complex} \end{aligned}$$

[4]

¡Acá es donde está el poder del método NAH!.

5. Regularización de Tikhonov

Supongamos que tenemos una matriz conocida $\boldsymbol{A}$ y un vector conocido $\boldsymbol{b}$... ¿cómo hallamos $\boldsymbol{x}$ en el sistema?

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Una solución ingeniosa para resolver este aspecto es plantear el problema de optimización:

$$\min_x \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

La regularización se ocupa de otorgar preferencia a un cierto tipo de soluciones más simples, luego, consideremos el problema:

$$\min_x \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \|\Gamma\mathbf{x}\|_2^2$$

A la matriz Γ se le llama la matriz de Tikhonov.

En el contexto del NAH...

La transformada discreta espacial de Fourier se representa por F, mientras que G es una matriz diagonal con los propagadores hacia adelante. El problema de la regularización entonces es:

$$\min\left\{\left\|\mathbf{Q}\tilde{p}_s - \tilde{p}_h\right\|_2^2 + \lambda^2\left\|L\tilde{p}_s\right\|_2^2\right\},$$

Donde \lambda es el parámetro de regularización, L es la función de filtrado de Tikhonov y

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{F}$$

La solución regularizada en el espacio del número de onda es:

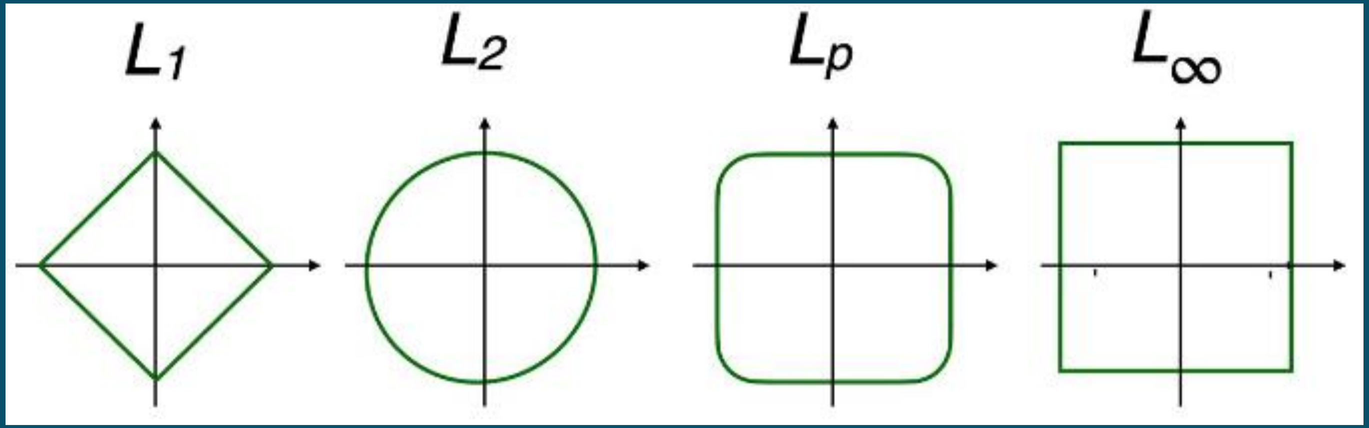
$$\hat{\tilde{p}}_{s,\lambda} = \frac{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}{\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{L}^T\mathbf{L}}\mathbf{G}^{-1}\hat{\tilde{p}}_h = \mathbf{H}_\lambda^f\mathbf{G}^{-1}\hat{\tilde{p}}_h$$

Normas y regularización de Lasso*

La norma que usamos en el caso anterior es un caso especial de una norma en un espacio L_p, en realidad, podemos usar cualquier otra norma $p \geq 1$ para el problema:

$$\min_x \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$$

Al usar la norma $p = 1$, se obtiene la regularización de Lasso.



[5]

Visualización de las **p-normas**

Optimización no lineal

Para solucionar problemas de la forma:

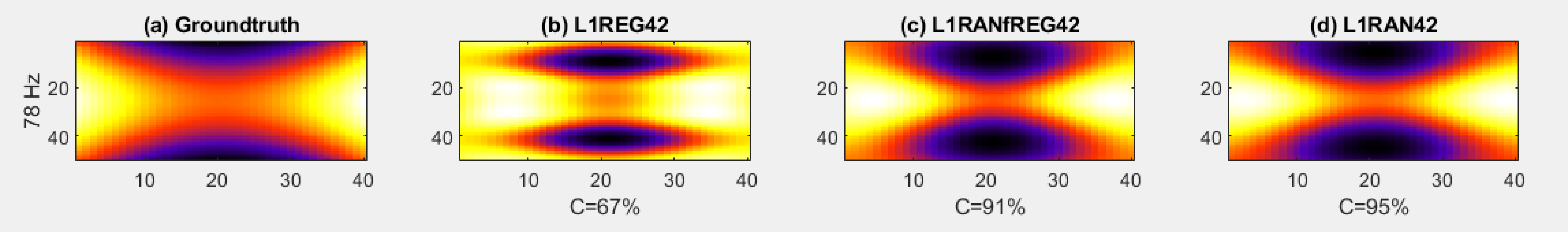
$$\min_x \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \|\Gamma\mathbf{x}\|_2^2$$

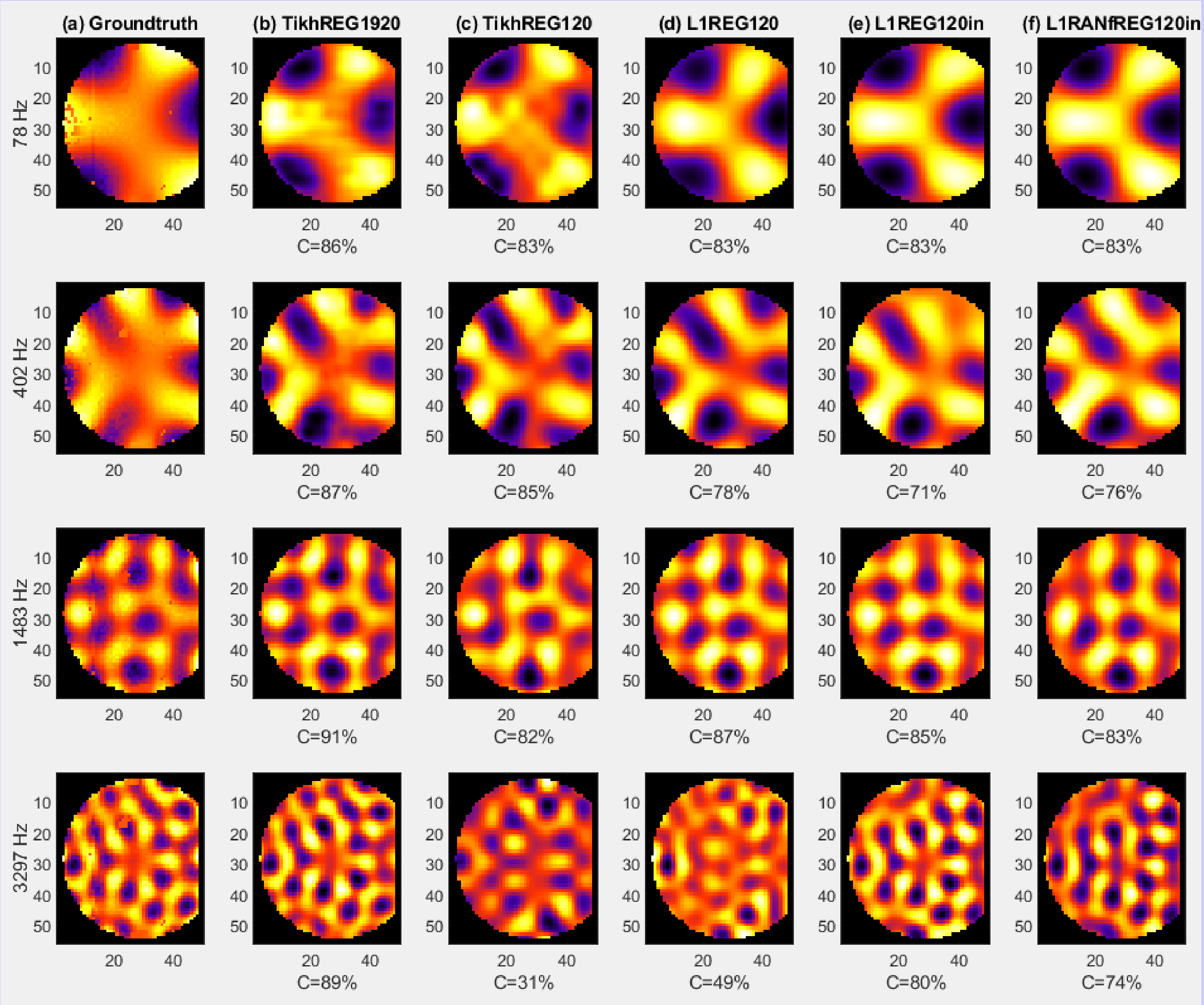
Se emplean las **condiciones Karush-Kuhn-Tucker** o algoritmos de gradiente descendiente, como el de Levenberg-Marquardt.

Explicación visual de cómo entender y solucionar estos problemas NL (usando nociones físicas).

6. Comentarios

1. Sobre la implementación del NAH en Python.
2. Sobre los filtros.
3. Sobre la regularización mediante funciones de Green.
4. Sobre la complejidad algorítmica.
5. Sobre el porcentaje de avance del proyecto.




(a) Groundtruth
(b) TikhREG1920
(c) TikhREG120
(d) L1REG120
(e) L1REG120in
(f) L1RANfREG120in
78 Hz
402 Hz
1483 Hz
3297 Hz
10
20
30
40
50
20
40
C=86%
C=83%
C=83%
C=83%
C=83%
C=87%
C=85%
C=78%
C=71%
C=76%
C=91%
C=82%
C=87%
C=85%
C=83%
C=89%
C=31%
C=49%
C=80%
C=74%

Referencias

En el README.md del repositorio https://github.com/thomas-martinod/proyecto-avanzado-1