Introduction à la théorie des jeux

6 novembre 2007

Table des matières

1 Introduction

1.1 Conventions

Les conventions suivantes seront utilisés tout au long de ce document pour les paramètres des jeux, et ne seront pas répétés :
- un joueur $p \in \mathcal{P}$ (l'ensemble des joueurs).
- une stratégie d'un joueur p, $\sigma_p \in S_p$ (où S_p est l'ensemble des stratégies du joueur p).
- on note σ_{-p}, un profil stratégique de $\Pi_{j \in \mathcal{P} \backslash p} S_j$.
- des fonctions de gain (ou d'utilité) $u_p : \Pi_{p \in \mathcal{P}} S_p \to \mathbb{R}$.

1.2 Rappel sur les relations d'ordre

Une relation d'ordre est une relation à deux arguments vérifiant :
- réflexivité large : $\forall x\ \ x \leq x$. Si anti-reflexivité on a alors un ordre strict : $\forall x\ \neg x \leq x$.
- transitivité : $\forall x, y, z\ \ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.
- anti-symétrique : $\forall x \forall y\ \ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$. Dans le cas d'un ordre strict, on écrit $\forall x \forall y\ \neg (x < y \wedge y < x)$

Un ordre est dit total lorsque :
- ordre large total : $\forall x \forall y\ \ x \leq y \vee y \leq x$.
- ordre strict total $\forall x \forall y\ \ \neg (x \leq y) \wedge \neg (y \leq x)$.

1.3 Définitions

Définition : $\sigma \in \Pi_{p \in \mathcal{P}} S_p$ est appelé profil stratégique. Si $\mathcal{P}$est ordonné, le jeu s'effectue de façon non simultanée, autrement dit si $\mathcal{P}$est non ordonnée revient à déclarer que le jeu est *simultanée.*

Exemple : Le jeu d'échecs n'est pas simultanée, $\mathcal{P} = \{\text{blanc}, \text{noir}\}$ et blanc $>$ noir.

Remarque : Si $\mathcal{P}$ est totalement ordonné (au sens strict) alors on peut indexer les joueurs de $\mathcal{P}$. Un ensemble d'indices I étant un ensemble possedant un plus petit élément tel que $\forall A \subset I\ \ A$ possède un plus petit élément aussi.

Définition : Relation de préférence Une relation de préférence $<_p$ du joueur p est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble de ses stratégies S_p.

Définition : Rationalité Un joueur est dit rationnel lorque

$$\forall \sigma_p j, \sigma_{p'} \in S_p u_p(\sigma_{-p}, \sigma_p) < u_i(\sigma_{ip}, \sigma_{p'}) \Rightarrow \sigma_p > \sigma_{p'}$$

Si $\sigma_p > \sigma_{p'}$, on dit que σ_p domine $\sigma_{p'}$.

2 Les jeux matricielles

Pour un jeu à deux joueurs, on représente matriciellement le jeu $\Gamma = \langle \{R, C\}, \{S_R, S_C\}, \{u_R, u_C\} \rangle$ de la façon suivante, où $\sigma_i \in S_R$ et $\sigma_j \in S_C$:

$$A \in \mathcal{M}_{|S_R| \times |S_C|}(\mathbb{R}) \text{ où } A_{ij} = u_R(\sigma_i, \sigma_j)$$

$$B \in \mathcal{M}_{|S_R| \times |S_C|}(\mathbb{R}) \text{ où } B_{ij} = u_C(\sigma_i, \sigma_j)$$

Remarque : il faut que S_R et S_C soient bien ordonnées, ou que leurs stratégies soient indexées. De plus, on considère uniquement le cas où S_R et S_C sont finis.

Exemple : le dilemne des prisonniers
Représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} C & -3 & -10 \\ T & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C < T$, un prisonnier rationnel jouera T (donc la trahison).

2.1 Quelques définitions

Jeu symétrique

Un jeu est dit symétrique lorsque :
- $\forall (p, p') \in \mathcal{P}^2 \ \ S_p = S_{p'}$
- le jeu est simultané
- Pour toute permutation Π sur l'ensemble des joueurs, les fonctions d'utilité renvoient des valeurs permutées suivant la permutation donnée.

Pour un jeu matriciel (A, B), dire qu'il est symétrique revient à dire que $B = A^t$.

Meilleur réponse

Une meilleur réponse d'un joueur $p \in \mathcal{P}$ à un profil stratégique σ est une stratégie $\sigma_p \in S_p$ telle que

$$\forall \sigma_p^* \in S_p \ \ u_p(\sigma_{-p}, \sigma_p^*) < u_p(\sigma_{-p}, \sigma_p)$$

On la notera

$$br(\sigma_{-p}) = \underset{\star \in S_p}{\operatorname{argmax}}(u_p(\sigma_{-p}, \star))$$

Jeu à somme nulle

Un jeu est dit à somme nulle lorsque tous ce qui est a gagné par des joueurs et perdus par d'autres en quantité égale, c'est à dire :

$$\forall \sigma \in \Pi S_p \ \ \sum_{p \in \mathcal{P}} u_p(\sigma) = 0$$

Exemple : Le poker, et les jeux à défaite - victoire - nul sont à somme nulle.

2.2 La notion d'information

2.2.1 Perfection

Un jeu est à information parfaite lorsque chaque joueur connait les actions de chaque autre joueur au moment de jouer et leur conséquence. Dans le cas contraire, on dit que le jeu est à information imparfaite.

Exemple :
- le dilemme des prisonniers est à information imparfaite.
- les echecs sont à information parfaite.

Exemple : pierre, feuille, ciseaux PFC est un jeu simultané à information imparfaite. Sa représentation matricielle est la suivante

$$\begin{pmatrix} P & 0 & -1 & 1 \\ F & 1 & 0 & -1 \\ C & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Complétude

Un jeu est dit à information complète lorsque les paramètres du jeu sont connus de tous les joueurs (par connu, on sous-entend accessible). Dans le cas contraire, le jeu est à information incomplète.

Exemple :
- le poker est à information complète, mais aussi à information imparfaite.
- Le traffic sur internet est à information incomplète (on ne connaît pas le nombre d'utilisateurs).

2.3 Equilibre de Nash

Définition : Un équilibre de Nash est un profil stratégique σ tel que

$$\forall p \in \mathcal{P} \;\; \forall \sigma_p^* \in S_p \quad u_p(\sigma_{-p}, \sigma_p^*) \leq u_p(\sigma)$$

Exemple : Le dilemme des prisonniers
Pour ce jeu, le profil stratégique (trahir, trahir) est un équilibre de Nash.

Propriété : σ est un équilibre de Nash si et seulement si $\forall p \in \mathcal{P} \;\; \sigma_p \in br(\sigma_{-p})$.

Remarque : L"équilibre de Nash n'est pas universel. Il existe des jeux sans équilibre de Nash (comme Pierre - Feuille - Ciseaux).

Propriété : L'équilibre de Nash n'est pas unique dans un jeu.

Exemple : La guerre des sexes.

	Foot	Shopping
Foot	$(1,2)$	$(0,0)$
Shopping	$(0,0)$	$(2,1)$

Il existe deux équilibres de Nash : (Foot, Foot) et (Shopping, Shopping).

2.4 Forme normale

2.4.1 Définition

Etant donné un jeu Γ, on peut définir la forme normale de Γ notée $\mathcal{N}_\Gamma$ qui est un jeu dans lequel :

- Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des joueurs de Γ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des joueurs de $\mathcal{N}_\Gamma$.
- Si S_p est l'ensemble des stratégies d'un joueur $p \in \mathcal{P}$ alors $\Delta(S_p)$, l'ensemble des distributions de probabilités sur S_p, est l'ensemble des stratégies du joueur p.

$$\delta \in \Delta(S_p) \Leftrightarrow \delta : S_p \longrightarrow [0,1] \text{ tel que } \int_{S_p} \delta = 1$$

- La fonction d'utilité $\overline{u_p}$ d'un joueur $p \in \mathcal{P}$ est l'espérance de son gain.

$$\begin{aligned} \overline{u_p}(\delta_i \ldots \delta_p) &= E(u_p(\delta_i \ldots \delta_p)) \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi S_p} u_p(\sigma) P(X = \sigma) \end{aligned}$$

où X est la variable aléatoire qui donne le profil stratégique obtenu aux moyens des distributions données.

2.4.2 Calcul des utilités dans un jeu sous forme normale

Soit δ_R, δ_C deux stratégies d'un jeu sous forme normale, et $S_R = \{\sigma_1 \ldots \sigma_n\}$ et $S_C = \{\tau_1 \ldots \tau_m\}$.
On observe que :

$$\sum_{i \leq n} S_R(\sigma_i) = 1 \text{ et } \sum_{i \leq m} S_C(\tau_i) = 1$$

On peut assimiler S_R et S_C à deux vecteurs λ et μ respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ vérifiant $\lambda_i = \delta_R(\sigma_i)$ et $\mu_i = \delta_C(\tau_i)$. On obtient naturellement que les représentants de σ_i et τ_i sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Ainsi pour $(\lambda, \mu) \in \Delta_n \times \Delta_m$:

$$\begin{aligned}
\overline{u_p}(\lambda, \mu) &= \overline{u_p}(S_R, S_C) \\
&= \sum_{(\sigma,\tau) \in S_R \times S_C} u_p(\sigma, \tau) P(X = (\sigma, \tau)) \\
&= \sum_{(\sigma,\tau) \in S_R \times S_C} \delta_r(\sigma)\delta_C(\tau) u_p(\sigma, \tau) \\
&= \sum_{\sigma \in S_R} \sum_{\tau \in S_C} \delta_r(\sigma)\delta_C(\tau) u_p(\sigma, \tau) \\
&= \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq m} \delta_r(\sigma_i)\delta_C(\tau_j) u_p(\sigma_i, \tau_j)
\end{aligned}$$

On pose $P \in \mathcal{M}_{n \times m} R$ telle que $P_{ij} = u_p(\sigma_i, \tau_j)$. Et comme $\lambda_i = \delta_R(\sigma_i)$ et $\mu_i = \delta_C(\tau_i)$.
On a donc :

$$\overline{u_p}(\lambda, \mu) = \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq m} \delta_r(\sigma_i)\delta_C(\tau_j) P_{ij} = \lambda^t.P.\mu$$

2.4.3 Exemple de calcul

On considère *pierre - feuille - ciseaux*, et on fait jouer une stratégie uniforme aux deux joueurs.
Pour $p \in \{R, C\}$, on a :

$$\lambda_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
u_R(\lambda_R, \lambda_C) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 0 \\
\text{De même } u_C(\lambda_R, \lambda_C) &= 0
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que R joue une stratégie $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - (x + y) \end{pmatrix}$ avec $x, y > 0$.

On obtient

$$\begin{aligned} u_R(\alpha, \lambda_C) &= \frac{1}{3}(xy(1-(x+y)) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_R(\alpha, \lambda_C) &= \frac{1}{3}(xy(1-(x+y)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \leq u_R(\lambda_R, \lambda_C) \end{aligned}$$

2.5 Propriétés

Terminologie

Si Γ est un jeu dans lequel S_p est l'ensemble des stratégies du joueur $p \in \mathcal{P}$, on appelle :

stratégie pure un élément de S_p.

stratégie mixte une stratégie du jeu $\mathcal{N}_p$.

On confondra les stratégies pures avec les distributions atomiques. Par extension, $\sigma \in \Pi S_p$ est un profil pur. $\delta \in \Pi\Delta(S_p)$ est un profil mixte.

Lemme Etant donné un jeu matriciel (R, C) et un profil mixte $(\lambda, \mu) \in \Delta_n \times \Delta_m$, il existe toujours une meilleur réponse pure à λ (reps. à μ).

Preuve

Soit $\mu \in \Delta_m$ fixé. Et supposons que $\lambda_0 \in br(\mu)$.

On a

$$^t\lambda_0 R\mu = \sum_{i \leq n} \lambda_0(i).{}^te_i.R.\mu = \max_{\alpha \in \Delta_n} {}^t\alpha R\mu$$

Examinons les gains. Soit $\{^te_iR\mu \mid i \leq n\}$ un ensemble fini. Il existe e_k tel que $^te_kR\mu = \max_{i \leq n}(^te_iR\mu)$. Si l'on suppose qu'il existe j tel que $\lambda_0(j) > 0$ et que $e_jR\mu \neq \max_{i \leq n}(^te_iR\mu)$.

Alors on a

$$^t\lambda_0 R\mu < \sum_{i \neq j, i \neq k} \lambda_0.{}^te_iR\mu + (\lambda_0(j) + \lambda_0(i)).{}^te_kR\mu$$

Ainsi si $\lambda_0(i) > 0$ alors cela implique que $^te_iR\mu = \max(e_iR\mu) = G$.

Ainsi

$$\begin{aligned} ^t\lambda_0 R\mu &= \sum_{i \in I} \lambda_0(i).{}^te_iR\mu \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_0(i)G \\ &= G \\ &= {}^te_kR\mu \end{aligned}$$

Théorème La recherche d'une meilleure réponse à une stratégie mixte μ s'effectue en $\mathcal{O}(n)$.

Démonstration Par le lemme précedant, on calcule l'ensemble des valeurs $\{{}^te_iR\mu \mid i < n\}$, et on extrait i_0 qui réalise le maximum.

Théorème Si (λ, μ) est un équilibre de Nash, alors on a

$$\begin{aligned}\forall i \leq n\ \lambda_i > 0 \ &\Rightarrow\ e_i \in br(\mu)\\ \forall j \leq m\ \mu_j > 0 \ &\Rightarrow\ f_j \in br(\lambda)\end{aligned}$$

Démonstration En utilisant le raisonnement de la preuve du lemme précedant.

On dit que λ est une combinaison convexe de $\{x_i, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ lorsque

$$\lambda = \sum_{i\leq n} \text{ avec } \sum_{i\leq n} \lambda_i = 1 \text{ et } \forall i \leq n\ \lambda_i \geq 0$$

Ainsi si (λ, μ) est un équilibre de Nash, λ et μ sont construit dans un sous simplexe de Δ_n et Δ_m respectivement.

Propriété Si $\forall i \in I \subset [1..n]\ {}^te_iR\mu = C^{te}$ alors si $\sum x_i = 1$ et $x_i \geq 0$

$$\sum_{i\in I} x_i.{}^te_iR\mu = C^{te}$$

Théorème (Xieng, Deng, 2006)

Trouver un équilibre de Nash pour un jeu matriciel (à deux joueurs) est un problème PPAD-complet.
PPAD signifie "problème dont on est assuré qu'il existe une solution que l'on souhaite trouver".

Théorème (Nash, 1954)

Tout jeu sous forme normale possède un équilibre de Nash (en stratégie mixte).

3 Les jeux déterministes

Ceux sont des jeux pour lesquels le hasard n'intervient pas :
- le nombre de joueurs est déterminé.
- les stratégies accessibles sont déterministes.

Attention ! dans le cas des jeux sous forme normale, la stratégie peut être probabiliste mais le joueur a accès à toutes.

Par exemple, le poker est probabiliste, les fonctions d'utilité sont des fonctions probabilistes.
Dans les jeux sous forme normale dérivant d'un jeu matriciel où la matrice est déterministe, les gains ne sont pas probabilistes.

Remarque On peut voir un jeu de carte donné, non pas comme un jeu probabiliste (la distribution fait alors partie du jeu) mais comme une classe de jeu déterministe à information incomplète.

3.1 Définitions et théorèmes

Définition σ_p est une stratégie gagnante pour $p \in \mathcal{P}$ lorsque dans un jeu d'utilité $\{0, -1, 1\}$

$$\forall \sigma_{-p} u_p(\sigma_{-p}, \sigma_p) = 1$$

Théorème (Zermelo)
Tout jeu à deux joueurs, à information complète et parfaite, déterministe, dans lequel les gains sont (Victoire ou Défaite) à somme nulle est tel que l'un des deux joueurs possède une *stratégie gagnante.*

Théorème (Von Neumann)
Dans tout jeu à deux joueurs à information complète, parfaite, déterministe à somme nulle aux gains (Victoire, Défaite, Nul), l'un des joueurs possède une stratégie dans laquelle il assure au moins le nul.

$$\exists i \in \{p_1, p_2\},\ \exists \sigma_i\ \forall \sigma_i'\ \ u_p(\sigma_i', \sigma_i) \geq 0$$

Exemples
- Jeu de go (Zermelo)
- Echecs (Von Neumann)
- Dames (Von Neumann), une stratégie gagnante est même connu désormais.

3.2 Le jeu de Gale

On se donne un quadrillage de taille $n \times k$ ($n > 0, k > 0$). Alternativement, deux joueurs choisissent un carré et enlèvent tout carré situé en haut et à droite du carré choisi.

Le perdant est celui qui prend le dernier carré. Le gagnant est l'autre. A chaque coup, un joueur est obligé de prendre un carré (on ne passe jamais son tour).

Propriété Le premier joueur possède une stratégie gagnante.

Démonstration Par le théorème de Zermelo, il existe pour l'un des joueurs une stratégie gagnante.
- Supposons que le joueur 2 la possède.
- Demandons au joueur 1 de jouer le dernier carré, et laissons le joueur 2 utiliser sa stratégie gagnante.

A partir de là, deux solutions sont possibles :
- soit le premier coup à jouer pour la stratégie gagnante est le dernier carré, auquel cas le joueur 2 n'a pas de stratégie gagnante.

- soit le premier coup est (n_1, k_1) pour la stratégie gagnante. En remarquant que le joueur 1 aurait joué (n_1, k_1) tout en laissant le jeu dans le même état qu'après le joueur 2, et en utilisant ce raisonnement inductivement sur chaque coup, on remarque que quelque soit ce que le joueur 2 aurait pu jouer, le joueur 1 peut le faire.
  Il vient que le joueur 1 peut jouer la stratégie gagnante du joueur 2.

3.2.1 Le cas $2 \times n$

Soit un quadrillage $2 \times n$. On notera un *état* du jeu $\langle p, q\rangle$, c'est à dire un jeu où la ligne 1 a p cases et la ligne 2 a q cases.

Stratégie gagnante
- Premier coup : (n, 2)
- Si le joueur 2 joue (k, i) $(i \in \{1, 2\},\ k \leq n, (k, i) \neq (n, 2))$
  - Si $(i = 1)$ alors le joueur 1 joue $(k - 1, 2)$
  - Si $(i = 2)$ alors le joueur 1 joue $(k + 1, 2)$

Démonstration Après le premier coup, le jeu est en $\langle n, n - 1\rangle$.
- Si le joueur 2 joue $\langle k, 1\rangle$ alors le jeu est en $\langle k - 1, k - 1\rangle$. Il devient possible au joueur 1 de jouer $(k - 1, 2)$ dont on remarque que c'est le coup initial pour un jeu $2 \times k - 1$.
- Si le joueur 2 joue $\langle k, 2\rangle$ alors le jeu est en $\langle n, k - 1\rangle$, le coup $k = n$ étant impossible, le joueur 1 peut jouer $(k+1, 1)$ laissant le jeu dans l'état $\langle k-1, k\rangle$, soit le premier coup du joueur 1 dans un jeu $2 \times k$.
- Pour $k = 1$, le jeu $2 \times k$ est le jeu en jouant $(1, 2) = (k, 2)$, la position devient $\langle 1, 1\rangle$. Le joueur 2 perd.

Le résultat est donc montré inductivement.

3.2.2 Le cas (n, n)

Théorème Le joueur 1 joue comme premier coup $(2, 2)$. Le joueur 1 répondra au joueur 2 par le coup symétrique suivant la diagonale du carré initiale. Ceci détermine une stratégie gagnante.

Démonstration
- Le jeu commence dans une position $\langle n, n\rangle$.
- Le joueur 2 peut donc :
  - soit enlever p carrés de la barre horizontale.
  - soit enlever p carrés de la barre verticale.
- Considérons l'horizontal (sans perte de généralité) :
  - le jeu devient $\langle n, n - p\rangle$, si le joueur 1 joue symétriquement, le jeu devient $\langle n - p, n - p$.
  - En posant $k = n - p$, on se retrouve dans jeu (k, k) après le premier coup du joueur 1. Ce cas initial est perdant pour le joueur 2.

Inductivement, on montre que cette stratégie est perdante pour le joueur 1.

Remarque On peut définir le jeu de Gale avec un quadrillage de dimensions supérieur à 2.

On peut envisager des cas où les dimensions du jeu sont infinies (transfinies, Chomp en anglais).

Définition Un jeu à horizon infini est un jeu pour lequel on ne peut borner le nombre de coup.*

Exemple
- Le jeu de Gale, les échecs sont à horizon finis.
- Le jeu de Gale transfini est à horizon infini, cependant le nombre de tour est fini (*i.e* on ne sait pas donner une borne au nombre de coup, bien que ceux-ci soient finis.
- La bataille est à horizon infini où la partie peut être à temps infini.

r

Démonstration (Echecs)

64 cases, 32 pièces donc le nombre de configurations possibles aux échecs est inférieur 64^{33}. Une règle indique qu'on ne passer plus de N fois (N fixé à l'avance) par la même configuration. On obtient que le nombre de coup est par $N64^{33} < +\infty$.

4 Jeu sur un ensemble à ordre partiel

Plus communement appelé *Poset game* : Partially ordered Set Game.

Définition Il s'agit de jeux (généralement à 2 joueurs) où l'on joue sur un ensemble partiellement ordonné $(E, <)$ (un poset) tel qu'il existe une élément minimal pour cet ordre, *i.e* $\exists x \; \forall y \; x \leqslant y$.

On déclare perdant un joueur prenant l'élément minimal, gagnant les autres.

Chaque coup consiste en la prise d'un élément $e_i \in E$ et on construit une suite $E_{i+1} = E_i \backslash \{z \in E \mid e \leqslant z\}$.

Remarque Si le jeu est à 3 joueurs ou plus, l'existence d'une stratégie gagnante n'est pas assuré.

Exemple
- Le jeu des allumettes. On dispose de N allumettes munies de l'ordre linéaire. A chaque coup on peut prendre au plus K allumettes.
- Les jeux de Nim. On dispose de piles de pièces de hauteur variée. Chaque joueur à son tour prend au plus k pièces sur une même pile. Le perdant est celui qui ne peut plus rien enlever.