

# Résolution d'un problème d'élasticité linéaire

Thomas Poisson

## 1 Introduction au problème considéré

On s'intéresse dans ce document à la déformation d'un barrage de retenue d'eau dit barrage-voûte. Ce type de barrage repose sur une redirection des forces, notamment la pression exercée par l'eau, en direction des cotés fixés sur le bord de celui-ci. Ces barrages ont typiquement une forme d'arc, d'où leur nom de barrage-voûte.

L'étude sera consistée à modéliser le barrage à l'aide des équations de l'élasticité linéaire, et d'une résolution à l'aide de la méthode des éléments finis. La résolution numérique s'effectuera à l'aide du logiciel FreeFem++.



FIGURE 1.1 – Barrage-voûte

## 2 Mise en place des équations

### 2.1 Formulation forte

On cherche à étudier les déformations des points matériels du barrage. On note pour cela le champ de déplacement  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , mesurée à partir d'une position initiale. Ici, nous considérons un problème quasi-statique, nous ne nous intéresserons donc pas à la composante en temps. Le champ de déplacement du point matériel  $\vec{x}$  sera donc noté  $\vec{u}(\vec{x})$ . Nous utiliserons les notations suivantes :

- $\epsilon$  pour le tenseur de déformations, avec :

$$\epsilon_{i,j}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\delta_i u_j(\vec{x}, t) + \delta_j u_i(\vec{x}, t)) \quad (1)$$

- $\sigma$  pour le tenseur des contraintes.

On l'exprime à l'aide de la loi de Hooke, et sous les hypothèses de matériau homogène isotrope, sous la forme :

$$\sigma_{i,j} = 2\mu\epsilon_{i,j} + \lambda \left( \sum_{k=1}^d \epsilon_{k,k} \right) \delta_{i,j} \quad (2)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent les coefficients de Lamé du matériau.

On considère  $\omega$  le domaine délimitant le barrage (ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ). Il est soumis à son propre poids ( $f_\Omega$ ), est encastré sur les parois latérales et sur le fond (frontière  $\Gamma_0$ ) et est soumis à la pression de l'eau ( $f_\Gamma$ ) sur le bord qui y est exposé (frontière  $\Gamma_1$ ) et est libre sur les autres bords (frontière  $\Gamma_2$ ). D'après le principe fondamental de la dynamique, sous l'hypothèse quasi-statique, le système est décrit par :

$$f_\Omega = -\text{div}_x(\sigma) \quad \text{sur } (\Omega) \quad (3)$$

On a de plus comme conditions aux limites :

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } (\Gamma_0) \quad (4)$$

$$\sigma(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = f_\Gamma \quad \text{sur } (\Gamma_1) \quad (5)$$

$$\sigma(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_2) \quad (6)$$

La pression de l'eau se réexprime :

$$f_\Gamma(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\rho_{\text{eau}}g(h-z)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\rho_{\text{eau}}g(h-z)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

avec  $h$  la hauteur du barrage,  $g$  la constante gravitationnelle.

## 2.2 Formulation faible

On cherche à partir de ces équations à obtenir une formulation variationnelle exploitable. On a, par l'équation (3)  $\forall v \in V_0$  :

$$\int_{\Omega} f_{\Omega}(x)v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}_x(\sigma(x))v(x) \, dx \quad (8)$$

Où  $V_0$  désigne l'espace des fonctions test  $\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall i \in \{1, 2, 3\}, v_i \in H_{0,\Gamma_0}^1(\Omega)\}$ .  
Ce qui se traduit par  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\int_{\Omega} f_{\Omega,i}v_i = - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} v_i \quad (9)$$

En utilisant la formule de Green, et que la fonction test  $v$  est nulle sur  $\Gamma_0$  :

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \oint_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j v_i \right\} = \int_{\Omega} f_{\Omega,i} v_i \quad (10)$$

En sommant sur  $i$  la relation ainsi obtenue, on a :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} f_{\Omega,i} v_i + \oint_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j v_i \quad (11)$$

A l'aide du lemme technique démontré en cours, et en réexprimant les sommes sous forme de produits scalaires, on obtient finalement le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V_0, \\ \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) = \int_{\Omega} f_{\Omega} \cdot v + \oint_{\Gamma_1} f_{\Gamma} \cdot v \end{array} \right. \quad (12)$$

Où  $V$  désigne l'espace des fonctions  $\{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall i \in \{1, 2, 3\}, u_i \in H_0^1(\Omega)\}$  (on a une condition de Dirichlet homogène).

On a alors, en détaillant  $\sigma : \epsilon(v)$ , et en utilisant la loi de Hooke pour réexprimer  $\sigma$  en fonction de  $\epsilon(\vec{u})$ , la formulation variationnelle en déplacement suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V_0, \\ 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \cdot \operatorname{div}(v) = \int_{\Omega} f_{\Omega} \cdot v + \oint_{\Gamma_1} f_{\Gamma} \cdot v \end{array} \right. \quad (13)$$

On peut démontrer, à partir du théorème de Lax-Milgram et en utilisant une inégalité appelée inégalité de Korn, que le problème est bien posé et possède une unique solution  $\vec{u} \in V$

### 3 Discrétisation et éléments finis

Pour mailler l'ensemble du barrage, on commence par mailler la surface au sol du barrage, puis on utilise la fonctionnalité *Buildlayers* pour transformer le maillage de cette surface en maillage dans l'espace 3D. Les barrages voûtes sont typiquement plus large en bas qu'à leur sommet, on applique donc une transformation aux couches pour respecter cette propriété. Les maillages obtenus sont décrits dans les figures 3.1 et 3.2. Le rayon extérieur du barrage est de 180 (unités arbitraires [ua]), et le diamètre du maillage choisi pour l'étude est de :

$$\max \{diam_{T_k} | T_k \in T_h\} = 7.62677 [ua]$$

Nous choisissons d'utiliser, pour résoudre la formulation variationnelle, des éléments finis Lagrange de type  $P_1$ .

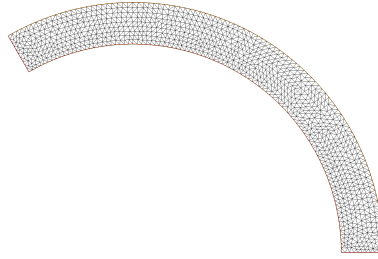


FIGURE 3.1 – Maillage 2D de la base du barrage

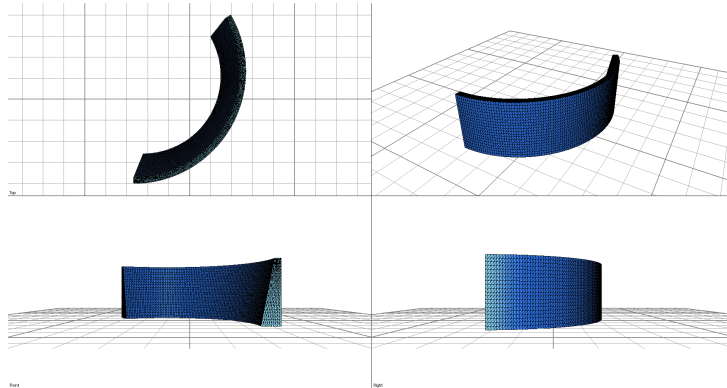


FIGURE 3.2 – Maillage 3D du barrage

## 4 Implémentation et résultats

Un code réalisé avec FreeFem++ a permis l'implémentation et la résolution du problème variationnel. Il permet l'affichage du maillage déformé, avec un facteur d'amplification choisi afin de rendre les résultats visibles. Ces résultats sont présentés par la figure 4.2.

La portion de code 4 présente la partie résolution du problème. Le module de résolution utilisé est le module `lamé`, dédié à la résolution des problèmes d'élasticité linéaire. On note l'utilisation de 2 macros, une pour  $\epsilon$  et l'autre pour  $\sigma$ . Ces macros permettent une légère simplification numérique des calculs : en exploitant la structure symétrique des deux tenseurs on se ramène à un problème numérique vectoriel (ici de dimension 6) à résoudre.

```

1 fespace Vh(Th,P1);
2 Vh u1,u2,u3, v1,v2,v3;
3 real sqrt2=sqrt(2.);
4
5 macro epsilon(u1,u2,u3) [dx(u1), dy(u2), dz(u3),
6                          (dy(u1)+dx(u2)) / sqrt2,
7                          (dz(u1)+dx(u3)) / sqrt2,
8                          (dy(u3)+dz(u2)) / sqrt2] //fin de macro
9
10 macro div(u1,u2,u3) [dx(u1) + dy(u2) + dz(u3)] //fin de macro
11
12 solve lame([u1,u2,u3],[v1,v2,v3])=int3d(Th)(2*mu*(epsilon(u1,u2,u3)'*epsilon
13   ↪ (v1,v2,v3))
14   + lambda*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3))
15   - int3d(Th)(- gravitVolumique*v3)
16   - int2d(Th,2)(pressionEauSurfx*v1 + pressionEauSurfy*v2 +
17   ↪ pressionEauSurfz*v3)
18   + on(1, u1 = 0, u2 = 0, u3 = 0);

```

On observe premièrement que les conditions aux limites de Dirichlet homogène posées ont été bien respectées lors de la résolution du problème. Le barrage se déforme selon la force exercée par l'eau, et l'amplitude de la déformation est maximale au sommet de celui-ci. On observe ainsi un affaissement vers le centre de la voûte (voir la figure 4.1).

On remarque de plus que la hauteur du barrage augmente après déformation. Cela est à nuancer, il faudrait vérifier que cela est bien un phénomène réel et non lié à la manière de modéliser la pression de l'eau : en effet on applique cette pression jusqu'au sommet du barrage, qui est alors rempli "à ras bord", y compris lorsque celui-ci se déforme et remonte.

Pour conclure, la forme de voûte du barrage lui permet de rediriger la pression de l'eau en direction des bords, où il est fixé, et ainsi de conserver au maximum son intégrité et donc limiter la déformation.

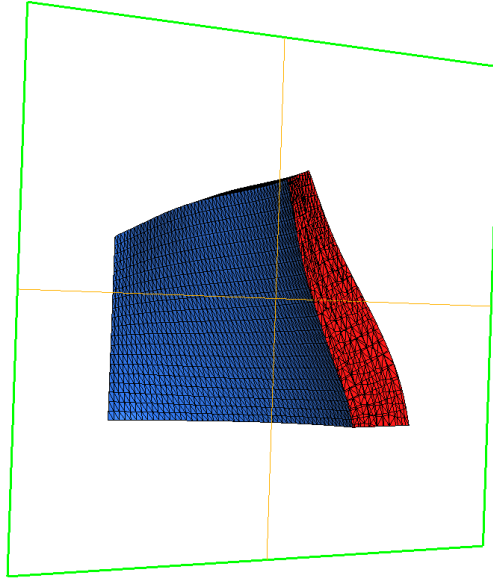


FIGURE 4.1 – Barrage déformé, coupe au niveau du centre (coefficient d'amplification de 1000)

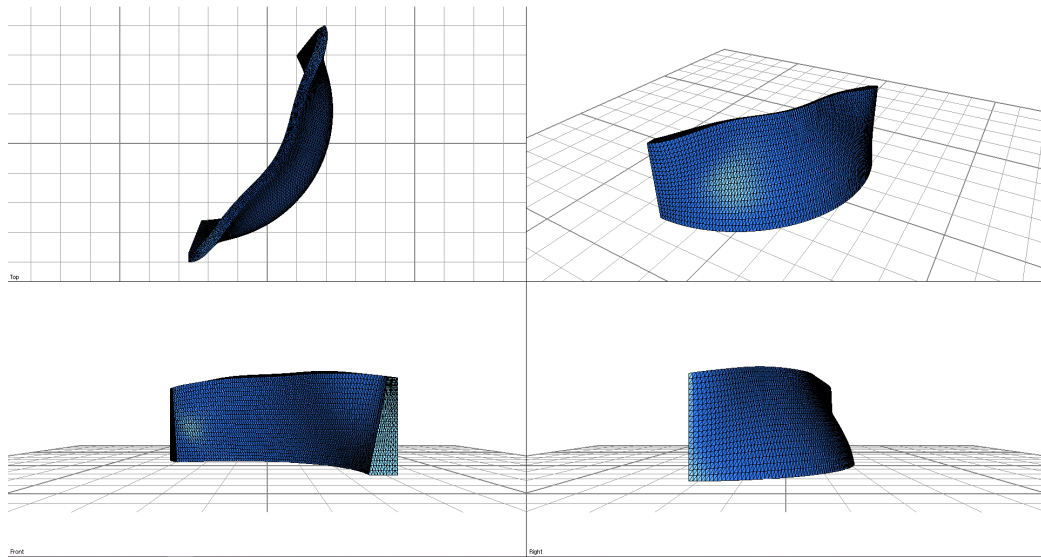


FIGURE 4.2 – Déformation du barrage (coefficient d'amplification du déplacement de 1000)