Résolution du problème isopérimétrique

Projet optimisation

M1 CSMI
Université de Strasbourg

Thomas Saigre & Romain Vallet

27 avril 2020

Table des matières

Problème isopérimétrique

Definition

Un *problème isopérimétrique* est un problème d'optimisation qui vise à trouver un domaine de $\mathbb{R}^2$ (plus d'autres conditions) qui maximise l'aire pour un périmètre constant :

$$\max_{D \in \mathcal{C}} \mathrm{Aire}(D) \tag{IA}$$

Avec $\mathcal{C} = \{D \text{ convexe borné de } \mathbb{R}^2, \mathrm{Per}(D) = p_0\}$ avec $p_0 \in \mathbb{R}_+$ une constante.

Nous pouvons rajouter des contraintes sur $\mathcal{C}$.

Problème iso-aire

Definition

Un *problème iso-aire* est un problème d'optimisation qui vise à trouver un domaine de $\mathbb{R}^2$ (plus d'autres conditions) qui minimise le périmètre pour une aire constante :

$$\min_{D \in \mathcal{C}} \operatorname{Per}(D) \tag{IP}$$

Avec $\mathcal{C} = \{D \text{ convexe borné de } \mathbb{R}^2, \operatorname{Aire}(D) = c\}$ avec $c \in \mathbb{R}^+$ une constante.

Nous pouvons rajouter des contraintes sur $\mathcal{C}$.

Les problèmes *isopérimétrique* et *iso-aire* sont **équivalents**.

Maximisation d'une surface à périmètre constant

Théorème

La solution du problème *isopérimétrique* (ou *iso-aire*) avec $p_0 = 2\pi$ pour des domaines à bords C^1 est un cercle.

Équivalence avec les fonctions (1/2)

Remarque

Le problème est équivalent à trouver une fonction $z : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $z(-\pi) = z(\pi)$ et $|z'| \equiv 1$ telle que son aire soit maximale :

$$\max_{z \in C^1, |z'| \equiv 1} Aire(z)$$

En effet, on a une bijection :

$$\Omega \text{ domaine convexe borné à bord } C^1 \text{ de perimètre } p_0$$

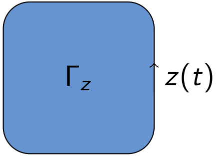
$$\longleftrightarrow$$

$$z : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } z(-\pi) = z(\pi) \text{ et } |z'| \equiv 1$$

On écrit Γ_z l'image réciproque de la bijection de z.

Équivalence avec les fonctions (2/2)

- Aire de $\Gamma_z = Aire(z) = \frac{1}{2}\text{Im}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}z'\right)$
- perimètre de $\Gamma_z = perimetre(z) = \int_{-\pi}^{\pi} |z'| = 2\pi$



Correspondance domaine fonction

Suite de la preuve (1/5)

Comme $z \in L^2$, par la **Théorie de Fourier**, $z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$, où $e_n = s \mapsto e^{ins}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in [-\pi, \pi]$. On note $z = x + iy$ avec x et y respectivement parties réelle et imaginaire de z.
Le but est de prouver que si $Aire(z)$ est maximale alors $z = c_0 + c_1 e_1$ ce qui correspond à un cercle.

Propiété

Soit $z = c_0 + c_1 e_1$ avec $|z'| \equiv 1$ alors Γ_z est un **cercle**.

Démonstration.
On a $|z'(s)| = |c_1| = 1$ donc c_1 s'écrit e^{is_1} avec $s_1 \in [\pi, \pi]$.
Donc Γ_z, le graphe de $z = c_0 + e^{is_1} e_1$, est le résultat d'une rotation d'angle s_1 et d'une translation de c_0 du graphe de la fonction e_1 soit le cercle de centre 0 et de rayon 1 ($\Gamma_{e_1} = \{e^{is}, s \in [-\pi, \pi]\} = \{(cos(s), sin(s)), s \in [-\pi, \pi]\}$). Alors Γ_z est un cercle. □

Suite de la preuve (2/5)

D'une part :

$$\begin{aligned}
Aire(z) &= \frac{1}{2}\text{Im}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{z}(s)z'(s)\text{d}s \\
&= \frac{1}{2}\text{Im}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n}e^{-ins} \sum_{m\in\mathbb{Z}} imc_n e^{ims}\text{d}s \\
&= \frac{1}{2}\text{Im}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} imc_m\overline{c_n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ims}e^{-ins} \\
&= \frac{1}{2}\text{Im}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} im|c_m|^2 2\pi\delta_{n,m} \\
&= \pi\text{Im}\left(i\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} nc_n\overline{c_n}\right) \\
Aire(z) &= \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2
\end{aligned}$$

Suite de la preuve (3/5)

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |z'(s)|^2 \mathrm{d}s &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n c_n e^{ins} \sum_{m\in\mathbb{Z}} m\overline{c}_m e^{-ims} \mathrm{d}s \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} nmc_n\overline{c}_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{ins} e^{-ims} \mathrm{d}s \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} nmc_n\overline{c}_m 2\pi\delta_{n,m} \\
2\pi &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 \\
1 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2
\end{aligned}$$

Suite de la preuve (5/7)

Astuce magique : $n \leqslant n^2$ d'où :

$$Aire(z) = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n|c_n|^2 \leqslant \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 = \pi$$

Condition d'optimalité : $Aire(z) \leqslant \pi$

On remarque que pour $z = c_0 + c_1 e_1$: $Aire(z) = \pi|c_1|^2 = \pi$. Le problème admet au moins une solution.
Prouvons maintenant qu'elle est nécessairement de la forme $c_0 + c_1 e_1$.

Suite de la preuve (6/7)

Ensuite, on introduit la *déviation* $w = z - (c_0 + c_1 e_1)$, et, avec la majoration $1 + n^2 \leqslant \frac{5}{2}(n^2 - n)$ pour $n \neq 0, 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|w\|_{H^1}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|w|^2 + |w'|^2)ds \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} (|c_n|^2 + n^2|nc_n|^2) \text{ comme précédement} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} (1+n^2)|c_n|^2 \\
&= \frac{5}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} n^2|c_n|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} n|c_n|^2\right) \text{ par la majoration} \\
\|w\|_{H^1}^2 &\leqslant \frac{5}{2}\left(1 - \frac{Aire(z)}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Le terme de droite est appelé **déficit isopémétrique**.

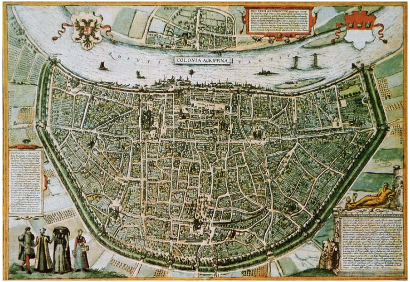
Suite de la preuve (7/7)

Nous avons : si $Aire(z) = \pi$ alors $\|w\|_{H^1} = 0$, alors $z = c_0 + c_1 e_1$.

Nous avons prouvé que le problème admet des solutions et qu'elles correspondent seulement à l'image réciproque de la bijection de $c_0 + c_1 e_1$ (avec c_0 et $c_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|c_1| = 1$) c'est-à-dire un **cercle**.

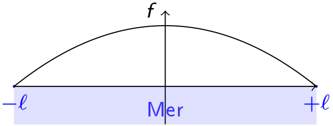
Problème de la reine Didon

- Les terres où elle pourra s'établir seront « autant qu'il pourrait en tenir dans la peau d'un bœuf »
- Exemple de la ville de Cologne, au Moyen-Âge :



Position du problème

- ℓ est fixé
- On cherche à maximiser l'aire du domaine pour un périmètre donné (ou de façon équivalente : minimiser le périmètre pour une aire donnée)



Résultat

Théorème :

Le demi-cercle $y(x) = \sqrt{\ell^2 - x^2}$ est solution du problème iso-aire en prenant $A_0 = \frac{\pi}{2}\ell^2$. Il est donc solution du problème de Didon pour le choix de $p_0 = \pi\ell$.

Rappel de cours

Un point critique d'une fonction differentiable convexe est un minimum.

Démonstration.

On montre que la fonction y résout la fonction d'Euler associée au problème.
Soit J la convexe $J\colon f \mapsto \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + f'(t)}\mathrm{d}t$. On pose $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \mapsto J(y + t\eta)$ avec η telle que $\eta(-\ell) = \eta(\ell) = 0$ et $\int_{-\ell}^{\ell} \eta = 0$, puis on montre que $\varphi'(0) = 0$. □

Preuve (1/4)

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{J(y+t\eta)-J(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1+((y(x)+t\eta(x))')^2} - \sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{1+((y(x)+t\eta(x))')^2-(1+y'(x)^2)}{\sqrt{1+(y(x)+t\eta(x))'^2}+\sqrt{1+y'(x)^2}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{2ty'(x)\eta'(x)+t\eta'(x)}{\text{idem}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{y'(x)\eta'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Preuve (2/4)

Rappel : $y(x) = \sqrt{\ell^2 - x^2}$, avec une IPP :

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{y'(x)\eta'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \mathrm{d}x = \left[\frac{-\eta(x)x}{\ell}\right]_{-\ell}^{\ell} + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\eta(x)}{\ell} \mathrm{d}x \\ &= 0 \qquad \text{car } \eta(-\ell) = \eta(\ell) = 0 \text{ et } \int \eta = 0 \end{aligned}$$

Preuve (3/4)

$$
\begin{aligned}
0 = \varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{J(y+t\eta) - J(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(J(y + t(\eta - y + y)) - J(y)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(J((1-t)y + t(\eta + y)) - J(y)\Big) \\
&\leqslant \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((1-t)J(y) + tJ(\eta + y) - J(y)\Big) \quad \text{par convexité de } J \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(-tJ(y) + tJ(\eta + y)) \\
&= -J(y) + J(\eta + y)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{J(y) \leqslant J(y+\eta)}$$

Preuve (4/4)

$$\boxed{J(y) \leqslant J(y+\eta)}$$

Cela étant vrai $\forall \eta$ telle que $\eta(-\ell) = \eta(\ell) = 0$ et $\int \eta = 0$:

$$J(y) \leqslant J(f) \quad \forall f \text{ avec } f(-\ell) = f(\ell) = 0 \int f = A_0$$

$$(f = y + \eta \text{ avec } \eta \text{ bien choisi})$$

Discrétisation

On discrétise en $n+2$ points $f_i = f(x_i)$ pour $i = -1, \ldots, n$ $(f_{-1} = f_n = 0)$.

Problème d'optimisation

Le problème devient un problème d'optimisation en dimension finie :

$$\max_{f \in (\mathbb{R}^+)^n, \mathrm{Aire}(f) = a_0} lg(f)$$

Avec :

- Aire : $\mathrm{Aire}(f) \simeq h \sum_{i=0}^{n} f_i$
- Longueur : $lg(f) \simeq \sqrt{f_0^2 + h^2} + \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_{i+1} - f_i)^2 + h^2} + \sqrt{f_{n-1}^2 + h^2}$

Algorithme d'Uzawa

Nous allons utiliser l'algorithme d'Uzawa projeté (on effectue une projection pour voir un résultat positif, sans avoir à ajouter de contrainte supplémentaire) :

Formule du Lagrangien

Le Lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f, \lambda &\to lg(f) + \lambda(\text{Aire}(f) - a_0) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variante d'Uzawa (méthode d'Arrow–Hurwicz) : les étapes de recherches des *min* et *max* sont remplacées par des méthodes de gradient (montant ou descendant)
Au lieu de rechercher ρ maximisant $L(f_k - \rho \nabla L(f, \lambda))$, nous voulons ρ tel que $L(f_{k+1}) = L(f_k - \rho \nabla L(f, \lambda)) < L(f_k)$.
Au lieu de rechercher σ minimisant $\lambda_k + \sigma(A(f) - a_0)$, nous voulons σ tel que $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \sigma(A(f) - a_0) > \lambda_k$.

Présentation des algorithmes (1/3)

Algorithme 1 : Résout le problème de Didon par Uzawa

Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$f_0 \leftarrow f$
$\lambda_0 \leftarrow \lambda$
while *condition d'arrêt* **do**
  $\rho_{k+1} \leftarrow \text{recherche\_rho}(f_k, \lambda_k)$
  $f_{k+1} \leftarrow f_k - \rho_{k+1} Grad(f, \lambda)$
  projeter f_{k+1} sur $(\mathbb{R}^+)^n$
  $\sigma_{k+1} \leftarrow \text{recherche\_sigma}(f_{k+1}, \lambda_k)$
  $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k + \sigma_{k+1}(A(f_k) - a_0)$
  $k \leftarrow k + 1$
end
Output : f

Présentation des algorithmes (2/3)

Algorithme 2 : recherche_rho : Renvoie le pas pseudo-optimal pour la variable primale

Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Result : $L(fbis, \lambda) < L(f, \lambda)$ avec $fbis = f - \rho_i \nabla L(f, \lambda)$
$fbis_0 \leftarrow f$
$\rho_0 = 1$ (valeur arbitraire)
while $L(fbis_i, \lambda) > L(fbis_{i-1}, \lambda)$ **do**
  $\rho_{i+1} \leftarrow \rho_i / 1.2$
  $fbis_{i+1} \leftarrow fbis_i - \rho_{i+1} Grad(f, \lambda)$
  $i \leftarrow i + 1$
end
Output : ρ_i

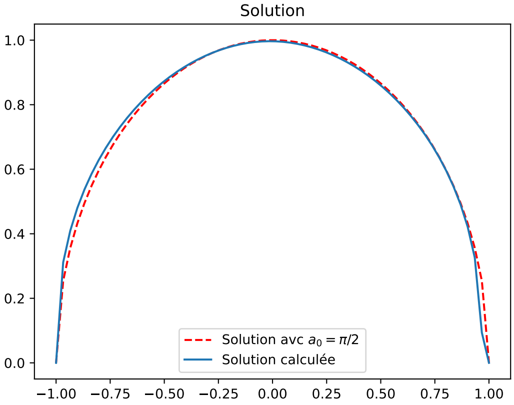
Présentation des algorithmes (3/3)

Algorithme 3 : recherche_sigma : Renvoie le pas pseudo-optimal pour la variable duale

Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Result : $\lambda bis > \lambda$ avec $\lambda bis = \lambda + \sigma(A(f) - a_0)$
$\lambda bis_0 = \lambda$
$\sigma_0 \leftarrow 1$ (valeur arbitraire)
while $\lambda bis_i < \lambda bis_{i-1}$ **do**
    $\sigma_{i+1} \leftarrow \sigma_i / 1.3$
    $\lambda bis_{i+1} \leftarrow \lambda bis_i + \sigma_{i+1}(A(f) - a_0)$
    $i \leftarrow i + 1$
end
Output : σ_i

Résultats

Avec $\ell = 1$ et $a_0 = \frac{\pi}{2}$: la solution exacte est un demi-cercle.

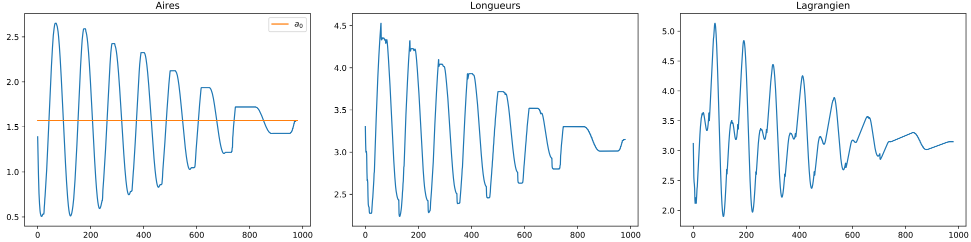


Résultat obtenu : 3.1490304292815354

Résultats

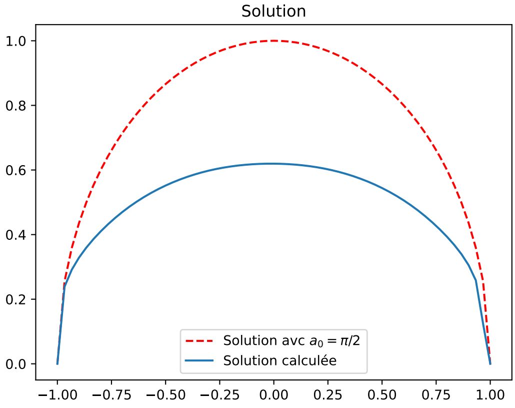
Avec $\ell = 1$ et $a_0 = \frac{\pi}{2}$: la solution exacte est un demi-cercle.

Évolution au cours des 980 itérations :



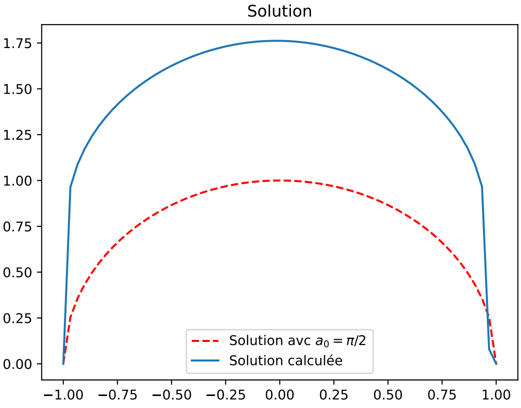
Résultats (suite)

$a_0 = 1$



En 287 itérations : 2.625

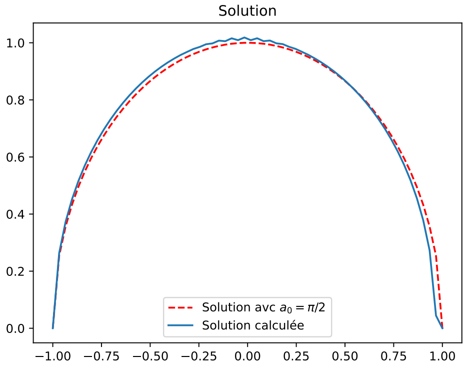
$a_0 = 3$



En 2 768 itérations : 4.622

Autre méthode de résolution : Lagrangien augmenté

- $L_b(f,\lambda) = lg(f) + \lambda\left(A(f) - a_0\right) + \frac{b}{2}\left(A(f) - a_0\right)^2$
- Mise à jour du multiplicateur : $\lambda^{n+1} = \lambda^n + b\left(A(f_k) - a_0\right)$



$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Autre méthode de résolution : Lagrangien augmenté

$a_0 = 4$, en 1 671 itérations (contre au moins 2×10^5 avec le lagrangien « normal »)