Résolution du problème isopérimétrique

Projet d'optimisation

Master 1 – CSMI
Université de Strasbourg

Thomas Saigre & Romain Vallet

Résumé

Nous étudions ici le problème isopérimétrique, c'est-à-dire que l'on cherche à maximiser l'aire d'un domaine pour un périmètre donné. Une étude analytique de ce problème sera menée dans un premier temps. Ensuite, nous verrons une implémentation d'un cas particulier de problème isopérimétrique, le problème de Didon, en utilisant une méthode d'Uzawa.

1 Définition du problème isopérimétrique

Définition 1.1. Un *problème isopérimétrique* est un problème d'optimisation qui vise à trouver un domaine de $\mathbb{R}^2$ (plus d'autres conditions) qui maximise l'aire pour un périmètre constant :

$$\max_{D\in\mathcal{C}} \mathrm{Aire}(D) \tag{IA}$$

Avec $\mathcal{C} = \{D \text{ un convexe borné de } \mathbb{R}^2, \mathrm{Per}(D) = p_0\}$ avec $p_0 \in \mathbb{R}_+$ une constante.

Définition 1.2. Un *problème iso-aire* est un problème d'optimisation qui vise à trouver un domaine de $\mathbb{R}^2$ (plus d'autres conditions) qui minimise le périmètre pour une aire constante :

$$\min_{D\in\mathcal{C}} \mathrm{Per}(D) \tag{IP}$$

Avec $\mathcal{C} = \{D \text{ un convexe borné de } \mathbb{R}^2, \mathrm{Aire}(D) = c\}$ avec $c \in \mathbb{R}_+$ une constante.

Par « plus d'autres conditions », on entend une restriction de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, avec le problème de Didon (pour plus de détails voir ci-après), nous introduisons la classe : $K = \{\Omega_f, f \in \mathcal{C}^1([-\ell,\ell],\mathbb{R}^+) \text{ et } f(-\ell) = f(\ell) = 0\}$ avec $\Omega_f = \{x, y \in \mathbb{R}^2, -\ell \leq x \leq \ell \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Les problèmes deviennent :

— *problème isopérimétrique* :

$$\max_{D\in\mathcal{C}} \mathrm{Aire}(D) \qquad \text{avec } \mathcal{C} = \{D \in K, \mathrm{Per}(D) = p_0\} \tag{IDA}$$

— *problème iso-aire* :

$$\min_{D\in\mathcal{C}} \mathrm{Per}(D) \qquad \text{avec } \mathcal{C} = \{D \in K, \mathrm{Aire}(D) = c\} \tag{IDP}$$

Les deux problèmes IP et IA sont équivalents. Plus précisément :

Théorème 1.3 ([1]). *Le problème isopérimétrique et le problème iso-aire ont les mêmes solutions pour des choix compatibles de p_0 et A_0.*

Preuve. On se place dans le cas où D est le domaine délimité par le graphe d'une fonction y qui s'annule en $-\ell$ et en ℓ. On a alors $\mathrm{Aire}(D) = \int y(x)\mathrm{d}x$, et $\mathrm{Per}(D) = \int \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$ (voir section 3). Ces quantités sont notées respectivement $\mathrm{Aire}(y)$ et $\mathrm{Per}(y)$.

Soit y_A une solution de (IA), et supposons par l'absurde que y_A n'est pas solution de (IP). Il existe alors un domaine y_p tel que

$$\mathrm{Aire}(y_p) > \mathrm{Aire}(y_A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Per}(y_p) = \mathrm{Per}(y_a)$$

Par croissance de l'intégrale, les fonctions $\alpha \mapsto \mathrm{Aire}(\alpha y)$ et $\alpha \mapsto \mathrm{Per}(\alpha y)$ sont des fonctions croissantes.

On choisit $\alpha < 1$ tel que $\mathrm{Aire}(\alpha y_p) = \mathrm{Aire}(y_A)$. Alors $\mathrm{Per}(\alpha y_p) < \mathrm{Per}(y_A)$, ce qui est absurde car y_A est solution de (IA).

Le sens réciproque se montre de la même manière. ■

2 Maximisation d'une surface à périmètre constant

2.1 Énoncé du problème

Nous voulons résoudre le problème iso-périmétrique IA avec $p_0 = 2\pi$ avec comme contrainte que les domaines considérés soient à bord $\mathcal{C}^1$, ce problème se réécrit :

$$\max_{z\in\mathcal{E}} \mathrm{Aire}(z) \tag{$\mathcal{P}$}$$

Avec $\mathcal{E} = \{z \in C^1([-\pi,\pi],\mathbb{C}), z(-\pi) = z(\pi), |z'(s)| = 1\}$.

Et $\mathrm{Aire}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}(t)z'(t)dt\right) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.

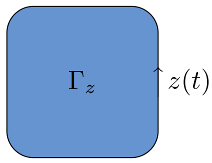


FIGURE 1 – Correspondance domaine fonction

Pour $z \in \mathcal{C}$, nous notons x,y : $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ respectivement les parties réelle et imaginaire de z.
En effet :

$$\mathrm{Per}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)| dt = 2\pi = p_0 \tag{I}$$

$$\mathrm{Aire}(z) = \mathrm{Aire}(\Gamma_z) \text{ avec } \Gamma_z \text{ l'ensemble délimité par le graphe de } z \text{ (cf figure 1)} \tag{II}$$

$$\text{Tout convexe borné } D \text{ à bord } \mathcal{C}^1 \text{ admet une fonction } z \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi]) \text{ tel que } D = \Gamma_z \tag{III}$$

On a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
\mathsf{IA} \quad &\Longleftrightarrow \quad \max_{D \in \mathcal{C}} \mathrm{Aire}(D) \text{ avec } \mathcal{C} = \{D \in K, \mathrm{Per}(D) = 2\pi\} \\
&\underset{\mathsf{III}}{\Longleftrightarrow} \quad \max_{z \in \mathcal{E}'} \mathrm{Aire}(\Gamma_z) \text{ avec } \mathcal{E}' = \{z \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \mathrm{Per}(z) = 2\pi\} \\
&\underset{\mathsf{I+II}}{\Longleftrightarrow} \quad \max_{z \in \mathcal{E}} \mathrm{Aire}(z) \text{ avec } \mathcal{E} = \{z \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi], \mathbb{C}), z(-\pi) = z(\pi), |z'(s)| = 1\}
\end{aligned}$$

Quitte à appliquer une homthétie aux domaines considéres, on peut supposer que p_0. En effet, si t est le coefficient de cette isométrie, on a $\mathrm{Per}(t\Omega) = t\mathrm{Per}(\Omega)$, et $\mathrm{Aire}(t\Omega) = t^2\mathrm{Aire}(\Omega)$. Nous allons donc faire la démonstration pour $p_0 = 1$.

2.2 Résolution du problème [2]

2.2.1 Théorie de Fourier

Soit $z \in \mathcal{E}$
On utlise la théorie de Fourier. Puisque z est continue sur $[-\pi, \pi]$ et que $z(\pi) = z(-\pi)$, on a :

$$z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$$

Avec $e_n : s \to e^{ins}$ et $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(s) e^{-ins} \mathrm{d}s$.

2.2.2 Calcul

D'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{z}(s) z'(s) \mathrm{d}s &= \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n} e^{-ins} \sum_{m \in \mathbb{Z}} imc_n e^{ims} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{Im} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} imc_m \overline{c_n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ims} e^{-ins} \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{Im} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} imc_m \overline{c_n} 2\pi \delta_{n,m} \\
&= \pi \mathrm{Im} \left(i \sum_{n \in \mathbb{Z}} nc_n \overline{c_n} \right) \\
&= \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}(s)z'(s)\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi}(x(s)-iy(s))(x'(s)+iy'(s))\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)x'(s)+y(s)y'(s)+i(x(s)y'(s)-x'(s)y(s))\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)y'(s)-x'(s)y(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \\
&= A
\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$A=\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}n|c_n|^2$$

De plus :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z'(s)|^2\mathrm{d}s=1$$

2.2.3 Majoration

Puisque $\forall n\in\mathbb{Z}$, $n\leqslant n^2$, on a :

$$A=\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}n|c_n|^2\leqslant\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|c_n|^2=\pi$$

Pour un $z\in\mathcal{E}$, il vient que l'aire du domaine délimité par l'image de z est majorée par π. En particulier, le cercle unité vérifie cette condition d'optimalité. On peut aller plus loin et montrer qu'une telle condition est vérifiée uniquement par le cercle.

Pour un $z\in\mathcal{E}$ tel que $z=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne_n$, nous voulons prouver que $z=c_0+c_1e_1$ c'est-à-dire un cercle. L'idée est de regarder la *déviation* $w(s)=z(s)-(c_0+c_1e^{is})=\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}}c_ne_n$ et de prouver que $\|w\|_{H^1}=0$ [1] lorsque $A=\pi$.

Nous avons : $\forall n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$, $1+n^2\leqslant\frac{5}{2}(n^2-n)$, cette majoration donne :

$$\begin{aligned}
\|w\|_{H^1}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|w|^2+|w'|^2)\mathrm{d}s \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}}(|c_n|^2+n^2|nc_n|^2) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}}(1+n^2)|c_n|^2 \\
&\leqslant \frac{5}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}}(n^2-n)|c_n|^2 \\
&\leqslant \frac{5}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n^2-n)|c_n|^2 \\
&\leqslant \frac{5}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|c_n|^2-\sum_{n\in\mathbb{Z}}n|c_n|^2\right) \\
&\leqslant \frac{5}{2}\left(1-\frac{A}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

2.2.4 Résolution

Résolution du problème $(\mathcal{P})$:
<u>Existence</u> :
Soit $z\in\mathcal{E}$ tel que $z(s)=e^{is}=\cos(s)+i\sin(s)$ $(|z'(s)|=|ie^{is}|=1)$

1. $H^1=\{w\in L^2(\mathbb{R}),\exists g\in L^2$ dérivée au sens des distributions$\}$ et $\|w\|_{H^1}=\|w\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)y'(s) - x'(s)y(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s) + \sin^2(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}s = \pi$$

Il existe une solution au problème.
Unicité :
Si $z \in \mathcal{E}$ tel que $A = \pi$ d'après la majoration prédédente, on a $\|w\|_{H^1} = 0$ donc $\forall s \in [-\pi, \pi]$, $z(s) = c_0 + c_1 e^{is}$.
Donc les solutions du problème sont de la forme $z(s) = c_0 + c_1 e^{is}$.
De plus $|z'(s)| = |c_1 e^{is}| = |c_1| = 1$.

On peut résumer ces résultats en un théorème :

Théorème 2.1. *Soit $z \in \mathcal{E}(\subset L^2([-\pi, \pi]))$ tel que $z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ et soit $w = z - (c_0 + c_1 e_1) \in L^2([\pi, \pi])$.*
D'une part :

$$\mathrm{Aire}(z) \leq \pi$$

D'autre part :

$$\|w\|_{H^1}^2 \leq \frac{5}{2}\left(1 - \frac{A}{\pi}\right) \tag{S}$$

La solution du problème $\mathcal{P}$ est atteint pour $A = \pi$ et $z = c_0 + c_1 e_1$. Ici Γ_z est un ***cercle****.*

Remarque 2.2. Le terme de droite de S est appelé **déficit isopérimétrique**.

Corollaire 2.3. *Le problème d'optimisation :*

$$\max_{D\in\mathcal{C}} \mathrm{Aire}(D),$$

avec $\mathcal{C} = \{D$ un convexe borné à bords C^1 de $\mathbb{R}^2, \mathrm{Per}(D) = 2\pi\}$, a pour solution un cercle.

Remarque 2.4. Le problème peut être généralisé pour p_0 quelconque. La solution reste toujours un cercle.

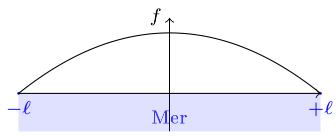
3 Le problème de Didon

3.1 Résolution analytique

Didon était une princesse phénicienne ayant vécu au IX$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ. Selon la légende, elle passe un accord avec un seigneur pour fonder sa nouvelle ville, Carthage. Les terres où elle pourra s'établir seront « autant qu'il pourrait en tenir dans la peau d'un bœuf ». Elle découpe alors la peau en fines lamelles et cela lui permet de dessiner un espace bien plus vaste que ce à quoi on se serait attendu.

Nous allons ici voir quelle était la surface maximale de territoire qu'elle aurait pu obtenir. Le problème retrouvé est alors le problème (IDA) : étant donné une longueur de peau de bête, quelle est l'aire maximale que l'on peut former ?

Le royaume de Carthage se situant au bord de la mer, nous allons modéliser le problème ainsi : la frontière commence en $x = -\ell$ sur la côte et s'y termine en $x = \ell$.



Le problème isopérimétrique que nous voulons résoudre est donc le suivant :

$$\max_{y} \int_{-\ell}^{\ell} y(x)\mathrm{d}x$$

Avec $y \in \mathcal{C}^1([-\ell, \ell])$ telle que $y(-\ell) = y(\ell) = 0$, $\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x = p_0$

Théorème 3.1. *Soit y une fonction qui vérifie $y(-\ell) = y(\ell) = 0$ et $\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} y(x)\mathrm{d}x = A$. Soit η une fonction (ou* variation*)* admissible *:*

$$\eta(-\ell) = \eta(\ell) = 0 \quad \textit{et} \quad \int_{-\ell}^{\ell} \eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

On considère $\varphi(t) = J(y + t\eta)$ où $J(y) = \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$.

Alors $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et vérifie $\varphi(0) = J(y)$. De plus, $\varphi'(0) = 0$ pour toute fonction admissible η est une CNS pour que y soit solution du problème iso-aire.

Preuve. La convexité de φ est immdiate : il suffit de calculer sa dérivée seconde, qui est positive (φ admet bien des dérivées directionnelles : il suffit de calculer $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(h)}{h}$). On se fixe une fonction admissible η. Supposons que $\varphi'(0) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 = \varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{J(y + t\eta) - J(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(J(y + t(\eta - y + y)) - J(y) \Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(J((1-t)y + t(\eta + y)) - J(y) \Big) \\
&\leqslant \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big((1-t)J(y) + tJ(\eta + y) - J(y) \Big) \quad \text{par convexité de } J \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(-tJ(y) + tJ(\eta + y) \right) \\
&= -J(y) + J(\eta + y)
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à $J(y) \leqslant J(\eta + y)$. Cela étant vrai pour toute fonction η admissible (et donc $\int \eta + y = A$), il en résulte que y est solution du problème iso-aire. ■

Proposition 3.2. *Le demi-cercle $y(x) = \sqrt{\ell^2 - x^2}$ (pour $x \in [-\ell, \ell]$) est solution du problème iso-aire en prenant $A_0 = \frac{\pi}{2}\ell^2$. Il est donc solution du problème de Didon pour le choix de $p_0 = \pi\ell$.*

Preuve. Soit η une variation admissible ($\int_{-\ell}^{\ell} \eta = 0$ et $\eta(-\ell) = \eta(\ell) = 0$). On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{y'(x)\eta'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-\eta(x)x}{\ell} \right]_{-\ell}^{\ell} + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\eta(x)}{\ell} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En effet, $\frac{y'}{\sqrt{y'+1}} = -\frac{x}{\ell}$, il suffit donc de faire une intégration par parties. D'où

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{car } \eta \text{ est une fonction admissible}$$

Ainsi, d'après le théorème précédent, y est solution du problème iso-aire. ■

3.2 Résolution numérique

3.2.1 Discrétisation

Pour résoudre le problème de Didon de manière numérique, nous allons résoudre le problème isoaire IDP, il se réécrit :

$$\sup_{\mathrm{Aire}(f) = a_0} \{\mathrm{Per}(f)\} \tag{DI}$$

La fonction f étant une fonction dérivable sur $[-\ell, \ell]$ et $f(-\ell) = f(\ell) = 0$.
Avec $\mathrm{Aire}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathrm{Per}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + f'(x)}\mathrm{d}x$

Nous discrétisons $[-\ell, \ell]$ en $n+1$ intervalles (soit en $n+2$ points) de manière uniforme et on écrit $(x_i)_{i=-1,\ldots,n}$ les points de la discrétisation (avec $x_{-1} = -\ell$ et $x_n = \ell$) et on écrit $h = \frac{2l}{n+1}$ le pas de la discrétisation.

La fonction f est discrétisée en $n + 2$ points $\tilde{f}_i = f(x_i)$ avec $i = -1, \cdots, n$. Nous savons que $\tilde{f}_{-1} = \tilde{f}_n = 0$, les inconnues du problème sont les autres composantes. Donc, nous pouvons simplifier le problème en ne prenant comme vecteur $\tilde{f} = (\tilde{f}(x_i))_{i=0,\ldots,n-1}$ (soit un vecteur de dimension n).

Pour plus de comodité, nous écrirons le vecteur $\tilde{f}$ en f.

Nous voulons avoir une fonction d'aire approximée et une longueur de la courbe approximée de la fonction à partir du vecteur f. Dans la suite, on note A l'aire approximée du domaine sous la courbe f et lg sa longueur approximée (c'est-à-dire le périmètre du domaine, sans compter l'axe des abscisses).

Pour avoir une approximation de l'aire, on utilise la méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\mathrm{d}x \\ &\simeq h\left(\frac{f_{-1}+f_n}{2}+\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right) \\ &\simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f_i \end{aligned}$$

Remarque 3.3. Pour des raisons de différentiabilité, nous avons pris l'aire signée. Nous devons donc garantir la positivité de la fonction et donc la positivité du vecteur f.

Pour avoir une approximation de la longueur, nous sommons les longueurs entre chaque point consécutif :

$$\begin{aligned} lg(f) &\simeq \sum_{i=-1}^{n-1} \sqrt{(f_{i+1}-f_i)^2+(x_{i+1}-x_i)^2} \\ &\simeq \sqrt{f_0^2+h^2}+\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(f_{i+1}-f_i)^2+h^2}+\sqrt{f_{n-1}^2+h^2} \end{aligned}$$

Remarque 3.4. En discrétisant la formule de la longueur d'arc $lg(f)=\int_{x=-\ell}^{\ell}\sqrt{1+f'(x)^2}$ par la formule des rectangles, nous retombons sur l'expression ci-dessus.

Nous introduisons le Lagrangien :

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f,\lambda &\to lg(f)+\lambda(A(f)-a_0) \end{aligned}$$

Nous calculons le gradient de L par rapport à f :

$$\nabla_L(f,\lambda) = \nabla_{lg}(f)+\lambda h u$$

Avec :

$$\begin{aligned} \nabla_{lg}(f)_i &= \frac{f_i-f_{i-1}}{\sqrt{(f_i-f_{i-1})^2+h^2}}-\frac{f_{i+1}-f_i}{\sqrt{(f_{i+1}-f_i)^2+h^2}} \\ \nabla_{lg}(f)_0 &= \frac{f_0}{\sqrt{f_0^2+h^2}}-\frac{f_1-f_0}{\sqrt{(f_1-f_0)^2+h^2}} \\ \nabla_{lg}(f)_{n-1} &= \frac{f_{n-1}-f_{n-2}}{\sqrt{(f_{n-1}-f_{n-2})^2+h^2}}+\frac{f_{n-1}}{\sqrt{f_{n-1}^2+h^2}} \\ u &= (1 \quad \dots \quad 1)^T \end{aligned}$$

3.2.2 Les algorithmes

Nous utilisons l'algorithme d'Uzawa projeté (on effectue une projection pour avoir un résultat positif, sans avoir à ajouter de contrainte supplémentaire). Mais pour mettre à jour la variable primale (f), nous ne résolvons pas $\min L(f_k,\lambda_k)$ mais on s'assure que $L(f_{k+1},\lambda_k) < L(f_k,\lambda_k)$ avec $f_{k+1}=f_k-\rho_{k+1}\nabla_L(f_k,\lambda_k)$ (algorithme 2). De même pour la variable duale (λ), on s'assure que $\lambda_{k+1}>\lambda_k$ avec $\lambda_{k+1}=\lambda_k+\sigma_{k+1}(A(f)-a_0)$ (algorithme 3).

La condition d'arrêt utlisée est $\|f_{k+1}-f_k\|_2+|\lambda_{k+1}-\lambda_k| > precision$ et $k<k_{max}$ avec k_{max} le maximum de boucles.

Le choix de 1.2 et 1.3 pour la mise à jour des pas ρ et σ est pour avoir une décroissance (l'assurance d'avoir une convergence) mais pas trop rapide (sinon la solution aurait convergé trop rapidement).

3.3 Implémentation et résultats

Nous avons implémenté l'algorithme 1 en Python. Pour le faire, nous avons écrit une classe `fonction` ayant comme attribut un entier `n` (la taille du problème), et un tableau `vals` de taille `n` -1. Ce tableau contient les n

Algorithme 1 : Résout le problème de Didon par Uzawa

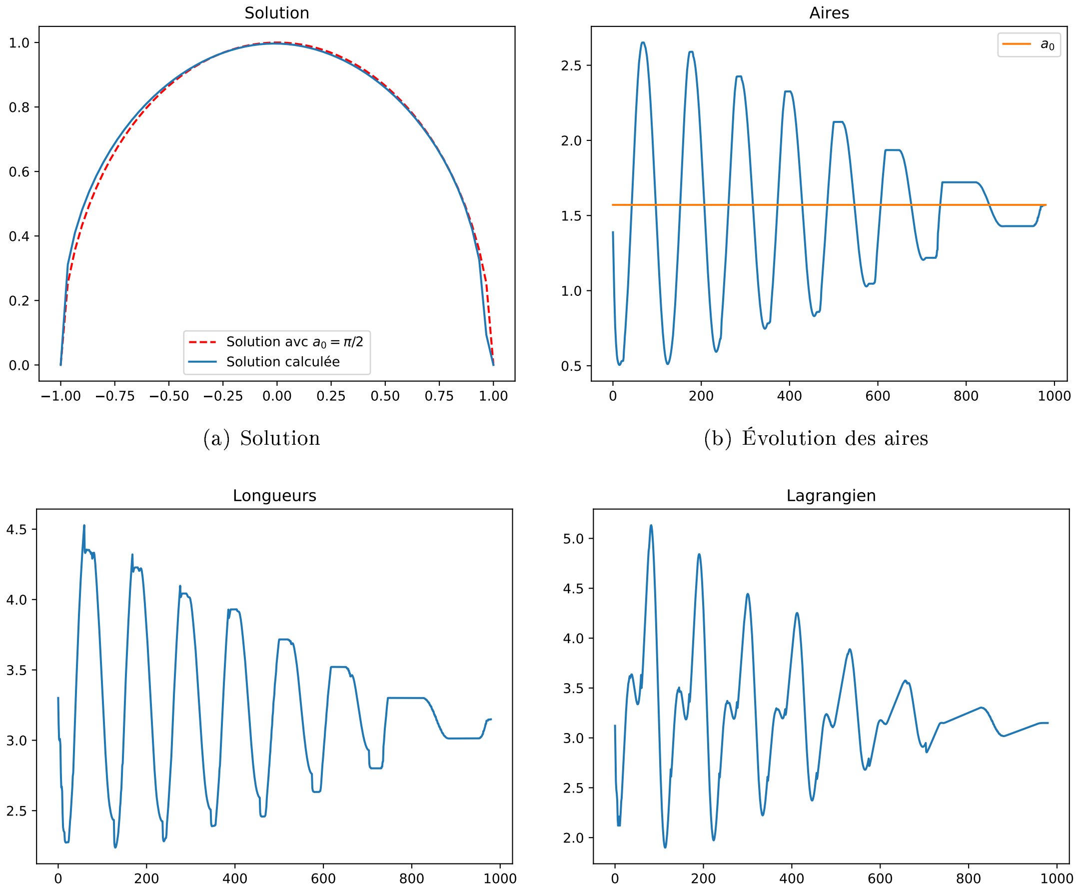
Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$f_0 \leftarrow f$
$\lambda_0 \leftarrow \lambda$
while *condition d'arrêt* **do**
  $\rho_{k+1} \leftarrow$ recherche_rho$(f_k,\ \lambda_k)$
  $f_{k+1} \leftarrow f_k - \rho_{k+1} Grad(f, \lambda)$
  projeter f_{k+1} sur $(\mathbb{R}^+)^n$
  $\sigma_{k+1} \leftarrow$ recherche_sigma$(f_{k+1},\ \lambda_k)$
  $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k + \sigma_{k+1}(A(f_k) - a_0)$
  $k \leftarrow k + 1$
end
Output : f

Algorithme 2 : recherche_rho : Renvoie le pas pseudo-optimal pour la variable primale

Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Result : $L(fbis, \lambda) < L(f, \lambda)$ avec $fbis = f - \rho_i \nabla L(f, \lambda)$
$fbis_0 \leftarrow f$
$\rho_0 = 1$ (valeur arbitraire)
while $L(fbis_i, \lambda) > L(fbis_{i-1}, \lambda)$ **do**
  $\rho_{i+1} \leftarrow \rho_i / 1.2$
  $fbis_{i+1} \leftarrow fbis_i - \rho_{i+1} Grad(f, \lambda)$
  $i \leftarrow i + 1$
end
Output : ρ_i

Algorithme 3 : recherche_sigma : Renvoie le pas pseudo-optimal pour la variable duale

Input : $f \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Result : $\lambda bis > \lambda$ avec $\lambda bis = \lambda + \sigma(A(f) - a_0)$
$\lambda bis_0 = \lambda$
$\sigma_0 \leftarrow 1$ (valeur arbitraire)
while $\lambda bis_i < \lambda bis_{i-1}$ **do**
  $\sigma_{i+1} \leftarrow \sigma_i / 1.3$
  $\lambda bis_{i+1} \leftarrow \lambda bis_i + \sigma_{i+1}(A(f) - a_0)$
  $i \leftarrow i + 1$
end
Output : σ_i



(a) Solution (b) Évolution des aires

(c) Évolution des longueurs (d) Évolution du Lagrangien

FIGURE 2 – Résultats avec $a_0 = \frac{\pi}{2}$

valeurs non nulles de la fonction, aux points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$. À cela viennent s'ajouter des méthodes qui retournent l'aire et la longueur de la courbe, en prenant en compte les points « fantômes » valant 0 aux deux extrémités.

On a montré précédemment (cf proposition 3.2) qu'en prenant $a_0 = \frac{\pi}{2}$ (et $\ell = 1$), la solution du problème est le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$. On peut donc comparer le résultat obtenu avec la solution réelle. La courbe obtenue est représentée en figure 2(a). Pour l'exécution, nous avons pris $n = 60$, et le programme a mis 35 secondes à s'exécuter. On voit que le résulat obtenu est assez proche de la solution exacte (la différence en norme 2 vaut environ 0.3).

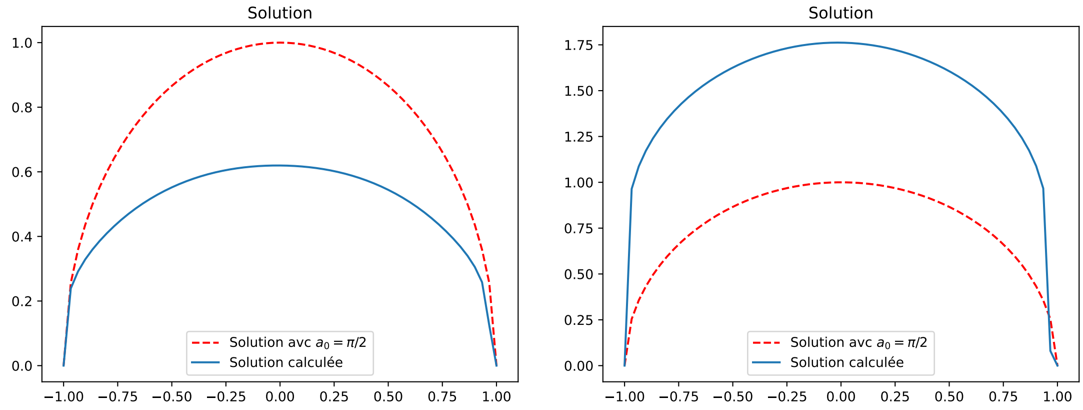
On a représenté en figure 2(b), l'évolution de l'aire de la solution calculée au cours des différentes boucles de l'algorithme. L'évolution de la longueur et du Lagrangien ont aussi été tracées. On peut ainsi visualiser le comportement de l'algorithme : si on est en dessous on va avoir tendence à remonter et inversement. Les boucles des algorithmes 2 et 3 permettent d'être sûr d'aller dans le bon sens. Ici, la solution a convergé, c'est-à-dire que l'on a atteint le critère d'arrêt, en 980 itérations de la boucle d'Uzawa. À la fin, on a obtenu un aire valant 1.570357412122347 (très proche de $a_0 = \frac{\pi}{2}$), et un périmètre final valant 3.1490304292815354 (on aurait dû trouver π).

On peut ensuite regarder à quoi ressemblerait la courbe obtenue en prenant une valeur de a_0 différente de $\frac{\pi}{2}$. Regardons dans un premier temps en prenant $a_0 = 1$. Cette fois, l'algorithme converge en 287 itéraions (en 5.6 secondes), et on trouve un périmètre final valant 2.625. La solution est tracée en figure 3(a).

De même, la solution obtenue avec $a_0 = 3$ est tracée en figure 3(b). Cette fois-ci, l'algorithme a mis 2 768 itérations avant de se stopper, et le résulats du périmètre final est 4.622. De manière générale, pour $a_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$, le nombre d'itéraions est beaucoup plus élevé. Par exemple, en prenant $a_0 = 4$, l'algorithme a atteint le nombre maximal d'itérations valant $2 \cdot 10^5$ avant de converger.

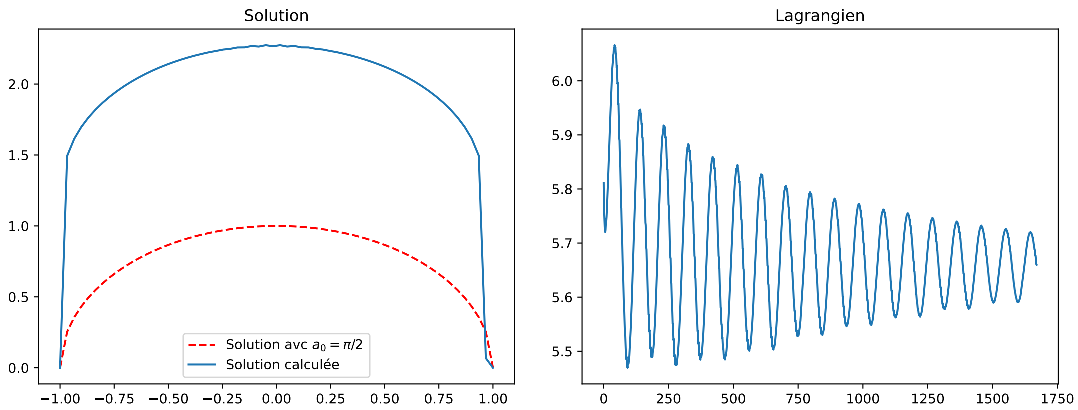
3.4 D'autres méthodes pour résoudre le problème

Nous allons nous intéresser au Lagrangien augmenté [3]. Il s'agit ici de prendre une autre fonction pour le Lagrangien, le *Lagrangien augmenté* :



(a) $a_0 = 1$ (b) $a_0 = 3$

FIGURE 3 – Résultats pour différentes valeurs de a_0



(a) Solutions (b) Évolution du lagrangien

FIGURE 4 – Résultats avec le lagrangien augmenté

$$L_b(f,\lambda) \quad = \quad lg(f) + \lambda\,(A(f) - a_0) + \frac{b}{2}\,(A(f) - a_0)^2$$

L'algorithme de résolution reste le même que précédemment, la seule différence est la mise à jour du multiplicateur λ : au lieu de rechercher le pas de sorte qu'on ait bien une remontée comme ci-dessus, on applique simplement la formule $\lambda^{n+1} = \lambda^n + b(A(f_k) - a_0)$, où f_k est la solution du problème sans contrainte. La méthode que nous avons essayé d'implémenter comporte quelques défauts mais donne des résultats similaires à ce qu'on avait précédemment, mais obtenus en moins d'itérations. Par exemple, en prenant $a_0 = 4$, la méthode d'Uzawa « normale » prenait au moins 2×10^5 itérations (on atteignait le nombre maximal d'itération), tandis que le lagrangien augmenté converge en 1 671 itérations. Le résultat, ainsi que l'évolution du Lagrangien sont donnés en figure 4.

On peut aussi imaginer d'autre méthodes pour obtenir une solution à ce problème, comme par exemple une méthode de pénalisation.

Références

[1] Richard A. TAPIA : The remarkable life of the isoperimetric problem : The world's most influential mathematics problem, June 2009.

[2] Bent FUGLEDE : Stability in the Isoperimetric Problem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 18(6):599–605, 11 1986.

[3] Guy COHEN : *Convexité et optimisation*. École Nationale des Ponts et Chaussées & INRIA, 2000.