Méthodes numériques (R2.09)

Exercice 1

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)^2$$

Exercice 2

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. *Calculer les* 4 *premiers termes de cette suite.*
2. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < u_n < 1$.
3. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$$
4. *Démontrer que la suite* (u_n) *est convergente.*
5. *On considère la suite* (v_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$
Démontrer que (v_n) *est une suite arithmétique de raison* -1.
6. *En déduire* v_n *en fonction de* n*, puis* u_n *en fonction de* n.
7. *Déterminer la limite de* u_n.

Exercice 3

Soit (u_n) *une suite définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1. *Montrer que si* $u_0 \leq 2$ *alors pour tout* $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ *et que la suite est croissante. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que si* $u_0 \geq 2$ *alors pour tout* $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ *et que la suite est décroissante. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.*
3. *On pose pour tout* n, $v_n = u_n - 2$. *Montrer que* v_n *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$.
4. *En déduire une expression de* u_n *en fonction de* n *et de* u_0. *Retrouver le résultat des deux premières questions.*
5. *En déduire*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}.$$

Exercice 4
Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. *Comment appelle-t-on cette suite lorsque $a = 1$? Lorsque $a \neq 1$ et $b = 0$?*
2. *Exprimer u_n dans ces deux cas particuliers ?*
3. *Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b.*
4. *Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\, u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$$

5. *On suppose $a \neq 1$. Démontrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

6. *Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:*

$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$$

7. *On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.*

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. *Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.*
2. *Exprimer v_n en fonction de n.*
3. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*

Exercice 6
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in]0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.*
3. *Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.*
4. *Déterminer la limite de cette suite.*

Exercice 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in]1, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
3. *Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.*
4. *Déterminer la limite de cette suite.*

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle définie par* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement monotone.*
3. *En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 9

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^\star$
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *la suite définie pour tout* $n > 0$ *par*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
Montrer que (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par la donnée de* u_0 *et de* u_1 *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

et

$$w_n = 2u_{n+1} + u_n$$

1. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $-\dfrac{1}{2}$. *On exprimera* v_n *en fonction de* n, u_0 *et* u_1.
2. *Montrer que* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite constante. On exprimera* w_n *en fonction de* u_0 *et* u_1.
3. *En calculant* $-2v_n + w_n$ *de deux façons différentes, exprimer* u_n *en fonction de* n, u_0 *et* u_1.
4. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
Calculer S_n *en fonction de* n, u_0 *et* u_1. *A quelle condition la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet-elle une limite finie ? Dans ce cas, exprimer cette limite en fonction de* u_0.