UGA-IUT2- Grenoble
Département d'informatique
Première année 2023-2024

R1.0.6 Mathématiques discrètes
TD1 : Logique

Les assertions

Exercice 1 *Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

NB: $2|4$ *se lit "2 divise 4" et est équivalent à "4 est multiple de 2".*

1. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|4)$.
2. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|5)$.
3. ☐ $(2 < 3) \vee (2|5)$.
4. ☐ $(2 < 3) \wedge (\neg(2|5))$.
5. ☐ $(\neg(2 < 3)) \vee (2|5)$.
6. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|4) \vee (3|6)$.
7. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|4) \vee (3|5)$.
8. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|4) \wedge (3|5)$.
9. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|5) \vee (3|6) \wedge (3 < 6)$.
10. ☐ $(2 < 3) \wedge (2|5) \vee (3|6) \wedge (3 > 6)$.

Exercice 2 *Si je mange, alors je bois et je ne parle pas. Si je ne parle pas alors je m'ennuie. Je ne m'ennuie pas. Je peux en déduire que (oui ou non et pourquoi) :*

1. ☐ *je parle.*
2. ☐ *je ne parle pas.*
3. ☐ *je ne bois pas.*
4. ☐ *je ne mange pas.*
5. ☐ *je ne bois pas et je ne mange pas.*

Exercice 3 *Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?*

1. ☐ *Si Napoléon était chinois, alors* $3 - 2 = 2$.
2. ☐ *Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.*
3. ☐ *Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.*
4. ☐ *Si l'homme est un quadrupède, alors il aboie.*
5. ☐ *Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.*

6. □ *Paris est en France ou Madrid est en Chine.*
7. □ *La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.*
8. □ *Les poiriers ne donnent pas des melons, et Cléopâtre n'était pas chinoise.*
9. □ *Il est faux que si les grenouilles n'aboient pas alors* $3 \times 2 = 7$*.*
10. □ *Si les champignons sont des animaux ou le Cid était espagnol, alors la longueur d'une circonférence est le double de son rayon.*
11. □ *Une condition nécessaire et suffisante pour que dans un jeu de 40 cartes il y ait 45 as est que le cuir soit végétal.*

Exercice 4 *On considère les quatre assertions suivantes :*
• *F : je fume,*
• *B : je bois,*
• *J : je mange du jambon,*
• *M : j'ai des moustaches.*

Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. Je fume et je bois, mais je n'ai pas de moustache.
2. Quand je fume, je ne bois pas.
3. Chaque fois que je mange du jambon, je ne fume pas mais je bois.
4. Si je mange du jambon ou si je bois, alors je ne fume pas.
5. Il suffit que j'aie des moustaches pour que je mange du jambon.
6. Il faut que je mange du jambon et que je boive pour que je fume.
7. Une condition nécessaire pour que je boive et que je fume est que je mange du jambon.
8. Je fume et je bois, si et seulement si je mange du jambon ou j'ai des moustaches.
9. De deux choses l'une : soit je bois et je mange du jambon, soit si j'ai une moustache alors je ne fume pas.

Enoncez la négation des phrases 2., 3., 4., 5. en évitant d'employer l'expression "il est faux que" (vous utiliserez la négation de la forme symbolique).

Exercice 5 *On considère les connecteurs logiques suivants :*
$\downarrow$ *(nor) defini par* $\neg(A \vee B)$,
$\uparrow$ *(nand) defini par* $\neg(A \wedge B)$.
xor *("ou" exclusif) défini par* $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$,
$\star$ *défini par* $\neg(A \Rightarrow B)$.

1. Donnez leur table de verité.
2. La formule $A xor B$ *est-elle synonyme de* $A \uparrow B$.

Exercice 6 *Vérifiez que les assertions suivantes sont des tautologies :*
1. $\neg(A \wedge \neg A)$ *(principe de non contradiction).*
2. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ *(base de la preuve directe).*
3. $(A \wedge \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg B$ *(principe d'incompatibilité).*

Exercice 7 *Quelles sont toutes les façons de placer des parenthèses dans* $\neg p \vee q \wedge \neg r$ *afin d'obtenir l'expression correcte d'une formule ? Déterminer la table de vérité de chacune des formes obtenues. Que remarque-t-on quand* p, q *et* r *ont pour valeur faux.*

Exercice 8 *Simplifier les formules suivantes :*

1. $(\neg p) \implies (p \vee q)$	*2.* $\neg((\neg p) \wedge (\neg q))$
3. $(p \implies q) \vee (q \implies p)$	*4.* $p \implies (\neg q) \vee (q \implies (\neg p))$

Quelles sont les formules synonymes.

Exercice 9 *Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A,B,C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.*

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Calcul des prédicats

Exercice 10 *Soit* n *un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

1. ☐ $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$.
2. ☐ $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$.
3. ☐ $(n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$.
4. ☐ $(n < 1) \Rightarrow (2|n)$.
5. ☐ $(n < 1) \Rightarrow (n|2)$.
6. ☐ $(n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$.
7. ☐ $(n > 0) \Rightarrow (2n > n)$.
8. ☐ $(n \geq 0) \Rightarrow (2n > n)$.
9. ☐ $(n \geq 0) \Rightarrow ((n + 1) > n)$.

Exercice 11 *On note* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des nombres pairs, et B l'ensemble des nombres premiers. Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes.*

1. Tout nombre pair est divisible par 2.
2. Aucun nombre impair n'est divisible par 2.

3. Il n'existe pas de nombre premier pair distinct de 2.
4. Tout nombre premier distinct de 2 est impair.
5. Il existe un nombre pair qui divise tout nombre pair.
6. Tout nombre premier divise au moins un nombre pair.

Exercice 12 *Représenter sur un diagramme de Venn les ensembles suivants.*

• *Ensemble Q des quadrilatères.*
• *Ensemble T des trapèzes.*
• *Ensemble P des parallélogrammes.*
• *Ensemble R des rectangles.*
• *Ensemble L des losanges.*
• *Ensemble C des carrés.*

Exprimer sous forme logique, puis ensembliste, les phrases suivantes.
1. Tout carré est un rectangle.
2. Tout rectangle qui est aussi un losange est un carré.
3. Il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles.
4. Si un losange est un rectangle alors c'est un carré.
5. Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit un carré est que ce soit un rectangle.
6. Pour qu'un trapèze soit un rectangle il suffit que ce soit un carré.
7. Il existe des quadrilatères qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.
8. Il existe des parallélogrammes qui ne sont ni des rectangles, ni des losanges.

Exercice 13 *Parmi les ensembles d'entiers suivants, lesquels sont égaux au singleton* $\{0\}$, *lesquels sont différents et pourquoi ?*

1. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; n \leq 1\}$.
2. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; n < 1\}$.
3. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; (n \leq 1) \wedge (2|n)\}$.
4. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; 1 + n > 0\}$.
5. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; 1 + n = 1\}$.
6. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$.
7. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, n < m\}$.
8. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, n|m\}$.
9. ☐ $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N}, m|n\}$.

Exercice 14 *Représentez graphiquement les ensembles suivants :*
• $\neg(-1 < x < 5)$
• $\neg(-1 < x \text{ } ou \text{ } x \geq 3)$
• $\neg(-3 > x \text{ } ou \text{ } 1 \leq x)$
• $\neg(0 < x \text{ } et \text{ } y > 3)$

Exercice 15 *Les assertions suivantes sont-elles vraies? sinon, énoncer leur négation :*
1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \leq z$.

Exercices facultatifs

Exercice 16 *Enoncez la négation des assertions suivantes :*

1. $\exists x \forall y \; P(x, y)$
2. $\forall x \exists y \; P(x, y)$
3. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; P(n)$
4. $\forall x \forall y P(x) \implies Q(y)$
5. $\exists x \forall y P(x) \implies Q(y)$

Exercice 17 On considère, sur l'ensemble F des femmes la relation propositionnelle :

$$P(x, y) \; : \; x \; est \; la \; fille \; de \; y.$$

Traduire les phrases suivantes :
1. On peut trouver deux femmes dont l'une est la fille de l'autre.
2. Il y a une femme qui est la fille de toutes les autres.
3. Toute femme a au moins une fille.
4. On peut trouver une femme mère de toutes les autres
5. Toute femme a une mère.
6. Toute femme est fille de toute femme.
7. Il existe une femme qui ne soit pas la mère de toutes les autres.
8. On peut trouver une femme qui ne soit pas mère.
9. Il existe une femme qui n'a pas de fille.

Exercice 18 *Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

1. f est majorée
2. f est bornée
3. f est paire
4. f est impaire
5. f ne s'annule jamais
6. f est périodique
7. f est croissante
8. f est strictement décroissante
9. f n'est pas la fonction nulle
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$
12. f est inférieure à g
13. f n'est pas inférieure à g