R1.06 : Mathématiques discrètes

Première année - iut informatique

Chapitre 1 : La logique

Cours : Aude Maignan

aude.maignan@univ-grenoble-alpes.fr

Les assertions et les formules

Definition 1.

Une **assertion** est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux.
Une **formule** exprime de manière mathématique une propriété d'un objet ou une relation entre objets.

Les assertions et les formules

Definition 1.

Une **assertion** est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux.
Une **formule** exprime de manière mathématique une propriété d'un objet ou une relation entre objets.

- $2 + 2 = 5$ est une **assertion fausse**, P *implique* P est une **assertion vraie**.

Les assertions et les formules

Definition 1.

Une **assertion** est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux.
Une **formule** exprime de manière mathématique une propriété d'un objet ou une relation entre objets.

- $2 + 2 = 5$ est une **assertion fausse**, P *implique* P est une **assertion vraie**.
- P *ou* Q est une formule car elle peut prendre les valeurs vrai ou faux suivant les valeurs attribuées à P et Q.

Les assertions et les formules

Definition 1.

Une **assertion** est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux.
Une **formule** exprime de manière mathématique une propriété d'un objet ou une relation entre objets.

- $2+2=5$ est une **assertion fausse**, P *implique* P est une **assertion vraie**.
- P *ou* Q est une formule car elle peut prendre les valeurs vrai ou faux suivant les valeurs attribuées à P et Q.

La traduction d'un énoncé en formule : Pierre a besoin de lunettes car il a mal aux yeux se traduit par

Les assertions et les formules

Definition 1.

Une **assertion** est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux. Une **formule** exprime de manière mathématique une propriété d'un objet ou une relation entre objets.

- $2+2=5$ est une **assertion fausse**, P *implique* P est une **assertion vraie**.
- P *ou* Q est une formule car elle peut prendre les valeurs vrai ou faux suivant les valeurs attribuées à P et Q.

La traduction d'un énoncé en formule : Pierre a besoin de lunettes car il a mal aux yeux se traduit par $M \implies L$ avec $M =$"Pierre a mal aux yeux" et $L =$" Pierre a besoin de lunettes"

Les règles de construction des formules

1. Les variables sont des formules (dites formules élémentaires).
2. Si P et Q sont des formules, (P), P *ou* Q, P *et* Q,P implique Q, P équivaut à Q, et *non* P. sont des formules.

formule	P ou Q	P et Q	P implique Q	P équivaut à Q	non P
notation	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$

Exemple : $(((\neg A) \vee B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ est une formule

Exemple : $(((\neg A) \vee B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ est une formule

Les règles de priorité sur les connecteurs de la plus grande à la plus petite sont :

$\boxed{1.\ \neg \quad 2.\ \wedge \quad 3.\ \vee \quad 4.\ \Rightarrow \quad 5.\ \Leftrightarrow}$

Exemple : $(((\neg A) \vee B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ est une formule

Les règles de priorité sur les connecteurs de la plus grande à la plus petite sont :

1. $\neg$	2. $\wedge$	3. $\vee$	4. $\Rightarrow$	5. $\Leftrightarrow$

On peut alors simplifier la formule : $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

Interprétation des formules

Donner une interprétation à une formule consiste à lui assigner une valeur vrai ou faux, en relation avec les valeurs des formules élémentaires qui la constituent. Il faut donc donner aux connecteurs logiques un sens précis qui est défini pour chacun par sa **table de vérité**.

P	$\neg P$
vrai	*faux*
faux	*vrai*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
vrai	*vrai*	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*	*vrai*
faux	*vrai*	*faux*	*vrai*
faux	*faux*	*faux*	*faux*

L'implication

$P \Rightarrow Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
Q est vrai si P est vrai
P est vrai seulement si Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

L'implication

$P \Rightarrow Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
Q est vrai si P est vrai
P est vrai seulement si Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

P	Q	$P \Rightarrow Q$
vrai	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*
faux	*vrai*	*vrai*
faux	*faux*	*vrai*

L'équivalence

$P \Leftrightarrow Q$
P est équivalent à Q
P équivaut à Q
P entraîne Q et réciproquement
si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement
P est vrai si et seulement si Q est vrai
pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

L'équivalence

$P \Leftrightarrow Q$
P est équivalent à Q
P équivaut à Q
P entraîne Q et réciproquement
si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement
P est vrai si et seulement si Q est vrai
pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	vrai

Un peu de vocabulaire : Tautologie et Contradiction

Definition 2.

Une **tautologie** (ou théorème) est une formule qui dans toute interprétation prend la valeur vrai.
Une **contradiction** est une formule qui dans toute interprétation prend la valeur faux.

Un peu de vocabulaire : Tautologie et Contradiction

Definition 2.

Une **tautologie** (ou théorème) est une formule qui dans toute interprétation prend la valeur vrai.
Une **contradiction** est une formule qui dans toute interprétation prend la valeur faux.

Definition 3.

Deux formules P et Q sont **synonymes** ou **équivalentes** si et seulement si dans toute interprétation la valeur de P est égale à la valeur de Q. En d'autres termes P et Q sont synonymes s'ils ont le même table de vérité.

Ainsi toutes les tautologies sont synonymes entre elles.

Propriétés

	$\wedge$	$\vee$
commutativité	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
associativité	$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$	$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$
distributivité	$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

Les preuves se font en construisant des tables de vérité.

Attention $P \Rightarrow Q$ ***n'est pas équivalent à*** $Q \Rightarrow P$

C'est la table de vérité qui nous en donne la preuve :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
vrai	*vrai*	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*	***vrai***
faux	*vrai*	*vrai*	***faux***
faux	*faux*	*vrai*	*vrai*

Propriétés

$$(P \Rightarrow Q) \text{ est synonyme de } (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$
$$(P \Rightarrow Q) \text{ est synonyme de } (\neg P \vee Q)$$

Propriétés

$$(P \Rightarrow Q) \text{ \textbf{\textit{est synonyme de}} } (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$
$$(P \Rightarrow Q) \text{ \textbf{\textit{est synonyme de}} } (\neg P \vee Q)$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$\neg P \vee Q$
vrai	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*
faux	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
faux	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*

On note alors $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ et $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Propriétés

$(P \Leftrightarrow Q)$ ***est synonyme de*** $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Lois de De Morgan

- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

Les prédicats

Definition 4.

On appelle prédicat une affirmation qui porte sur des symboles représentant des éléments *variables* ou *inconnus* d'un ensemble fixé.
Cet ensemble est appelé univers.

Pareillement aux formules, les prédicats qui portent sur le même univers peuvent être combinés entre eux à l'aide de connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ pour former de nouveaux prédicats.

Les prédicats

Definition 4.

On appelle prédicat une affirmation qui porte sur des symboles représentant des éléments *variables* ou *inconnus* d'un ensemble fixé.
Cet ensemble est appelé univers.

Pareillement aux formules, les prédicats qui portent sur le même univers peuvent être combinés entre eux à l'aide de connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ pour former de nouveaux prédicats.

Exemple :

- Considérons l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et n un élément variable, $(n \geqslant 2) \vee (n < -1)$ est un prédicat dépendant d'une variable. L'univers du prédicat est $\mathbb{N}$.
- Considérons l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et soit a et b des éléments de $\mathbb{R}$, $a + b = 5$ est un prédicat dépendant de 2 variables. L'univers du prédicat est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les quantificateurs

Les quantificateurs sont les deux symboles $\forall$ « quel que soit » et $\exists$ « il existe »

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0$ se lit : quel que soit n appartenant à $\mathbb{N}$, $n \geqslant 0$. cette assertion est vraie.
- $\exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0$ se lit : il existe n appartenant à $\mathbb{N}$, $n \geqslant 0$. cette assertion est également vraie.

L'ordre des quantificateurs

L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est très important.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}; n < m$$

On lit : pour tout entier n, il existe un entier m strictement plus grand que n.
Ici m peut dépendre de l'entier n puisqu'il est placé après. Cette assertion est vraie : pour tout n, le nombre $m = n + 1$ vérifie bien $n < m$.

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n < m$$

On lit : il existe un entier m tel que tout entier n vérifie $n < m$. Cette assertion est fausse.

Négation d'une formule

Méthode pratique pour obtenir la négation d'une assertion : Pour obtenir la négation de l'assertion construite en liant les variables d'un prédicat au moyen de quantificateurs, remplacer les quantificateurs $\forall$ par $\exists$, les quantificateurs $\exists$ par $\forall$, et enfin le prédicat par sa négation.

Théorème

1. $\neg\forall x P(x)$ et $\exists x \neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.

Négation d'une formule

Méthode pratique pour obtenir la négation d'une assertion : Pour obtenir la négation de l'assertion construite en liant les variables d'un prédicat au moyen de quantificateurs, remplacer les quantificateurs $\forall$ par $\exists$, les quantificateurs $\exists$ par $\forall$, et enfin le prédicat par sa négation.

Théorème

1. $\neg\forall x P(x)$ et $\exists x \neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.
2. $\neg\exists x P(x)$ et $\forall x \neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.

Exemple : La négation de

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n < m$$

est :

Exemple : La négation de

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n < m$$

est :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}; n \geqslant m$$

Prouver qu'une assertion est fausse équivaut à prouver que sa négation est vraie.