UGA-IUT2-Grenoble
Département d'informatique
Première année

2021-2022

R1.06 Mathématiques discrètes
TD3 : Les bases de l'arithmétique

Les nombres premiers et la décomposition en produit de facteurs premiers

Exercice 1 *Le crible d'Eratosthène (276 av JC-194 av JC) est une méthode pour établir la liste des nombres premiers inférieurs à une certaine valeur. Pour cela on utilise le fait que les multiples d'un entier n différent de n ne sont pas premiers. Dans la grille ci-dessous barrer l'entier 1 (qui n'est pas premier) puis répéter les opérations suivantes : trouver le nombre p suivant qui n'est pas barré dans le tableau (donc 2 au début) et barrer tous ses multiples* $> p$ *puis recommencer. A la fin tous les entiers non barrés seront les nombres premiers inférieurs à 120.*

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Dans quelle(s) colonnes se trouvent, presque, tous les nombres premiers ? Qu'est-ce que cela signifie ? Faire une démonstration.

Exercice 2 1. *Rappeler les critères de divisibilité que vous connaissez. Exemple avec le nombre 924.*

2. *Les nombres 217 et 439 sont-ils premiers ?*

3. *Décomposez en produit de facteurs premiers le nombre 13095 et dénombrez ses diviseurs.*

Exercice 3 1. *Calculer le pgcd et le ppcm de* 350 *et* 735.

2. *Calculer le pgcd et le ppcm de* 1500 *et* 1050.

Exercice 4
1. L'entier $a = 2^3 \times 5^3 \times 7^2$ divise-t-il $b = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7^5$
2. Donnez la forme et le nombre des diviseurs positifs de b.
3. Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers de $pgcd(a, b)$ et $ppcm(a, b)$.

Algorithme d'Euclide-Bézout

Pour calculer le pgcd de deux nombres, en pratique, il est bien plus efficace d'utiliser l'algorithme d'Euclide. De plus, l'algorithme d'Euclide étendu (nommé algorithme d'Euclide Bézout) permet de trouver en plus les entiers relatifs u et v tels que $au + bv = pgcd(a; b)$. On procède ainsi : Supposons que l'on ait $a = 1236$ et $b = 96$
on construit le tableau d'Euclide Bézout comme suit :

$etape\ i$	a	b	r	q	u	v	
-1					1	0	$Initialisation$
0					0	1	
1	1236	96	84	12	1	-12	$u_i = u_{i-2} - q_i u_{i-1}$
2	96	84	12	1	-1	13	$v_i = v_{i-2} - q_i v_{i-1}$
3	84	12	0	7			

Le pgcd est le dernier reste non nul des divisions successives. On obtient, $pgcd(1236, 96) = 12$. De plus, sur la ligne du pgcd, on lit $u = -1$ et $v = 13$, ces valeurs vérifient l'équation $1236 \times (-1) + 13 \times 96 = 12$

Exercice 5

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, calculez le $pgcd$ de 161 et de 91. En déduire le $ppcm$.

2. Retrouvez les résultats de la *question 1* en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

3. Trouvez deux entiers relatifs u et v vérifiant $161u + 91v = 7$

Exercice 6

- Calculer le pgcd de 1452 et 14. Puis trouver u et v tels que $1452u + 14v = \mathrm{pgcd}(1452, 14)$
- Calculer le ppcm de 144 et 108.

Exercice 7
1. Montrez que $pgcd(n, n + 1) = 1$, pour tout entier n.
2. Pour quels entiers n'a-t-on pas $pgcd(n, n + 2) = 1$?

Exercice 8 Notons $a = 1111111111$ et $b = 123456789$.

- Montrer que $a = 9 \times b + 10$.
- Calculer $\mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 9

1. Démontrez que 143 et 100 sont premiers entre eux.
2. Déterminez un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $143u + 100v = 1$
3. Déterminez trois autres couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $143u + 100v = 1$
4. Trouvez un couple (x,y) solution de $143x + 100y = 120$

Exercice 10
1. Existe-t-il des entiers x et y tels que $161x + 368y = 15$? si oui, trouvez un couple (x, y) solution de $161x + 368y = 15$.
2. Existe-t-il des entiers x et y tels que $161x + 368y = 115$? si oui, trouvez un couple (x, y) solution de $161x + 368y = 115$.

Exercice 11

1. Déterminez tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $\left\{ \begin{array}{rcl} pgcd(a, b) & = & 42 \\ a + b & = & 168 \end{array} \right.$
2. Déterminez tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que : $\left\{ \begin{array}{rcl} pgcd(a, b) & = & 28 \\ ppcm(a, b) & = & 840 \end{array} \right.$

Exercices supplémentaires

Exercice 12 • *Déterminez tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que :*

$$\begin{cases} ppcm(a,b) &= 2^5 \times 3^5 \times 5^2 \times 11 \times 13 \\ a \times b &= 2^9 \times 3^2 \times 19 \times 37 \end{cases}$$

- *Soient a et b deux entiers tels que $a \geq b$. On pose $d = pgcd(a,b)$ et $m = ppcm(a,b)$. Déterminez tous les couples (a,b) vérifiant :*

$$\begin{cases} m &= d^2 \\ d+m &= 156 \end{cases}$$

Exercice 13

- Calculer le ppcm de a et a^2+1.
- Quel est le plus petit entier positif qui divisé par 72 et par 108 donne chaque fois 15 pour reste ?

Exercice 14 Etant donné quatre entiers naturels non nuls a, b, n et x, montrez que si $n|(a+xb)$ et $n|b$ alors $n|a$.

Exercice 15 Soit a un entier. A quelle condition sur a existe-t-il des nombres entiers x et y tels que l'on ait $24x+9y=a$?