Première année informatique　　　　décembre 2023

Partiel R106 : Mathématiques discrètes
CORRECTION

Tout document et accessoire électronique interdit (Calculatrice, téléphone, etc)
durée : 1h15 (+25 minutes tiers temps)

Exercice 1 (4.5 points) *Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes (on rappelle que l'ensemble des réels est $\mathbb{R}$) :*
1. Il existe un nombre entier naturel qui n'est ni pair ni divisible par 3.
2. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
3. Il existe un entier multiple de tous les autres.

Corrigé

1. $\exists n \in \mathbb{N}, \neg(2|n) \wedge \neg(3|n)$
2. $\neg(\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \geq m)$ *ou*
   $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n < m$
3. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, k|m$

Exercice 2 (4.5 points)

1. *Soit la formule logique :* $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$.
   (a) *Simplifiez la formule autant que possible.*
   (b) *Vérifiez votre réponse précédente avec une table de vérité.*
2. *Simplifiez* $(p \implies q \vee r) \Leftrightarrow (p \implies q) \vee (p \implies r)$.

Corrigé

1.

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q) && (1)\\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow \neg q) && (2)\\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee \neg q \vee \neg p \vee \neg q && (3)\\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee \neg q && (4)\\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) && (5)
\end{aligned}
$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*

On vérifie bien que la 4ème et la 6ème colonne ont les mêmes valeurs de vérité.

2. $(p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
   $\neg p \vee q \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$
   $\neg p \vee q \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$
   Vrai

   Il s'agit d'une tautologie.

Exercice 3 (3 points) *Soit Q la proposition $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n + x > 0$.*
1. Ecrire la négation de Q.
2. La proposition Q est-elle vraie ou fausse. Vous justifierez votre réponse.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n + x \leq 0$.

2. *La proposition Q est vraie car on peut prendre $x = 1$ donc $n + x$ sera strictement supérieur à 0 pour tout n naturel.*

Exercice 4 (4 points) Les assertions suivantes sont-elles vraies? Si oui, prouvez les, sinon, donnez un contre exemple. Soient trois entiers naturels non nuls a, b et c,

1. $a|b \vee b|c \implies a|c$

2. $a|b \wedge a|c \implies a|(b + c)$

Corrigé

1. Faux, contre-exemple $a = 2$, $b = 4$ et $c = 7$.
   On a $2|4 \vee 4|7$ vrai car $2|4$ (même si $\neg(4|7)$), mais $2|7$ faux. Cela donne hypothèse vraie, conclusion fausse donc l'implication est fausse.

2. Vrai.
   $a|b \wedge a|c \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}, b = aq \wedge \exists q' \in \mathbb{N}, c = aq'$.
   D'où $b + c = aq + aq' = a(q + q')$ donc il existe un naturel $k = q + q'$ tel que $b + c = ak$, c'est-à-dire $a|(b + c)$.

Exercice 5 (4 points) *Soient A , B et C trois sous-ensembles de $\mathbb{N}$,*

Exprimez sous forme logique puis ensembliste les phrases suivantes :

1. *Il n'existe pas d'entier naturel appartenant à la fois à A et à B et n'appartenant pas à C.*
2. *Pour qu'un entier appartienne à l'ensemble B, il suffit qu'il soit à la fois dans l'ensemble C et dans l'ensemble A.*

Corrigé

1. Logique: $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, n \in A \wedge n \in B \wedge n \notin C)$.
   Ensembliste: $A \cap B \cap (\mathbb{N} \backslash C) = \emptyset$.
2. Logique: $n \in A \wedge n \in C \Rightarrow n \in B$.
   Ensembliste: $A \cap C \subset B$.