UGA-IUT2-Grenoble
Département d'informatique
Première année 2021-2022

# R1.06 Mathématiques discrètes
# TD2 : La division euclidienne et les bases de numération

## La division Euclidienne et la relation divise

**Théorème 1** *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors il existe un unique couple d'entiers naturels $(q, r)$ tel que*

$$a = bq + r \ \textit{ et } \ 0 \leqslant r < b$$

*$q$ se nomme le quotient et $r$ est le reste de* **la division euclidienne** *de $a$ (le dividende) par $b$ (le diviseur).*

Quand $r = 0$ on a $a = bq$ et l'on dit que $b$ ***divise*** $a$. On le note $b|a$. On dit aussi que $a$ est *multiple* de $b$.

$$\boxed{b|a \text{ si et seulement si } \exists q \in \mathbb{N},\ a = bq}$$

**Exercice 1** Parmi les phrases suivantes lesquelles sont vraies ?

- 9 est le reste de la division euclidienne de 17 par 8.
- $3|468$.
- Si $n$ divise $p$ alors $n$ divise tous les multiples de $p$.
- 1 et $a$ divisent toujours $a$ pour tout $a > 1$.
- Tout multiple de $8$ est multiple de 16.

**Exercice 2** Les assertions suivantes sont-elles vraies? Si oui, prouvez les, sinon, donnez un contre exemple. Soient quatre entiers naturels non nuls $a$, $b$, $c$ et $n$,

1. $n|(ab) \Rightarrow (n|a \ \vee \ n|b)$
2. $(n|a \ \vee \ n|b) \Rightarrow n|(ab)$
3. $(n|a \ \wedge \ n|b) \Rightarrow \ n|(ab)$
4. $(a|b \ \wedge \ b|c) \Rightarrow a|c$
5. $(b|a \ \wedge \ c|a) \Rightarrow bc|a$
6. $n|a \wedge n|b \Rightarrow (\forall \alpha \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}, n|\alpha a + \beta b)$

# Application : les bases de numération

On a l'habitude de noter les nombres à l'aide de 10 chiffres. En fait, le nombre 10 est arbitraire, et l'on aurait pu choisir n'importe quel entier supérieur ou égal à 2.

**Définition 1** *Etant donné un entier b strictement supérieur à 1 et un entier a, il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ et une suite d'entiers $\{\alpha_i, 0 \leq i \leq n\}$ déterminés de façon unique tels que :*

$$a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b^i$$

*et $\alpha_i < b$.*
*On appelle b la base de numération pour l'écriture des nombres entiers et on représente l'entier a par la suite $< \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0 >_b$.*

Méthode de calcul des $\alpha_i$

- $\alpha_0$ est le reste de la division de a par b.
- On pose $a - \alpha_0 = q_1 b$, $\alpha_1$ est le reste de la division de $q_1$ par b.
- et ainsi de suite...

Remarque :

- L'écriture de b en base b est toujours 10. En effet $b = 1.b + 0 =< 1, 0 >_b$.
- Les bases supérieurs à 11 : A partir de 10 on remplace les nombres par des lettres pris par ordre alphabétique.

**Exercice 3**
1. Ecrire en base douze les entiers notés usuellement 1728 et 3312.
2. Soient $x$ et $y$ deux chiffres, montrer que l'entier noté en base dix, $xyyx$ est multiple de 11.
3. L'entier usuellement noté 1373 s'écrit $< 1; 0; 2; 0; 5 >$ en base b, déterminer b.
4. Montrer que le nombre $< 1; 0; 1; 0; 1 >$ est divisible par le nombre noté $< 1; 1; 1 >$ quelle que soit la base de numération.