TP1 d'intégration numérique d'équations différentielles

Modèle marchand-voleur

L'équation logistique de Lotka-Volterra modélise l'évolution d'une population de marchands et de voleurs. En l'absence de voleur, les marchands suivent une croissance exponentielle. En l'absence de marchand, les voleurs suivent une décroissance exponentielle. La croissance des voleurs – au-delà de cette décroissance exponentielle – est liée linéairement au nombre de marchands volés ; cette quantité est proportionnelle au produit des marchands par les voleurs.

Si m est la population de marchands, v celle de voleurs, l'équation logistique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t) \cdot (2 - 0.05 \cdot v(t)) \\ -v(t) \cdot (1 - 0.0001 \cdot m(t)) \end{pmatrix}$$

1) Trouver le nombre de voleurs et de marchands pour que celui-ci ne varie plus pendant des siècles.

Après des siècles de stabilité, Ali Baba a capturé les voleurs, mais trois d'entre eux viennent de s'évader. Comment évoluera la cité ?

2) Sous Python, créez une fonction d'évolution qui donne le vecteur $\begin{pmatrix} m'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ en fonction du point $\begin{pmatrix} m(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

3) Simuler le comportement des populations avec le schéma d'Euler. Faire varier le pas h.

4) Écrire un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2 vu lors du TD2 précédent pour un paramètre λ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{y}_{k+1} & = & \mathbf{y}_k + h\,(c_1 f(t_k, \mathbf{y}_k) + c_2 f(t_k + \lambda h, \mathbf{y_k} + \lambda h f(t_k, \mathbf{y}_k))) \\ t_{k+1} & = & t_k + h \end{array} \right. \tag{1}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_1 & = & 1 - \frac{1}{2\lambda} \\ c_2 & = & \frac{1}{2\lambda} \end{array} \right. \tag{2}$$

Affichez les courbes des populations de proies et de prédateurs, et comparez-les aux résultats obtenus avec les schémas d'Euler. Faire varier le pas de temps h et le paramètre λ ; on pourra prendre les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1 et 2 pour λ.

5) Écrire un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 en utilisant la table de Butcher suivante:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

6) Utiliser la fonction `solve_ivp`, `ode` ou `odeint` pour comparer les résultats précédents à un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Il s'agit de fonction incluse dans la librairie `scipy.integrate`.

7) Le Calife a 42 ans, et il a besoin d'au moins 8000 marchands pour percevoir assez d'impôts et profiter pleinement de sa vie fastueuse. Pourra-t-il en profiter jusqu'à la fin de son règne[1]. Utilisez une simulation fiable pour pouvoir annoncer au Calife qu'il sera certainement plus riche dans 50 ans que maintenant.

[1] Vous êtes un conseiller du Calife qui tient à sauver sa tête. Un homme plus honnête compterait le nombre de marchands après une et deux années de méfaits des voleurs pour estimer les paramètres supplémentaires.