

Auteurs : Denis Renault
Jean-Marc Vince

Autour de l'équation de Poisson

I – Équation de Poisson

1/ Établissement de l'équation

1. L'équation locale de Maxwell-Gauss donne la divergence du **champ électrique** \vec{E} en fonction de la **densité de charge électrique** ρ : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ où ε_0 est la **permittivité diélectrique du vide**.

Le champ \vec{E} et le potentiel électrostatique V sont reliés par l'équation locale de Maxwell-Faraday sans potentiel-vecteur : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

Enfin, $\Delta V = \text{div}(\vec{\text{grad}} V)$, donc en calculant la divergence de \vec{E} dans la seconde équation, on obtient : $\Delta V = -\text{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. D'où l'équation demandée :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

2. **En gravitation newtonienne** en faisant l'analogie entre \vec{E} et $\vec{G} = \vec{F}/m$, entre V et $\Phi = Ep/m$, ρ et la masse volumique et enfin entre ε_0 et $-1/(4 \cdot \pi \cdot \mathcal{G})$, on retrouve une équation de Poisson sous la forme suivante.

$$\Delta \Phi - 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \mathcal{G} = 0$$

En diffusion thermique en régime stationnaire en écrivant $\text{div} \vec{j} = P$ où P est la puissance thermique produite par unité de volume, $\vec{j} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T$ où λ est la conductivité thermique du milieu, on retrouve une équation de Poisson sous la forme suivante.

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0$$

En mécanique des fluides Pour un écoulement incompressible et irrotationnel, en notant \vec{v} le champ des vitesses, on peut écrire $\text{div} \vec{v} = 0$ et $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \Phi$. Ainsi de même

$$\Delta \Phi = 0$$

2/ Équation adimensionnée pour un problème plan

3. En procédant à l'adimensionnalisation des coordonnées, on a $x = L \cdot X$ et $X \in [0, 1]$. On peut en déduire également que $\partial x = L \cdot \partial X$ et que donc $\partial^2 x = L^2 \cdot \partial^2 X$. De même pour y . De plus, la géométrie du problème permet d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes tout en négligeant l'influence de z . On peut donc écrire le laplacien ainsi :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = \frac{1}{L^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 Y} \right]$$

on peut alors poser $\rho'(X, Y) = \frac{L^2}{\varepsilon_0} \rho(X, Y)$, et on a alors la forme adimensionnée de l'équation de Poisson pour un problème plan en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 Y} + \frac{L^2 \cdot \rho}{\varepsilon_0} = \Delta V(X, Y) + \rho'(X, Y) = 0$$

3/ Discrétisation

Pour avoir un pas de h/N , le maillage est basé sur $N + 1$ points ou nœuds par direction.

4. On utilise la formule de Taylor-Young deux fois, en $(X_i + h, Y_i)$ et $(X_i - h, Y_i)$.

$$V(X_i + h, Y_i) = V(X_i, Y_i) + h \cdot \frac{\partial V(X_i, Y_i)}{\partial X_i} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial X_i^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$V(X_i - h, Y_i) = V(X_i, Y_i) - h \cdot \frac{\partial V(X_i, Y_i)}{\partial X_i} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial X_i^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

En faisant la somme de ces deux expressions, on obtient l'expression suivante :

$$V(X_i + h, Y_i) + V(X_i - h, Y_i) = 2 \cdot V(X_i, Y_i) + 2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial X_i^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

De même, il est possible d'écrire ces expressions pour $(X_i, Y_i + h)$ et $(X_i, Y_i - h)$.

$$V(X_i, Y_i + h) + V(X_i, Y_i - h) = 2 \cdot V(X_i, Y_i) + 2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial Y_i^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Alors, sommer ces deux dernières relations aboutit à la relation suivante :

$$V(X_i + h, Y_i) + V(X_i - h, Y_i) + V(X_i, Y_i + h) + V(X_i, Y_i - h) = 4 \cdot V(X_i, Y_i) + h^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial X_i^2} + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial Y_i^2} \right] + \mathcal{O}(h^3)$$

Finalement, le laplacien de $V(X_i, Y_i)$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial X_i^2} + \frac{\partial^2 V(X_i, Y_i)}{\partial Y_i^2} = \frac{V(X_i + h, Y_i) + V(X_i - h, Y_i) + V(X_i, Y_i + h) + V(X_i, Y_i - h) - 4 \cdot V(X_i, Y_i)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

Remarque 1 :

Utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 aurait fait apparaître un terme en h^3 qui se serait simplifié lors des additions. Le résultat précédent peut donc s'écrire à l'ordre 2, c'est à dire en remplaçant le $\mathcal{O}(h)$ par $\mathcal{O}(h^2)$.

5. L'équation précédente permet **d'approcher** le laplacien de $V(i, j)$ à l'ordre 1 par l'expression suivante.

$$[V(i + 1, j) + V(i - 1, j) + V(i, j + 1) + V(i, j - 1) - 4 \cdot V(i, j)] / h^2$$

Si on remplace le laplacien par cette expression dans l'équation de Poisson adimensionnalisée de la question 3, et qu'on multiplie par h^2 , on obtient l'approximation ci-dessous.

$$V(i + 1, j) + V(i - 1, j) + V(i, j + 1) + V(i, j - 1) - 4 \cdot V(i, j) + \frac{h^2 \cdot L^2 \cdot \rho}{\varepsilon_0} \approx 0$$

On peut alors identifier $\rho''(i, j) = \frac{h^2 \cdot L^2 \cdot \rho(i, j)}{\varepsilon_0}$.

4/ Résolution

Méthode de Jacobi

6.

```
def nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j):
    '''renvoie le nouveau potentiel au point (i, j) in [1, N - 1]^2'''
    return (V[i + 1, j] + V[i - 1, j] + V[i, j + 1] + V[i, j - 1] + \
            rhos[i, j]) / 4 )
```

7. Avec la relation de récurrence (3) du sujet, $V_{k+1}(i, j)$ nécessite de connaître $V_k(i-1, j)$ et $V_k(i, j-1)$. Or ces deux valeurs, si on ne procède pas à une copie de V_k auront été modifiées lors du calcul de V_{k-1} . Il est donc nécessaire de disposer d'une copie de ces valeurs.

Une solution est alors de copier le tableau V_k avant de calculer les nouveaux potentiels comme le sujet le proposait.

8.

```
def iter_J(V, rhos, frontiere):
    somme_ek, N = 0, 0 # initialisations du calcul de l'erreur
    taille = len(V)    # taille du tableau V
    Vk = np.copy(V)
    for i in range(taille):
        for j in range(taille):
            # parcourt de tout le tableau V
            if not frontiere[i, j]:
                # le point (i, j) n'est pas sur la frontière
                V[i, j] = nouveau_potentiel(Vk, rhos, frontiere, i, j)
                # le calcul d'erreur ne se fait que sur les points
                # hors frontière
                somme_ek += (V[i, j] - Vk[i, j]) ** 2
                N += 1
    return (pow(somme_ek, 0.5) / N)
```

Pour moi, le sujet n'était pas très clair sur le calcul de l'erreur, et sur le N qui intervient dans le calcul de l'erreur moyenne. Ce n'est sans doute pas le N défini à la figure 1 du sujet, mais $N+1$, le nombre de valeurs où l'erreur est calculée.

Je l'ai interprété en ne calculant l'erreur que sur les points hors frontière puisque aux points de la frontière, l'erreur sera identiquement nulle à chaque itération, ce qui diminue artificiellement l'erreur commise.

Remarque 2 :

Elle n'était pas demandée, mais la complexité de cette fonction est donc en $\mathcal{O}((N+1)^2)$.

9.

```
def Poisson(f_iter, V, rhos, frontiere, eps):
    '''fonction qui modifie sur place V, elle ne renvoie donc rien.'''
    erreur = f_iter(V, rhos, frontiere)
    while erreur > eps:
        erreur = f_iter(V, rhos, frontiere)
```

Remarque 3 :

Si on note n_ϵ , le nombre d'itérations de la boucle **while**, la complexité de cette fonction est alors en $\mathcal{O}(n_\epsilon \times (N+1)^2)$.

5/ Améliorations

Méthode de Gauss-Seidel

10. Avec la nouvelle relation de récurrence (5), le terme $V_{k+1}(i, j)$ est calculé à partir des termes $V_{k+1}(i-1, j)$ et $V_{k+1}(i, j-1)$ qui ont été calculés aux itérations précédentes de V_{k+1} , et des termes $V_k(i+1, j)$ et $V_k(i, j+1)$ qui n'ont pas encore été modifiés.

Il n'est donc plus nécessaire de copier le tableau $V[i, j]$ pour la mise à jour, ce qui épargne une opération en $\mathcal{O}((N+1)^2)$ dans l'algorithme.

Il n'est donc curieusement pas nécessaire de modifier la fonction `nouveau_potentiel()`.

11.

```
def iter_GS(V, rhos, frontiere):
    somme_ek, N = 0, 0 # initialisations du calcul de l'erreur
    taille = len(V) # taille du tableau V
    for i in range(taille):
        for j in range(taille):
            # parcourt de tout le tableau V
            if not frontiere[i, j]:
                # le point (i, j) n'est pas sur la frontière
                Vk = V[i, j]
                V[i, j] = nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j)
                # le calcul d'erreur ne se fait que sur les points
                # hors frontière
                somme_ek += (V[i, j] - Vk) ** 2
                N += 1
    return(pow(somme_ek, 0.5) / N)
```

Pratiquement, il y avait la ligne où le tableau V était copié à supprimer et l'appel de `nouveau_potentiel()` à changer. Par contre, il faut ajouter une ligne pour mémoriser l'ancienne valeur de `V[i, j]` pour le calcul de l'erreur. On se retrouve malgré tout à copier chaque terme du tableau V...

Méthode de Gauss-Seidel adaptative

12.

```
def nouveau_potentiel_SOR(V, rhos, frontiere, i, j, omega):
    '''renvoie le nouveau potentiel au point (i,j) in [1, N - 1]^2'''
    return( (1 - omega) * V[i, j] + omega * \
        (V[i + 1, j] + V[i - 1, j] + V[i, j + 1] + V[i, j - 1] + rhos[i, j]) / 4 )
```

13.

```
def iter_SOR(V, rhos, frontiere):
    somme_ek, N = 0, 0 # initialisations du calcul de l'erreur
    nl, nc = V.shape # dimensions du tableau V
    omega_opt = 2 / (1 + np.pi / (nl - 1))
    for i in range(nl):
        for j in range(nc):
            # parcourt de tout le tableau V
            if not frontiere[i, j]:
                # le point (i, j) n'est pas sur la frontière
                Vk = V[i, j] # mémorisation de V_k[i, j]
                V[i, j] = nouveau_potentiel_SOR(\
                    V, rhos, frontiere, i, j, omega_opt)
                # le calcul d'erreur ne se fait que sur les points
                # hors frontière
                somme_ek += (V[i, j] - Vk) ** 2
                N += 1
    return(pow(somme_ek, 0.5) / N)
```

14. L'introduction de ω_{opt} assure un nombre d'itérations en $\mathcal{O}(N)$ pour la boucle `while` de la fonction `Poisson()`.

La complexité de cette fonction est donc en $\mathcal{O}(N \times (N + 1)^2) = \mathcal{O}(N^3)$.

Une telle complexité temporelle augmente approximativement d'un facteur $2^3 = 8$ le temps d'exécution de l'algorithme lorsqu'on double la taille des données traitées, $(2 \times N)^3 = 2^3 \times N^3$. D'après la figure 2, nous pouvons tester cette croissance exponentielle sur quelques valeurs : de $N = 50$ à $N = 100$, la durée

passé de $T \approx 0,8$ s à $T \approx 6$ s, soit un accroissement de $6/0,8 = 7.5$. De même pour $N = 60$ à $N = 120$, ce facteur est approximativement de $10/1.25 = 8$, et pour $N = 70$ à $N = 140$, ce facteur est de $16/3 = 8$. La courbe de la figure 2 est donc bien en accord avec la complexité temporelle évaluée à $\mathcal{O}(N^3)$.

Dans ce cas, la durée d'exécution pour $N = 1000 = 10 \times 100$ serait de $10^3 \times T(N = 100) = 1000 \times 6 = 6000$ s = 1 h 40 mn. Cette complexité ne permettra pas de simuler l'équation de Poisson sur des domaines très étendus.

6/ Détermination du champ électrique

15. Dans la première question, nous avons rappelé que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, donc en 2D et dans un système de coordonnées cartésiennes, puis selon la configuration de la question 3 :

$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{\partial V(X, Y)}{L \cdot \partial X}, -\frac{\partial V(X, Y)}{L \cdot \partial Y} \right)$$

Hors frontière : On peut approcher ces dérivées par une dérivée symétrique qui est d'un ordre supérieur à la simple dérivée à gauche, et comme on est hors frontière, il n'y aura pas de conflits d'indices.

$$\begin{cases} E_x(i, j) &= -\frac{V(i+1, j) - V(i-1, j)}{2 \cdot h \cdot L} \\ E_y(i, j) &= -\frac{V(i, j+1) - V(i, j-1)}{2 \cdot h \cdot L} \end{cases}$$

Aux frontières : Dans ce cas, il faut approcher E_x et E_y par des dérivées simples, à gauche ou à droite, selon le point considéré.

$$\begin{cases} E_x(0, j) &= -\frac{V(1, j) - V(0, j)}{h \cdot L} & \text{et} & E_y(i, 0) &= -\frac{V(i, 1) - V(i, 0)}{h \cdot L} \\ E_x(N, j) &= -\frac{V(N, j) - V(N-1, j)}{h \cdot L} & \text{et} & E_y(i, N) &= -\frac{V(i, N) - V(i, N-1)}{h \cdot L} \end{cases}$$

II – Deux études de cas

1/ Fil cylindrique chargé uniformément

Étude théorique

16. En utilisant la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ des coordonnées cylindriques on observe que, pour tout point M, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge donc \vec{E} doit appartenir à ces deux plans d'où $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$.

De plus la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation selon l'axe z donc $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

Le champ n'est que radial, donc puisque $E = -\vec{\text{grad}} V$, le potentiel V ne dépend que de r et les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axe z .

17. On applique le théorème de Gauss en choisissant comme surface fermée \mathcal{S} un cylindre d'axe z , de rayon r et de hauteur h . Ainsi

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r)$$

Pour la calcul de la charge intérieure à \mathcal{S} , on distingue deux cas :

- $r < R$ alors $Q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 h$;
- $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = \rho \pi R^2 h$

L'application du théorème de Gauss sous forme intégrale $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ permet d'obtenir le champ

partout dans l'espace :

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad \text{si } r < R \quad ; \quad E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{si } r > R$$

Pour l'allure du tracé de $E(r)$ c'est une droite de pente $\frac{\rho}{2\varepsilon_0}$ pour $r \in [0, R]$ puis ensuite une décroissance en $1/r$ au delà de $r = R$ avec continuité de $E(r)$ en $r = R$.

18. La valeur maximale de E est obtenue en $r = R$ et $E_{\max} = E(R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$. Numériquement $E_{\max} = 28,3 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

On calcule aussi $E(2R) = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$ et numériquement $E(2R) = 14,2 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Étude numérique

19.

```
def dans_cylindre(x, y, xc, yc, R):
    '''renvoie un booléen indiquant si le point de coordonnées (x, y) est
        à l'intérieur ou sur le bord du cercle de centre (xc, yc) et
        de rayon R.'''
    return ( (y - yc) ** 2 + (x - xc) ** 2 <= R ** 2 )
```

20.

```
def initialise_rhos_cylindre(tab_rhos, N = 100, L = 0.2, R = 0.05, \
    eps0 = 8.85e-12, rho = 1e-5):
    '''initialise le tableau tab_rhos contenant les valeurs de la densité
        volumique de charge adimensionnée
        rho_ad = rho * (L ** 2) * pas / eps0.
        Modification sur place'''
    pas = L / N # pas spatial
    rho_ad = rho * (L ** 2) * (pas ** 2) / eps0 # rho adimensionnée
    for i_abscisse in range(N + 1):
        for i_ordonnee in range(N + 1):
            if dans_cylindre(i_abscisse * pas, i_ordonnee * pas, \
                pas * (N + 1) / 2, pas * (N + 1) / 2, R) :
                tab_rhos[i_abscisse, i_ordonnee] = rho_ad
```

21.

```
def initialise_frontiere_cylindre(tab_f):
    '''met à True les points appartenant à la frontière.
        Modification sur place.'''
    nl, nc = tab_f.shape
    for i_abscisse in range(nl):
        tab_f[i_abscisse, 0] = True
        tab_f[i_abscisse, nc - 1] = True
    for j_ordonnee in range(1, nc - 1):
        tab_f[0, j_ordonnee] = True
        tab_f[nl - 1, j_ordonnee] = True
```

Il faut se méfier ici, car pour un tableau, lorsqu'on prend l'élément $T[i, j]$, i est l'indice de la ligne et j l'indice de la colonne. i représente donc l'indice pour les *ordonnées* des points, et j l'indice pour les *abscisses*.

22. On constate que l'allure de la courbe pour $E(r)$ est correcte. Dans la partie $x > 0$, x joue bien le rôle de r puisque qu'on se situe dans la plan $y = L/2$. La valeur de E_{\max} est aussi cohérente avec celle calculée à la question 18. Par contre l'allure des équipotentielles (représentées dans un plan $z = \text{cte}$) n'est pas

satisfaisante. On s'attend à obtenir des cercles mais les effets de bords se font sentir car on a fixé dans la simulation le potentiel à $V = 0$ sur la section carrée de côté L ce qui est une contrainte forte et surtout une contrainte qui rompt la symétrie cylindrique du problème sur laquelle repose le calcul théorique du champ.

23. On constate que dans la zone centrale (x voisin de $L/2$), le champ est nul et le potentiel uniforme. Cette uniformité du potentiel ($\Delta V = 0$) indique que la densité volumique de charge est nulle dans cette zone. Par contre au delà de $x = L/2 = R/2$ on retrouve l'allure de $E(r)$ déjà vue (croissance linéaire puis décroissance en $1/r$) caractéristique d'une densité volumique de charge uniforme. On propose donc la densité répartition de charges suivantes

$$\begin{cases} \rho = 0 & \text{pour } r < \frac{R}{2} \\ \rho \text{ uniforme} & \text{pour } \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ \rho = 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

On conserve les mêmes propriétés de symétries et d'invariance de la distribution de charges qu'à la question 16, et on calcule ensuite les valeurs de $E(r)$ dans les différentes zones à l'aide du théorème de Gauss toujours appliqué sur un cylindre d'axe z , de rayon r et de hauteur h . À travers ce cylindre le flux de \vec{E} vaut toujours $2\pi r h E(r)$.

Pour ce qui est de la charge intérieure à ce cylindre, elle se calcule à l'aide des volumes puisque quand ρ est non nul, il est uniforme :

- $r < R/2$ alors $Q_{\text{int}} = 0$;
- $R/2 < r < R$ alors $Q_{\text{int}} = \rho \pi h \left(r^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right)$;
- $r < R/2$ alors $Q_{\text{int}} = \rho \pi h \left(R^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \frac{3\rho \pi h R^2}{4}$

Par application du théorème de Gauss on en déduit

$$E(r) = 0 \quad \text{si } r < \frac{R}{2} \quad ; \quad E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R^2}{4r} \right) \quad \text{si } \frac{R}{2} < r < R \quad ; \quad E(r) = \frac{3\rho R^2}{8\epsilon_0 r} \quad \text{si } r > R$$

On calcule alors la valeur maximale du champ en $r = R$ soit $E'_{\text{max}} = \frac{3\rho R}{8\epsilon_0}$ qui est bien inférieure à la valeur maximale $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$ calculée avec la modélisation précédente. Numériquement on trouve $E'_{\text{max}} = 21,2 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ ce qui est bien cohérent avec la courbe présentée.

2/ Mouvement d'un électron dans un tube d'oscilloscope

Étude physique

24. On écrit simplement que la variation de l'énergie cinétique de l'électron est l'opposé de sa variation d'énergie potentielle ($E_p = -eV$) quand l'électron passe du potentiel nul au potentiel V_0 soit

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -\Delta E_p = -(-eV_0) = eV_0$$

ce qui donne $v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$ et numériquement $v_0 = 1,8 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Utiliser la mécanique classique est une forte approximation dans cette situation !

25. Entre les plaques le champ est uniforme et s'écrit $\vec{E} = -\frac{dV}{dy} \vec{u}_y$. Si il est uniforme, on peut alors écrire

$$\text{que } \frac{dV}{dy} = \frac{V(y = d/2) - V(y = -d/2)}{d} = \frac{2V_P}{d} \text{ soit}$$

$$\vec{E} = -\frac{2V_P}{d} \vec{u}_y$$

26. En négligeant le poids des électrons, l'application de la loi de quantité de mouvement à l'électron entre les plaques donne, en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{2V_P e}{d} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Le mouvement est sans accélération, ni vitesse initiale selon Oz, il s'effectue donc dans le plan $z = 0$. En tenant compte de la condition initiale de vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ à l'entrée entre les plaques en $x = -\ell/2$; $y = 0$ et à l'instant pris comme instant initial, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{\ell}{2} \\ y(t) = \frac{V_P e}{md} t^2 \end{cases}$$

On peut alors écrire $t = \frac{x + \frac{\ell}{2}}{v_0}$ et ainsi $y = \frac{eV_P}{mdv_0^2} \left(x + \frac{\ell}{2}\right)^2$. On peut ainsi obtenir les coordonnées du point S où l'électron sort de l'espace entre les plaques $S(x_S = \frac{\ell}{2}; y_S = \frac{eV_P \ell^2}{mdv_0^2})$.

27. Pour $x > \ell/2$, le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme car il n'est plus soumis à aucune force. Pour déterminer l'équation de sa trajectoire à partir du point de sortie S (dont on connaît les coordonnées), il suffit alors de connaître les composantes de la vitesse en S. On les obtient avec l'étude de la question précédente. En S, $x = x_S = \ell/2$ et alors $t = t_S = \ell/v_0$. On peut en déduire les composantes de la vitesse en S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t_S) = \dot{x}_S = v_0 \\ \dot{y}(t_S) = \dot{y}_S = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0} \end{cases}$$

Le mouvement au delà de S se faisant à vitesse constante, on peut donc écrire les équations horaires de $x(t)$ et $y(t)$ pour $t > t_S$:

$$\begin{cases} x(t) = v_0(t - t_S) + x_S \\ y(t) = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0}(t - t_S) + y_S \end{cases}$$

Ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \left(t - \frac{\ell}{v_0}\right) + \frac{\ell}{2} \\ y(t) = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0} \left(t - \frac{\ell}{v_0}\right) + \frac{eV_P \ell^2}{mdv_0^2} \end{cases}$$

En éliminant $t - \frac{\ell}{v_0}$ entre les deux équations précédentes, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0} \left(\frac{x - \frac{\ell}{2}}{v_0}\right) + \frac{eV_P \ell^2}{mdv_0^2}$$

ce qui donne en développant

$$y = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0^2} x$$

On obtient l'ordonnée du spot sur l'écran pour $x = D$, soit $y_s = \frac{2eV_P \ell}{mdv_0^2} D$, or on a vu à la question 24.

que $\frac{mv_0^2}{2} = eV_0$, donc

$$y_s = \frac{V_P}{V_0} \times \frac{\ell D}{d}$$

Numériquement on trouve $y_s = 2,65$ cm.

Attention, pour la partie numérique les origines de x et y ne sont pas placées comme sur le schéma de la figure 7 utilisé ici où l'origine est au centre des plaques.

Étude numérique

28. Il n'y a pas de charges dans l'enceinte, donc le tableau `rhos` doit être vide.

29.

```
def initialise_frontiere_condensateur(tab_V, tab_f, L = 10e-2, c = 3e-2, \
l = 4e-2, d = 2e-2, Vp = 180):
    '''Place les points des plaques de condensateur à leur potentiel
    Met à True les points appartenant à la frontière (plaques et enceinte).
    Modification sur place.'''
    nl, nc = tab_f.shape
    # initialisation des plaques de condensateur
    X_gche = int((c - l/2) / L * N)
    X_dte = int((c + l/2) / L * N)
    Y_sup = int((L / 2 + d / 2) / L * N)
    Y_inf = int((L / 2 - d / 2) / L * N)
    for i_abscisse in range(X_gche, X_dte + 1):
        tab_V[i_abscisse, Y_sup] = Vp
        tab_f[i_abscisse, Y_sup] = True
    for i_abscisse in range(X_gche, X_dte + 1):
        tab_V[i_abscisse, Y_inf] = -Vp
        tab_f[i_abscisse, Y_inf] = True
    # initialisation de l'enceinte
    for i_abscisse in range(nl):
        tab_f[i_abscisse, 0] = True
        tab_f[i_abscisse, nc - 1] = True
    for j_ordonnee in range(1, nc - 1):
        tab_f[0, j_ordonnee] = True
        tab_f[nl - 1, j_ordonnee] = True
```

30. On note que $x = i \cdot h + r_x$ et $y = j \cdot h + r_y$, avec r_x et r_y tous les deux inférieurs au pas h . On peut alors utiliser la formule de Taylor-Young pour une fonction de plusieurs variables :

$$E_x(x, y) = E_x(i \cdot h + r_x, j \cdot h + r_y) = E_x(i \cdot h, j \cdot h) + r_x \cdot \frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial x} + r_y \cdot \frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial y} + o(h)$$

On note $E_x(i \cdot h, j \cdot h) = \text{Ex}[i, j]$.

On peut approcher le terme $\frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial x}$ à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial x} \approx \frac{E_x((i+1) \cdot h, j \cdot h) - E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{h}$$

Avec $E_x((i+1) \cdot h, j \cdot h) = \text{Ex}[i+1, j]$.

De même avec $\frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{\partial y} \approx \frac{E_x(i \cdot h, (j+1) \cdot h) - E_x(i \cdot h, j \cdot h)}{h}$$

Avec $E_x(i \cdot h, (j+1) \cdot h) = \text{Ex}[i, j+1]$.

On peut donc approcher $E_x(x, y)$ par l'expression suivante :

$\text{Ex}[i, j] + r_x * (\text{Ex}[i+1, j] - \text{Ex}[i, j]) / h + r_y * (\text{Ex}[i, j+1] - \text{Ex}[i, j]) / h$
ce qui est conforme à la relation demandée.

Pour $E_y(x, y)$ la même démarche aboutit à la relation approchée suivante :

$$E_y[i, j] + r_x * (E_y[i + 1, j] - E_y[i, j]) / h + r_y * (E_y[i, j + 1] - E_y[i, j]) / h$$

On a donc une expression approchée pour E_x et E_y en tout point du domaine.

31. On applique la loi de quantité de mouvement à l'électron ce qui permet d'écrire avec $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$, $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ et $q = -e$:

$$\begin{cases} \partial x = v_x \cdot \partial t & \partial y = v_y \cdot \partial t \\ \partial v_x = -\frac{e}{m} \cdot E_x(x, y) \cdot \partial t & \partial v_y = -\frac{e}{m} \cdot E_y(x, y) \cdot \partial t \end{cases}$$

32. Remarque 4 :

Pour moi, cette question n'est pas très claire. Si l'on s'en tient à la question 26, la position initiale de l'électron est à l'entrée de la zone de déviation, donc au droit des plaques du condensateur, c'est à dire à $x_0 = c - l/2$. Dans ce cas, la durée du déplacement sera $(L - (c - l/2))/v_0$, et il faudra diminuer un peu ∂t .

Pour autant, cela ne change pas grand chose de laisser l'abscisse initiale de l'électron à 0, comme cela semble être le cas pour les auteurs du sujet à la figure 9. J'ai donc décidé de laisser $x_0 = 0$.

Conditions initiales du mouvement de l'électron

```
v0 = pow(2 * e * V0 / m, 0.5) # vitesse initiale de l'électron
x0 = 0                         # abscisse initiale de l'électron
y0 = L/2                      # ordonnée initiale de l'électron
```

Pour estimer ∂t , je suppose, comme c'est le cas pour la solution analytique, que le champ électrostatique ne modifie pas la vitesse axiale de l'électron. On peut donc estimer la durée de la traversée de l'enceinte à L/v_0 .

Si on veut calculer environ 200 points successifs le long de la trajectoire, on peut prendre en première approximation $\partial t = \frac{L/v_0}{200}$, soit $27,37 \times 10^{-12}$ s.

33. Voici mon préambule complet pour cette partie.

Conditions initiales du mouvement de l'électron

```
v0 = pow(2 * e * V0 / m, 0.5) # vitesse initiale de l'électron
x0 = 0                         # abscisse initiale de l'électron
y0 = L/2                      # ordonnée initiale de l'électron
Npts = 200                    # nbre de pts pour le tracé de la trajectoire
dt = L / (v0 * Npts)          # incrément temporel
```

tableaux des coordonnées x et y de l'électron

```
lx = np.zeros(Npts) ; ly = np.zeros(Npts)
```

tableaux des vitesses en x et en y

```
lvx = np.zeros(Npts) ; lvy = np.zeros(Npts)
```

conditions initiales

```
lx[0] = x0 / L ; ly[0] = y0 / L
lvx[0] = v0 ; lvy[0] = 0
```

34.

```
for k in range(1, Npts):
```

```
    lx[k] = lx[k - 1] + dt * lvx[k - 1] / L
```

```
    ly[k] = ly[k - 1] + dt * lvy[k - 1] / L
```

```
    lvx[k] = lvx[k - 1] + dt * (-e/m) * \
    val_Ex(Ex_osc, Ey_osc, lx[k - 1], ly[k - 1], h, N, L)
```

```
    lvy[k] = lvy[k - 1] + dt * (-e/m) * \
    val_Ey(Ex_osc, Ey_osc, lx[k - 1], ly[k - 1], h, N, L)
```

Remarque 5 :

La division par L de l'accroissement de $lx[k]$ et de $ly[k]$ est due au fait que ces deux variables sont

adimensionnées.

35. La courbe 1 est plus courte car elle tient compte d'un champ non nul à l'extérieur des plaques ce champ (orthogonal aux équipotentielles et qui a le sens des potentiels décroissants) possède un composante significative selon la direction de Ox (et aussi selon Oy) qui a donc tendance à exercer une force sur l'électron selon $-\vec{u}_x$ (et $-\vec{u}_y$) et donc à freiner l'électron à l'extérieur par rapport au cas théorique idéal où l'électron avait un mouvement rectiligne et uniforme en dehors des plaques. Pour un même temps de calcul, l'électron va donc moins loin dans le cas numérique.

Pour le point d'impact l'étude théorique est insuffisante, l'erreur est supérieure à 10% par rapport à la simulation.