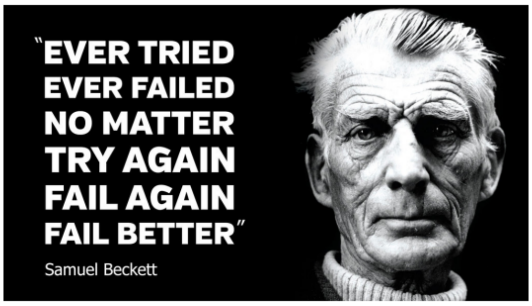
Cours 5 : Rappels et compléments sur les méthodes numériques

Euler, what else ? Ce cours-TD s'intéresse surtout aux méthodes numériques permettant d'estimer la solution d'une équation différentielle. Seule la méthode d'Euler et son schéma explicite sont au programme d'informatique pour tous. Cependant, cette méthode montre en pratique très vite ses limites et la plupart des sujets vous présentent une amélioration de cette méthode historique.

Une première partie comportant des questions et applications du cours sur l'estimation de la solution d'une équation différentielle ;

1. la méthode d'Euler,
2. l'application sur un pendule particulier : l'escarpolette.

   Une deuxième partie composée de deux extraits de sujets zéro du concours CCP ;
3. la méthode de Newton,
4. la méthode d'Euler associée au procédé de vectorisation.



Première partie
Applications du cours

1 Méthode d'Euler

Question 1. *Rappeler la formule de Taylor-Young au premier ordre pour une fonction scalaire dérivable à une variable notée $f(x)$.*

Question 2. *En déduire le schéma numérique d'Euler explicite pour une fonction scalaire à une variable notée* `eqdf(x)`.

Question 3. *Même question pour le schéma d'Euler implicite.*

2 Étude d'un pendule

2.1 Jean-Honoré Fragonard

Jean-Honoré Fragonard est un peintre français né en 1732 dans les Alpes Maritimes et mort à Paris en 1806 connu pour la grande diversité de manière ou de style de ses toiles. Avec *Les hasards heureux de l'escarpolette*, nom désuet d'une balançoire constituée d'un siège suspendu par des cordes qu'il peint vers 1776, il relance le genre des *fêtes galantes*, mais en substituant à la délicate mélancolie d'*Antoine Watteau* une licence audacieuse et amusée. La toile s'appuie sur le classique triangle amoureux. Tandis que le mari inconscient tire les cordes de la balançoire, l'amant furtif se cache dans le buisson fleuri pour observer la jeune femme d'un point de vue privilégié : dans un bouillonnement de jupes, la petite chaussure qui échappe à son pied ajoute une note malicieuse.

Nous allons ici nous intéresser au devenir de cet escarpin et aider cette jeune femme à le retrouver. Or, de deux choses l'une, ou cette chaussure vient heurter la statue d'ange et tombe à son pied (de statue) et l'amant risque non seulement de revivre la douloureuse expérience newtonienne originale mais également d'être découvert, ou elle passe au dessus de la statue de jardin et finit sa course au loin dans les buissons. Dans ce cas, pour faciliter les recherches, il serait bon d'avoir une estimation de la distance que l'escarpin a pu parcourir.

Et c'est là que vos nouvelles compétences sur les méthodes numériques vont intervenir...

2.2 Recherche de l'escarpin

Une fois lancé, l'escarpin va avoir le mouvement de chute libre d'un corps de faible traînée. La première étape consiste donc à déterminer les conditions initiales de cette chute libre et donc la position et la vitesse du pied au moment du lancé de l'escarpin.

FIGURE 1 – Les hasards heureux de l'escarpolette

2.2.1 Lancement de l'escarpin

Balancement du siège La balançoire est accrochée à la branche au point A. Le siège est lié aux cordes au point B, le genou de la jeune femme est repéré par le point N et l'extrémité de son pied par le point P.

On précise les données suivantes.

$\vec{AB} = -l \cdot \vec{y}_1$, $\vec{BN} = -d \cdot \vec{x}_1$ et $\vec{NP} = -j \cdot \vec{y}_2$.

$\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

On isole le système constitué par la jeune femme et son siège dont le centre d'inertie est approché par le point B. La robe de la jeune femme étant assez ample, il ne peut être envisageable de négliger sa traînée $\vec{T} = -k \cdot \|\vec{V}(B/R_0)\| \cdot \left(\vec{V}(B/R_0) \cdot \vec{x}_1\right) \cdot \vec{x}_1$.

Question 4. *Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système isolé et montrer que l'angle de balancement du siège θ_1 est régi par l'équation différentielle suivante.*

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta_1 - \delta(\dot{\theta}_1) \cdot \frac{k \cdot l}{m} \cdot \dot{\theta}_1^2$$

où $\delta(\dot{\theta}_1)$ est une fonction qui renvoie -1, +1 ou 0 selon le signe de $\dot{\theta}_1$.

Question 5. *Écrire une fonction* `delta(x)` *qui renvoie un flottant de valeur -1, +1 ou 0 selon le signe de x.*

L'équation obtenue précédemment est une équation différentielle non linéaire du second ordre à une variable. Le problème à résoudre ici est donc :

$$(\mathscr{C}) : \begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) & = & -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta_1(t) - \delta(\dot{\theta}_1(t)) \cdot \frac{k \cdot l}{m} \cdot \dot{\theta}_1(t)^2 \\ \dot{\theta}_1(0) & = & 0 \\ \theta_1(0) & = & \theta_{10} \end{cases}$$

On prendra les valeurs numériques suivantes pour les constantes du problème : $g = 9.81$, $l = 2$, $j = 0.5$, $m = 65$, $k = 0.8$ et $\theta_{10} = 0.5$ en unités du système international.

On suppose que le module `numpy` est importé avec la syntaxe `import numpy as np`.

Question 6. *Écrire la fonction* `eqdf` *en précisant les arguments nécessaires pour que les constantes ne soient pas déclarées comme des variables globales et qui renvoie la valeur de $\ddot{\theta}_1(t)$ selon l'expression obtenue précédemment.*

Question 7. *Vectoriser le problème en écrivant le problème $(\mathscr{C})$ sous la forme $Y' = F_1(t, Y)$ où $Y = (\theta_1, \dot{\theta}_1)$ et F_1 est une fonction à préciser. Écrire la fonction* `F1` *en utilisant la fonction* `eqdf` *précédente.*

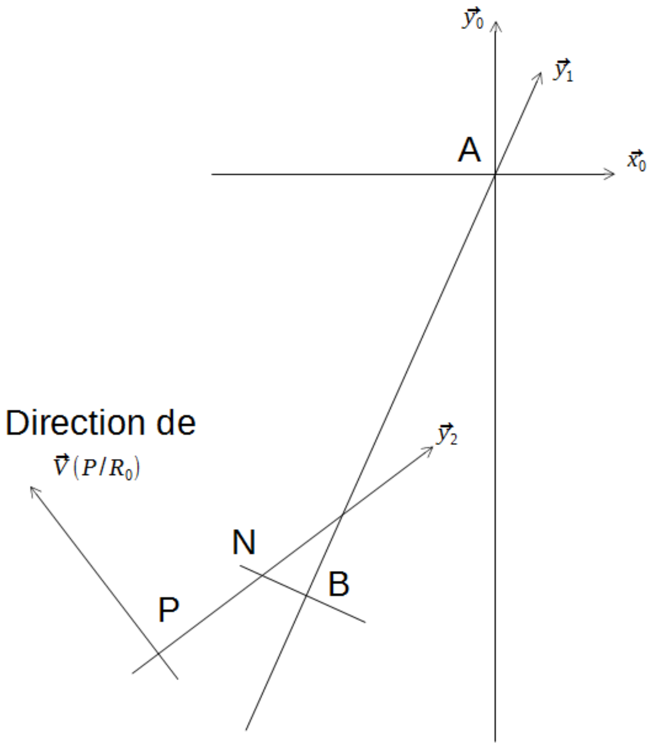


FIGURE 2 – Schéma plan de la scène

Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [\![0, n-1]\!]$. On note ht le pas temporel tel que $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{min} + i \cdot ht$. On pose $Y_i = [y_i, \dot{y}_i]$. Le procédé de vectorisation permet donc de définir ces deux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(\dot{y}_i)_{i\in J_n}$.

Question 8. *Donner la valeur de ht en fonction de t_{max}, t_{min} et n pour obtenir n valeurs t_i régulièrement réparties entre t_{min} et t_{max} comprises. En déduire un morceau de programme qui permette de générer une liste ou un tableau contenant toutes les valeurs de la suite $(ti)_{i\in J_n}$. Compléter ces lignes de codes avec la définition de* `Y0` *qui est le vecteur initial.*

Question 9. *En appliquant le schéma d'Euler explicite, donner la relation de récurrence permettant de déterminer les valeurs de Y_i connaissant Y_0.*

Question 10. *Écrire une fonction* `Euler` *qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie une liste contenant deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in J_n}$ et $(\dot{y}_i)_{i\in J_n}$.*

Question 11. *Pour illustrer ce résultat, écrire un programme permettant de tracer l'évolution de θ_1 en fonction du temps pour un intervalle de temps de 10 s avec 200 points estimés. On suppose que le module* `matplotlib.pyplot` *a été importé avec la syntaxe* `import matplotlib.pyplot as plt`.

Le résultat de ce tracé est fourni à la figure 4.

Question 12. *Commenter brièvement la courbe obtenue.*

Il existe d'autres schémas numériques permettant d'approcher la courbe représentative d'une fonction solution d'une équation différentielle.

Question 13. *Citer une autre de ces méthodes numériques.*

Voici alors les courbes obtenues avec Euler et les deux méthodes vues en cours.
Les deux dernières courbes sont plus conformes à ce que l'analyse physique peut anticiper.
Dorénavant, les résultats de la simulation numérique seront disponibles dans une liste `t` pour les instants et dans une liste `RES = [THETA, THETA_p]` contenant les listes des valeurs de θ_1 et de $\dot{\theta}_1$.

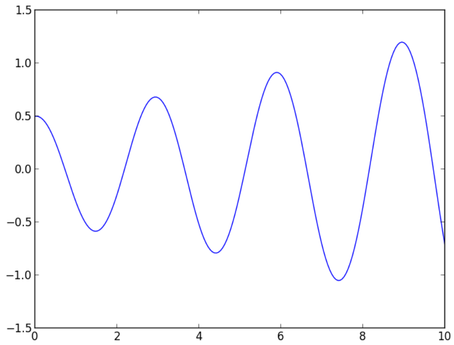


FIGURE 3 – Estimation du balancement du siège par la méthode d'Euler

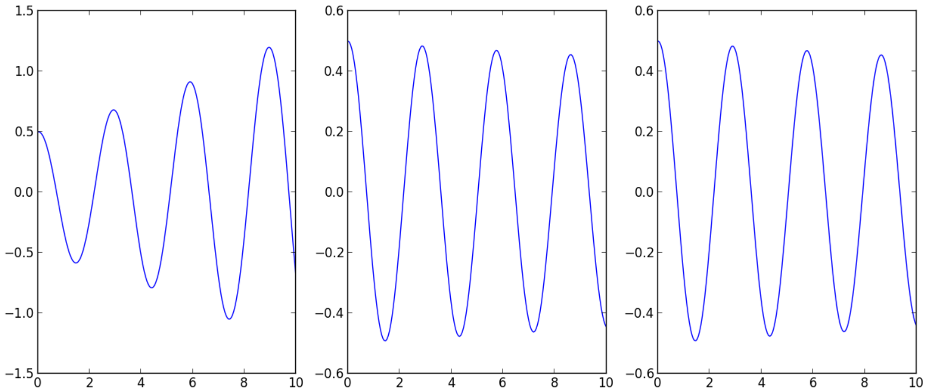


FIGURE 4 – Comparaison des résultats de différentes méthodes numériques

Balancement de la jambe À la première oscillation, la jeune femme perd (ou lance) son escarpin. Dans un premier temps, l'effet dynamique du balancement de sa jambe est négligé. À l'instant $t_b = 1$ s, la jeune femme balance sa jambe avec une vitesse constante $\dot{\theta}_2 = -2\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On suppose alors que la chaussure quitte le pied lorsque la jambe fait un angle de 45° avec la direction des cordes de l'escarpolette.

Question 14. *Déterminer l'instant t_l où la chaussure quitte le pied. Donner l'expression des composantes de $\vec{AP}$ pour $t \in [0, t_b]$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$, puis pour $t \in [t_b, t_l]$. Donner l'expression des composantes de $\vec{V}(P/R_0)$ pour $t \in [0, t_b]$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$, puis pour $t \in [t_b, t_l]$.*

Question 15. *Écrire un élément de programme permettant de stocker les valeurs de θ_1 et $\dot{\theta}_1$ dans une variable* `THETA1`.

Question 16. *Écrire une fonction* `base10` *qui reçoit en argument un vecteur écrit dans la base B_1 $(\vec{x}_1, \vec{y}_1$ sous forme de liste et qui renvoie ce vecteur écrit dans la base B_0 $(\vec{x}_0, \vec{y}_0$ sous forme de liste.*

Question 17. *En déduire un élément de programme permettant de récupérer les conditions initiales de la chute libre de la chaussure. La position sera mémorisée dans une variable* `P` *et la vitesse dans une variable* `VP`.

2.2.2 Trajectoire de l'escarpin

Question 18. *Décrire brièvement une démarche permettant d'obtenir la trajectoire de l'escarpin pendant sa chute libre.*

Ô mourir de cette mort seulette
Que s'en vont, cher amour qui t'épeures,
Balançant jeunes et vieilles heures !
Ô mourir de cette escarpolette !

Paul Verlaine, Romances sans paroles, Ariettes oubliées, II, 1873.

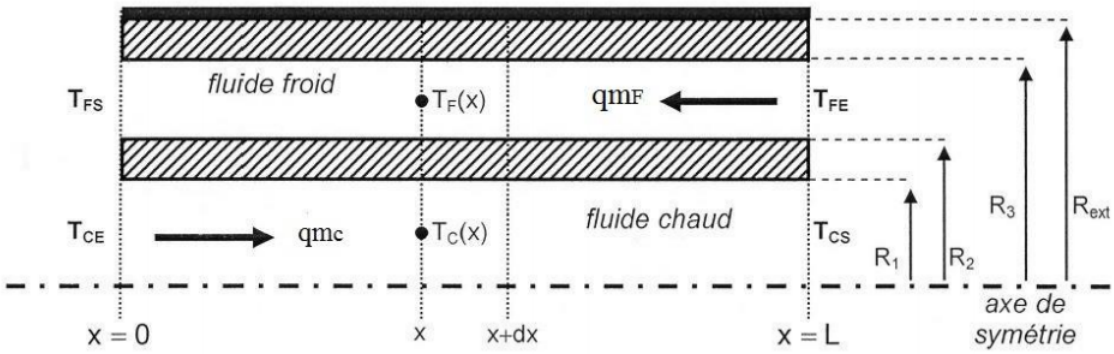
Deuxième partie

Extraits de sujets de concours

3 Méthode de Newton

Modélisation de systèmes physiques et informatique, sujet zéro CCP PSI

L'objectif de cette partie du sujet est la modélisation d'un échangeur thermique, dont la fonction est de faire se croiser deux fluides caloporteurs.



Mais là encore, les équations sont erronées... Je vous propose uniquement trois questions de la partie informatique, en respectant leur formulation. Le modèle physique obtenu est un système de deux équations non linéaires à deux inconnues $t1$ et $t2$, les températures des fluides chaud et froid à la sortie d'un échangeur de longueur l. Pour résoudre ce système, on se propose de mettre le problème sous la forme $F(t) = 0$ avec F une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ notée $F(t) = \begin{pmatrix} F1(t) \\ F2(t) \end{pmatrix}$. $F1$ et $F2$ sont alors des fonctions scalaires à deux variables et t le vecteur inconnue $\begin{pmatrix} t1 \\ t2 \end{pmatrix}$. On se propose dans le sujet de déterminer la solution à l'aide d'un algorithme de Newton.

Question 19. *Rappeler la méthode pour une fonction à une variable.*
Écrire une fonction `Newton(f, eps, x0)` *qui renvoie une solution approchée de $f(x) = 0$ avec une précision de ϵ.*

Pour une fonction à plusieurs variables, il faut remplacer la dérivée de la fonction par un opérateur tangent que l'on notera Ft. Ft sera une matrice de dimensions 2×2 dont les termes sont $Ft(i, j) = \frac{\partial F_i(t)}{\partial t_j}$.

Question 20. *Par analogie avec la méthode de Newton pour les fonctions à une variable, écrire le problème à résoudre pour une fonction à deux variables.*

Question 21. *L'opérateur tangent étant difficile à calculer analytiquement, proposer une méthode basée sur la dérivation numérique permettant d'en obtenir une approximation.*

4 Méthode d'Euler, procédé de vectorisation

Sciences de l'ingénieur et informatique, sujet zéro CCP MP

La partie *Informatique* souhaite déterminer numériquement le temps de réponse à 5% de la vitesse angulaire d'un moteur d'entraînement d'une hélice, soumis à une entrée de type échelon unitaire. Cette étude va se faire en trois temps : résolution numérique de l'équation différentielle (alors que la solution analytique existe et qu'il est préférable dans tous les cas de l'utiliser), test de convergence de la résolution et détermination du temps de réponse à 5%.

Informatique : Résolution numérique de l'équation différentielle

L'étude a conduit à l'équation différentielle suivante, liant la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ à la vitesse de consigne $\omega_{const}(t)$:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot m}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K \cdot \omega_{const}(t)$$

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à la réponse indicielle unitaire du système dans les conditions de Heaviside, ce qui revient à prendre $\omega_{const}(t) = 1$ pour $t \geq 0$, avec $\omega_m(0) = 0$ et $\frac{d\omega_m(0)}{dt} = 0$.

Note sur le procédé de vectorisation L'équation différentielle initiale est une équation différentielle du second degré, il est possible d'appliquer deux schémas d'Euler explicite et/ou implicite comme dans le sujet zéro d'informatique CCP PSI. On peut également poser le vecteur Y tel que $Y(t) = \begin{pmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix}$. L'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre : $\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$.

On peut généraliser cette démarche ; c'est le procédé de vectorisation d'équations différentielles scalaires d'ordre p à des équations différentielles d'ordre 1, mais à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Si on peut linéariser $F(t, Y(t))$, alors l'équation prend la forme $\frac{dY(t)}{dt} = A \cdot Y(t) + B$. Il était possible de le faire ici.

$$F(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ K \cdot \omega_0^2 - \omega_0^2 \cdot \omega_m(t) - 2 \cdot m \cdot \omega_0 \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2 \cdot m \cdot \omega_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \cdot \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Retour au sujet original La réponse $\omega_m(t)$ recherchée sur l'intervalle $[0, T_{max}]$ sera obtenue par la méthode d'Euler explicite.

Le pas de temps, noté `pas`, sera choisi constant. L'intervalle de temps discrétisé est alors représenté par le tableau $T = [t_0 = 0, t_1, \ldots, t_{N-1} = T_{max}]$.

Pour chaque pas de temps, une valeur approchée Y_i de la solution $Y(t_i)$ de l'équation différentielle est recherchée. L'ensemble des Y_i représente N vecteurs de dimensions 2, qui seront stockés en mémoire sous la forme d'un tableau.

$$SY = \begin{pmatrix} \omega_m(0) & \omega'_m(0) \\ \omega_m(t_1) & \omega'_m(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \omega_m(T_{max}) & \omega'_m(T_{max}) \end{pmatrix}$$

Question 22. *Écrire un algorithme ou une fonction permettant de calculer le tableau T.*

Question 23. *Écrire une fonction* `f1(ti, yi)`*, qui prend en arguments la valeur du temps discrétisé* `ti` *et la valeur du vecteur $Y_i = Y(t_i)$ et qui retourne la valeur de $F(t, Y(t))$.*

Question 24. *Donner la relation de récurrence qui lie Y_{i+1} à Y_i et à $F(t_i, Y_i)$ en fonction du pas de temps h.*

Question 25. *Écrire une fonction* `EulerExplicite(Yini, h, Tmax, F)` *qui prend en arguments* `Yini`*, un tableau de dimension 2 contenant la condition initiale de $Y(t)$,* `h` *le pas de temps,* `Tmax` *l'instant final du calcul, et* `F` *la fonction du problème de Cauchy.*

Cette fonction renverra le tableau `SY`*. L'appel à cette fonction dans le programme se fera avec la commande* `SY = EulerExplicite`

Question 26. *Si le pas de temps est divisé par un facteur de 10, comment évolue l'erreur de calcul ?*

Question 27. *Donner la complexité de cette méthode pour T_{max} fixé et indiquer comment évolue le temps de calcul quand le pas de temps est divisé par un facteur 10.*

On suppose que la quantité de mémoire nécessaire pour réaliser le calcul se limite au stockage des tableaux `SY` et `T`. Ces éléments sont représentés en mémoire sous la forme de tableaux de flottants en double précision.

Question 28. *Déterminer le nombre d'octets nécessaire en mémoire pour réaliser cette simulation numérique avec un nombre de pas de temps $N = 10000$.*

Informatique : Convergence de l'algorithme

Avant d'appliquer l'algorithme de recherche du temps de réponse à 5%, il est nécessaire de savoir si l'algorithme de simulation converge. Après calcul, la solution ω_m est stockée dans la variable `W`.

On suppose que la solution converge si toutes les valeurs de ω_m pour $t \in [0.9 \cdot T_{max}, T_{max}]$ ne s'écartent pas de la valeur finale calculée, $\omega_m(T_{max})$, de plus de 0.1%.

Question 29. *Écrire une fonction* `TestConvergence(t, w)` *qui prend en arguments le tableau des temps* `t` *et la solution* `w` *et qui renvoie* `True` *si le critère est vérifié,* `False` *sinon.*

Informatique : Détermination du temps de réponse à 5% du système

Question 30. *Écrire une fonction* `CalculT5` *qui renvoie le temps de réponse à 5% si la convergence est vérifiée et* `-1` *s'il n'est pas vérifié. Les entrées et sorties de cette fonction seront clairement définies.*