

Sujet : Maths 1 PSI E3A 2016

Exercice 3

1 Programmes mystères

1.1 Fonctions P0() et P1()

```
>>> P0(5), P1(5), P0(9), P1(9)
(True, True, True, False)
```

P0() renvoie False si N est pair (pour $N > 2$), True sinon. P1() renvoie True si N est premier, False sinon.

1.2 Fonction P2()

P2() renvoie la liste des entiers premiers inférieurs à N qui s'écrivent sous la forme $1 + k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

```
>>> P2(127)
[2, 5, 17, 37, 101]
```

1.3 Fonction nextPrime()

```
def nextPrime(N):
    '''renvoie le premier nombre premier strictement supérieur à N.'''
    res = N + 1
    while not P1(res):
        res += 1
    return(res)
```

1.4 Nombres jumeaux

1.4.1 Fonction jumeau()

```
def jumeau(N):
    p = N + 1
    q = nextPrime(p)
    while (q - p) != 2:
        p, q = q, nextPrime(q)
    return([p, q])
```

Voici une autre version de cette fonction.

```
def jumeau_bis(N):
    while not (P1(nextPrime(N) + 2)) :
        N = nextPrime(N)
    res = nextPrime(N)
    return([res, res + 2])
```

1.4.2 Fonction lesJumeaux()

```
def lesJumeaux(N):
    L = []
    p, q = 3, 5
    while q <= N :
        L.append([p, q])
        p, q = jumeau(p)
    return(L)
```

2 Fonction récursive

2.1 Appel de M(101)

```
>>> M(101)
91
```

2.2 Appel de M(N)

Si $N > 100$, M(N) renvoie $N - 10$.

2.3 Appels de M(100), M(99), M(98)

```
>>> M(100), M(99), M(98)
(91, 91, 91)
```

2.4 Conjecture et démonstration

On peut conjecturer que " $\forall N \leq 100$, M(N) renvoie 91".

Démonstration Par récurrence descendante.

Initialisation : M(100) renvoie 91, la proposition est donc vraie pour $N = 100$.

Hérédité : soit $K \leq 100$ tel que le résultat soit vrai du rang 100 jusqu'au rang N . L'appel M(N - 1) déclenche celui de M(N+10). Si $N + 10 > 100$ cet appel renvoie N et par hypothèse de récurrence, le second appel de la fonction M(N) renvoie 91. Sinon $N + 10$ est entre N et 100 et par hypothèse de récurrence, l'appel renvoie 91 et le second appel de la fonction M(N) (avec 91) renvoie 91.