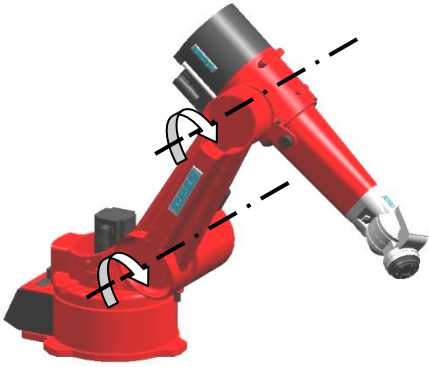
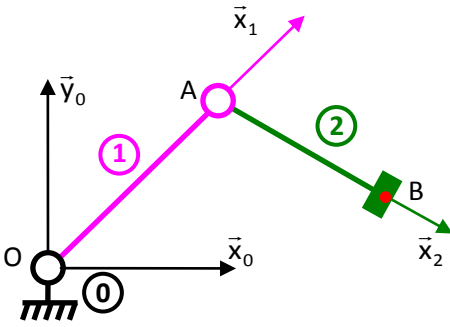


Système d'équations linéaires

1. Mise en situation

De nombreux problèmes de Sciences Industrielles ou de Physique aboutissent à une modélisation sous la forme d'un système d'équations.

Par exemple, nous avons étudié dans le cours 21 de SI un robot 2 axes.

Réel	Modèle (schéma cinématique)	Paramétrage
		<p>Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti 0.</p> <p>Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au bras 1.</p> <p>Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié au bras 2.</p> <p>L'angle θ_1 repère la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour de $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$.</p> <p>L'angle θ_2 repère la rotation de R_2 par rapport à R_1 autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.</p> <p>$OA=AB=L$</p>

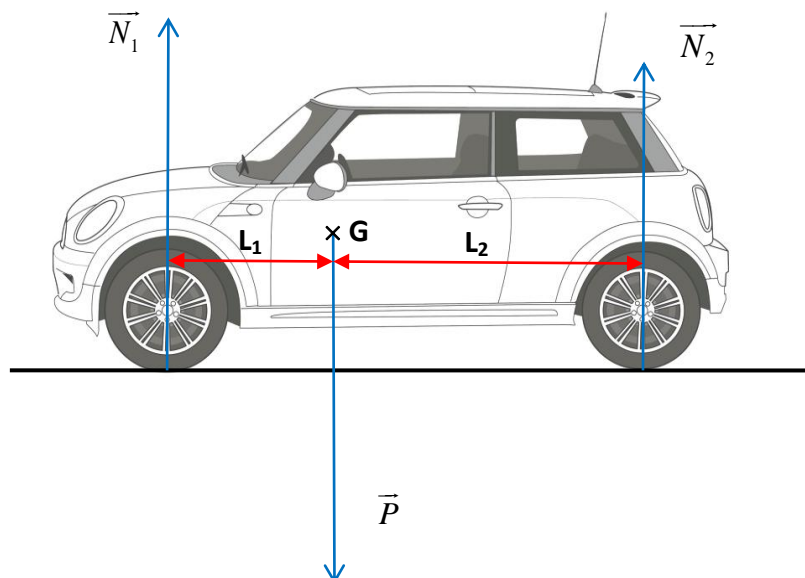
Les coordonnées opérationnelles et articulaires de ce robot sont liées par le système d'équations :

$$\begin{cases} X_B = L \cdot \cos \theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y_B = L \cdot \sin \theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

En pratique, l'opérateur fixe une consigne de position pour l'extrémité du robot : X_B et Y_B sont donc les données du problème, θ_1 et θ_2 les inconnues. La résolution du système d'équation doit fournir les angles θ_1 et θ_2 à imposer au niveau des articulations pour atteindre cette position de consigne.

Nous avons un système de 2 équations à 2 inconnues mais qui est dans ce cas non linéaire (il peut être linéarisé en considérant des angles faibles).

Un autre exemple de système d'équations simple est celui obtenu suite à l'application du principe fondamental de la statique.



L'équilibre d'un véhicule à l'arrêt est traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = P \\ N_1 \times L_1 - N_2 \times L_2 = 0 \end{cases}$$

Nous avons ici un système de 2 équations à 2 inconnues. Le système est ici linéaire et peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ L_1 & -L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations ne justifie évidemment pas une approche numérique pour sa résolution...

Plus généralement, on se propose dans ce cours d'analyser la résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. On considère donc le système linéaire de n équations à n inconnues (S) suivant :

$$(S): \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^n$ sont les coefficients du système (S),

$(b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ sont les seconds membres,

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ sont les inconnues du système.

La résolution de ce type de système va se faire par programmation de la **méthode de Gauss**, déjà vue dans le cours de Mathématiques, proposant une démarche systématique de résolution d'un système d'équations.

2. Vocabulaire et généralités

La matrice A du système, le vecteur inconnu X et le vecteur second membre B du système (S) sont définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

L'écriture matricielle du système est : $AX = B$

Définitions :

- Si le système (S) n'admet pas de solution, on dit qu'il est incompatible. Dans le cadre du programme d'informatique, on appliquera la méthode de Gauss à des systèmes de n équations à n inconnues admettant une solution unique (**Système de Cramer**).
- Le système (S) est un système de Cramer si la matrice A est inversible, la solution est alors $X = A^{-1}B$.
- La matrice augmentée du système (S) est la matrice notée $(A|B)$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} \in M_{n,n+1}(\mathbb{R})$$

Les lignes L_i , $1 \leq i \leq n$, de la matrice augmentée $(A|B)$ sont également celles du système (S). Les colonnes C_j , $1 \leq j \leq n+1$ de la matrice augmentée $(A|B)$ sont également celles du système (S) (en fait $C_{n+1} = B$).

3. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Soit (S) un système linéaire de matrice augmentée associée :

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} \text{ et de lignes } L_i, 1 \leq i \leq n.$$

Les opérations élémentaires sur les lignes du système (S) sont l'échange de lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$), la multiplication (*dilatation*) d'une ligne L_i par $\lambda \neq 0$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$) et l'ajout de λL_j à L_i ($i \neq j$) (*transvection*) ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

Tout système (S') obtenu de (S) par un nombre fini d'opérations élémentaires admet les mêmes solutions que le système (S) (i.e. le système (S') est équivalent au système (S)).

4. Algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss permet de résoudre le système (S) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Il procède en deux étapes principales : la première consiste à **échelonner** le système et la seconde à le **réduire**.

4.1. Echelonnement du système (ou descente)

L'algorithme pour obtenir une matrice échelonnée par lignes (MEL) a été présenté dans le cours de Mathématiques pour un système de Cramer de taille n :

$i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$

Tant que $i \leq n-1$:

Si $\exists p \geq i$ tel que $a_{pj} \neq 0$ on choisit un tel p et on fait $L_p \leftrightarrow L_i$ (choix du pivot et échange des lignes)

pour $k \in [i+1; n]$:

$$L_k \leftarrow L_k - (a_{kj}/a_{ij})L_i$$

$i \leftarrow i + 1$

$j \leftarrow j + 1$

Ce qui peut se traduire par :

- Première étape :
 - (a) : on sélectionne une ligne dont le premier terme est non nul (premier pivot). On permute cette ligne avec la première.
 - (b) : on effectue des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ pour i allant de 2 à n de manière à faire disparaître x_1 des équations 2 à n .
- Deuxième étape : on recommence les étapes (a) et (b) avec les lignes 2 à n et l'inconnue x_2 (on cherche donc un pivot sur la 2^{ème} colonne dans les lignes $L_2 \dots L_n$).
- Ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)$ ^{ème} étape.

Remarque : L'inversibilité de la matrice A entraîne qu'il est toujours possible, à l'étape i , de trouver un pivot sur la i ^{ème} colonne dans les lignes $L_i \dots L_n$.

A l'issue de ces opérations, la matrice augmentée $(A|B)$ est échelonnée par ligne et on aboutit à un système du type :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{1,1}x_1 & + & a'_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\ & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ & & a'_{i,i}x_i & + & \dots & + & a'_{i,n}x_n & = & b'_i \\ & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ & & & & & & a'_{n,n}x_n & = & b'_n \end{array} \right.$$

4.2 Réduction d'un système échelonné (ou remontée)

La résolution du système peut se faire de deux façons :

- Par substitution de bas en haut : la n^{ème} équation donne x_n que l'on reporte dans la $(n-1)$ ^{ème} équation pour obtenir x_{n-1} et ainsi de suite.
- Par opérations élémentaires (Pivot de Gauss-Jordan) :

1. Multiplication des lignes par $\frac{1}{a'_{i,i}}$, les pivots (termes diagonaux) valent alors 1.

2. La dernière ligne donne directement la valeur de x_n . On utilise le pivot valant 1 sur la dernière ligne et la dernière colonne pour éliminer x_n des équations L_{n-1}, \dots, L_1 par des transvections de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_n$.

3. La ligne L_{n-1} donne alors la valeur de x_{n-1} . On utilise le pivot valant 1 en position $n-1, n-1$ pour éliminer x_{n-1} des équations L_{n-2}, \dots, L_1 .

4. On fait de même jusqu'à la ligne L_2 . On obtient ainsi un système échelonné réduit de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b''_1 \\ & \dots & \\ x_i & = & b''_i \\ & \dots & \\ x_n & = & b''_n \end{array} \right.$$

4.3 Choix du pivot

Pour illustrer l'incidence du choix du pivot sur les erreurs d'arrondis dans l'application de la méthode de Gauss, étudions le système suivant (S) :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 10^{-4}x_1 & + & x_2 = 1 \\ x_1 & + & x_2 = 2 \end{array} \right.$$

Une résolution exacte donne : $x_1 = \frac{1}{1-10^{-4}} \approx 1,0001$ d'où $x_2 = 2 - \frac{1}{1-10^{-4}} \approx 0,9999$

Une résolution en virgule flottante avec 3 chiffres significatifs en considérant $a_{1,1} = 10^{-4}$ comme pivot donne :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 10^4 L_1 : -9999x_2 = -9998$$

Compte tenu des erreurs d'arrondi, on a : $-9.99 \times 10^3 x_2 = -9.99 \times 10^3$ donc $x_2 = 1$, ce qui, reporté dans L_1 , donne $x_1 = 0$. Cette solution ne vérifie clairement pas $x_1 + x_2 = 2$...

Une résolution en virgule flottante avec 3 chiffres significatifs en considérant $a_{2,1} = 1$ comme pivot donne :

$$L_1 \leftarrow L_1 - 10^{-4} L_2 : 0,9999x_2 = 0,9998,$$

Compte tenu des erreurs d'arrondi, on a : $x_2 = 1$, ce qui, reporté dans L_2 donne $x_1 = 1$.

Cet exemple montre que considérer des *petits* pivots peut engendrer des erreurs d'arrondis qui, lors des additions et soustractions, donnent des solutions complètement erronées. Nous admettrons que le choix de petits pivots a de grandes chances d'entraîner une perte de précision dans la soustraction de grands nombres proches (la méthode numérique est dite *instable*).

En conséquence, pour éviter une trop grande instabilité de l'algorithme, il faut choisir le pivot sur la colonne i en choisissant le coefficient $a_{i,j}$ avec $i \leq j \leq n$ ayant la plus grande valeur absolue. Cette méthode est appelée **pivot partiel**.

Pour avoir une plus grande stabilité, on aurait pu choisir la méthode du **pivot total** qui consiste à autoriser des échanges de lignes et de colonnes et à prendre comme pivot à l'étape i le coefficient $a_{i',j'}$ avec $i \leq i' \leq n$ et $i \leq j' \leq n$ ayant la plus grande valeur absolue suivi des échanges de ligne et de colonne $L_i \leftrightarrow L_{i'}$ et $C_i \leftrightarrow C_{j'}$. Cette méthode présente une difficulté : l'échange de colonne entraîne une modification de l'ordre des inconnues.

5. Complexité de l'algorithme du pivot de Gauss

Déterminer la complexité d'un algorithme consiste à déterminer le nombre d'opérations élémentaires effectuées par cet algorithme. Cette information permet de comparer les performances de deux algorithmes répondant au même problème mais aussi d'évaluer le temps d'exécution d'un programme.

La complexité de l'algorithme du pivot de Gauss appliqué à un système de n équations à n inconnues dépend évidemment de cette taille n .

La phase d'échelonnement du système nécessite à chaque étape i allant de 1 à $(n-1)$:

- $(n-i)$ comparaisons pour la recherche du pivot. Par exemple à l'étape 1, il faut comparer les termes $a_{2,1}, \dots, a_{n,1}$ au pivot *par défaut* $a_{1,1}$.
- $2 \times (n+1)$ affectations pour l'échange éventuel de deux lignes.
- $(n-i)$ transvections. Chaque transvection nécessite $(n+1)$ multiplications, divisions, soustractions et affectations.

A chaque étape i , on a donc $(n-i) + 2 \times (n+1) + (n-i) \times 4 \times (n+1)$ opérations élémentaires. En faisant la somme

pour i allant de 1 à $(n-1)$, le terme prépondérant est le terme $n \times \sum_{i=1}^{n-1} i = n \times \frac{n(n-1)}{2}$ qui évolue donc en n^3 . Les

autres termes évoluent en n ou n^2 et sont rapidement négligeable devant n^3 .

On peut montrer de façon analogue que la phase de réduction évolue en n^2 , la phase d'échelonnement est donc la plus *coûteuse* de l'algorithme et on retiendra donc que l'algorithme du pivot de Gauss a une **complexité en n^3** .

6. Applications industrielles

6.1 Structures en treillis

Un treillis est un assemblage de barres verticales, horizontales et diagonales formant des triangles. Les barres concourent en des nœuds. Un tel assemblage allie résistance, rigidité et légèreté. Il est par exemple couramment utilisé dans la conception de ponts.

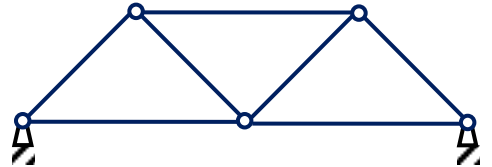
Lorsqu'un treillis est soumis à un effort, certaines barres de l'assemblage sont mises en compression et d'autres en tension.

Le problème consiste ainsi à déterminer ces actions mécaniques dans les barres afin de valider leur dimensionnement. Les équations sont obtenues par application du principe fondamental de la statique.

L'exemple simplifié ci-contre possède 7 barres et conduit donc à un système linéaire de 7 équations à 7 inconnues. La résolution de ce système avec un algorithme du pivot de Gauss nécessite donc de l'ordre de $7^3=343$ opérations.

En parallèle du coût en opérations et donc en temps de calcul, on peut aussi analyser le coût du stockage. Pour une matrice 7×7 , il faut au moins 49 espaces mémoire (un pour chaque terme). Chaque terme est représenté classiquement par un flottant (double précision) codé sur 64 bits. L'espace mémoire demandé est alors de $7 \times 7 \times 64 \text{ bits} = 3136 \text{ bits} = 392 \text{ octets}$.

Une réalisation industrielle composée de 10^3 barres nécessitera 10^9 opérations et 8 Mo d'espace mémoire.



6.2 Éléments finis

En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques solide ou fluide, thermodynamiques, acoustiques, etc.).

Le principe général de la méthode est de discrétiser le milieu continu (dimension infinie) en un ensemble d'éléments (dimension finie). On peut montrer que la recherche de la solution du problème se ramène alors à la résolution d'un système linéaire. La méthode des éléments finis est fréquemment enseignée en écoles d'ingénieurs.

Cette approche numérique de la solution est d'autant plus fiable que le milieu continu est finement discrétisé : on parle de maillage. Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise et proche de la *vraie* solution. Par contre, un maillage fin entraîne une augmentation de la taille du système d'équations à résoudre et influence considérablement le temps de calcul. Pour certaines applications industrielles, il n'est pas rare d'atteindre quelques heures à quelques jours de calcul.

