

## Déroulé de l'évaluation

Le travail est à réaliser en binôme.

La première partie du problème a été réalisée en salle d'examen. La réponse à cette partie est donnée en début d'énoncé.

À l'issue de la séance, vous devrez déposer sur Moodle :

- Un fichier .py contenant le code (commenté) permettant de répondre aux questions de cette évaluation.
- un fichier .pdf contenant les réponses aux questions (visuels, valeurs numériques, commentaires, etc.).

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être sujet à révision.

## Contexte

Située à Montfort dans les Alpes-de-Haute-Provence, la chapelle Saint-Donat de Montfort est une chapelle datant du XI<sup>e</sup> siècle, classée Monument Historique en 1959 (Figure 1).



FIGURE 1 – À gauche, vue par drone de la chapelle (Par Mozkart, Travail personnel, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=77135653>); à droite, vue du nuage de points tridimensionnel (ENSG, relevé lidar réalisé par les étudiants Géomètre de 2<sup>e</sup> année, 2016).

Dans un souci de conservation et de documentation de l'ouvrage, un relevé tridimensionnel intérieur a été réalisé à l'aide d'un lidar terrestre (*light detection and ranging*)<sup>1</sup> par les étudiants Géomètre de 2<sup>e</sup> année de l'École Nationale des Sciences Géographiques. Ce relevé est livré avec une exactitude de l'ordre de 5 mm.

---

1. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Lidar#Lidars\\_télémètres\\_laser\\_à\\_balayage](https://fr.wikipedia.org/wiki/Lidar#Lidars_télémètres_laser_à_balayage)

On s'intéresse ici à la nef principale de l'édifice, dont la forme est proche d'un demi-cylindre de révolution, d'axe  $(Ox)$  comme présenté sur la figure 2.

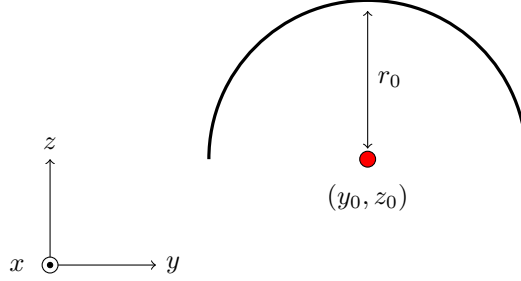


FIGURE 2 – Vue schématique de la nef principale de la chapelle Saint-Donat de Montfort ; l'axe de révolution de la nef est parallèle à l'axe  $(Ox)$  et passe par le point  $(y_0, z_0)$  ;  $r_0$  est le rayon de la nef.

**L'objectif de l'exercice est d'ajuster un demi-cylindre à la nef principale et de qualifier les écarts à cette surface.**

### Formulation du problème

La formulation du problème a été déjà abordée en première partie de l'examen.

Pour rappel, on s'intéresse à l'équation du cylindre donnée par :

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r_0^2$$

Où  $(y_0, z_0)$  désignent l'ordonnée et la cote de l'axe de révolution du cylindre,  $r_0$  est son rayon.

On dispose de  $n$  triplets de valeurs  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  correspondant à des points intérieurs de la nef.

Le problème peut être reformulé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r_0^2 &\Leftrightarrow y^2 + z^2 - 2yy_0 - 2zz_0 + y_0^2 + z_0^2 - r_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 + z^2 = 2yy_0 + 2zz_0 + r_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \end{aligned}$$

On identifie les éléments du problème des moindres-carrés :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^2 + z_1^2 \\ \vdots \\ y_n^2 + z_n^2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2y_n & 2z_n & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ r_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer  $y_0, z_0$ .  $r_0$  est estimé à partir de  $\hat{X}$  :

$$\begin{cases} y_0 &= \hat{X}_1 \\ z_0 &= \hat{X}_2 \\ r_0 &= \sqrt{\hat{X}_3 + y_0^2 + z_0^2} \end{cases}$$

Où  $\hat{X}_i$  désigne le  $i^{\text{e}}$  élément du vecteur  $\hat{X}$ .

### Application (14 pts)

Les données sont stockées dans une matrice contenue dans le fichier `nef.npy` : la première colonne contient les abscisses  $x_i$ , la deuxième les ordonnées  $y_i$  et la troisième la cote  $z_i$  (verticale). Le chargement des données se fait de la manière suivante :

```
Python
data = np.load('nef.npy')
xi = data[:,0:1]
yi = data[:,1:2]
zi = data[:,2:3]
```

#### 1. Ajustement du cylindre d'axe $(Ox)$ (8 pts)

- Visualiser le nuage de points contenu dans le fichier `nef.npy`.
- Déterminer les paramètres du demi-cylindre  $(y_0, z_0, r_0)$  s'ajustant à ce nuage de points.  
*Voici un ordre de grandeur pour chacun des paramètres :  $y_0 \sim 1000$  m,  $z_0 \sim 500$  m,  $r_0 \sim 2.5$  m.*
- Visualiser simultanément le nuage de points et le demi-cylindre ajusté ; le cylindre sera tracé sous la forme de fils de fer.
- Visualiser les résidus selon l'abscisse  $x$ .
- Tracer les statistiques des résidus à l'aide d'une boîte à moustaches.  
Déterminer la valeur minimale, maximale, moyenne ainsi que l'écart-type de ces résidus.  
Commentez ces valeurs.

#### 2. Horizontalité de la nef (6 pts)

Nous avons supposé dans la question précédente que le demi-cylindre était orienté selon l'axe  $(Ox)$ . Cette hypothèse peut-être contrôlée en découpant le nuage de points en  $n = 30$  couches de même épaisseur selon l'abscisse  $x$  (Figure 3).

Pour chacune des couches on cherche à ajuster un demi-cylindre élémentaire d'axe  $(y_0^k, z_0^k)$  et de rayon  $r_0^k$  :

$$(y - y_0^k)^2 + (z - z_0^k)^2 = (r_0^k)^2$$

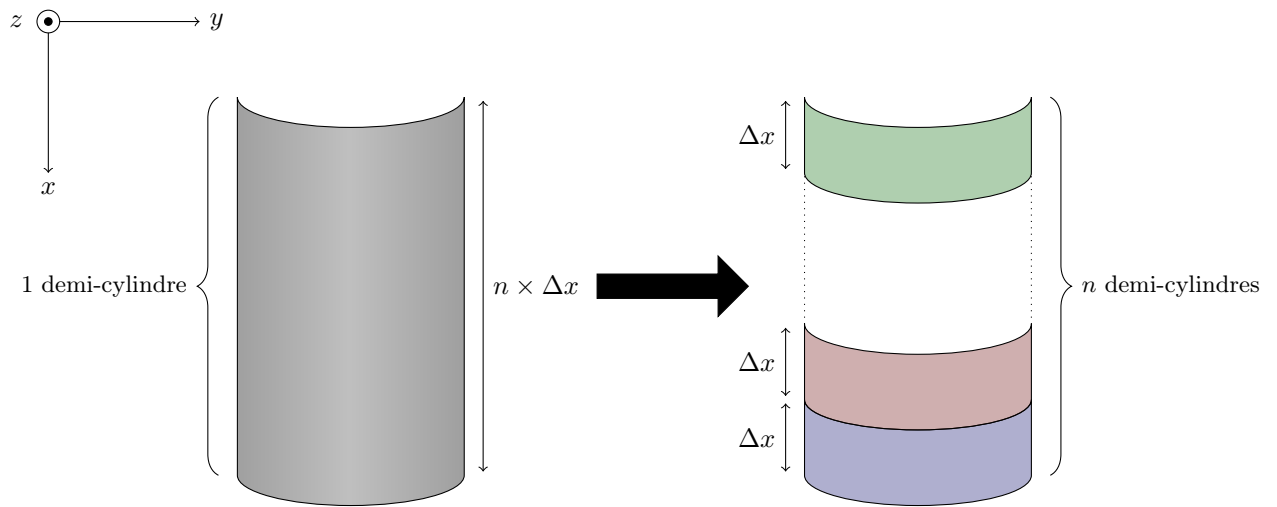


FIGURE 3 – Découpage du demi-cylindre de révolution en  $n$  demi-cylindres.

- Formaliser le problème des moindres carrés pour un cercle élémentaire  $k$ .
- Déterminer les paramètres  $(y_0^k, z_0^k, r_0^k)_{k \in \mathbb{N}_n^*}$  associés à chacun des  $n$  cercles élémentaires.

Pour découper le nuage de points selon l'abscisse  $x$ , on pourra s'aider de l'exemple suivant :

Python

```
# Génère 100 valeurs aléatoires
A = np.random.random(100)
# Cherche les valeurs générées qui sont comprises entre 0.1 et 0.5
test = (A > 0.1) & (A < 0.5)
# Extrait ces valeurs comprises entre 0.1 et 0.5
# Avec le reshape(-1,1), A_test est de dimension (n,1)
A_test = A[test].reshape(-1, 1)
```

- Calculer les écarts entre les valeurs  $(y_0^k, z_0^k, r_0^k)_{k \in \mathbb{N}_n^*}$  et  $(y_0, z_0, r_0)$  calculées à la question précédente.  
Visualiser ces écarts sous forme de boîtes à moustaches.  
Donner l'écart moyen, l'écart-type et les écarts minimal et maximal pour chaque paramètre.
- Visualiser l'évolution du rayon puis de la position du centre des cercles élémentaires en fonction de l'abscisse  $x$ .
- Conclure quant à la forme de la nef.