Projets ISAE - 3ième année - Finance
Encadrant : Anthony Réveillac[1]

Pricing des zéro-coupon dans un modèle à taux flottant : le modèle de Vasiček (Projet N° 1)

Nous avons étudié dans le cours un modèle de marché muni d'un actif sans risque déterministe. Le but de se projet est d'étudier un modèle de marché dans lequel l'actif sans risque est un taux flottant, donc lui-même soumis à des fluctuations aléatoires. Dans ce cadre le prix d'une obligation zéro-coupon par rapport à ce taux devient un actif contingent. Le but de ce projet sera donc d'étudier un modèle de taux d'intérêt stochastique et de réaliser le pricing des obligations zéro-coupon.

Partie I : Le modèle et pricing des zéro-coupon

Le taux court $r := (r(t))_{t\geq 0}$ est supposé donné comme l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dr(t) = b(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t, \quad t \geq 0; \quad r(0) = r_0, \tag{1}$$

où b, σ sont des processus adaptés (qui seront précisés plus loin), W est un mouvement brownien défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et r_0 un réel strictement positif. On note, $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration naturelle (satisfaisant les conditions habituelles) de W. Au processus r est associé l'actif *money market* B par rapport auquel sera réalisée l'actualisation :

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

On suppose ici pour simplifier l'analyse que $\mathbb{P}$ est une MME ; ainsi pour une maturité T fixée, le prix $P(t, T)$ à la date t du zéro-coupon est donné (en accord avec le résultat vu en cours *fundamental theorem of asset pricing*) par :

$$p(t, T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0, T]; \quad p(T, T) = 1. \tag{3}$$

Désormais on suppose $T > 0$ fixé.

1. On pose
$$M_t := p(t, T)B(t)^{-1}.$$
   (a) Montrer que M est une martingale.
   (b) En déduire qu'il existe un processus adapté $v := (v(t))_t$ tel que :
$$M_t = M_0 + \int_0^t v(s)dW_s, \quad t \geq 0.$$

1. anthony.reveillac@insa-toulouse.fr

2. Montrer que p satisfait :

$$dp(t,T) = p(t,T)r(t)dt + v(t)B(t)dW_t, \quad t \in [0,T].$$

3. Comment interpréter le fait que le processus actualisé $\tilde{p}(t,T) = M_t$ soit une martingale sous $\mathbb{P}$?
4. Soit $T > 0$ fixé. On suppose désormais qu'il existe une fonction $F_T : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dont la régularité sera précisée au fur et à mesure de l'analyse ci-dessous) telle que

$$p(t,T) = F_T(t, r(t)), \quad t \in [0,T].$$

Donner l'EDP satisfaite par F_T (à T fixé) qui assure que M est une martingale (on précisera la régularité supposée sur F_T). Donner également les conditions au bord ainsi que la nature de cette EDP.

Partie II : Le modèle de Vasiček

On suppose ici que (1) est donné par :

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0; \quad r(0) = r_0, \tag{4}$$

avec $b, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

1. En utilisant la même méthode que celle utilisée pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck donnez une forme explicite pour r en fonction des paramètres et de W.
2. Déduire la loi de $r(t)$. Que peut-on en déduire sur ce modèle ? Commenter.
3. Calculer pour t fixé, l'espérance et la variance de $r(t)$.
4. En utilisant l'EDP obtenue pour F_T, montrer et déterminer les constantes ρ, γ, μ tels que :

$$F_T(t,r) = e^{A(t,T) - B(t,T)r},$$

avec

$$\begin{cases} \partial_t A(t,T) = \rho B^2(t,T) + \gamma B(t,T), \quad t \in [0,T],\ A(T,T) = 0 \\ \\ \partial_t B(t,T) = \mu B(t,T) - 1, \quad t \in [0,T],\ B(T,T) = 0. \end{cases}$$

Résoudre explicitement ce système et donner la solution explicite à l'EDP pour F_T.
5. En utilisant l'EDS (4) simuler des trajectoires de r par la méthode d'Euler ; en déduire une simulation du prix du zéro-coupon $p(t,T) = F_T(t, r(t))$.
6. Apporter un regard critique et applicatif sur ce modèle.

Partie III : Estimation de Monte-Carlo dans le modèle de Vasiček

On s'intéresse désormais à l'analyse numérique du pricing d'un contrat de payoff $(r_T - k)_+$ de maturité T avec $k > 0$ avec r comme dans la Partie II.

1. Ecrire le prix C_t à chaque instant t.
2. Expliquer comment C peut être relié à une EDP comme précédemment.
3. Proposer une approximation de C par la méthode de Monte-Carlo.
4. Donner une situation où la méthode de Monte-Carlo doit être modifiée pour utiliser la méthode de l'échantillonnage préférentiel (on demande des choix de valeurs de paramètres et une explication de la démarche.