<u>Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο</u>

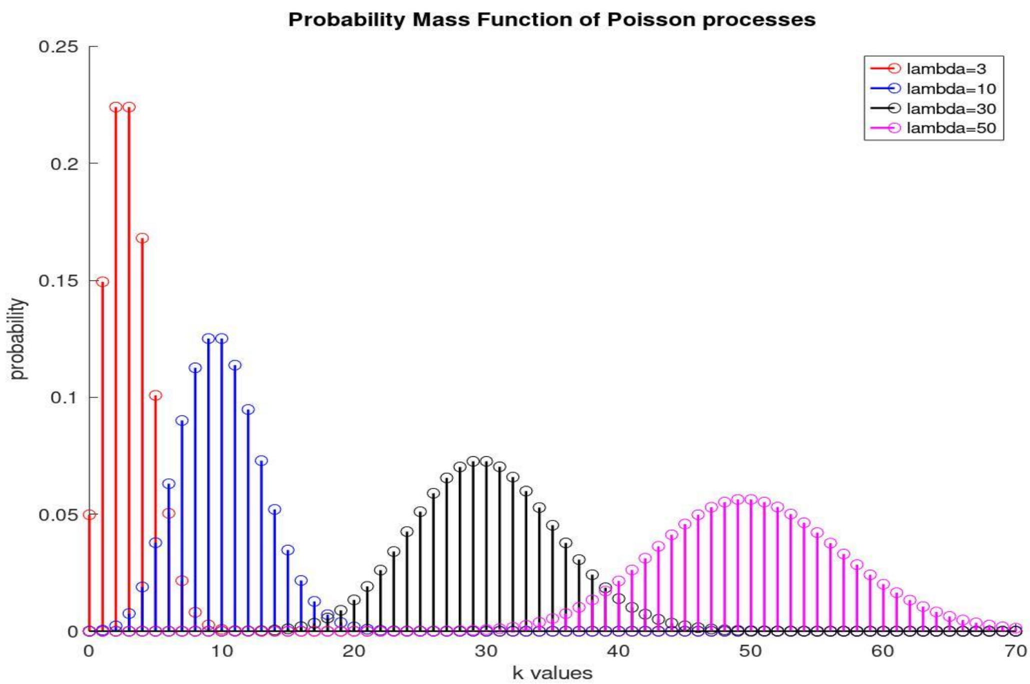
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

1η Εργαστηριακή Άσκηση στο μάθημα Συστήματα Αναμονής

6ο Εξάμηνο - Ακαδημαϊκό Έτος : 2020-2021 Θωμάς Πετρόπουλος - el18915

<u>Κατανομή Poisson:</u>

Α) Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 30, 50}. Παρατηρούμε ότι καθώς το λ αυξάνεται, μειώνεται η κορυφή τους -δηλαδή η τιμή της πιθανότητας- αυξάνεται το εύρος τους στον άξονα x καθώς και μετατοπίζεται δεξιά.

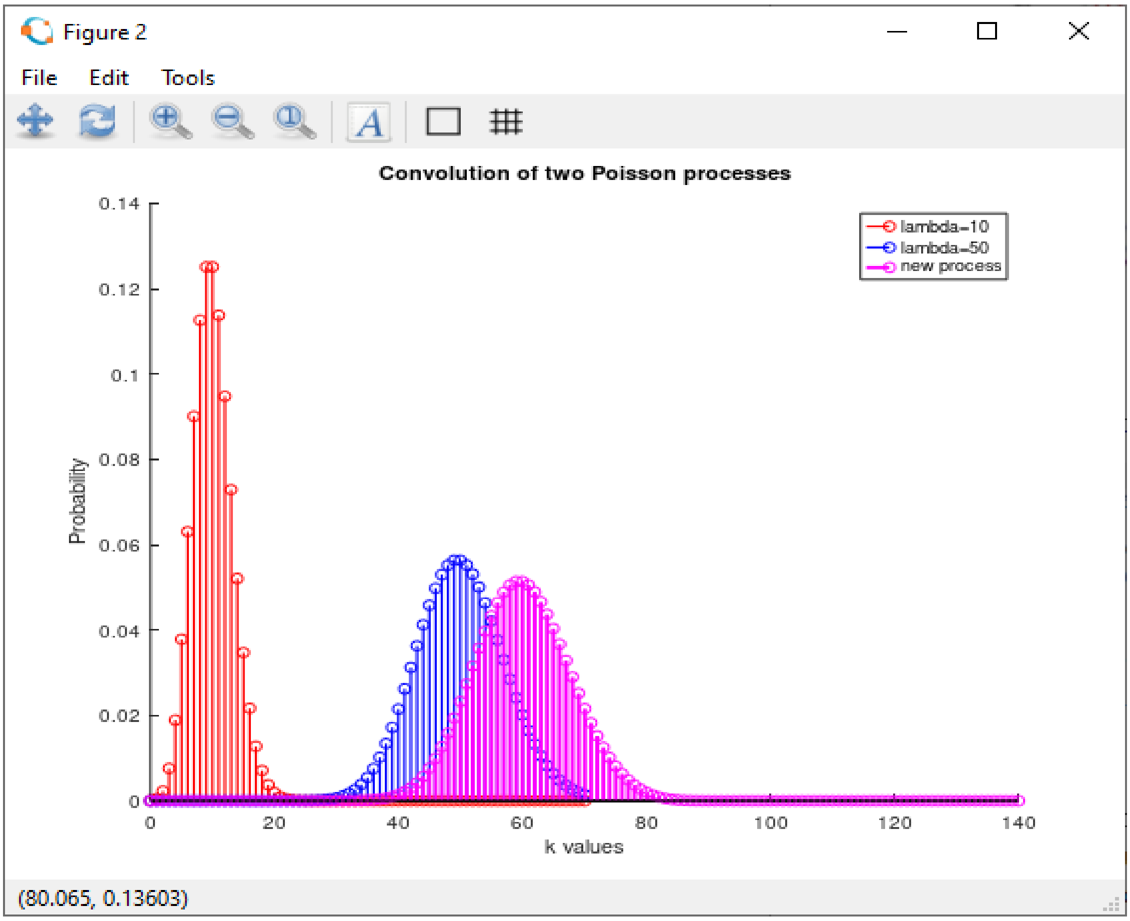


Β) Πηγαίνοντας στο command window:

```
Command Window
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
>>
```

Συνεπώς παρατηρούμε ότι οι τιμές της μέσης τιμής και της διακύμανσης είναι ίσες με 30(=λ).

Γ) Κάνοντας συνέλιξη των δύο ανεξάρτητων κατανομών Poisson με λ=10 και λ=50 αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι προκύπτει μια νέα κατανομή Poisson με λ=60, γεγονός που επιβεβαιώνει τη θεωρία , δηλαδή ότι η συνέλιξη δυο ανεξάρτητων κατανομών Poisson έχει ως λ το άθροισμα των δυο επιμέρους, το οποίο είναι και η απαραίτητη προϋπόθεση.



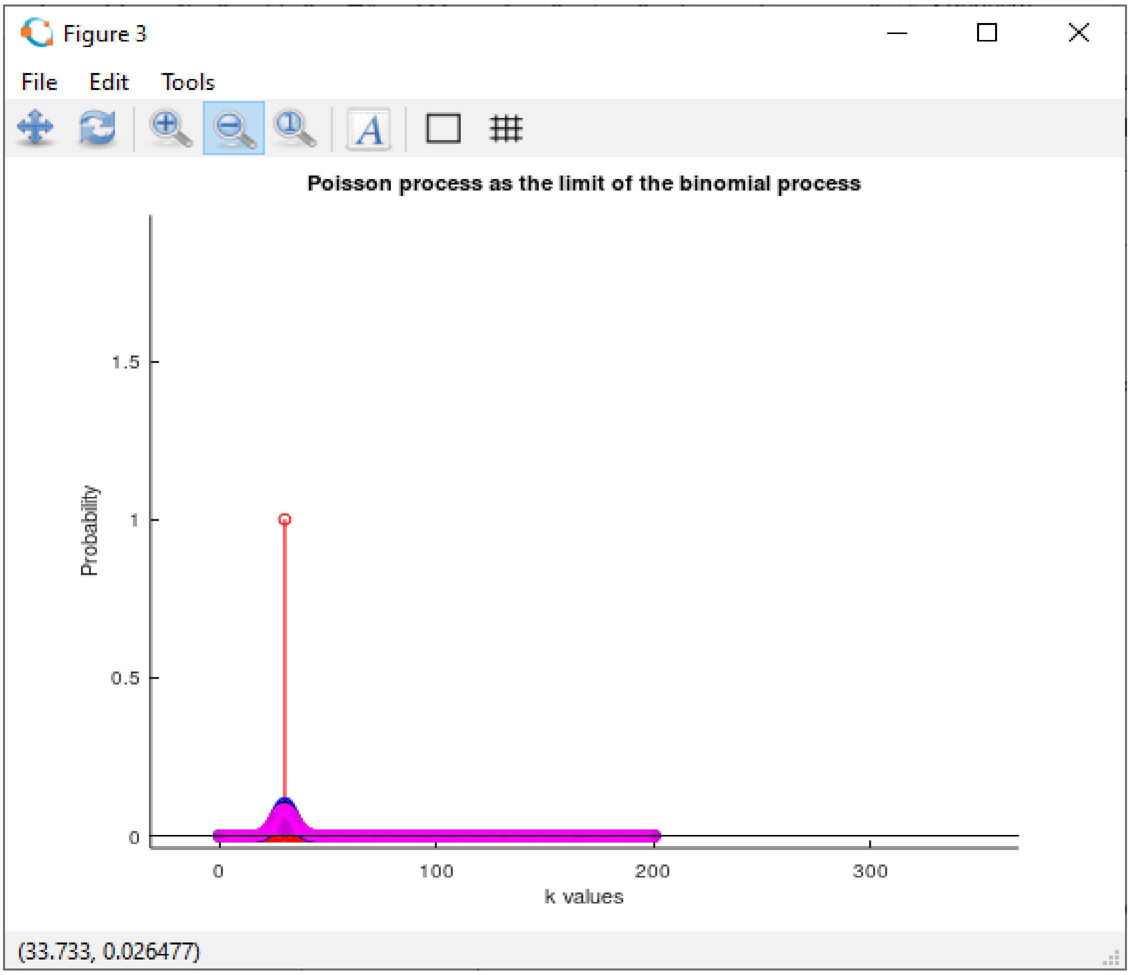
Δ) Γνωρίζουμε ότι για n τείνει στο άπειρο και p στο 0 , έτσι ώστε np=σταθερό η διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην Poisson με παράμετρο np=λ.

Στο παράδειγμά μας, διατηρώντας το γινόμενο np σταθερό με τις εντολές:

n = lambda.*i;

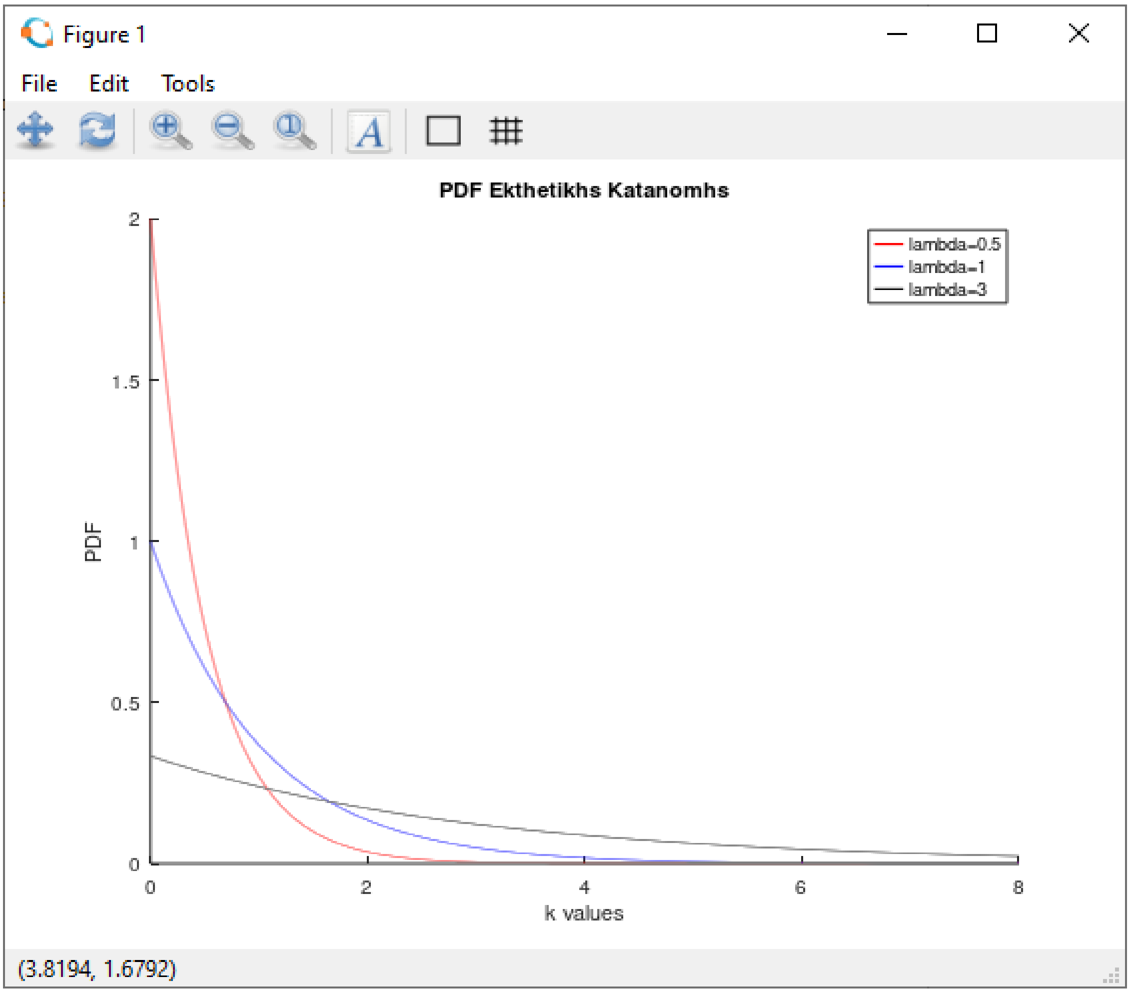
p = lambda./n;

Παρατηρούμε ότι συγκλίνει στην κατανομή Poisson για λ=30.



Εκθετική Κατανομή:

A) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την εκθετική κατανομή είναι η λexp(-λx),άρα γνωρίζουμε ότι θα προκύψουν φθίνουσες συναρτήσεις. Στο Octave δίνεται με την εντολή exppdf και έχουμε:

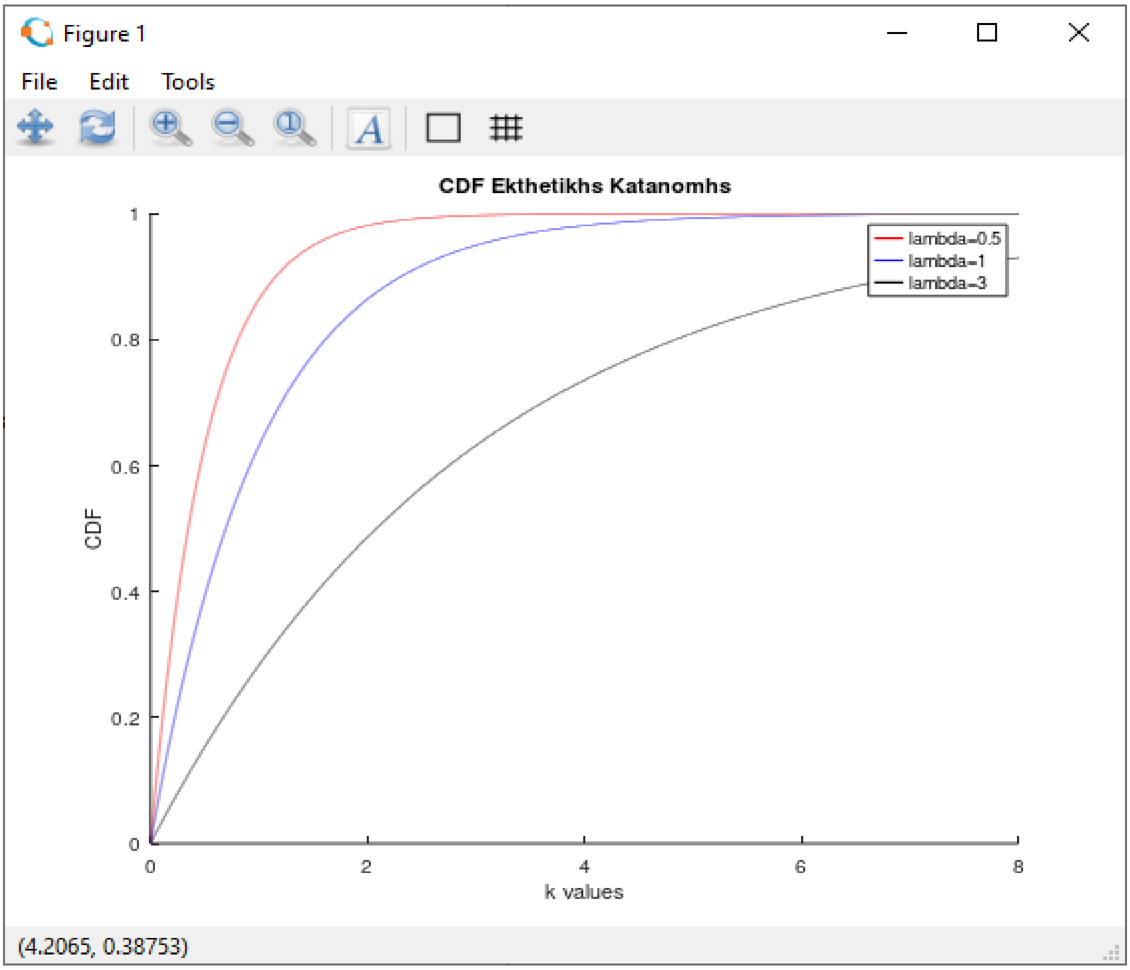


Ο κώδικας της άσκησης είναι ο εξής:

```
#Ekthetikh Katanomh erwthma 1
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;
k = 0:0.0001:8;
lamda = [0.5, 1, 3];
for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:)= exppdf(k,lamda(i));
endfor
colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;
title("PDF Ekthetikhs Katanomhs");
xlabel("k values");
ylabel("PDF");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

B) Ανάλογα για το CDF θα έχουμε άυξουσες συναρτήσεις, και το Octave έχει την εντολή expcdf. Προκύπτει το εξής:



Και ο κώδικας για την υλοποίηση είναι :

```
#Ekthetikh Katanomh erwthma 2
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;
k = 0:0.0001:8;
lamda = [0.5, 1, 3];
for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:)= expcdf(k,lamda(i));
endfor
colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;
title("CDF Ekthetikhs Katanomhs");
xlabel("k values");
ylabel("CDF");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

Γ) Στο ερώτημα αυτό, χρησιμοποιούμε τα ίδια εργαλεία με το Β ερώτημα, καθώς και κάποια θεωρία από το μάθημα των πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες : P(X>3000) και Pr(X>5000|X>2000).

Για την πρώτη, ισχύει ότι : P(X<=3000)= 1 – P(X>3000) =>

P(X>3000) = 1 - P(X<=3000)

Όμως P(X<=3000) = exp(3000) , άρα προκύπτει και το res1 στον παρακάτω κώδικα.

Ανάλογα για το Pr(X>5000|X>2000) ισχύει ότι :

Pr(X>5000|X>2000) = P[X>5000 ∩ X>2000] / P(X>2000)

Η συναλήθευση (δηλαδή η τομή) του αριθμητή ισοδυναμεί με P(X>5000).

Τα P(X>2000) και P(X>5000) υπολογίζονται με τον άνωθεν τρόπο.

Ο κώδικας είναι ο εξής :

```
#Ekthetikh Katanomh erwthma 3
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;
k = 0:0.0001:8;
exp = expcdf(k,2.5);

#Gia to P[x>3000] :
res1 = 1 .- exp(3000);

#Gia to P[x>5000|x>2000] :
res2 = (1 .- exp(5000))./(1 .- exp(2000));
display(res1);
display(res2);
```

Και τα res1 και res2 φαίνονται στο command window:

```
res1 = 0.8870
res2 = 0.8869
>>
```

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των δύο πιθανοτήτων είναι οριακά ίσες.

Αυτό συμβαίνει επειδή η συνάρτηση CFD είναι η εξής :

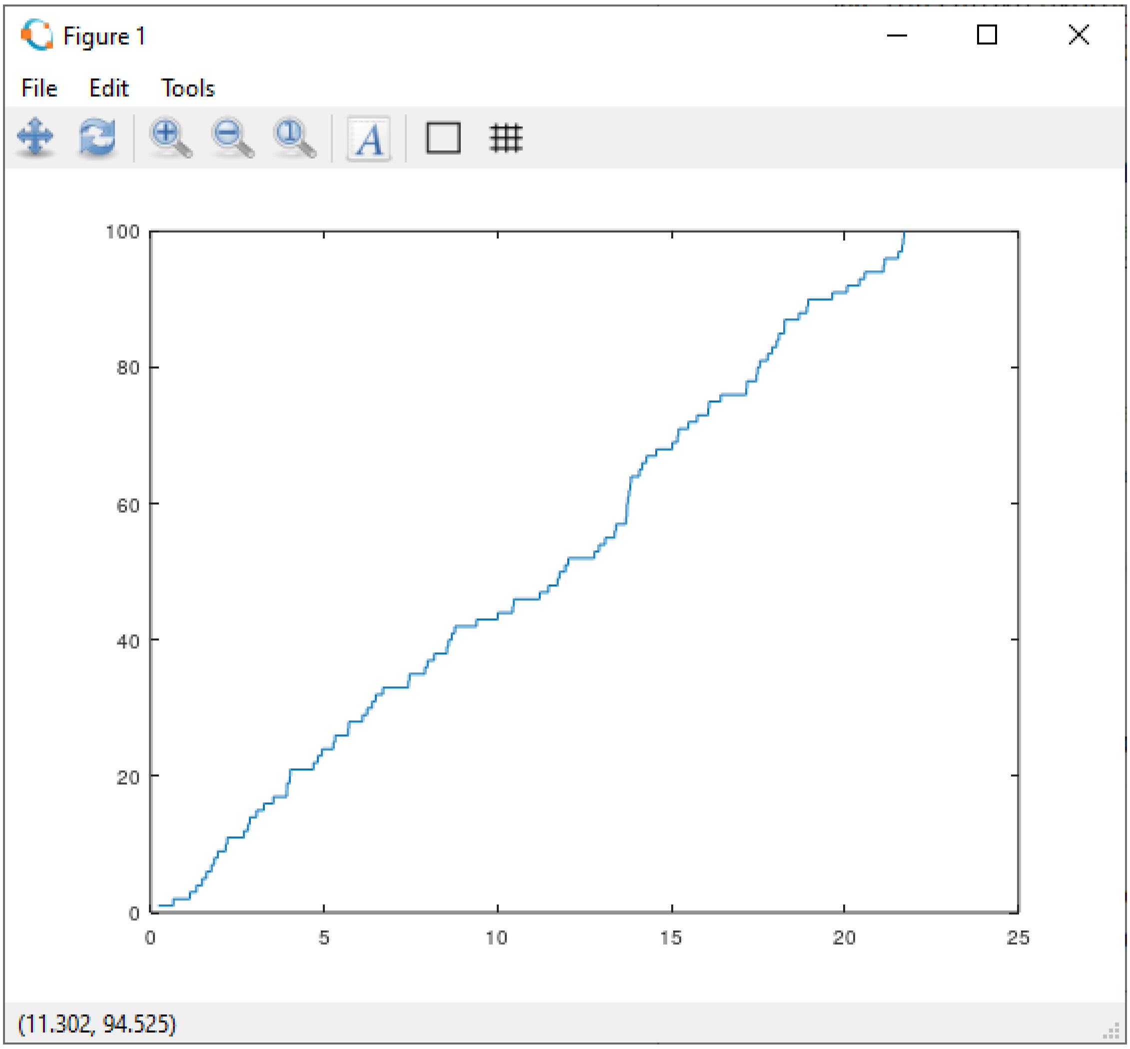
$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Άρα για μεγάλα χ , ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 άρα παρατηρούμε τιμές κοντά στο 1 με ελάχιστες αποκλείσεις, το οποίο αποδεικνύεται και από το διάγραμμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson:

Α) Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εμφάνιση δυο διαδοχικών γεγονότων Poisson γνωρίζουμε ότι ακολουθεί εκθετική κατανομή.

Με την εντολή exprnd() παίρνουμε 100 τυχαία δείγματα και κατόπιν με την εντολή stairs δημιουργούμε το παρακάτω διάγραμμα:



Ο κώδικας είναι ο εξής:

```
#Katametrisi Poisson 1
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;
samples = exprnd(0.2,100,1);
for i=2:100
  samples(i) = samples(i) .+ samples(i-1);
endfor
x = 1:100;
stairs(samples, x);
```

B) Ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT = t1 – t2 ακολουθεί κατανομή Poisson . Ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου είναι λT.

Για να βρούμε τον μέσο όρο(T) στο παράδειγμά μας αρκεί να διαιρέσουμε τον αριθμό των δειγμάτων (200,300,500,1000,10000) προς τον χρόνο εμφάνισης του τελευταίου δείγματος. Ο κώδικας είναι ο εξής :

```
#Katametrisi Poisson 2
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;

samples_i = exprnd(0.2,200,1);
for i=2:200
  samples_i(i) = samples_i(i) .+ samples_i(i-1);
endfor
mesos_i = 200 ./ samples_i(200);
display(mesos_i);

samples_ii = exprnd(0.2,300,1);
for i=2:300
  samples_ii(i) = samples_ii(i) .+ samples_ii(i-1);
endfor
mesos_ii = 300 ./ samples_ii(300);
display(mesos_ii);

samples_iii = exprnd(0.2,500,1);
for i=2:500
  samples_iii(i) = samples_iii(i) .+ samples_iii(i-1);
endfor
mesos_iii = 500 ./ samples_iii(500);
display(mesos_iii);

samples_iv = exprnd(0.2,1000,1);
for i=2:1000
  samples_iv(i) = samples_iv(i) .+ samples_iv(i-1);
endfor
mesos_iv = 1000 ./ samples_iv(1000);
display(mesos_iv);

samples_v = exprnd(0.2,10000,1);
for i=2:10000
  samples_v(i) = samples_v(i) .+ samples_v(i-1);
endfor
mesos_v = 10000 ./ samples_v(10000);
display(mesos_v);
```

Στα displays παρατηρούμε τα εξής:

```
mesos_i = 4.7635
mesos_ii = 4.6509
mesos_iii = 5.1885
mesos_iv = 5.0613
mesos_v = 5.0104
```

Δηλαδή , και για τα 5 πειράματα , ο μέσος αριθμός με στρογγυλοποίηση μας κάνει 5,δηλαδή όσο είναι και το λ μας.