Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Ροή Δ - Συστήματα Αναμονής - 6ο Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θωμάς Πετρόπουλος - el18915

Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1:

Α) Γνωρίζουμε ότι για να είναι η ουρά M/M/1 εργοδική πρέπει να ισχύει ότι:

$\rho=\lambda/\mu<1$ Erlang

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων ισορροπίας :

- $(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \ k > 1$
- $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
- $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$

Από την δεύτερη σχέση προκύπτει ότι $P_1 = \rho P_0$ (1)

Από την πρώτη για κ=1 προκύπτει με τη χρήση της (1) ότι $P_2=\rho^2 P_0$, δηλαδή γενικότερα :

$P_\kappa=\rho^\kappa P_0$ (2)

Και από τις (1),(2) η τρίτη μας δίνει ότι $P_0=1-\rho$, άρα $P_\kappa=\rho^\kappa(1-\rho)$ και $P(n(t)>0)=\rho$

Β) Από τη θεωρία , γνωρίζουμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη σ' ένα σύστημα όταν η ουρά αναμονής είναι σε κατάσταση ισορροπίας δίνεται από τον τύπο του Little:

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\gamma} = \frac{\mathrm{E}[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

Γ) Για κ=57 πελάτες θα ισχύει ότι :

$P_{57}=\rho^{57}(1-\rho)$, το οποίο είναι μια θετική πιθανότητα, άρα το σεναρίο των 57 πελατών είναι ρεαλιστικό.

<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave</u>

A) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι πρέπει ο ρυθμός εξυπηρέτησης να είναι μεγαλύτερος από αυτό των αφίξεων, δηλαδή μ>λ. Συνεπώς αφού λ=5 χρειαζόμαστε ρυθμό εξυπηρέτησης που ανήκει στο (5,10] και θα εξετάσουμε τα ανάλογα αποτελέσματα που προκύπτουν.

B) Με τη χρήση της συνάρτησης qsmm1 ([Πληροφορίες από το site του Octave]) μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω ως εξής:

```
pkg load statistics
pkg load queueing
clc;
clear all;
close all;
lamda=5;
mu = [5.1:0.01:10];
U=[0,500];  #Utilization
R=[0,500];  #Response time
Q=[0,500];  #Average number of requests
X=[0,500];  #Throughput
for i=1:columns(mu)
  [U(i),R(i),Q(i),X(i)] = qsmm1(lamda, mu(i));
endfor
figure(1);
hold on;
plot(mu,U,"linewidth",2.2);
title("Xrhsimopoihsh","fontsize",12);
hold off;
figure(2);
hold on;
plot(mu,R,"linewidth",2.2);
title("Kathisterisi","fontsize",12);
hold off;
figure(3);
hold on;
plot(mu,Q,"linewidth",2.2);
title("Mesos arithmos pelatwn","fontsize",12);
hold off;
figure(4);
hold on;
plot(mu,X,"linewidth",2.2);
title("Rythmoapodosh","fontsize",12);
hold off;
```

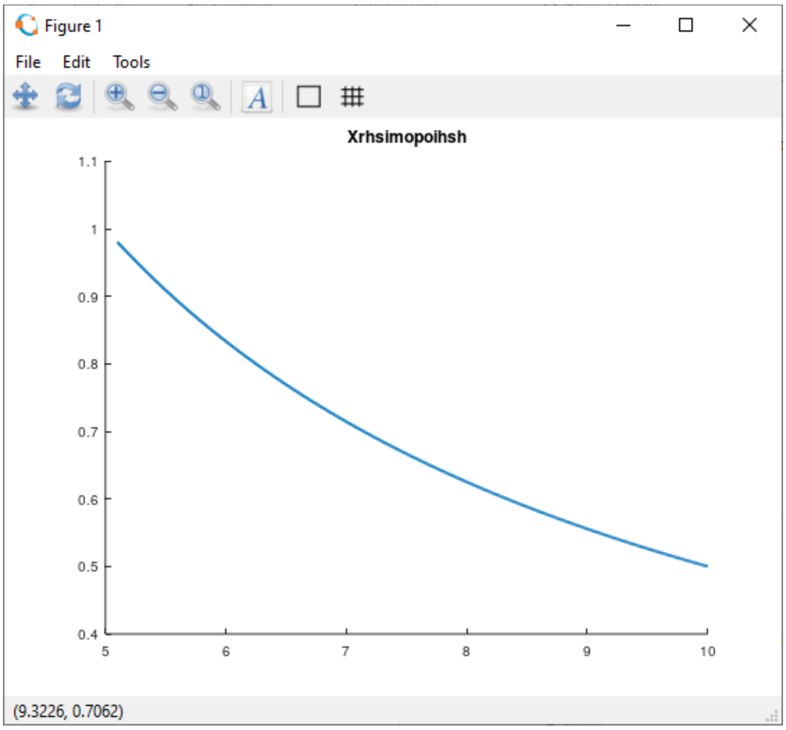


Figure 1
File Edit Tools
Xrhsimopoihsh
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
5
6
7
8
9
10
(9.3226, 0.7062)

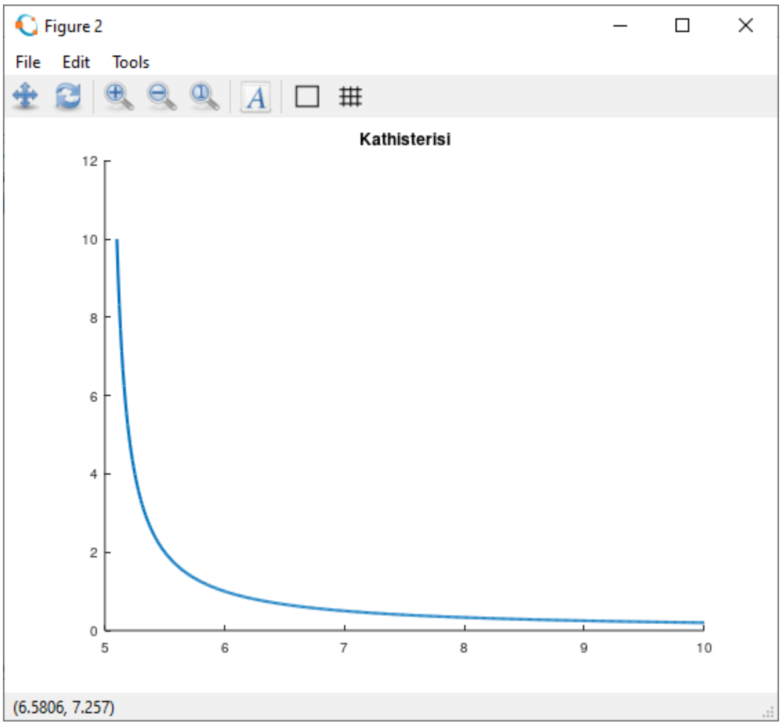


Figure 2
File Edit Tools
Kathisterisi
12
10
8
6
4
2
0
5
6
7
8
9
10
(6.5806, 7.257)

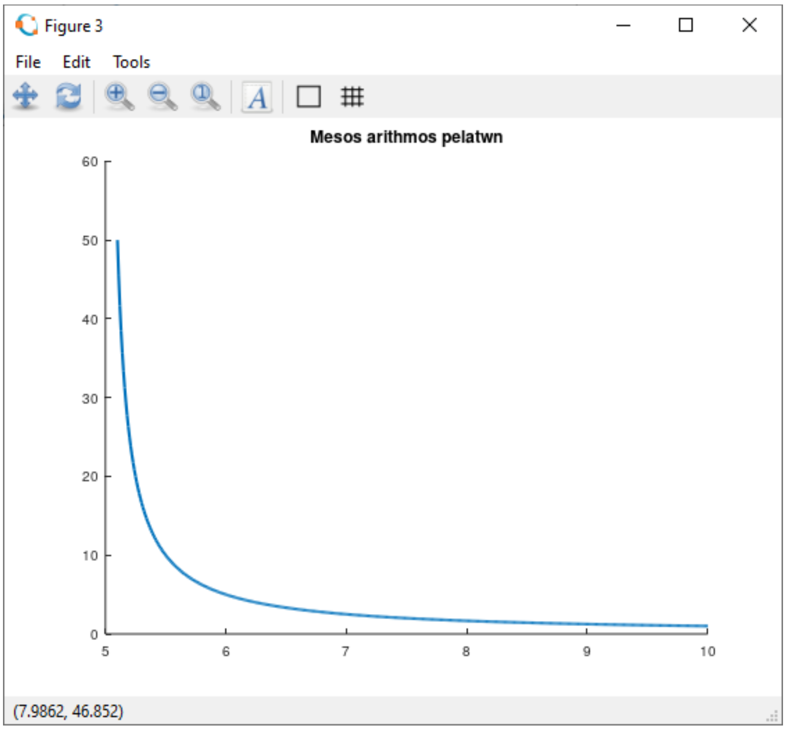


Figure 3
File Edit Tools
Mesos arithmos pelatwn
60
50
40
30
20
10
0
5
6
7
8
9
10
(7.9862, 46.852)

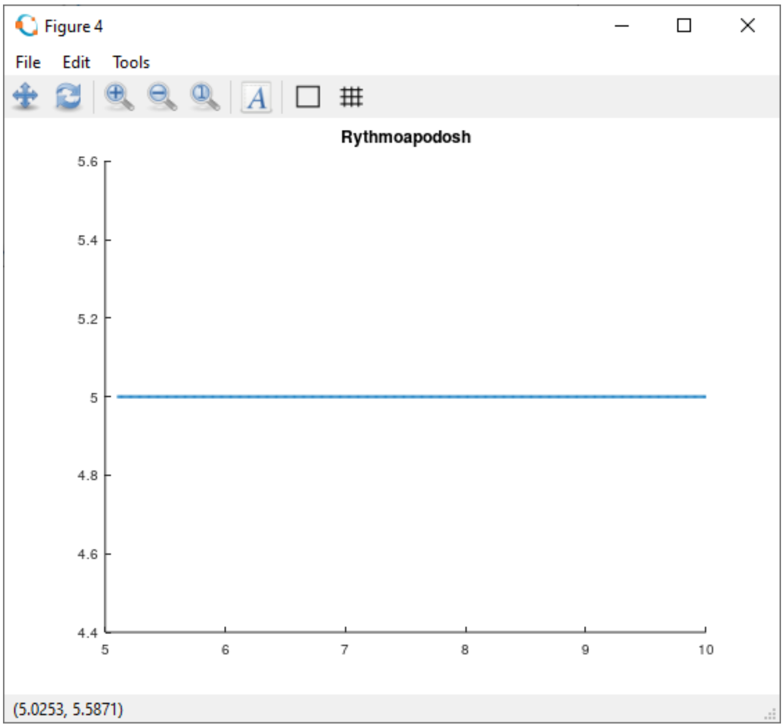


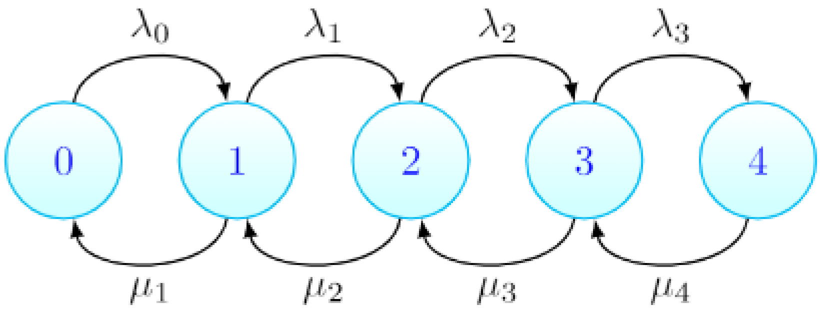
Figure 4
File Edit Tools
Rythmoapodosh
5.6
5.4
5.2
5
4.8
4.6
4.4
5
6
7
8
9
10
(5.0253, 5.5871)

Γ) Κοιτάζοντας το διάγραμμα 2 παρατηρούμε ότι η καμπύλη σταθεροποιείται σε χαμηλές τιμές στο διάστημα 8 με 10. Εμείς επιλέγουμε την λιγότερο δαπανηρή, δηλαδή την μ=8.

Δ) Ισχύει ότι γ=λ(1-P_{block}) ,όμως το σύστημά μας έχει άπειρο χώρο άρα γ=λ , εξού και η ευθεία γραμμή που προκύπτει.

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

Α) Το μοντέλο είναι το εξής:



Από τις σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε και στην πρώτη άσκηση για κ=1,2,3,4 προκύπτει ότι

$P_k = (\rho^{\kappa} / k!)P_0$.

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των P_k ισούται με 1 συνεπώς οι επιμέρους εργοδικές πιθανότητες είναι:

P_0 = 0,60664

P_1 = 0,30332 P_2 = 0,075830 P_3 = 0,012638 P_4 = 0,0015798

Και η πιθανότητα απώλειας ισούται με 0,0015798.

B) i) Ο πίνακας μεταβάσεων είναι:

-5	5	0	0	0
10	-12.5	2.5	0	0
0	10	-11.667	1.667	0
0	0	10	-11.25	1.25
0	0	0	10	-10

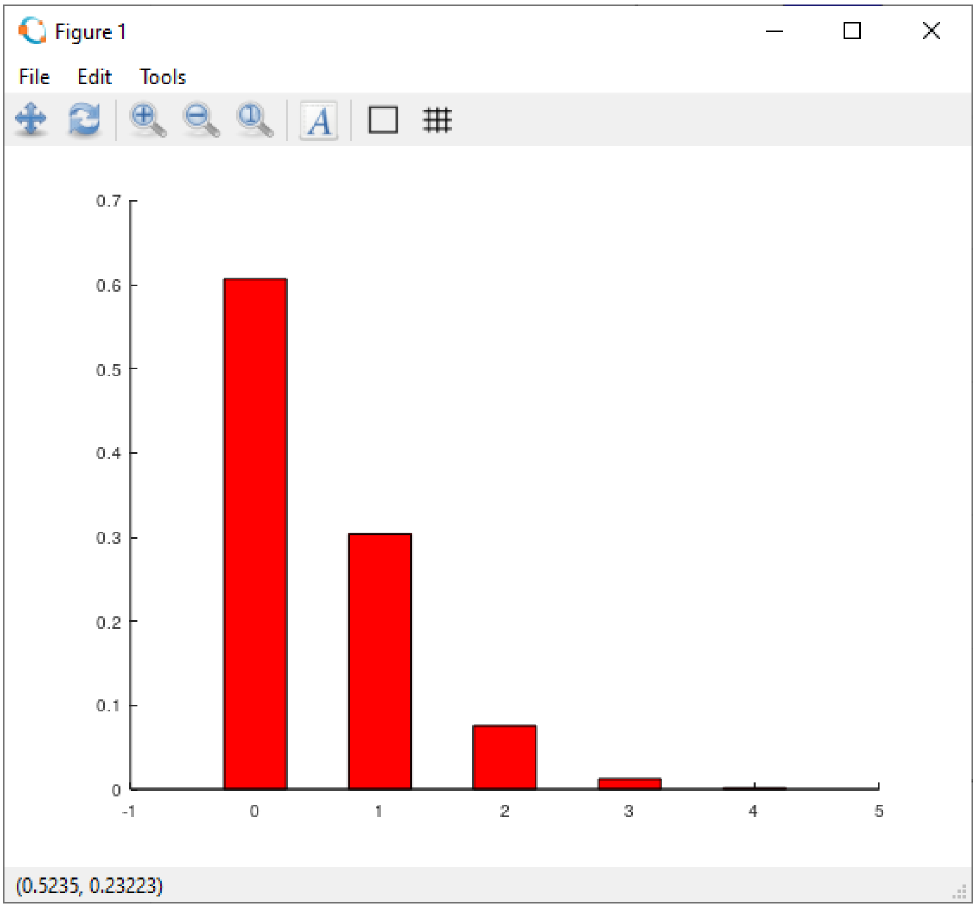
Αφου λ=5 και μ=10 και ισχύει ο τύπος της εκφώνησης για το λ.

ii) Τρέχοντας τον παρακάτω κώδικα επιβεβαιώνουμε το παραπάνω ερώτημα με την έξοδο του command line :

```
pkg load statistics
pkg load queueing
clc;
clear all;
close all;
lamda=5;
mu=10;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];
% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lamda, lamda/2, lamda/3, lamda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];
% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);
```

```
transition_matrix =

   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000
```

Το διάγραμμα είναι το εξής :



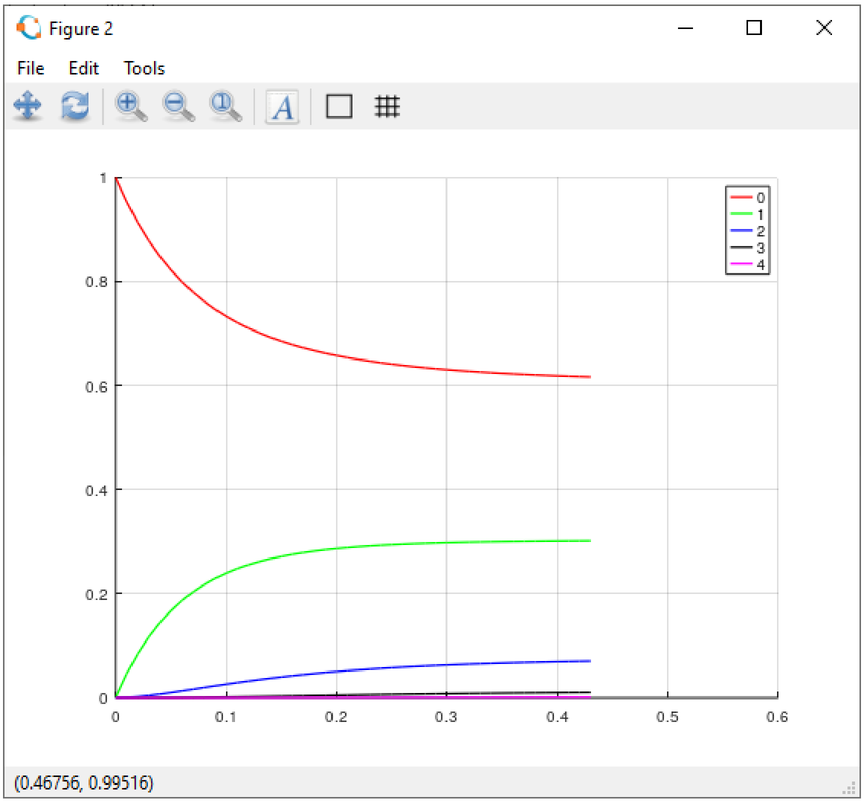
iii) Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από την εντολή :

```
display( sum(P.*[0,1,2,3,4]))
```

Και το αποτέλεσμα είναι 0.4992.

iv) Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα δίνεται με το P(5), η οποία έχει τιμή 1.5798e-03.

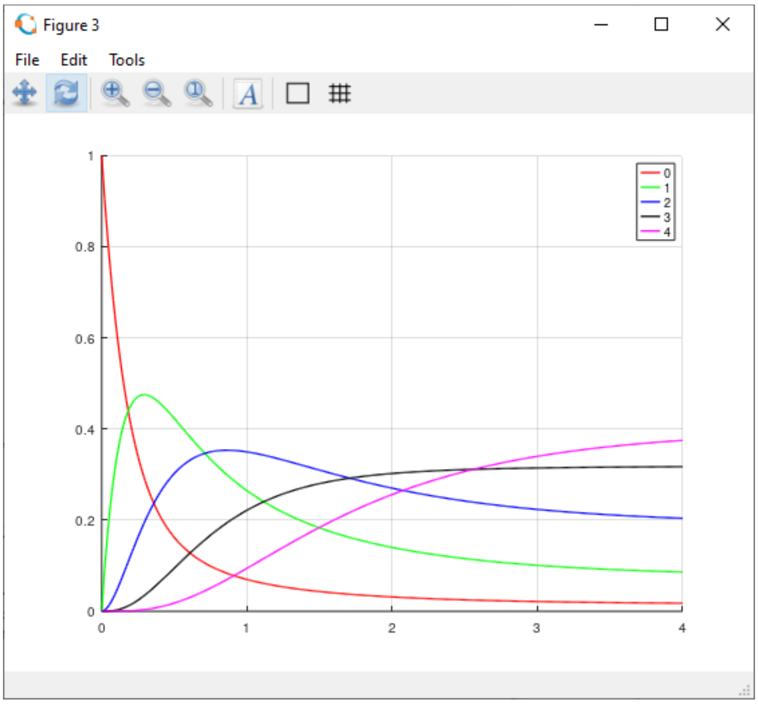
v) Χρησιμοποιώντας τον κάτωθι κώδικά έχουμε :



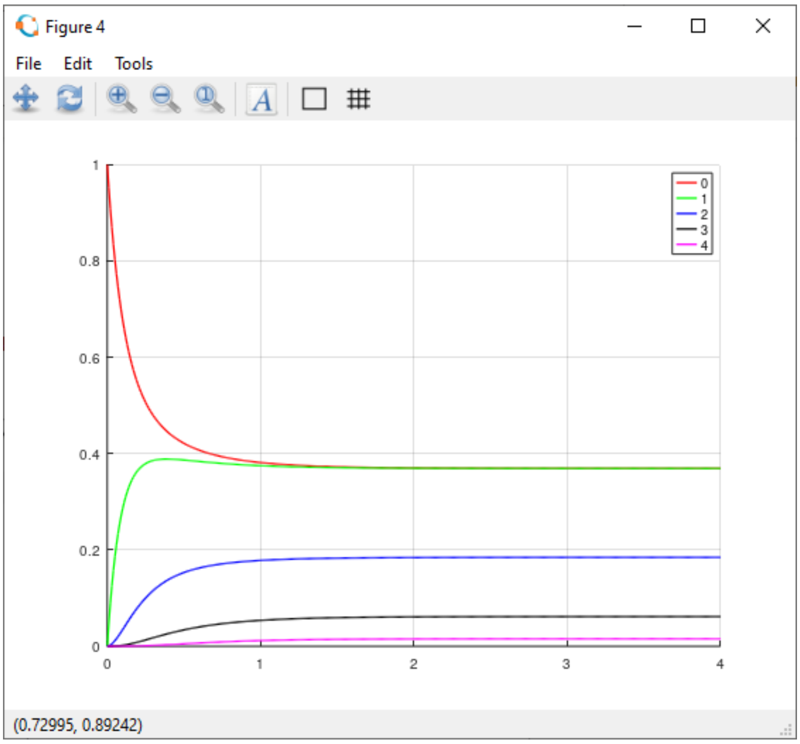

```
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index) = P0(2);
  Prob2(index) = P0(3);
  Prob3(index) = P0(4);
  Prob4(index) = P0(5);
  if P0 - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(2);
hold on;
plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "g", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "b", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "k", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "m", "linewidth", 1.3);
legend("0","1","2","3","4");
grid on;
```

V) Παραλλάσσοντας τον κώδικα του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε :

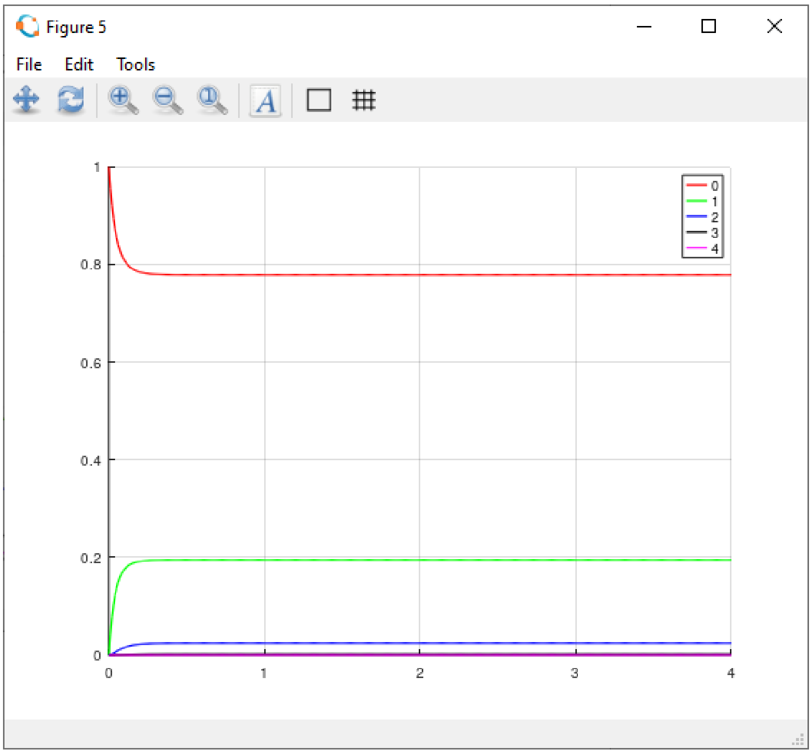
i) Για λ=5,μ=1



ii) Για λ=μ=5



iii) Για λ=5, μ=20



Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το μ τόσο πιο απότομες είναι οι μεταβάσεις,δηλαδή η ταχύτητα σύγκλισης και οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% μειώνονται .