Sujet de thèse pour Léopold Brasseur:
Vers une logique linéaire différentielle cohérente

Thomas Ehrhard Lionel Vaux

19 mai 2025

Logique linéaire. La Logique Linéaire [10] (LL) est née de l'étude dénotationnelle des preuves et des programmes. C'est un raffinement de la logique intuitionniste (et de la logique classique) qui permet de parler de preuves qui sont linéaires au sens où elles utilisent exactement une fois, et complètement, leurs hypothèses. Les modèles dénotationnels de la LL sont des catégories monoïdales symétriques fermées et cartésiennes équipées d'une comonade satisfaisant certaine propriétés de monoïdalité rendant compte du traitement explicite des règles structurelles.

LL et λ-calcul différentiels. Les modèles de la LL sont similaires aux catégories qui apparaissent en algèbre linéaire et en analyse fonctionnelle où les objets fondamentaux sont des espaces vectoriels de dimension possiblement infinie, et équipés en général d'une topologie. Ce point de vue a mené à étendre le λ-calcul et la LL avec des constructions différentielles dans [6, 7]. Ce calcul a un nouveau redex dont la règle de réduction reflète les règles habituelles du calcul différentiel : règle de Leibniz, règle de la chaîne etc., qui exigent de pouvoir écrire la somme de deux termes de même type. En LL, la différentiation revient à introduire des règles duales des règles structurelles et étendent la LL ordinaire en un nouveau système.

Ces extensions différentielles de la LL et du λ-calcul ont d'excellentes propriétés opérationnelles et dénotationnelles, et permettent notamment d'introduire une notion syntaxique de développement de Taylor [8] pour les λ-termes et les preuves. Souvent, elle permet de remplacer des raisonnements *ad hoc* sur les chemins de normalisation ou de réduction par une simple récurrence sur la taille des approximations. [1].

Différentiation cohérente. Cependant, la seule façon opérationnelle d'interpréter les sommes qui apparaissent dans ces calculs est de les voir comme des choix non déterministes. Or cette forme de non-déterminisme est incompatible avec la récursion générale, c'est-à-dire la possibilité de représenter toutes les fonctions calculables au sens de la thèse de Church–Turing. Par ailleurs, on ne voit aucune raison *a priori* pour laquelle la différentiation devrait nécessairement entraîner le non-déterminisme : il y a des modèles de la LL, comme les espaces cohérents probabilistes [3], où les morphismes non linéaires sont manifestement infiniment différentiables et qui ne sont pas compatibles avec le non-déterminisme.

La différentiation cohérente (introduite en 2021, voir [5]) permet de résoudre cette contradiction apparente en considérant un modèle catégorique $\mathcal{L}$ de la LL muni d'un foncteur $\mathsf{S} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ qui envoie intuitivement tout objet X de $\mathcal{L}$ sur l'objet $\mathsf{S}X$ des paires sommables d'éléments de X. Dans ce contexte, la structure différentielle est une loi distributive entre S et l'exponentielle $!\_$ de la LL satisfaisant certaines propriétés supplémentaires. Le travail de thèse d'Aymeric Walch, commencé en 2022, a étendu ce formalisme au développement de Taylor et à la formule de Faà di Bruno [9].

Il a aussi été possible de développer une version syntaxique de la différentiation cohérente, qui se présente comme une extension du PCF de Scott et Plotkin admettant une sémantique opérationnelle parfaitement déterministe que l'on peut décrire au moyen d'une machine abstraite à la Krivine [4]. Cette approche syntaxique se généralise de façon étonnamment simple à la version cohérente du développement de Taylor [9],

1. L'introduction des extensions différentielles et des techniques associées dans les années 2000 ont valu à Thomas Ehrhard et Laurent Regnier le prix Alonzo Church 2024.

menant à un “PCF de Taylor cohérent”. La plupart des modèles connus de la LL sont aussi des modèles de la différentiation cohérente (et du développement de Taylor cohérent), mais pas de la LL différentielle. Leur structure différentielle se ramène à une structure de !-coalgèbre sur $1 \& 1$: on dit qu’elle est est *représentable*. De même le développement de Taylor cohérent se ramène à une structure de !-coalgèbre sur $1 \& 1 \& \cdots$.

Objectifs et déroulement. Pour l’instant, on ne sait pas voir la différentiation cohérente comme un système logique : elle se présente comme un formalisme purement catégorique. La version différentielle (ou Taylor) cohérente de PCF évoquée ci-dessus n’est pas un système logique, c’est un λ-calcul étendu de façon *ad hoc* avec des constructions syntaxiques qui reflètent les structures catégoriques des modèles de la différentiation cohérente. Le but principal de cette thèse est de répondre à cette problématique en profitant de l’existence de structures différentielles cohérentes dans de nombreux modèles de LL et du statut très clair que la LL donne aux polarités logiques : les modèles représentables de la différentiation cohérente sont justement caractérisés par l’existence d’une !-coalgèbre, qu’on peut voir comme une formule positive. On développera donc un système cohérent différentiel dans un cadre de LL polarisée, possiblement sur la base du système déjà introduit par Vaux Auclair dans un cadre non cohérent [11]. On attaquera cette partie du programme de recherche en fin de première année de thèse et elle nous occupera jusqu’à la fin car on ne se contentera pas d’un calcul des séquents : on développera des réseaux de preuve, la traduction de PCF différentiel cohérent dans ces réseaux, etc.

Avant cela on cherchera à mieux comprendre le lien entre la LL différentielle et la différentiation cohérente en montrant que “localement”, la différentiation cohérente se décrit fidèlement en terme de LL différentielle. Cette analyse devrait suggérer des restrictions sur la LL différentielle qui reflètent la différentiation cohérente.

Il s’agira d’une thèse de nature essentiellement théorique, qui pourra aussi comporter des aspects de programmation : implémentation de machines abstraites pour les langages de programmation fonctionnelle avec différentiation cohérente, vérification de preuves en Coq.

Encadrement de la thèse. La thèse sera dirigée par Thomas Ehrhard (DR CNRS à l’IRIF, Paris Cité) et co-encadrée par Lionel Vaux Auclair (maître de conférences HDR à l’I2M, Aix-Marseille).

Ehrhard est le co-inventeur avec Regnier du λ-calcul et de la LL différentiels, et a initié et conduit le programme de la différentiation cohérente, dont le prolongement constitue l’axe central du projet de thèse. Vaux Auclair a contribué à développer l’écosystème du développement de Taylor des programmes et des preuves (avec une expertise sur ses interactions avec le non-déterminisme [12], sa compatibilité avec les calculs infinitaires [1], ou encore avec les réseaux de preuves [2]) et il a en particulier étudié une version polarisée de la logique linéaire différentielle [11]. La thèse se déroulera à Paris à l’IRIF, avec des visites régulières de Vaux Auclair à Paris, et de Brasseur et Ehrhard à Marseille.

Références

[1] Rémy Cerda and Lionel Vaux Auclair. Finitary simulation of infinitary β-reduction via taylor expansion, and applications. *Log. Methods Comput. Sci.*, 19(4), 2023.

[2] Jules Chouquet and Lionel Vaux Auclair. An application of parallel cut elimination in multiplicative linear logic to the taylor expansion of proof nets. *Logical Methods in Computer Science*, 17(4), 2021.

[3] Vincent Danos and Thomas Ehrhard. Probabilistic coherence spaces as a model of higher-order probabilistic computation. *Information and Computation*, 209(6) :966–991, 2011.

[4] Thomas Ehrhard. A coherent differential PCF. *Logical Methods in Computer Science*, Volume 19, Issue 4, October 2023.

[5] Thomas Ehrhard. Coherent differentiation. *Mathematical Structures in Computer Science*, page 1–52, 2023.

[6] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. The differential lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, 309(1-3) :1–41, 2003.

[7] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2) :166–195, 2006.

[8] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. Uniformity and the Taylor expansion of ordinary lambda-terms. *Theoretical Computer Science*, 403(2-3) :347–372, 2008.

[9] Thomas Ehrhard and Aymeric Walch. Coherent Taylor expansion as a bimonad. Technical report, IRIF, October 2023. Submitted.

[10] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50 :1–102, 1987.

[11] Lionel Vaux. Differential linear logic and polarization. In Pierre-Louis Curien, editor, *Typed Lambda Calculi and Applications, 9th International Conference, TLCA 2009, Brasilia, Brazil, July 1-3, 2009. Proceedings*, volume 5608 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 371–385. Springer, 2009.

[12] Lionel Vaux. Normalizing the taylor expansion of non-deterministic λ-terms, via parallel reduction of resource vectors. *Log. Methods Comput. Sci.*, 15(3), 2019.