# 中国农业大学

# 2023～2024 学年春季学期

# 模拟课程 课程考试试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | | | | |

（本试卷共 8 道大题）

**考生诚信承诺**

本人承诺自觉遵守考试纪律, 诚信应考, 服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则, 如有违纪行为, 将按照学校违纪处分规定严肃处理。

**一、（24 分）填空题**

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=$________

2. 当 $p>0$ 时, $x^3+px+q=0$ 有________ 个实根

3. 当 $x\to+\infty$ 时, 试将下述无穷大量按由低阶至高阶的顺序排列:
$e^x$, $x^x$, $x^{100}$, $x^{99}(\ln x)^{100}$, $[x]!$ ________________________

4. $\int_0^\pi \cos^2 x dx=$ ________

5. $\frac{d}{dx}\Big|_{x=1}\frac{\sqrt{x}}{1+2x}=$________

6. 求 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(\frac{1}{\sqrt{n+1}})=$________, 其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数, 即

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

7. 求 $\frac{d^n}{dx^n}(x^2e^x)=$________________, ($n\in\mathbb{N}$, 化简所得结果)

8. 下列关于一致连续的说法中, 正确的有多少个?________

   (a) 若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 连续, 则对充分小的 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上一致连续

(b) 若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 连续, 则在 $(a,b)$ 上有界

(c) 若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续, 则在 $(a,b)$ 上有界

(d) $\ln(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续

(e) 某区间上两个一致连续的函数之和一定一致连续

(注: $a,b$ 均为有限值)

## 二、(24 分) 计算题

1.
$$\int \cos^2(x)\sin(x)dx$$

2.
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

3.

$$\int \frac{-x^4+x^3-x^2-x-2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$$

4.

$$\int \sin(\ln x)dx$$

**三、(6 分)**

求 $a, b$, 使

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ x^2-3x+2 & x\leq 1 \end{cases}$$

为可微函数.

**四、(6 分)**

对于 $\mathbb{R}$ 上有定义的函数, 若所论的导函数存在, 证明结论:
奇函数的导函数一定是偶函数.

**五、(10 分)**

求过曲线

$$x^{2n} + y^{2n} = 1$$

上 $(x_0, y_0)$ 点的切线方程 (其中 $n$ 为自然数, $y_0 \neq 0$). 并证明当 $n \to +\infty$ 时, 除有限个点外, $y'(x)$ 要么趋于 0, 要么趋于 $\infty$. (注: 实际上随着 $n$ 的增加, 曲线越来越接近于正方形)

**六、(10 分)**

设 $a < b$, $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 和 $(a, +\infty)$ 均一致连续, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也一致连续.

**七、（10 分）**

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $f(1) > 0$, 且 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最大值.

**八、（10 分）**

用 Bolzano-Weierstrass 定理证明有界闭区间上的连续函数一定有界.