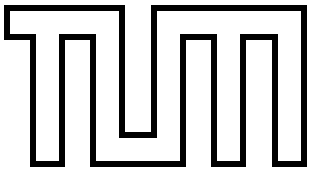


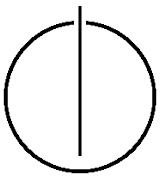
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

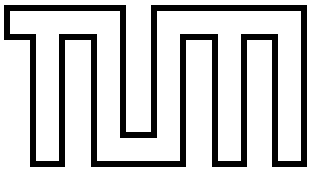
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Abschlussarbeit in Informatik

Effiziente statistische Methoden für Datenbanksysteme

Thomas Heyenbrock





FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

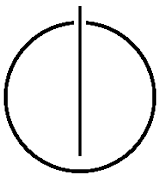
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Abschlussarbeit in Informatik

Effiziente statistische Methoden für Datenbanksysteme

Efficient statistical methods for database systems

Autor:	Thomas Heyenbrock
Aufgabensteller:	Prof. Alfons Kemper, Ph.D.
Betreuer:	Maximilian E. Schüle, M.Sc.
Datum:	15.01.2017



Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, den 27. Dezember 2017 Thomas Heyenbrock

Abstract

An abstracts abstracts the thesis!

Contents

Outline of the Thesis

Teil I: Introduction and Theory

CHAPTER 1: INTRODUCTION

This chapter presents an overview of the thesis and it purpose. Furthermore, it will discuss the sense of life in a very general approach.

CHAPTER 2: THEORY

No thesis without theory.

Teil II: The Real Work

CHAPTER 3: OVERVIEW

This chapter presents the requirements for the process.

1. Einführung und typische statistische Problemstellungen

Here starts the thesis with an introduction. Please use nice latex and bibtex entries [1]. Do not spend time on formating your thesis, but on its content.

1.1. Latex Introduction

There is no need for a latex introduction since there is plenty of literature out there.

2. Grundlagen statistischer Methoden

Bei der Regressionsanalyse geht es im Allgemeinen darum, das Verhalten einer Größe Y in Abhängigkeit einer oder mehrerer anderer Größen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zu modellieren. Die Größe Y wird abhängig genannt, die Größen X_i nennt man unabhängig. Für diese Arbeit wollen wir zunächst einige Annahnmen über diese voraussetzen. Diese Punkte gelten immer, falls nicht explizit etwas anderes festgelegt wird.

- Die genannten Größen sind Zufallsvariablen. Das sind Funktionen deren Werte die Ergebnisse eines Zufallsvorgangs darstellen.
- Die Zufallsvariablen sind auf der Menge $M = \{1, \ldots, m\}$ definiert und bilden in die reellen Zahlen ab:

  $$Y : M \to \mathbb{R}, \;\; X_1 : M \to \mathbb{R}, \;\; \ldots, \;\; X_n : M \to \mathbb{R}$$

  Das bedeutet die Zufallsvariablen sind metrisch skaliert. Die m Zahlen in der Menge M entsprechen den m Datenpunkten, die wir als Datenbasis für die Regressionsanalyse besitzen.
- Wir verwenden die folgenden Abkürzungen für die Werte der Zufallsvariablen:

  $$\begin{aligned} y_i &:= Y(i) \quad \text{für alle } i \in M, \\ x_{i,j} &:= X_j(i) \quad \text{für alle } i \in M \;\; \text{und } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

- Einen Datenpunkt aus unserer Datenbasis fassen wir als Vektor der Länge $(n+1)$ auf. Damit lässt sich die Datenbasis schreiben als:

  $$(y_1, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}), \ldots, (y_m, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$$

Das Modell definieren wir anhand einer Funktion f, welche für Werte der unabhängigen Variablen einen geschätzten Wert für die abhängige Variable liefert. Idealerweise existiert eine Funktion, die zum Einen eine einfache Darstellung (z.B. durch eine arithmetische Formel) besitzt und zum Anderen alle unabhängigen Werte der Datenmenge exakt prognostiziert. Das bedeutet:

$$y_i = f(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}) \quad \text{für alle } \; 1 \leq i \leq m$$

Falls eine Formel wie hier für alle Datenpunkte gelten soll, verwenden wir als Abkürzung auch die Zufallsvariablen selbst, also:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_N)$$

Im Allgemeinen ist es nicht möglich eine Funktion f zu finden, die beide Eigenschaften erfüllt. Man versucht also eine Funktion mit einer möglichst einfachen Form zu finden, die die Datenmenge möglichst gut approximiert. Wir definieren für jeden Datenpunkt den Fehler e_i, der sich durch die nicht exakte Modellfunktion f ergibt:

$$e_i = y_i - f(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$$

Ziel der Regressionsanalyse ist es nun eine Funktion f zu finden, die diese Fehlerterme minimiert. Diese Optimierung geschieht global, also für die gesamte Datenmenge und nicht nur für einzelne Datenpunkte.

2.1. Lineare Regression

Bei der linearen Regression geht man von einem linearen Zusammenhang zwischen der abhängigen und den unabhängigen Variablen aus. Die Funktion f ist also von folgender Form:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot x_i \quad \text{mit} \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

Das Maß für die Qualität einer Funktion f definiert durch die Parameter $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ ist die Summe der quadrierten Fehlerterme:

$$E(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{j=1}^{m} e_j^2 = \sum_{j=1}^{m} (y_j - f(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}))^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \alpha - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot x_{i,j} \right)^2$$

Wir suchen also die Parameter $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_n$ für die gilt:

$$E(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_n) = min\left\{ E(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Um dieses Minimierungsproblem zu lösen berechnen wir die partiellen Ableitungen von E.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \alpha} &= -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} (y_j - f(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})) = -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - \alpha - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot x_{i,j} \right) \\
\frac{\partial E}{\partial \beta_k} &= -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot (y_j - f(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})) \\
&= -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot \left(y_j - \alpha - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot x_{i,j} \right) \quad \text{für } 1 \leq k \leq n
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen erhält man ein lineares Gleichungssystem mit $(n+1)$ Gleichungen und ebensovielen Unbekannten.

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta_n} = 0$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems (falls eine existent) ist das gesuchte Minimum.

2.1.1. Einfache lineare Regression

Man spricht von einfacher linearer Regression, wenn man mit nur eine unabhängige Variable arbeitet. Anschaulich möchte mann hier die bestmögliche Schätzgerade durch eine gegebene Punktwolke legen.

Wir nennen die unabhängige Variable in diesem Kapitel statt X_1 einfach nur X. Ebenso schreiben wir $\beta_1 = \beta$ und $x_{1,j} = x_j$. Dann können wir das lineare Gleichungssystem zum Auffinden des Minimums explizit aufschreiben:

$$0 = -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} (y_i - \alpha - \beta \cdot x_j)$$
$$0 = -2 \cdot \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot (y_i - \alpha - \beta \cdot x_j)$$

Für dieses Gleichungssystem kann die Lösung explizit angegeben werden, wobei wir hier nicht näher auf die Herleitung dieses Ergebnisses eingehen wollen:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x})^2}$$
$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

Dabei bezeichnen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Mittelwerte von X respektive Y.

2.1.2. Multible lineare Regression

Bei multibler linearer Regression existieren mindestens zwei unabhängige Variablen. Hier ist es nicht mehr zweckmäßig eine explizite Lösung anzugeben. Hier sind alternative Methoden zur Berechnung der Parameter nötig.

Neben einer Vielzahl von Algorithmen, die ein Optimierungsproblem iterativ lösen, gibt es auch die Möglichkeit die Parameter durch Matrizenmultiplikation zu berechnen. Definieren wir dazu die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m,1} & \dots & x_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad b = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$$

Dabei ist b der Vektor mit gesuchten Parametern für die Minimierung der kleinsten Quadrate. Falls die Matrix $X^T X$ invertiertbar ist, gilt die folgende Formel für die Berechnung der gesuchten Parameter:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

2.2. Logistische Regression

Die logistische Regression findet Anwendung im Falle, dass die abhängige Variable eine binäre Variable ist, also eine Variable, die nur zwei Werte annehmen kann. Oft handelt es sich um eine Eigenschaft, die ein bestimmter Datensatz besitzt oder nicht, wie zum Beispiel ein Premium-Abonnement für eine Web-Service oder der Besitz eines Auto. Auch das Geschlecht einer Person ist ein Beispiel für eine binäre Variable. Wir bezeichnen die beiden möglichen Werte einer solchen Variablen hier immer mit 0 und 1. Die Zuordnung vom Merkmal zur Zahl ist frei wählbar.

Lineare Regression eignet sich oft nicht zur Modellierung einer binären Variablen, da eine lineare Funktion in der Regel unbeschränkt ist, also insbesondere Werte größer als 1 und kleiner als 0 annimmt. Um diesem Problem abzuhelfen wählen wir eine Funktion, die beliebige Zahlen auf das Interval $[0, 1]$ abbildet. Im Falle der logistischen Regression verwendet man die gleichnamige logistische Funktion:

$$l : \mathbb{R} \to (0, 1), \quad x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Diese Funktion wendet man nun auf die Linearkombination aller unabhängigen Variablen mit Parametern $\beta_1, \ldots, \beta_n$ und konstantem Term α an. Das Ergebnis für den i-ten Datensatz bezeichnen wir mit π_i

$$\pi_i = \pi_i(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) := l\left(\alpha + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot x_{i,j}\right) = \left(1 + \exp\left(-\alpha - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot x_{i,j}\right)\right)^{-1}$$

Anschaulich repräsentiert π_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die abhängige Variable eines Datensatzes mit unabhängigen Variablen $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}$ gleich 1 ist, also:

$$\pi_i = P(Y_i = 1 | X_1 = x_{i,1}, \ldots, X_n = x_{i,n})$$

Man möchte die Parameter $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ nun so schätzen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der vorhandenen Datenbasis maximiert wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$L(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \prod_{i=1}^{m} P(Y_i = y_i | X_1 = x_{i,1}, \ldots, X_n = x_{i,n}) = \prod_{i=1}^{m} y_i \cdot \pi_i(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Dieses Verfahren bezeichnet man auch als Maximum-Likelihood-Methode. Die Funktion L nennt man dementsprechend auch Likelihoodfunktion. Oft maximiert man nicht L direkt, sondern eher $\ln(L)$. Der Sinn ist, dass man das Produkt damit in eine Summe einzelner Logarithmen umwandeln kann, welche wiederum einfacher abzuleiten ist. Das darf man machen, da der Logarithmus eine stetig wachsende Funktion ist und die Werte von L stets zwischen 0 und 1 liegen.

Wir suchen also die Parameter $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_n$ mit:

$$L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_n) = \max\{L(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}\}$$

In diesem Fall kommt man leider nicht mehr an einer iterativen Lösung vorbei, da die partiellen Ableitungen und das entstehende lineare Gleichungssystem nicht mehr exakt lösbar sind. Eine der einfachsten Methoden zur Lösung von Optimierungsproblemen ist das Gradientenverfahren, welches im kommenden Teilkapitel kurz eingeführt wird.

2.2.1. Gradientenverfahren

Das Gradientenverfahren ist ein iterativer Algorithmus zur Lösung von Optimierungsproblemen. Nachdem wir hier bei der logistischen Regression eine Funktion maximieren wollen führen wir das Gradientenverfahren dementsprechend ein. Man kann dasselbe Verfahren aber auch zur Lösung von Minimierungsproblem einsetzen. Gegeben sei also eine Funktion der folgenden Form, die maximiert werden soll:

$$L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \;\; (\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) \mapsto L(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Beim Gradientenverfahren beginnt man mit beliebigen Startwerten $\alpha_0, \beta_{0,1}, \ldots, \beta_{0,n}$ und einer Schrittweite $s \in \mathbb{R}^+$. Vom Startpunkt aus geht man nun in die Richtung des steilsten Anstieges der Funktion und erhält dadurch neue Werte. Diese Richtung ist gerade der sogenannte Gradient der Funktion L.

Der Gradient ist ein Vektor, der sich aus den partiellen Ableitungen von L nach jeweils einer Variablen zusammensetzt und wird wiefolgt notiert:

$$\text{grad}(L) = \begin{pmatrix} \partial L/\partial\alpha \\ \partial L/\partial\beta_1 \\ \vdots \\ \partial L/\partial\beta_n \end{pmatrix}$$

Der Gradient von L ist also wiederum eine Funktion, die Werte $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ auf einen Vektor der Länge $n+1$ abbildet. Der iterative Schritt des Verfahrens definiert sich wiefolgt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i+1} \\ \beta_{i+1,1} \\ \vdots \\ \beta_{i+1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,n} \end{pmatrix} + s \cdot \text{grad}(L)(\alpha_i, \beta_{i,0}, \ldots, \beta_{i,n})$$

Danach muss noch getestet werden, dass L für die neuen Parameter auch wirklich einen größeren Wert annimmt also zuvor. Falls nicht, muss die Schrittweite s verkleintert werden, zum Beispiel um einen festen zuvor definierten Faktor.

Das Verfahren konvergiert nicht zwingend, falls die Funktion nach oben unbeschränkt ist. In unserem Fall ist die Likelihoodfunktion L aber durch 1 nach oben beschränkt. Trotzdem konvergiert das Gradientenverfahren nur mit Sicherheit gegen ein lokales Maximum von L, welches nicht zwingend auch ein globales Maximum sein muss.

3. Anwendung statistischer Methoden

Here starts the thesis with an introduction. Please use nice latex and bibtex entries [1]. Do not spend time on formating your thesis, but on its content.

3.1. Latex Introduction

There is no need for a latex introduction since there is plenty of literature out there.

4. Statistische Methoden in Datenbanken

Here starts the thesis with an introduction. Please use nice latex and bibtex entries [1]. Do not spend time on formating your thesis, but on its content.

4.1. Latex Introduction

There is no need for a latex introduction since there is plenty of literature out there.

5. Erweiterungspotenzial in Datenbanksystemen

Here starts the thesis with an introduction. Please use nice latex and bibtex entries [1]. Do not spend time on formating your thesis, but on its content.

5.1. Latex Introduction

There is no need for a latex introduction since there is plenty of literature out there.

6. Fazit

Here starts the thesis with an introduction. Please use nice latex and bibtex entries [1]. Do not spend time on formating your thesis, but on its content.

6.1. Latex Introduction

There is no need for a latex introduction since there is plenty of literature out there.

Appendix

A. Detailed Descriptions

Here come the details that are not supposed to be in the regular text.

Bibliography

[1] Leslie Lamport. *LaTeX : A Documentation Preparation System User's Guide and Reference Manual*. Addison-Wesley Professional, 1994.