Eq. du mvt pour une particule soumis à Stokes

Si on suppose que $\rho_{al} = \rho_e$, l'équation du mouvement d'une particule qui se dissout s'écrit :

$$\rho_{al} \frac{4}{3} \pi r^3(t)\, x''(t) = - 6\pi \mu\, r(t)\, x'(t). \qquad (1)$$

Ici, la dissolution de la particule est donnée par

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2kt} \qquad \text{pour } t \in [0,T],\ T = \frac{r_0^2}{2k}. \qquad (2)$$

En divisant (1) par $\rho_{al} \frac{4}{3}\pi r(t)$ et en considérant (2), on obtient

$$(r_0^2 - 2kt)\, x''(t) = - \frac{9 \cancel{\rho_{al}} \mu}{2 \rho_{al}}\, x'(t), \qquad \forall t \in [0,T].$$

En notant $y = x'$, $y' = x''$ et en séparant les variables y et t on obtient :

$$\frac{y'}{y} = - \frac{9\mu}{4\rho_{al} k} \frac{1}{(T-t)} \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \quad \log(y(t)) - \log(y(0)) = - \frac{9\mu}{4\rho_{al} k} \int_0^t \frac{1}{T-s}\, ds$$

$$= + \frac{9\mu}{4\rho_{al} k} \log\left(\frac{T-t}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y(0) \left(\frac{T-t}{T}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{9\mu}{4\rho_{al} k}.$$

Il reste finalement à intégrer pour obtenir $x(t)$.