Remarques sur le problème harmonique

J. Rappaz, 2 mai 2018

On reprend le problème:

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$, $P \in L^2(\Lambda)$, tels que pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^3$ et $q \in L^2(\Lambda)$:

$$
\begin{aligned}
\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot E\left(\boldsymbol{v}\right) dx_1 dx_2 - \int_\Lambda P(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 - \beta \int_\Lambda P.v_3 dx_1 dx_2 &= \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, && (1)\\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.q dx_1 dx_2 &= 0. && (2)
\end{aligned}
$$

Si $L_0^2(\Lambda) = \{g \in L^2(\Lambda) : \int_\Lambda g dx_1 dx_2 = 0\}$, il est facile de montrer en utilisant le théorème de la divergence et en posant $P = p + C$ avec $p \in L_0^2(\Lambda)$ que le problème $(1) - (2)$ est équivalent au problème suivant:

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$, $p \in L_0^2(\Lambda)$, $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^3$ et $q \in L_0^2(\Lambda)$:

$$
\begin{aligned}
\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot E\left(\boldsymbol{v}\right) dx_1 dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 - \beta \int_\Lambda (p + C) v_3 dx_1 dx_2 &= \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, && (3)\\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.q dx_1 dx_2 &= 0, && (4)\\
\int_\Lambda u_3 dx_1 dx_2 &= 0. && (5)
\end{aligned}
$$

Soit maintenant $H_{0,0}^1(\Lambda) = \{g \in H_0^1(\Lambda) : \int_\Lambda g dx_1 dx_2 = 0\}$. C'est un sous-espace fermé de $H_0^1(\Lambda)$ de codimension 1 et si $\psi \in H_0^1(\Lambda)$ est tel que $\int_\Lambda \psi dx_1 dx_2 \neq 0$, on pose $W = span\,(\psi)$ qui est un sous-espace de $H_0^1(\Lambda)$ de dimension 1 et on a $H_0^1(\Lambda) = H_{0,0}^1(\Lambda) \oplus W$.

Il suffit de prendre successivement dans l'équation (3) $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ et $\boldsymbol{v} = (0, 0, \psi)$.

En prenant la fonction test $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ dans (3) on obtient le problème bien posé

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$**,** $p \in L_0^2(\Lambda)$, tels que pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ **et** $q \in L_0^2(\Lambda)$**:**

$$\int_{\Lambda} 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\boldsymbol{v})\, dx_1 dx_2 - \int_{\Lambda} p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 - \beta \int_{\Lambda} p v_3 dx_1 dx_2 = \int_{\Lambda} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, \quad (6)$$

$$\int_{\Lambda} (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_{\Lambda} u_3.q dx_1 dx_2 = 0. \quad (7)$$

Ce problème possède une solution unique $(\boldsymbol{u}, p)$.

Il reste à prendre dans (3) la fonction test $\widetilde{\boldsymbol{v}} = (0, 0, \psi)$. On obtient

$$\int_{\Lambda} 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\widetilde{\boldsymbol{v}})\, dx_1 dx_2 - \beta \int_{\Lambda} (p + C)\psi dx_1 dx_2 = \int_{\Lambda} f_3.\psi dx_1 dx_2 \quad (8)$$

ce qui permet de calculer la constante C puisque $(\boldsymbol{u}, p)$ est connu.

Qu'en est-il de l'unicité de C?

Si on prend une autre fonction $\varphi \in H_0^1(\Lambda)$ tel que $\int_{\Lambda} \varphi dx_1 dx_2 \neq 0$, alors $\varphi = \overline{\varphi} + \widetilde{\varphi}$ où $\overline{\varphi} \in H_{0,0}^1(\Lambda)$ et $\widetilde{\varphi} \in W$ puisque $H_0^1(\Lambda) = H_{0,0}^1(\Lambda) \oplus W$. Clairement la décomposition implique qu'il existe, de façon univoque, une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{\varphi} = \gamma\psi$. Si, au lieu de $\boldsymbol{v} = (0, 0, \psi)$ on prend $\boldsymbol{v} = (0, 0, \varphi) = (0, 0, \overline{\varphi}) + (0, 0, \gamma\psi)$ dans (3), alors $(0, 0, \overline{\varphi}) \in H_0^1(\Lambda)^2 \oplus H_{0,0}^1(\Lambda)$. Cette fonction test est comprise dans (6) .D'autre part $(0, 0, \gamma\psi)$ nous donne la constante C de (8) .

Remarque 1: La constante βC dans (3) est le multiplicateur de lagrange correspondant à la contrainte $\int_{\Lambda} v_3 dx_1 dx_2 = 0$. Ainsi le problème $(1) - (2)$ est équivalent au problème $(3) - (5)$ qui lui-même est équivalent au problème $(6) - (8)$. La pression p^k correspondant à l'harmonique k sera $p^k = P = p + C$.

Remarque 2: Si $\widetilde{\boldsymbol{v}} = (0, 0, \psi)$ avec $\psi \in H_0^1(\Lambda)$, et $\int_{\Lambda} \psi dx_1 dx_2 \equiv \chi \neq 0$, alors le tenseur $E(\widetilde{\boldsymbol{v}})$ devient:

$$E(\widetilde{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & 2\beta\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\widetilde{\boldsymbol{v}}) &= \mu_{1,3}(-\beta u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1})\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \\ &\quad \mu_{2,3}(-\beta u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2})\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \\ &\quad 2\mu_{3,3}\beta^2 u_3 \psi. \end{aligned}$$

L'équation (3) devient avec $\widetilde{\boldsymbol{v}} = (0, 0, \psi)$:

$$\int_{\Lambda} 2\boldsymbol{\mu} \otimes E\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot E\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}\right) dx_1 dx_2 - \beta \int_{\Lambda} (p + C)\psi dx_1 dx_2 = \int_{\Lambda} f_3.\psi dx_1 dx_2,$$

et ainsi

$$C = \frac{1}{\beta\chi}\left(\int_{\Lambda} 2\boldsymbol{\mu} \otimes E\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot E\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}\right) dx_1 dx_2 - \beta \int_{\Lambda} p.\psi dx_1 dx_2 - \int_{\Lambda} f_3.\psi dx_1 dx_2\right).$$