Dissolution et chute d'une particule d'alumine dans un bain électrolytique

J. Rappaz, janvier 2018

1. DISSOLUTION(sans chute)

- Si r_0 est le rayon d'une particule d'alumine sphérique et si K est son taux de dissolution dans le bain électrolytique, alors son rayon satisfera par hypothèse l'équation d'évolution suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r(t) &= -Kr^{-1}(t), & (1)\\ r(0) &= r_0, & (2) \end{aligned}$$

- L'unique solution des équations (1) et (2) est donnée par

$$r(t) = (r_0^2 - 2Kt)^{1/2}. \tag{3}$$

REMARQUE 1: Lorsque

$$T = \frac{r_0^2}{2K}, \tag{4}$$

on a $r(T) = 0$. Donc la particule est complètement dissoute au temps T.

- Si $K \to 0$, alors $T \to \infty$ et si $K = 0$, alors $r(t) = r_0$.

- Si c est la concentration d'alumine dissoute, c_{sat} sa concentration de saturation, Θ la température du bain, Θ_{liq} et Θ_{crit} sa température de liquidus et critique respectivement, Thomas utilise la formule

$$K = \frac{1}{2}10^{-9}.\frac{c_{sat} - c}{c_{sat}}.(1 - \exp(-\frac{\Theta - \Theta_{liq}}{\Theta_{crit} - \Theta_{liq}})), \tag{5}$$

  si $c < c_{sat}$ et $\Theta > \Theta_{liq}$. ($[K] = m^2 s^{-1}$)

- Si $c \approx 0$ et $\Theta - \Theta_{liq} >> \Theta_{liq} - \Theta_{crit}$, alors $K = \frac{1}{2}10^{-9} m^2 s^{-1}$ et $T = r_0^2.10^9 s$.

- De plus, si $r_0 = 2.10^{-4} m$, alors $T = 40 s$.

2. CHUTE (sans dissolution)

- Si, pour $t > 0$, $x(t)$ est la trajectoire verticale d'une particule de rayon r_0 dans le bain électrolytique, alors l'équation du mouvement est donnée par

$$\varrho_{al} V_0 x''(t)) = g(\varrho_{al} - \varrho_e) V_0 - 6\pi\mu r_0 x'(t), \tag{6}$$

- $V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ est le volume de la particule de densité ϱ_{al}, et de vitesse $x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$,

- $\varrho_e =$ densité du bain électrolytique de viscosité μ.

- Solution avec conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$x(t) = A(1 - \exp(-Bt)) + Ct, \tag{7}$$

$$A = \frac{4\varrho_{al} g(\varrho_{al} - \varrho_e)}{81} \frac{r_0^4}{\mu^2}, \;\; B = \frac{9}{2\varrho_{al}} \frac{\mu}{r_0^2}, \;\; C = \frac{2g(\varrho_{al} - \varrho_e)}{9} \frac{r_0^2}{\mu}. \tag{8}$$

- Si $\varrho_{al} = 3960\ kg.m^{-3}$, $\varrho_e = 2130\ kg.m^{-3}$, $r_0 = 2.10^{-4} m$, $\mu = 1$, on obtient $A = 5.6\ 10^{-9} m$, $B = 2.8\ 10^4 s^{-1}$, $C = 1.6\ 10^{-4} m.s^{-1}$.

- La vitesse stationnaire est donnée par $C = 1.6\ 10^{-4} m.s^{-1}$ avec un $R_e = \frac{\varrho_e 2 r_0 C}{\mu} = 1.4\ 10^{-4}$.

3. DISSOLUTION ET CHUTE

- Pour $t \in [0, T]$, avec $T = \frac{r_0^2}{2K}$, $x(t)$ est la trajectoire verticale d'une particule de rayon r_0 qui se dissout dans le bain électrolytique. L'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt}(\varrho_{al} V(t) x'(t)) = g(\varrho_{al} - \varrho_e) V(t) - 6\pi\mu(r_0^2 - 2Kt)^{1/2} x'(t). \quad (9)$$

- $V(t) = \frac{4}{3}\pi(r_0^2 - 2Kt)^{3/2}$ est le volume de la particule de densité ϱ_{al}, et de vitesse $x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$,

- $\varrho_e =$ densité du bain électrolytique de viscosité μ.

Avec les conditions initiales

$$x(0) = 0 \ \text{ et } x'(0) = 0, \tag{10}$$

on montre que

$$x(T) = \frac{g(\varrho_{al} - \varrho_e)}{K(18\mu - 4\varrho_{al}K)} . r_0^4 . \tag{11}$$

- $4\varrho_{al}K < 10^{-5} kg.m^{-1}s^{-1}$ et $18\mu > 10^{-2} kg.m^{-1}s^{-1}$. On obtient la formule

$$x(T) = \frac{g(\varrho_{al} - \varrho_e)}{18.K} . \frac{r_0^4}{\mu} \tag{12}$$

REMARQUE 2: Supposons $r_0 = 2.10^{-4} m$, $\mu = 1$

- Lorsque $c \approx 0$ et $\Theta - \Theta_{liq} >> \Theta_{liq} - \Theta_{crit}$, on a $K = 0.5\ 10^{-9} m^2 s^{-1}$, $T = 40\ s$, et $x(T) \approx 3.10^{-3} m$.

- Lorsque $c = \frac{c_{sat}}{2}$, alors $K = 0.25\ 10^{-9} m^2 s^{-1}$, $T = 80\ s$, et $x(T) \approx 6.10^{-3} m$.

REMARQUE 3: Si, au lieu de $r_0 = 2.10^{-4} m$ on a un agrégat de dimension $r_0 = 2\ mm$, alors $T = 4000\ s$ et $x(T) \approx 30\ m$???