Eqt (3.15) avec (3.17) et $r = cste$. On a

$$m\ddot{x}(t) = g(\rho_e - \rho_{AE})\frac{4}{3}\pi r^3 + F_D(r, \dot{x}(t))$$

où $m = \rho_e \frac{4}{3}\pi r^3$.

En régime de vitesse stationnaire ($\ddot{x}(t) \equiv 0$) on aura

$$F_D(r, w) = -g(\rho_e - \rho_{AE})\frac{4}{3}\pi r^3$$

où w est la vitesse stationnaire.

Il reste à définir F_D pour obtenir w ?

- Loi de Stokes : $F_D(r,w) = -6\pi\mu r w$.
- Autre loi : $F_D(r,w) = -6\pi\mu r(w + \gamma R_e w)$

  où $R_e = \dfrac{2rw.\rho_{AE}}{\mu}$ = nb de Reynolds, $\gamma = cste$

• Ainsi dans le régime Stokes on obtient

$$6\pi\mu r w = g(\rho_e - \rho_{AE})\frac{4}{3}\pi r^3$$

et donc $\boxed{w = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} r^2}$

• En prenant la seconde loi on aura

$$w + \gamma \frac{2\rho_{AE}}{\mu} r w^2 = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} r^2$$

Si on pose $a(r) = \gamma \frac{2\rho_{AE}}{\mu} r$ et $c(r) = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} r^2$

On obtient $\boxed{w = \dfrac{\sqrt{1+4\,a(r).c(r)} - 1}{2\,a(r)}}$

Remarque : Ce n'est pas avec la connaissance unique de w que l'on peut connaître la force de traînée $F_D(r,\dot{x})$!

Dissolution

Calculs avec la vitesse stationnaire de Stokes

$$w = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} r^2.$$

Eqt de dissolution :

$$\dot{r}(t) = -\frac{K}{r(t)} \quad , \quad r(0) = r_0$$

On obtient $\frac{1}{2}\frac{d}{dt} r^2(t) = -K \Rightarrow r(t) = (-2Kt + c)^{1/2}$

avec $r(0) = r_0$ on a $c = r_0^2$

Ainsi $\boxed{r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2Kt}}$

Si $T = \dfrac{r_0^2}{2K}$, on obtient $r(T) = 0$.

En négligeant l'accélération des particules en chute dans le bain, on obtient pour vitesse de la particule

$$w(t) = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} (r_0^2 - 2Kt).$$

Ainsi, la dite particule va parcourir la longueur

$$\boxed{\int_0^T w(t)\,dt = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{AE}}{\mu} \cdot \frac{r_0^4}{4K} = \frac{g(\rho_e - \rho_{AE}) r_0^4}{18 \mu K}}$$

Application : $g = 9.81\ m/s^2$

$\rho_e - \rho_{al} \simeq 2000\ kg/m^3$

$\mu \simeq 1\ kg/ms - 10\ kg/ms$ (μ turbulent)

$r_0 \simeq 10^{-4} m$

$K = 0.5\ 10^{-9}\ m^2/s$

On a $t = \frac{r_0^2}{2K} = \frac{10^{-8} m^2}{10^{-9} m^2/s} = 10\ s.$

Distance parcourue avec accélération nulle (approximation)

$$d = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_{al}}{\mu} \cdot \frac{r_0^4}{4K} \quad \text{avec } \mu = 1\ kg/ms$$

$$\simeq \frac{2}{9}\, 10 . 2 . 10^3 . \frac{10^{-16}}{4 . 0.5 . 10^{-9}} = \frac{2}{9}\, 10^4 . 10^{-16} . 10^9$$

$$\simeq \frac{2}{9}\, 10^{-3} m$$

La distance parcourue est de l'ordre du mm si $\mu = 1\ kg/ms$

Si $\mu = 10$ on aura 0,1 mm... etc.

	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 1$	$\mu = 100$
$r_0 = 100\mu m$	$\sim 2 . 10^{-1}$	$\sim 2 . 10^{-4}$	$\sim 2 . 10^{-6}$
$r_0 = 200\mu m$	$\sim 3.$	$\sim 3 . 10^{-3}$	$\sim 3 . 10^{-5}$

distance parcourue en mètres

Avec $r_0 = 200\mu m$ et $\mu = 10^{-3}\ kg/ms$ on obtient un parcours de 3 m environ.

Calcul plus précis avec force de Stokes

$$m\ddot{x} = g(\rho_e - \rho_{Ae})\frac{4}{3}\pi r^3(t) - \cancel{g(\rho_e - \rho_{Ae})}\, 6\pi\mu r\dot{x} \qquad (1)$$

$$x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2kt}$$

En divisant (1) par r on obtient

$$\rho_e \frac{4}{3}\pi r^2 \ddot{x} = g(\rho_e - \rho_{Ae})\frac{4}{3}\pi r^2 - 6\pi\mu\dot{x} \qquad \text{avec } r^2(t) = r_0^2 - 2kt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_e \ddot{x} = g(\rho_e - \rho_m) - \frac{9}{2}\mu \frac{1}{r_0^2 - 2kt}\dot{x} \\ x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0 \end{array}}$$

A intégrer numériquement entre 0 et E !

Avec accélération $\ddot{x}=0$ on obtient

$$\dot{x} = \frac{2}{9} g \frac{\rho_e - \rho_m}{\mu}(r_0^2 - 2kt)$$

qui est bien notre vitesse w en bas de page 2.

Reprenons l'éqt de la page 4

$$\rho_e \ddot{x} = g(\rho_e - \rho_m) - \frac{9}{2}\mu \frac{1}{r_0^2 - 2kt}\dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = g(\rho_e-\rho_m)\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\mu}(r_0^2-2kt) - \frac{2}{9}\cdot\frac{\rho_e}{\mu}(r_0^2-2kt)\ddot{x}$$

Si on intègre cette équation entre 0 et $\bar{t}$, on obtient

$$(*) \quad x(\bar{t}) = g(\rho_e-\rho_m)\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\mu}(r_0^2\bar{t} - k\bar{t}^2) - \frac{2}{9}\cdot\frac{\rho_e}{\mu}\int_0^{\bar{t}}(r_0^2-2kt)\ddot{x}\,dt$$

Calculons

$$\int_0^{\bar{t}} \underbrace{(r_0^2-2kt)}_{v}\underbrace{\ddot{x}(t)}_{u'}\,dt = \left|(r_0^2-2kt)\dot{x}(t)\right|_{t=0}^{t=\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} 2k\,\dot{x}(t)\,dt$$

$$= (r_0^2-2k\bar{t})\dot{x}(\bar{t}) + 2k\rho_e x(\bar{t})$$

Mais $\bar{t} = \frac{r_0^2}{2k}$ et donc $r_0^2 - 2k\bar{t} = 0$.

Ainsi $\int_0^{\bar{t}}(r_0^2-2kt)\ddot{x}(t)\,dt = 2k\,x(\bar{t})\cdot\rho_e$

Finalement on obtient ~~$x(\bar{t})$~~ = avec (*)

$$x(\bar{t}) = g(\rho_e-\rho_m)\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\mu}\frac{r_0^4}{4k} - \frac{2}{9}\cdot\frac{\rho_e}{\mu}2k\,x(\bar{t})$$

D'où ~~$x(\bar{t}) = g(\rho_e-\rho_m)\frac{2}{9}\frac{1}{\mu}$~~

$$x(\bar{t}) = \frac{g(\rho_e-\rho_{ae})r_0^4}{18\mu k + 8\rho_e k^2} \simeq \frac{g(\rho_e-\rho_{ae})r_0^4}{18\mu k}$$

Voir bas p2

<u>Application</u> :

$$\left.\begin{array}{l}\rho_e = 4000\ kg/m^3 \\ k = \frac{1}{2}10^{-9}\ m^2/s\end{array}\right\} \quad \rho_e k^2 \sim 10^{-15}\ \frac{kg\,m}{s^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 1 \to 10\ kg/ms \\ k = \frac{1}{2}10^{-9}\ m^2/s\end{array}\right\} \quad \mu k \sim 10^{-9}\ \frac{kg\,m}{s^2}$$