Une Remarque:

Le problème bien posé est le suivant:

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$**,** $p \in L_0^2(\Lambda)$, **tels que pour tout** $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ **et** $q \in L_0^2(\Lambda)$ **on a**

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\boldsymbol{v})\, dx_1dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2})dx_1dx_2 - \beta \int_\Lambda pv_3dx_1dx_2 &= \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}dx_1dx_2, \\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).qdx_1dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.qdx_1dx_2 &= 0,
\end{aligned}$$

Pour le traiter numériquement on écrit:

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$**,** $p \in L_0^2(\Lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **tels que pour tout** $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^3$ **et** $q \in L_0^2(\Lambda)$ **on a**

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\boldsymbol{v})\, dx_1dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2})dx_1dx_2 - \beta \int_\Lambda pv_3dx_1dx_2 + \lambda \int_\Lambda v_3dx_1dx_2 &= \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}dx_1dx_2 \\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).qdx_1dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.qdx_1dx_2 &= 0, \\
\int_\Lambda u_3dx_1dx_2 &= 0,
\end{aligned}$$

Dans ce dernier problème:

- $\int_\Lambda u_3dx_1dx_2 = 0$ est une condition essentielle (et non naturelle si vous avez programmé que la deuxième expression ci-dessus est vraie pour tout $q \in L^2(\Lambda)$ et non $q \in L_0^2(\Lambda)$).
- Le paramètre λ est un multiplicateur de Lagrange pour assurer que $\int_\Lambda v_3dx_1dx_2 = 0$.
- Naturellement vous pouvez numériquement prendre $p \in V_h$ et mettre $p = 0$ en un point, puis translater ensuite par une constante pour obtenir $\int_\Lambda pdx_1dx_2 = 0$ (enlever une ligne et une colonne correspondant à p).
- Bien sûr qu'il faut stabiliser la deuxième équation par le "truc" déjà mentionné: