

Chapitre 4

Une méthode numérique pour le calcul de l'écoulement de Stokes

{chap:fourier}

4.1 Introduction

{sec:fourier-introduction}

Comme annoncé dans le chapitre 1, une cuve d'électrolyse typique dans une halle de production n'est jamais dans un état stationnaire [Ste09, Flo13]. La cause majeure pour laquelle ces cuves se trouvent dans un état de déséquilibre constant est liée aux changements d'anodes en fin de vie, qui interviennent toutes les 24 heures environ.

Cet état de déséquilibre entraîne d'importantes variations des écoulements des fluides dans la cuve, et ces variations ont un impact non négligeable sur la répartition de l'alumine dissoute dans le bain électrolytique. Pour palier à ces variations de répartition de concentration d'alumine, les opérateurs peuvent modifier les cadences d'injection de chaque injecteur. Malheureusement, il ne disposent pour l'heure d'aucun outil qui leur permette de déterminer comment adapter ces cadences en fonction de l'état de la cuve.

Le modèle de dissolution et transport d'alumine proposé dans [Hof11] et dont nous avons étudié certaines extensions dans la première partie de ce travail, peut apporter un début de réponse : la conductivité des différentes anodes dépend de leur âge, ce qui modifie le champs de vitesse dans le bain électrolytique et dans l'aluminium liquide par l'intermédiaire de la densité de courant électrique et des forces de Lorentz, ainsi que la distribution d'alumine dissoute. Malheureusement, ce calcul ne peut pas être fait en temps réel, et donc la cadence des injecteurs qui optimise la répartition de l'alumine dissoute dans le bain ne peut pas non plus être obtenu en temps réel.

Dans ce chapitre nous proposons une méthode pour calculer le champ de vitesse dans une cuve d'électrolyse bien plus rapidement qu'avec les modèles de [Ste09] et [Hof11], au prix de certaines hypothèses supplémentaires que l'on discutera.

La géométrie d'une cuve d'aluminium est particulier : l'essentiel de l'écoulement des fluides prend place dans un domaine approximativement parallélépipédique qui présente une forte anisotropie. Les dimensions horizontales ($\approx 14 \times 4$ m) sont bien plus grandes que la dimension verticale (≈ 0.2 m). Par conséquent, l'écoulement est essentiellement contraint dans le plan horizontal, si l'on néglige ce qui se passe dans les canaux.

Le modèle de référence dans Alucell [Ste09], [Flo13], [Hof11], [Roc16] calcule une approximation des écoulements dans les fluides en utilisant une méthode d'éléments finis Lagrange continu linéaire par morceau sur un maillage en tétraèdre du domaine fluide.

Or, la géométrie anisotrope du domaine fluide d'une cuve d'électrolyse pose de sérieuses difficultés au niveau numérique. En effet, l'utilisation de mailles isotropes n'est pas possible puisque la taille de maille dans la direction verticale est de l'ordre de 0.01 m. La seule alternative est de considérer des mailles anisotropes *ed* l'ordre de 0.01 m dans la direction verticale et 0.1 m dans les directions horizontales. Cependant, l'utilisation de mailles anisotropes augmente le conditionnement des matrices et donc le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système linéaire et dégrade la précision du calcul.

de /

Le but de ce chapitre est de proposer une méthode pour calculer des écoulements de Stokes ou de Navier-Stokes dans des domaines parallélépipédiques présentant une forte anisotropie. Dans la section 4.2 nous proposons une décomposition de Fourier de la vitesse selon la direction verticale, puis nous proposons dans la section 4.3 une méthode numérique de type éléments finis pour approcher chaque harmonique de la décomposition de Fourier. Dans la section 4.4 nous validons l'implémentation du schéma ainsi obtenu et étudions la convergence de l'erreur par rapport à une solution non triviale. Finalement, dans la section 4.6 nous appliquons cette méthode au cas industriel d'une cuve d'électrolyse et évaluons les propriétés de cette méthode.

4.2 Formulation du modèle de Stokes Fourier

{sec:fourier-model}

Soit Λ un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de bord $\partial\Lambda$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné correspondant à la dimension verticale d'une cuve. On définit le domaine de \mathbb{R}^3 correspondant à une simplification géométrique de la cuve d'électrolyse

$$\Omega = \Lambda \times (0, \varepsilon). \quad (4.1)$$

{eq:domain}

On suppose que le domaine Ω est occupé par l'électrolyte, un fluide newtonien incompressible de viscosité μ . Si u est la vitesse de l'écoulement, le tenseur des contraintes visqueuses dans le fluide [LL87] est donné par

$$\mathcal{T}_{i,j}(u) = 2\mu_{i,j}\mathcal{E}_{i,j}(u), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

{eq:stokes-u}

Ici on a noté \mathcal{E} le tenseur du taux de déformation du fluide qui s'écrit en fonction de la vitesse d'écoulement u :

$$\mathcal{E}_{i,j}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

{eq:stokes-eij}

Étant donné un champ de forces $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, on suppose que la vitesse d'écoulement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ du fluide satisfont le système de Stokes

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathcal{T}(u)) + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

{eq:stokes-f}

{eq:stokes-0}

dans Ω . Dans la suite nous noterons $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $f = (f_1, f_2, f_3)$. De plus, on demande à ce que l'écoulement u satisfasse les conditions aux limites suivantes. Sur les faces latérales, la vitesse satisfait la condition d'adhérence

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Lambda \times (0, \varepsilon). \quad (4.6)$$

{eq:stokes-bc-1}

{eq:stokes-bc-2}

Sur les faces horizontales supérieures et inférieures, la vitesse d'écoulement satisfait une condition de glissement total. On a

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (4.7)$$

{eq:stokes-bc-3}

$$\mathcal{T}(u) \cdot \nu = 0 \quad (4.8)$$

{eq:stokes-bc-4}

On pose pour alléger l'écriture $\beta^k = \frac{\pi k}{\varepsilon}$. Les décompositions en séries de Fourier selon la variable x_3 des fonctions U_i , F_i , $i = 1, 2, 3$ et P s'écrivent

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + \sum_{k>0} u_i^k(x_1, x_2) \cos(\beta^k x_3), \quad i = 1, 2, \quad (4.20)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k>0} u_3^k(x_1, x_2) \sin(\beta^k x_3), \quad (4.21)$$

$$P(x_1, x_2, x_3) = p^0(x_1, x_2) + \sum_{k>0} p^k(x_1, x_2) \cos(\beta^k x_3), \quad (4.22)$$

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = f_i^0(x_1, x_2) + \sum_{k>0} f_i^k(x_1, x_2) \cos(\beta^k x_3), \quad i = 1, 2, \quad (4.23)$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k>0} f_3^k(x_1, x_2) \sin(\beta^k x_3). \quad (4.24)$$

On note $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, $f^0 = (f_1^0, f_2^0)$, $u^k = (u_1^k, u_2^k, u_3^k)$ et $f^k = (f_1^k, f_2^k, f_3^k)$, $k \geq 1$. On obtient les équations que les coefficients de Fourier u^k , p^k , $k > 0$ doivent satisfaire en substituant les définitions (4.20) à (4.24) dans le système d'équation de Stokes (4.15), (4.16). Les bases de Fourier $\{\cos(\beta^k x_3)\}_{k>0}$ et $\{\sin(\beta^k x_3)\}_{k>0}$ sur \mathbb{R} étant respectivement orthogonales, on peut identifier les équations pour chaque mode indépendamment des autres. On obtient pour $k = 0$:

$$-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ji} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial p^0}{\partial x_i} = f_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (4.25)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_j} = 0 \quad (4.26)$$

sur Λ et $u^0 = 0$ sur $\partial\Lambda$. On obtient pour $k \geq 1$:

$$-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ji} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) \right) - \mu_{3i} \left(\beta^k \frac{\partial u_3^k}{\partial x_i} - (\beta^k)^2 u_i^k \right) + \frac{\partial p^k}{\partial x_i} = f_i^k, \quad i = 1, 2, \quad (4.27)$$

$$-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{3j} \left(\frac{\partial u_3^k}{\partial x_j} - \beta^k u_j^k \right) \right) + 2\mu_{33} (\beta^k)^2 u_3^k - \beta^k p^k = f_3^k, \quad (4.28)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j} + \beta^k u_3^k = 0 \quad (4.29)$$

sur Λ et $u^k = 0$ sur $\partial\Lambda$.

Étant données les forces F_i , $i = 1, 2, 3$, les coefficients f^k , $k \geq 0$ qui apparaissent dans les membres de droite des équations (4.25), (4.27) et (4.28) s'obtiennent par une projection L^2 sur la base de Fourier correspondante. Pour $k = 0$ on a

$$f_i^0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_i(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad i = 1, 2, \quad (4.30)$$

et pour $k > 0$ on a

$$f_i^k(x_1, x_2) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_i(x_1, x_2, x_3) \cos(\beta^k x_3) dx_3, \quad i = 1, 2, \quad (4.31)$$

$$f_3^k(x_1, x_2) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_3(x_1, x_2, x_3) \sin(\beta^k x_3) dx_3. \quad (4.32)$$

Minuscules
U_i → u_i
P → p
F_i → f_i
(ou alors changer
en (4.4) + (4.5))
Il ne faudrait pas
plutôt poser
u⁰ = (u₁⁰, u₂⁰, 0) ?
f⁰ = (f₁⁰, f₂⁰, 0) Non
k > 0

! u indep.
de x?

(non d'après
(4.5)...)

* avec μ_{ij} , tu prends la divergence de T "par colonne"; la définition de la divergence d'un tenseur peut se faire par ligne ou par colonne mais je pense qu'ici il faudrait l'appliquer par ligne, i.e.

$[\operatorname{div}(\tau(u))]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}(u)]$; c'est d'ailleurs la définition utilisée dans la réf. [LL87] que tu donneras en page 42 (cf. équation (H.1)).

Remarques: si μ est sym, alors cela ne change pas les calculs ($\mathcal{E}(u)$ est sym.)

pour $u = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$, en posant $\nabla u = \begin{bmatrix} (\nabla u)_{ij} \end{bmatrix}_{i=1 \dots 3, j=1 \dots m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$

est une matrice $3 \times m$ et l'opérateur divergence ne peut être appliqué que par ligne :

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_3 \end{bmatrix}$$

(ici $m = 3$ et $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$ et on a

$$\operatorname{div}(2\mathcal{E}(u)) = \operatorname{div}(\nabla u) + \operatorname{div}(\nabla u^\top) = \Delta u + \nabla \operatorname{div}(u)$$

Formulation faible Nous énonçons maintenant les formulations variationnelles du problème formé par les équations (4.25) et (4.26) qui correspondent au mode fondamental de l'écoulement u , et des problèmes formés par les équations (4.27) à (4.29) qui correspondent à chacune des harmoniques de l'écoulement u .

Commençons tout d'abord par traiter le mode fondamental. Pour simplifier l'écriture, on note $\bar{\mu}$ et $\bar{\mathcal{E}}$ la viscosité et le tenseur du taux de déformation réduits aux composantes 1 et 2 :

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{E}}_{ij}(u) = \mathcal{E}_{ij}(u), \quad i, j = 1, 2. \quad (4.33)$$

Le problème faible correspondant aux équations (4.25) et (4.26) consiste à chercher les fonctions $u_1^0, u_2^0 \in H^1(\Lambda)$, $p^0 \in L_0^2(\Lambda)$, telles que

$$\int_{\Lambda} \bar{\mu} \otimes \bar{\mathcal{E}}(u^0) : \bar{\mathcal{E}}(v) \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\Lambda} p^0 \operatorname{div} v \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\Lambda} f^0 \cdot v \, dx_1 \, dx_2, \quad (\text{eq:fourier-weak-fund-1})$$

$$\int_{\Lambda} q \operatorname{div} u^0 \, dx_1 \, dx_2 = 0 \quad (\text{eq:fourier-weak-fund-2})$$

pour toutes fonctions $v \in (H^1(\Lambda))^2$, $q \in L_0^2(\Lambda)$. En admettant une régularité adéquate pour le bord $\partial\Lambda$ et en supposant que $f^0 \in L^2(\Lambda)$, il est connu que la formulation faible (4.34), (4.35) admet une unique solution [Tem77].

Traitons à présent les problèmes pour les coefficients u^k et p^k . Soit $k > 0$ et soit $\tilde{\mathcal{E}}$ le tenseur 3×3 défini par

$$\tilde{\mathcal{E}}^k(u) = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta_k u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta_k u_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta_k u_1 & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta_k u_2 & 2\beta_k u_3 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

On obtient la formulation faible pour chaque harmonique en multipliant les équations (4.27) à (4.29) par des fonctions test v_1, v_2, v_3 et q et en intégrant par parties les termes qui comportent des dérivées secondes. Le problème faible pour chaque harmonique k consiste à chercher les fonctions $u_1^k, u_2^k, u_3^k \in H^1(\Lambda)$ et $p^k \in L_0^2(\Lambda)$ telles que

$$\int_{\Lambda} 2\bar{\mu} \otimes \tilde{\mathcal{E}}^k(u^k) : \tilde{\mathcal{E}}^k(v) - \int_{\Lambda} p^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \beta^k v_3 \right) = \int_{\Lambda} f^k \cdot v, \quad (\text{eq:fourier-weak-harm-1})$$

$$\int_{\Lambda} \left(\frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^k}{\partial x_2} + \beta^k u_3^k \right) q = 0 \quad (\text{eq:fourier-weak-harm-2})$$

pour toutes fonctions $v = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Lambda))^3$ et $q \in L^2(\Lambda)$. Afin de rendre plus explicite la structure sous-jacente de cette formulation, on peut l'exprimer en des termes plus abstraits. Soit $a^k : H_0^1(\Lambda)^3 \times H_0^1(\Lambda)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ les formes bilinéaires continues définies pour tout $k > 0$ par

$$a^k(u, v) = \int_{\Lambda} 2\bar{\mu} \otimes \tilde{\mathcal{E}}^k(u) : \tilde{\mathcal{E}}^k(v) \quad (4.39)$$

et les formes bilinéaires continues $b^k : H_0^1(\Lambda)^3 \times L^2(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $k > 0$ par

$$b^k(u, q) = \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta^k u_3 \right) q. \quad (4.40)$$

⚠ Facteur 2, $\frac{1}{2}$... (détails page suivante)

$H^1(\Lambda) \rightarrow H_0^1(\Lambda)$?

Avec la défⁿ (4.33) de $\bar{\mathcal{E}}(u)$, l'équation (4.34)

s'écrit $\begin{cases} 2\mu \dots \\ \Lambda \end{cases}$

En effet, $\bar{\mathcal{E}}_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ (cf (4.3))

et $\bar{\mathcal{E}}_{ij} = 2\mu_{ij} \mathcal{E}_{ij}$ pour $ij=1,2$.

Je pense qu'un facteur $\frac{1}{2}$ manque dans la défⁿ (4.36) de $\tilde{\mathcal{E}}^k(u)$. Avec le facteur $\frac{1}{2}$, alors on a bien un facteur 2μ en (4.37) et (4.39) ainsi que

$$\tilde{\mathcal{E}}^k(u) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{E}}(u) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta_k u_1 \right) \\ - & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta_k u_2 \right) \\ \cdot & \beta_k u_3 \end{bmatrix}$$

consistent avec le lemme 1 p. 76.

Ainsi pour k fixé, le problème (4.37), (4.38) est équivalent au problème de chercher $(u^k, p^k) \in H_0^1(\Lambda)^3 \times L^2(\Lambda)$ tel que

$$\begin{aligned} a^k(u^k, v) - b^k(v, p^k) &= \int_{\Lambda} f^k \cdot v, \\ b^k(u^k, q) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(4.41)} \\ \text{(4.42)} \end{array}$$

pour tout $(v, q) \in H_0^1(\Lambda)^3 \times L^2(\Lambda)$.

Existence d'une solution faible pour les harmoniques On donne maintenant une preuve de l'existence et de l'unicité du problème faible (4.41), (4.42) pour chaque coefficient (u^k, p^k) . Dans ce but, nous introduisons au préalable les deux lemmes suivants.

Lemme 1. Soit un entier $k > 0$ fixé et une fonction $u \in H_0^1(\Lambda)^3$ telle que $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta^k u_3 = 0$. On a la relation

$$\int_{\Lambda} |\tilde{\mathcal{E}}^k(u)|^2 = \int_{\Lambda} \left(|\bar{\mathcal{E}}(u)|^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + (\beta^k u_1)^2 + (\beta^k u_2)^2 \right) \right). \quad (4.43)$$

Démonstration. Le calcul de $|\tilde{\mathcal{E}}^k(u)|^2$ une fois intégré sur Λ donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} |\tilde{\mathcal{E}}^k(u)|^2 &= \int_{\Lambda} \left(|\bar{\mathcal{E}}(u)|^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + (\beta^k u_1)^2 + (\beta^k u_2)^2 \right) \right) \\ &\quad + \int_{\Lambda} \beta^k \left(-u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta^k (u_3)^2 \right). \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(4.44)} \\ \text{(4.44)} \end{array}$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il reste à voir que le dernier terme de (4.44) est nul. En utilisant le théorème de la divergence on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \beta^k \left(-u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta^k (u_3)^2 \right) &= \int_{\Lambda} \beta^k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_3 + \beta^k u_3^2 \right) \\ &\quad + \int_{\partial \Lambda} u_3 (u_1, u_2)^t \cdot \mathrm{d}\ell \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(4.45)} \\ \text{(4.46)} \end{array}$$

En utilisant l'hypothèse que $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta^k u_3 = 0$ et les conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u = 0$ sur $\partial \Lambda$ on conclut que l'expression (4.46) est identiquement nul. On obtient le résultat annoncé. \square

Lemme 2. Soit un entier $k > 0$ fixé. Il existe une constante positive $\chi > 0$ telle que

$$\chi \|\nabla u\|_{L^2(\Lambda)} \leq \|\tilde{\mathcal{E}}^k(u)\|_{L^2(\Lambda)}, \quad (4.47)$$

pour tout $u \in H_0^1(\Lambda)^3$ qui satisfait $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta^k u_3 = 0$. Ici on a noté

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|^2 \quad (4.48)$$

et

$$\|\tilde{\mathcal{E}}^k(u)\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{\Lambda} |\tilde{\mathcal{E}}^k(u)|^2. \quad (4.49)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^k \quad \tilde{\mathcal{E}}^k$$

Démonstration. Il est connu que l'inégalité de Korn en dimension 2 est vraie, i.e., il existe une constante $\chi > 0$ qui satisfait

$$\chi \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \int_{\Lambda} |\bar{E}(u)|^2. \quad (4.50)$$

Le lemme 1 permet de conclure. □

Proposition 1. Si le tenseur de viscosité μ satisfait

$$\mu_{i,j}(x_1, x_2) \geq \mu_0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Lambda, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (4.51)$$

où $\mu_0 > 0$ est une constante positive indépendante de $(x_1, x_2) \in \Lambda$, alors le problème (4.41), (4.42) admet une unique solution.

Démonstration. Pour montrer la proposition 1, il suffit de vérifier que la forme $a(.,.)$ est coercive sur V_0 où $V_0 = \{v \in H_0^1(\Lambda)^3 \mid b^k(v, q) = 0 \forall q \in L^2(\Lambda)\}$, et que la condition classique inf-sup sur la forme bilinéaire b est satisfaite.

Le lemme 2 avec l'hypothèse (4.51) montre bien que a^k est coercive sur V_0 . D'autre part en utilisant l'inégalité concernant la condition inf-sup dans \mathbb{R}^2 et si $q \in L^2(\Lambda)$, on a que

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} b^k(v, q) &= \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \beta^k v_3 \right) q \stackrel{1. v_3 \geq 0 ?}{\geq} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) q \\ &\geq \gamma \|q\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où $\gamma > 0$, et où on a noté $\|v\|_{H_0^1}^2 = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{H_0^2}^2$. Ainsi on a bien

$$\inf_{q \in L^2} \sup_{v \in (H_0^1)^3} \frac{b(v, q)}{\|q\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}} \geq \gamma > 0, \quad (4.52)$$

et la proposition est prouvée. □

$a \rightarrow a^k$
 $b \rightarrow b^k$

besoin de
 $q \in L^2(\Lambda)$?

$\forall q \in L^2(\Lambda) \exists v \in H_0^1(\Lambda)$

s.t.
 $\operatorname{div}(v) = q$
and $\|(\nabla v)\|_{L^2(\Lambda)} \leq \frac{1}{\gamma} \|q\|_{L^2(\Lambda)}$

4.3 Discrétisation par une méthode d'éléments finis

Est-ce qu'il faudrait mentionner que $(u^0, p^0) \rightarrow P_1$ bubble-Pi

Dans cette section nous décrivons les méthodes de discrétisations proposées pour approximer le coefficient du mode fondamental de l'écoulement (u^0, p^0) et les coefficients des harmoniques (u^k, p^k) .

Soit un nombre réel $h > 0$ et soit \mathcal{M}_h une triangulation du domaine Λ de \mathbb{R}^2 telle que $\operatorname{diam}(K) \leq h \forall K \in \mathcal{M}_h$. On introduit maintenant l'espace éléments finis V_h défini par

$$V_h = \{v \in C^0(\Lambda) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{M}_h\} \quad (4.53)$$

ainsi que l'espace enrichi par une fonction bulle

tu utilises \oplus_h pour la suite

$$B_h = \{v \in C^0(\Lambda)^2 \mid v|_K \in P_1^2 \oplus B_K \forall K \in \mathcal{M}_h\} \cap H_0^1(\Lambda)^2 \quad (4.54)$$

où B_K est engendré par la fonction $27\lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$, les λ_i^K , $i = 1, 2, 3$ étant les trois fonctions barycentriques du triangle K .

Mode fondamental La méthode d'éléments finis correspondant à (4.34), (4.35) consiste à chercher $(u_h^0, p_h^0) \in \mathcal{B}_h \times (V_h \cap L_0^2(\Lambda))$ tels que, pour tout $(v_h, q_h) \in \mathcal{B}_h \times (V_h \cap L_0^2(\Lambda))$ on ait

$$\int_{\Lambda} 2\mu \otimes \bar{\mathcal{E}}(u_h^0) : \bar{\mathcal{E}}(v) - \int_{\Lambda} p_h^0 \operatorname{div}(v_h) = \int_{\Lambda} f^0 \cdot v_h, \quad \text{(4.55)}$$

$$\int_{\Lambda} q_h \operatorname{div} u_h^0 = 0. \quad \text{(4.56)}$$

Il est connu que le couple d'espaces éléments finis $(\mathcal{B}_h, V_h \cap L_0^2(\Lambda))$ est stable, ainsi (4.55), (4.56) admet une unique solution.

Le schéma (4.55), (4.56) fait intervenir l'espace éléments finis à moyenne nulle $V_h \cap L_0^2(\Lambda)$ pour le mode fondamental de la pression p^0 . En pratique, on exprime explicitement la contrainte sur la pression dans le problème faible en ajoutant l'équation

$$\int_{\Lambda} p_h^0 = 0 \quad (4.57)$$

et en ajoutant un multiplicateur de Lagrange. Il est alors équivalent de chercher $(u_h^0, p_h^0) \in \mathcal{B}_h \times V_h$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(v_h, q_h) \in \mathcal{B}_h \times V_h$ on ait

$$\int_{\Lambda} 2\mu \otimes \bar{\mathcal{E}}(u_h^0) : \bar{\mathcal{E}}(v) - \int_{\Lambda} p_h^0 \operatorname{div}(v_h) = \int_{\Lambda} f^0 \cdot v_h, \quad \text{(4.58)}$$

$$\int_{\Lambda} q_h \operatorname{div} u_h^0 + \lambda \int_{\Lambda} q_h = 0, \quad \text{(4.59)}$$

$$\int_{\Lambda} p_h^0 = 0. \quad \text{(4.60)}$$

Harmoniques On considère à présent la discrétisation de la formulation faible (4.37), (4.38). Pour $k > 0$ donné, le problème discrétisé consiste à chercher les fonctions $(u_h^k, p_h^k) \in (V_h \cap H_0^1(\Lambda))^3 \times V_h$ telles que

$$\int_{\Lambda} 2\mu \otimes \tilde{\mathcal{E}}(u_h^k) : \tilde{\mathcal{E}}(v) - \int_{\Lambda} p_h^k \left(\frac{\partial v_{1,h}}{\partial x_1} \frac{\partial v_{2,h}}{\partial x_2} + \beta^k p_h^k v_{3,h} \right) = \int_{\Lambda} f \cdot v_h, \quad \text{(4.61)}$$

$$\int_{\Lambda} \left(\frac{\partial u_{1,h}^k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,h}^k}{\partial x_2} + \beta^k u_{3,h}^k \right) q_h + \delta \sum_{K \in \mathcal{M}_h} h_K^2 \int_K \left((\beta^k)^2 p_h^k q_h + \nabla p_h^k \nabla q_h \right) = 0 \quad \text{(4.62)}$$

pour tout $(v_{1,h}, v_{2,h}, v_{3,h}, q_h) \in (V_h \cap H_0^1(\Lambda))^3 \times V_h$. Ici $\delta > 0$ et le terme de stabilisation dans (4.62) est justifié par le fait que, d'après (4.22),

$$\Delta P = \Delta p^0 + \sum_{k>0} (\Delta p^k - (\beta^k) p^k) \cos(\beta^k x_3). \quad (4.63)$$

Quadrature pour les coefficients de Fourier de la force En pratique, les forces f_i , $i = 1, 2, 3$ sont données aux sommets du maillage \mathcal{M}_h . Les intégrales qui interviennent dans les définitions (4.30), (4.31) et (4.32) sont approchées par une formule de Simpson sur une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, \varepsilon]$. Le nombre de subdivision sera choisi de sorte à ce que cette erreur de quadrature soit négligeable. (5)

donc tu ne connais pas si ces points milieu ?

Résolution des systèmes linéaires Les systèmes linéaires issus des formulations (4.58)-(4.60) et (4.61), (4.62) sont résolu avec la méthode GMRES préconditionnée par $\Pi.U(2)$. Le critère d'arrêt de l'itération de GMRES est :

$$\frac{\|Ax^n - b\|_{l^2}}{\|Ax^0 - b\|_{l^2}} \leq 1 \times 10^{-10}, \quad (4.64)$$

où A est la matrice préconditionnée associée à la forme bilinéaire d'une formulation variationnelle, b le vecteur du membre de droite associé à la forme linéaire, et x^n les valeurs de l'approximation de la solution x aux itérations successives de l'algorithme GMRES.

Reconstruction de la solution On se fixe un entier $K > 0$, on suppose avoir calculé $u^k, p^k, k = 1, 2, \dots, K$ solutions de (4.58)-(4.60) et (4.61), (4.62). En vertu de (4.20)-(4.22), on note pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$

$$\cancel{u_{i,h,K}(x_1, x_2, x_3)} = u_{i,h}^0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^K u_{i,h}^k \cos(\beta^k x_3), \quad i = 1, 2 \quad \text{(4.65)}$$

$$\cancel{u_{3,h,K}(x_1, x_2, x_3)} = \sum_{k=1}^K u_{3,h}^k \sin(\beta^k x_3) \quad \text{(4.66)}$$

et

$$\cancel{p_{h,K}(x_1, x_2, x_3)} = p_h^0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^K p_h^k(x_1, x_2) \cos(\beta^k x_3). \quad \text{(4.67)}$$

4.4 Validation numérique

{sec:fourier-validation}

Dans cette section on propose de valider l'implémentation des schémas numériques décrits dans la section (4.3). Dans un premier temps, on introduit une solution exacte du problème (4.4), (4.5) qui satisfait les conditions aux limites (4.6)-(4.8). Dans un deuxième temps, on analysera la convergence de l'erreur entre la solution exacte et l'approximation $u_{h,K}$ telle que définie par (4.65), (4.66).

$u_{h,K} = (u_{1,h,K}, u_{2,h,K}, u_{3,h,K})$

4.4.1 Une solution exacte polynomiale non triviale

(pas vérifié les calculs)

On pose $\Lambda = (-1, 1)^2$, on rappelle que $\Omega = \Lambda \times (0, \varepsilon)$. On choisit dans cette partie 4.4 une viscosité scalaire unité, c'est-à-dire que $\mu_{i,j} = 1 \forall i, j$. On vérifie alors que les fonctions $u_1, u_2, u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \left(x_3^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^3 \right), \quad \text{(4.68)}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \left(-4x_1(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)^2 - 4x_2(x_2^2 - 1)(x_1^2 - 1)^2 \right) \quad \text{(4.69)}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}x_3^4 - \frac{1}{2}\varepsilon x_3^3 + \frac{1}{4}\varepsilon^3 x_3 \right), \quad \text{(4.70)}$$

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^4 x_3^5$$

satisfont (4.4), (4.5) avec les conditions aux limites (4.6)-(4.8), pour autant que f dans (4.4) soit défini par

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) = & - \left(8x_1^2(x_2^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^4 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) - (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)^2 (3\varepsilon - 6x_3) \right. \\ & + 8x_2^2(x_1^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^3 + x_3^3 \right) + 4(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) \\ & \left. + 4(x_1^2 - 1)^2(x_2^2 - 1) \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) \right) \\ & + 3x_1^2 x_2^3 x_3^5, \quad (4.71) \end{aligned}$$

(alignement?)

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2, x_3) = & - \left(8x_1^2 (x_2^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^4 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) - (x_1^2 - 1) (x_2^2 - 1)^2 (3\varepsilon - 6x_3) \right. \\
& + 8x_2^2 (x_1^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^3 + x_3^3 \right) \\
& + 4 (x_1^2 - 1) (x_2^2 - 1)^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) \\
& \left. + 4 (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1) \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon x_3^2 + x_3^3 \right) \right) \\
& + 4x_1^3 x_2^3 x_3^5, \quad (4.72)
\end{aligned}$$

(alignement?)

et

$$\begin{aligned}
f_3(x_1, x_2, x_3) = & \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 x_3 - \frac{1}{2}\varepsilon x_3^3 + \frac{1}{4}x_3^4 \right) \left(24x_2 (x_1^2 - 1)^2 \right. \\
& + 32x_1 x_2^2 (x_1^2 - 1) + 16x_1 (x_1^2 - 1) (x_2^2 - 1) \left. \right) + \left(\frac{1}{4}\varepsilon^3 x_3 - \frac{1}{2}\varepsilon x_3^3 + \frac{1}{4}x_3^4 \right) \left(24x_1 (x_2^2 - 1)^2 \right. \\
& + 32x_1^2 x_2 (x_2^2 - 1) + 16x_2 (x_1^2 - 1) (x_2^2 - 1) \left. \right) \\
& + (3x_3^2 - 3\varepsilon x_3) \left(4x_1 (x_1^2 - 1) (x_2^2 - 1)^2 + 4x_2 (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1) \right) \\
& + 5x_1^3 x_2^4 x_3^4. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

(alignement?)

Les figures 4.1, 4.2 représentent la solution (4.68)-(4.70) pour le choix $\varepsilon = 2$, i. e. dans le domaine $\Omega = [-1, 1]^2 \times [0, \varepsilon]$.

4.4.2 Convergence de l'erreur

On s'intéresse d'une part à la convergence de l'erreur d'approximation de $u_{h,K}$ donnée par (4.65), (4.66) vers la solution exacte (4.68)-(4.69), définie par :

$$e_{h,K}^{\text{SF}} = \frac{\|u - u_{h,K}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}, \quad (4.74)$$

où le champ de vecteur u est donné par (4.68)-(4.69).

On cherchera d'autre part à comparer $u_{h,K}$ (notée $u_{h,K}^{\text{SF}}$ dans la suite) avec la solution de (4.4), (4.5) obtenue à l'aide d'une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_1 bulle- \mathbb{P}_1 sur un maillage tétraédrique classique (notée u_h^{S3D} dans la suite). On note aussi l'erreur *(relative)*

$$e_h^{\text{S3D}} = \frac{\|u - u_h^{\text{S3D}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (4.75)$$

Convergence de la somme partielle de Fourier

On s'intéresse à la convergence de l'erreur $e_{h,K}^{\text{SF}}$ en fonction du nombre d'harmoniques K dans la somme partielle de $u_{h,K}$. On prend pour le maillage \mathcal{M}_h du domaine Λ une triangulation structurée de taille de maille $h = 2/64$. La table 4.1 donne les valeurs de l'erreur $e_{h,K}^{\text{SF}}$ pour différents nombres d'harmoniques K et différentes épaisseurs ε du domaine Ω .

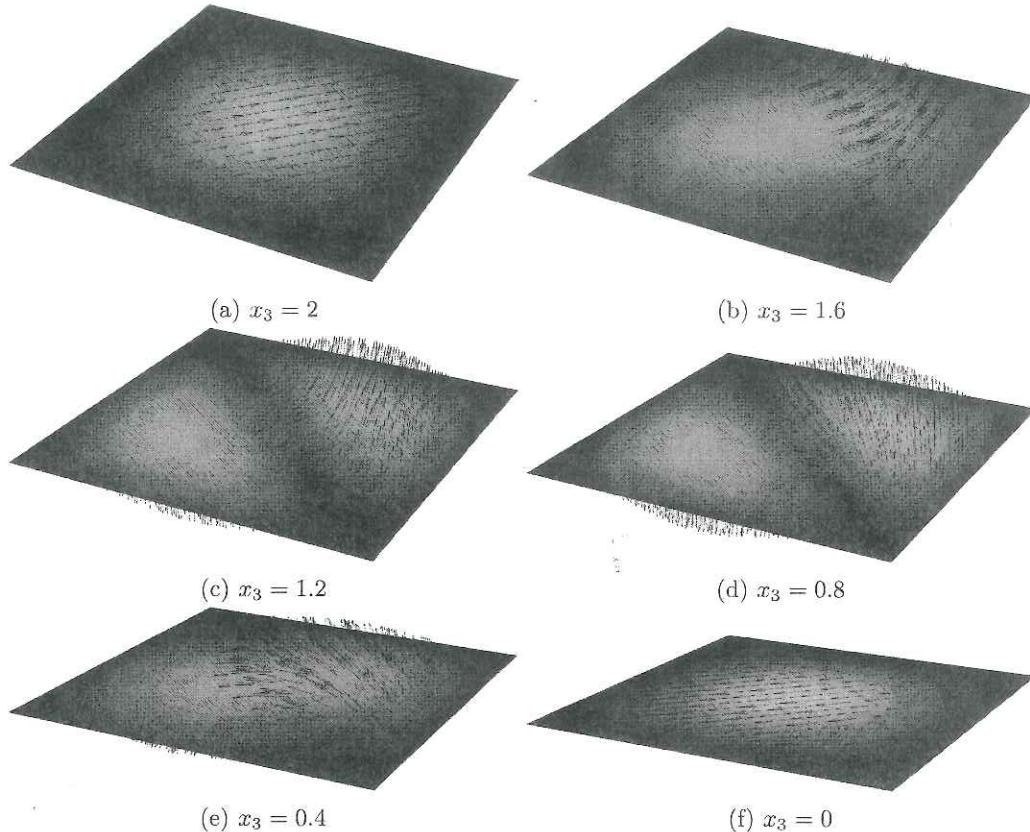


FIGURE 4.1 – Représentation de la solution exacte (4.68)-(4.70) du problème de Stokes (??). La solution est représentée sur 6 plans horizontaux espacés régulièrement entre $x_3 = 0$ et $x_3 = 2$. L'échelle de couleur correspond à l'amplitude de u , tandis que les flèches indiquent la direction de u .

Convergence en fonction du maillage

On s'intéresse à la convergence de l'erreur $e_{h,K}^{\text{SF}}$ en fonction de la taille de maille h de la subdivision \mathcal{M}_h du domaine Λ . Le tableau 4.2 donne les valeurs de l'erreur pour différentes tailles de maille h et différentes épaisseurs ε du domaine Ω .

Comparaison des erreurs $e_{h,K}^{\text{SF}}$ et e_h^{S3D}

On s'intéresse maintenant à comparer la précision des calculs $u_{h,K}^{\text{SF}}$ et u_h^{S3D} . Ici on a choisi $K = 20$ et $h = 2/64$. La table 4.3 donne la valeur des erreurs pour différents épaisseurs ε du domaine Ω . La figure 4.3 représente les mêmes données sous forme graphique.

Finalement, on compare les temps CPU pour chaque schéma, ainsi que le nombre d'itérations de l'algorithme GMRES pour résoudre le système linéaire dans le cas du schéma S3D.

dans la table 4.4

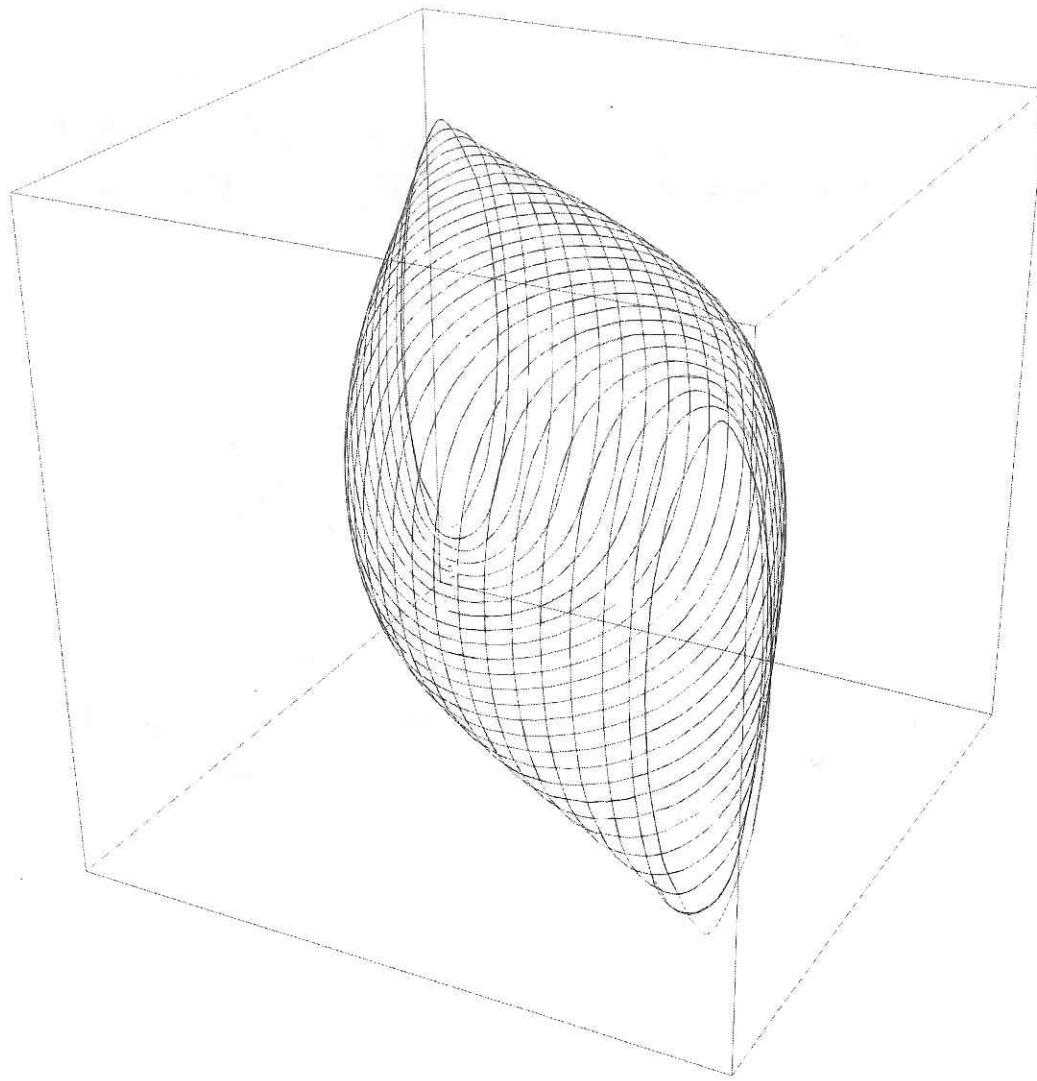


FIGURE 4.2 – Lignes de courant de la vitesse u définie par (4.68)-(4.69) dans le domaine cubique Ω , c'est-à-dire que $\varepsilon = 2$.

possible
d'avoir cette
section
après les
tables 4.1-4.4
et la figure 4.3.
(pas évident à
tre sinon...)

4.5 Modèle de transport d'alumine stationnaire

L'objectif ultime étant d'obtenir une approximation de la concentration d'alumine dans la cuve, on propose un modèle de transport et diffusion stationnaire d'alumine dissoute dans le domaine Ω . On suppose donné un champ de convection stationnaire $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, qui correspond à l'écoulement des fluides dans le domaine Ω . Le champ u sera typiquement calculé à l'aide du schéma numérique introduit dans la section 4.3. Soit S le terme source de la concentration d'alumine dissoute correspondant à l'injection de particules, q le terme source correspondant à la consommation d'alumine dissoute par la réaction d'électrolyse, et la diffusivité moléculaire de la concentration d'alumine dans le bain $D_C^M > 0$. On cherche le champ de concentration d'alumine stationnaire $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation d'advection-diffusion

$$u \cdot \nabla c - D_c^M \Delta c = S + q \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.76)$$

TABLE 4.1 – Erreur $e_{h,K}^{\text{SF}}$ entre la solution exacte et la série de Fourier tronquée à l'ordre K . (tab:h-k-convergence)

ϵ	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$	$K = 9$
2	0.8918×10^{-2}	0.1216×10^{-2}	0.5207×10^{-3}	0.4378×10^{-3}	0.4259×10^{-3}
0.2	0.1238×10^{-1}	0.1654×10^{-2}	0.4547×10^{-3}	0.1882×10^{-3}	0.1117×10^{-3}
0.02	0.1245×10^{-1}	0.1662×10^{-2}	0.4508×10^{-3}	0.1727×10^{-3}	0.8142×10^{-4}

TABLE 4.2 – Erreur $e_{h,K}^{\text{SF}}$ en fonction de h et de la taille de maille h et de l'épaisseur ϵ lorsque $K = 20$. (tab:h-h-convergence)

ϵ	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$
2	0.9765×10^{-1}	0.2611×10^{-1}	0.6698×10^{-2}	0.1688×10^{-2}	0.4232×10^{-3}
0.2	0.4184×10^{-2}	0.2342×10^{-2}	0.9966×10^{-3}	0.2962×10^{-3}	0.7794×10^{-4}
0.02	0.3977×10^{-4}	0.1166×10^{-4}	0.9187×10^{-5}	0.1121×10^{-4}	0.1210×10^{-4}

avec des conditions de Neumann homogènes sur le bord $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.77)$$

La solution c de l'équation (4.76) étant définie à une constante près, on considère la contrainte supplémentaire :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} c \, dx = \bar{c}, \quad (4.78)$$

où \bar{c} est la concentration moyenne dans le domaine Ω , supposée donnée. Le terme source S est construit à partir des conditions initiales S_k des populations de particules d'alumine introduite dans la section 3.2. On définit S comme la moyenne temporelle du débit de masse de particules d'alumine défini par les fonctions S_k :

$$S(x_1, x_2, x_3) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k>0} S_k(x_1, x_2, x_3) \delta(t - \tau_k) \, dt, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega. \quad (4.79)$$

Le terme source \dot{q} correspond à la consommation d'alumine dissoute par la réaction d'électrolyse. Le débit total d'alumine consommée dans la cuve étant donné par la relation (??), on pose :

$$\dot{q}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{I}{6F|\Omega|}, \quad (4.80)$$

où I est le courant électrique total qui traverse la cuve, et F la constante de Faraday.

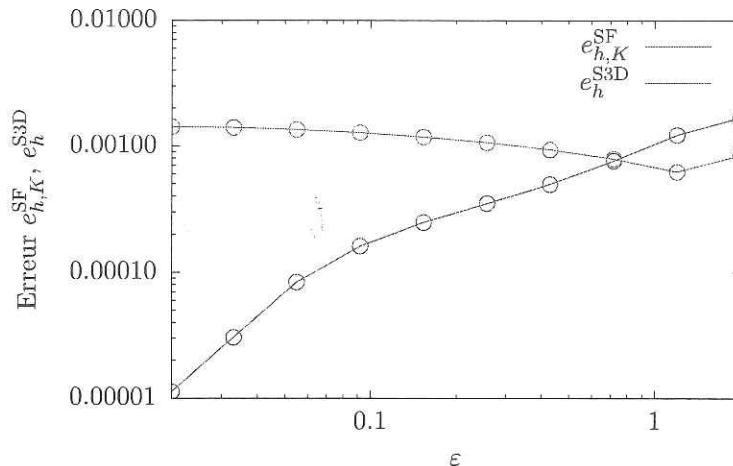
Remarque 11. Par construction des fonctions $\{S_k\}_{k>0}$, la moyenne de S sur Ω est exactement égale à la moyenne de \dot{q} sur Ω , i. e. :

$$\int_{\Omega} (S + q) \, dx = 0. \quad (4.81)$$

C'est une condition nécessaire pour que le problème (4.76) admette une solution.

TABLE 4.3 – Erreurs $e_{h,K}^{\text{SF}}$ et e_h^{S3D} en fonction de l'épaisseur ε lorsque $K = 20$ et $h = 2/64$

	$\varepsilon = 0.020$	$\varepsilon = 0.055$	$\varepsilon = 0.154$	$\varepsilon = 0.430$	$\varepsilon = 1.198$
$e_{h,K}^{\text{SF}}$	0.1121×10^{-4}	0.8356×10^{-4}	0.2478×10^{-3}	0.4944×10^{-3}	0.1225×10^{-2}
e_h^{S3D}	0.1426×10^{-2}	0.1351×10^{-2}	0.1175×10^{-2}	0.9317×10^{-3}	0.6221×10^{-3}

FIGURE 4.3 – Erreurs $e_{h,K}^{\text{SF}}$ et e_h^{S3D} en fonction de l'épaisseur ε lorsque $K = 20$ et $h = 2/64$.

{fig:e-sf-e-s3d-convergence}

On utilisera pour approcher la solution du problème (4.76) une méthode d'éléments finis continus linéaires par morceaux, stabilisée par une méthode de type SUPG, sur un maillage tétraédrique de Ω .

4.6 Application à l'écoulement d'une cuve d'électrolyse

{fig:application}

L'un des objectifs premiers du développement du schéma numérique SF est d'une part de fournir une approximation de l'écoulement des fluides dans une cuve d'électrolyse d'aluminium, et d'autre part de fournir une approximation de la distribution d'alumine dans le bain électrolytique, le tout à moindre coût par rapport au modèle 3D standard déjà implémenté dans le logiciel Alucell, tels que décrit dans le chapitre 3.

Dans cette partie, on compare les champs de vitesse et de concentration issus de la méthode Stokes Fourier décrite dans les sections 4.2 et 4.3 et ceux obtenus avec la méthode 3D standard du chapitre 3. La méthode 3D standard fournit une concentration c dépendante du temps. Dans la suite, cette concentration est calculée à $t = 1 \times 10^4$ s.

Le parallélépipède rectangle Ω défini par (4.1) est contenu dans la partie fluide de la cuve, dans notre cas $\Omega = (0, 13.8) \times (0, 3.26) \times (0, 0.18)$. Le plan $x_3 = 0$ coïncide avec la face supérieure de la cathode qui est en contacte avec l'aluminium liquide. On considère finalement la restriction à Ω du champ de force $f = j \times B$ correspondant aux forces de Lorentz calculées à l'aide du modèle 3D standard.

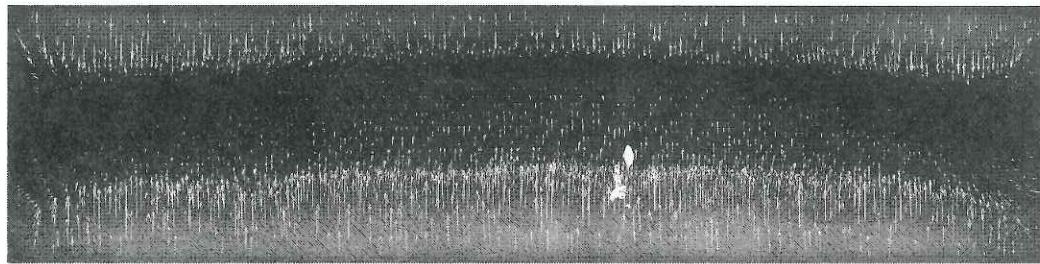
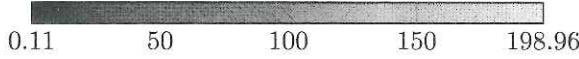
La figure 4.4 représente l'intensité et la direction du champ de force f dans le plan

inférieure?
ou alors
 $x_3 = 0.18$)

TABLE 4.4 – Comparaison des performances entre les schémas permettant de calculer $u_{h,K}^{\text{SF}}$ et u_h^{S3D} en fonction de l'épaisseur ε . Les calculs sont effectués sur un machine équipée d'un processeur Intel® Xeon® E5-2620 v2 @ 2.1GHz et 32Go de RAM.

{tab:e-sf-e-s3d-cpu-cost}

	$\varepsilon = 0.020$	$\varepsilon = 0.055$	$\varepsilon = 0.154$	$\varepsilon = 0.430$	$\varepsilon = 1.198$
F3D					
T_{CPU} [s]	4587	2694	1343	753	753
itérations GMRES	901	609	327	184	133
SF					
T_{CPU} [s]	43	45	43	44	45

Force f [N m^{-3}]FIGURE 4.4 – Champ de force f dans le fluide issus du modèle 3D standard.

{fig:harmonic-force-h}

$x_3 = \varepsilon/2$, à mi-hauteur entre les anodes et la cathode. Nous utiliserons ce champ de force pour calculer $u_{h,K}^{\text{SF}}$ définie par (4.65), (4.66).

On choisit une triangulation de Λ de sorte à ce que la taille des mailles des deux calculs (Stokes-Fourier et méthode 3D standard) soient comparables, soit $h = 0.69$. La moyenne \bar{c} dans (4.78) est fixée à 3% masse, identique à la concentration d'alumine dissoute initiale dans le modèle de transport et dissolution décrit dans le chapitre 2. Dans (4.80), le courant électrique total $I = 320\,000\text{A}$. Les différentes grandeurs physiques qui interviennent dans ce modèle ont déjà été introduites dans le tableau 3.2. La figure 4.6 représente les champs u^{SF} , c^{SF} , u^{F3D} et c^{F3D} dans le plan $x_3 = \varepsilon/2$.

4.6.1 Désactivation d'anodes

On s'intéresse maintenant au cas du calcul de l'écoulement des fluides et de la concentration d'alumine dissoute dans le bain électrolytique lorsqu'on désactive une anode, c'est-à-dire que l'une des anodes du plan anodique n'est pas conductrice électriquement. Cette situation a lieu en pratique lorsqu'une anode en fin de vie est remplacée par une anode neuve, mais froide. Sa conductivité électrique qui est quasi-nulle initialement, augmente au fur et à mesure que l'anode atteint sa température d'opération. Dans cette partie, on dénotera conjointement le modèle d'écoulement stationnaire évoqué dans le chapitre 3 et

DOF=?
(taille du système lin.)

FIGURE 4.7 – Désactivation d'une anode dans le modèle standard 3D et le modèle SF

Q figure
o manquante

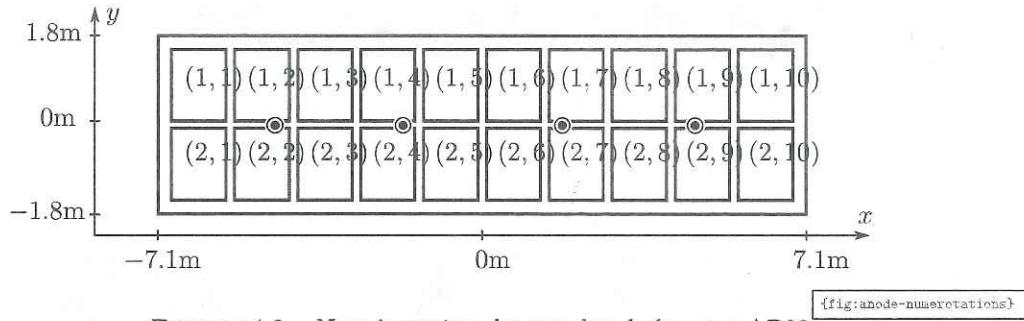


FIGURE 4.8 – Numérotation des anodes de la cuve AP32.

{fig:anode-numerotations}

le modèle de transport et dissolution d'alumine décrit dans le chapitre 4 par l'abréviation F3D. Dans cette partie, on considérera uniquement une dissolution des particules d'alumine indépendante de la température, c'est-à-dire que le champ c^{F3D} est calculé avec le modèle 3D standard en désactivant la dépendance de la vitesse de dissolution en fonction de la température du bain.

Dans le modèle F3D, on peut simuler la désactivation d'une anode en annulant la conductivité électrique σ dans le volume occupé par ladite anode. On a donc la densité de courant $j = \sigma(\nabla\phi + u^{\text{F3D}})$, $\text{div}j = 0$, où ϕ est le potentiel électrique, u^{F3D} l'écoulement des fluides solution des équations de Navier-Stokes, B le champ d'induction magnétique solution des équations de Maxwell et la force $f = j \times B$. Dans le modèle SF, on pose $f = 0$ sous les anodes, voir figure 4.7.

La figure 4.10 présente le champ de vitesse stationnaire du bain électrolytique dans l'ACD de la cuve AP32, pour quatre configurations différentes du plan anodique, soit les anodes (1, 1), (1, 2), (2, 1) et (2, 2) successivement désactivées. On se réfère à la figure 4.8 pour le placement de chacune de ces anodes. On trouve sur la même figure les champs de concentration d'alumine associées.

Pour évaluer l'effet des approximations introduites par le modèle SF par rapport au modèle F3D, on compare les champs de vitesse u_h obtenu avec le modèle SF en utilisant le champ de force f calculé avec le modèle F3D. Sur la figure 4.12 on peut comparer les champs de vitesse u et u_h obtenu avec l'un ou l'autre des modèles dans l'ACD ou dans le domaine Ω .

L'objectif final est de calculer le champs de concentration d'alumine dans le bain électrolytique. Sur la figure 4.14, on compare les champs de concentration c obtenus avec le modèle F3D et le champ de concentration stationnaire dans le domaine Ω avec le modèle SF.

L'objectif du modèle étant d'obtenir une approximation du champ de vitesse et du champ de concentration à moindre coût, on veut éviter à tout prix de devoir utiliser le modèle F3D pour obtenir le champ de force en fonction de la configuration du plan anodique. A la place, on effectue un calcul de la force que l'on note f^0 avec le modèle F3D dans la configuration où toutes les anodes sont actives. La force f^0 est représentée sur la

A pas de référence à la figure 4.9 ...

figure 4.4.

Lorsqu'une anodes est désactivée, elle ne conduit plus le courant électrique, et par conséquent la densité de courant électrique responsable de la force de Lorentz dans le fluide est fortement réduite sous l'anode concernée.

On propose d'approximer le champ de force f à partir de f^0 en annulant celle-ci dans la région située sous l'anode désactivée (voir figure 4.7). Sur la figure 4.16, on peut comparer les champs de concentration dans les différentes configurations anodique entre le modèle F3D et le modèle SF.

4.7 Conclusion

{sec:fourier-conclusion}

Dans ce dernier chapitre, nous avons proposé une méthode numérique pour calculer l'écoulement de fluides dans un domaine $\Omega = \Lambda \times (0, \varepsilon)$ de \mathbb{R}^3 , basée sur une décomposition en harmoniques de Fourier des inconnues et des méthodes d'éléments finis pour chaque coefficients des séries de Fourier. Cette formulation nécessite d'imposer des conditions d'adhérence sur les bords verticaux du domaine et des conditions de glissement total sur les bords horizontaux.

Une caractéristique essentielle de cette méthode est de calculer une approximation de l'écoulement tridimensionnel en résolvant une série de problèmes bidimensionnels découplés les uns des autres. Cette approche devient de plus en plus intéressante lorsque l'épaisseur du domaine ε s'approche de 0. En effet, on observe d'une part que le temps CPU est essentiellement indépendant de ε , mais en plus l'erreur d'approximation diminue lorsque ε diminue. C'est un clair avantage par rapport à une méthode d'éléments finis classiques basée sur un maillage tétraédrique. En raison de la péjoration du conditionnement des matrice éléments finis lorsque ε tend vers 0, i.e., lorsque le rapport d'aspect du maillage devient de plus en plus grand, la convergence des méthodes itératives devient de plus en plus lente. De plus, l'erreur d'approximation tend à croître lorsque ε diminue.

dans?

Cette méthode est donc bien adaptée au calcul d'écoulement de fluides en couches minces, pour autant que les conditions aux limites soient adaptées.

A) consistance (prénom complet ou initiale(s))

Bibliographie

- [Afp03] E. M. APFEL'BAUM. "Calculation of the Electrical Conductivity of Liquid Aluminum, Copper, and Molybdenum". In : *High Temperature* 41.4 (2003), p. 466–471. ISSN : 0018151X. DOI : 10.1023/A:1025155614716.
- [Bra17] E. Lee BRAY. *2015 Minerals Yearbook*. Rapport d'activité. U.S. Geological Survey, 2017.
- [Das15] Véronique DASSYLVIA-RAYMOND. "Analyse et Modélisation du Comportement des agrégats d'alumine dans le procédé Hall-Héroult". Thèse de doct. 2015.
- [DFR91] Jean DESCLOUX, Michel FLUECK et M.V. ROMERIO. "Modelling for instabilities in Hall-Heroult cells : Mathematical and numerical aspects". In : *Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy* (jan. 1991), p. 107–110.
- [DFR98] Jean DESCLOUX, Michel FLUECK et M.V. ROMERIO. "A modelling of the stability of aluminium electrolysis cells". In : *Pitman research notes in mathematics series* (1998), p. 117–133.
- [Dio+17] Lukas DION et al. "Preventive Treatment of Anode Effects Using on-Line Individual Anode Current Monitoring". In : *Light Metals* (2017). DOI : 10.1007/978-3-319-51541-0.
- [Fin+17] Mojtaba Fallah FINI et al. "Sludge Formation in Hall Héroult Process : An Existing Problem". In : *35th International ICSOBA Conference* (2017), p. 987–996.
- [Flo13] Stéphane FLOTRON. "Simulations numériques de phénomènes MHD-thermiques avec interface libre dans l'électrolyse de l'aluminium". Thèse de doct. 2013.
- [GHK75] J GERLACH, U HENNIG et K KERN. "The dissolution of aluminum oxide in cryolite melts". In : *Metallurgical and Materials Transactions B* 6.March (1975), p. 6–9.
- [GR91] Pierre-Alain GREMAUD et Jacques RAPPAZ. "Analyse Numérique de Problèmes de Changements de Phase liés à des Phénomènes de Solidification". Thèse de doct. 1991.
- [Grj77] K. GRJOTHEIM. *Aluminium Electrolysis : The Chemistry of the Hall-Héroult Process*. Aluminium-Verlag, 1977. ISBN : 9783870171292.
- [GWH16] Pierre-Yves GEAY, Barry J. WELCH et Pierre HOMSI. "Sludge in Operating Aluminium Smelting Cells". In : *Essential Readings in Light Metals : Volume 2 Aluminum Reduction Technology*. Sous la dir. de Geoff BEARNE, Marc DUPUIS et Gary TARCY. Cham : Springer International Publishing, 2016, p. 222–228. ISBN : 978-3-319-48156-2. DOI : 10.1007/978-3-319-48156-2_32.
- [Hau95] Warren E. HAUPIN. "Principles of aluminium electrolysis". In : *Light Metals* (1995), p. 3–11. DOI : 10.1002/9781118359259.