Equation de la chaleur en coordonnées sphériques
J. Rappaz, février 2018

Dans ce document on considère une particule sphérique de rayon R_0 et de température initiale uniforme θ_0 plongée dans un bain de température uniforme θ_b. La densité de la particule est notée ρ, sa chaleur spécifique C_p et son coefficient de diffusion de chaleur D. On supposera que le bain est un réservoir de chaleur, c'est à dire que θ_b reste constant malgré les changements de température de la particule. On supposera aussi que la température dans la particule sphérique est purement radiale.

L'équation qui régit la température θ intérieure à la particule est donnée par

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial t}\theta(t,r) - \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\theta(t,r)) = 0, \quad t>0, \ r \in (0, R_0)\,, \tag{1}$$

avec les conditions limites et initiales:

$$\begin{aligned} \theta(t,R_0) &= \theta_b, \quad t>0, &(2)\\ \theta(0,r) &= \theta_0, \quad r \in (0,R_0)\,. &(3) \end{aligned}$$

En $r=0$, la fonction θ est singulière mais doit rester bornéé!

En notant encore $\beta = \frac{\rho C_p}{D}$ et $\psi(t,r) = r.(\theta(t,r) - \theta_b)$, on vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,r) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(t,r) &= 0, \quad t>0, \ r \in (0,R_0)\,, &(4)\\ \psi(t,0) &= 0, \quad \psi(t,R_0) = 0, \quad t>0, &(5)\\ \psi(0,r) &= r(\theta_0 - \theta_b), \quad r \in (0,R_0)\,. &(6) \end{aligned}$$

En prolongeant $\psi(t,.)$ par imparité et $2R_0$ périodicité pour définir $\psi(t,r)$, $r \in \mathbb{R}$ et en développant $\psi(t,r)$ en série de Fourier en la variable r, npus obtenons

$$\psi(t,r) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(\frac{k\pi}{R_0} r). \tag{7}$$

Par identification en utilisant (4), on obtient:

$$\beta \frac{d}{dt}\alpha_k(t) + (\frac{k\pi}{R_0})^2 \alpha_k(t) = 0. \tag{8}$$

En résolvant l'équation (8), on a:

$$\alpha_k(t) = C_k \exp[-(\frac{k\pi}{R_0})^2 \beta^{-1} t], \tag{9}$$

et par suite:

$$\psi(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp[-(\frac{k\pi}{R_0})^2 \beta^{-1} t] \sin(\frac{k\pi}{R_0} r). \tag{10}$$

Si $t = 0$, alors en utilisant (6):

$$\psi(0,r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\frac{k\pi}{R_0} r) = r(\theta_0 - \theta_b).$$

En développant la fonction $f(r) = r(\theta_0 - \theta_b)$ 4n série de Fourier impaire, on obtient (

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{R_0} \int_0^{R_0} f(r) \sin(\frac{k\pi}{R_0} r) dr = \\ &= \frac{2(\theta_0 - \theta_b)}{R_0} \int_0^{R_0} r \sin(\frac{k\pi}{R_0} r) dr = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2(\theta_0 - \theta_b) R_0}{k\pi}. \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\psi(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(\theta_0 - \theta_b) R_0}{\pi k} \exp[-(\frac{k\pi}{R_0})^2 \beta^{-1} t] \sin(\frac{k\pi}{R_0} r), \tag{11}$$

et ainsi

$$\theta(t,r) = \theta_b - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2(\theta_0 - \theta_b) R_0}{k\pi} \exp[-(\frac{k\pi}{R_0})^2 \beta^{-1} t] \sin(\frac{k\pi}{R_0} r). \tag{12}$$