Problème de Stokes avec périodicité
(J. Rappaz, août 2016)

En reprenant les notations de Thomas et **en mettant des conditions de glissement en** $z = 0$ *et* $z = h$, on peut prolonger u_x, u_y, f_x, f_y, p, par parité en z sur $(-h, 0)$ et u_z, f_z par imparité. Ainsi on définit pour $(x, y) \in \Omega$:

- $U_x(x, y, z) = u_x(x, y, z)$ si $z > 0$ et $U_x(x, y, z) = u_x(x, y, -z)$ si $z < 0$,
- $U_y(x, y, z) = u_y(x, y, z)$ si $z > 0$ et $U_y(x, y, z) = u_y(x, y, -z)$ si $z < 0$,
- $U_z(x, y, z) = u_z(x, y, z)$ si $z > 0$ et $U_z(x, y, z) = -u_z(x, y, -z)$ si $z < 0$,

- $P(x, y, z) = p(x, y, z)$ si $z > 0$ et $P(x, y, z) = p(x, y, -z)$ si $z < 0$,

- $F_x(x, y, z) = f_x(x, y, z)$ si $z > 0$ et $F_x(x, y, z) = f_x(x, y, -z)$ si $z < 0$,
- $F_y(x, y, z) = f_y(x, y, z)$ si $z > 0$ et $F_y(x, y, z) = f_y(x, y, -z)$ si $z < 0$,
- $F_z(x, y, z) = f_z(x, y, z)$ si $z > 0$ et $F_z(x, y, z) = -f_z(x, y, -z)$ si $z < 0$.

Avec ces définitions on vérifie que

$$\begin{aligned} -\mu\Delta \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\nabla} P &= \boldsymbol{F} \text{ sur } \Omega \text{ et } \Omega^-, \\ \text{et } \operatorname{div}(\boldsymbol{U}) &= 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } \Omega^-. \end{aligned}$$

De plus on a $U_z(x, y, 0) = 0$ et les conditions de glissement en $z = 0$ imposent $\frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0$. Ainsi les dérivées secondes en z des fonctions U_x, U_y, U_z ne présenteront pas de masse de Dirac en $z = 0$.

Soit maintenant $T = 2h$. On prolonge toutes ces fonctions dans la variable z sur tout $\mathbb{R}$ en des fonctions périodiques de période T. On garde la même notation pour ces fonctions que l'on décompose en série de Fourier. Ainsi on va écrire:

- $U_x(x, y, z) = u_{x,0}(x, y) + \sum_{k>0} u_{x,k}(x, y) \cos(\frac{2\pi k}{T} z)$,
- $U_y(x, y, z) = u_{y,0}(x, y) + \sum_{k>0} u_{y,k}(x, y) \cos(\frac{2\pi k}{T} z)$,
- $U_z(x, y, z) = \sum_{k>0} u_{z,k}(x, y) \sin(\frac{2\pi k}{T} z)$,

- $P(x,y,z) = p_0(x,y) + \sum_{k>0} p_k(x,y)\cos(\frac{2\pi k}{T}z)$,

- $F_x(x,y,z) = f_{x,0}(x,y) + \sum_{k>0} f_{x,k}(x,y)\cos(\frac{2\pi k}{T}z)$,
- $F_y(x,y,z) = f_{y,0}(x,y) + \sum_{k>0} f_{y,k}(x,y)\cos(\frac{2\pi k}{T}z)$,
- $F_z(x,y,z) = \sum_{k>0} f_{z,k}(x,y)\sin(\frac{2\pi k}{T}z)$.

En identifiant les différents modes on obtient:

$$
\begin{aligned}
-\mu\Delta_{x,y}u_{x,0} + \frac{\partial p_0}{\partial x} &= f_{x,0}, &(1)\\
-\mu\Delta_{x,y}u_{y,0} + \frac{\partial p_0}{\partial y} &= f_{y,0}, &(2)\\
\frac{\partial u_{x,0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y,0}}{\partial y} &= 0, &(3)
\end{aligned}
$$

et pour $k = 1, 2, 3, ...$

$$
\begin{aligned}
-\mu\Delta_{x,y}u_{x,k} + \mu(\frac{2\pi k}{T})^2 u_{x,k} + \frac{\partial p_k}{\partial x} &= f_{x,k}, &(4)\\
-\mu\Delta_{x,y}u_{y,k} + \mu(\frac{2\pi k}{T})^2 u_{y,k} + \frac{\partial p_k}{\partial y} &= f_{y,k}, &(5)\\
-\mu\Delta_{x,y}u_{z,k} + \mu(\frac{2\pi k}{T})^2 u_{z,k} - \frac{2\pi k}{T}p_k &= f_{z,k}, &(6)\\
\frac{\partial u_{x,k}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y,k}}{\partial y} + (\frac{2\pi k}{T})u_{z,k} &= 0. &(7)
\end{aligned}
$$

Les problèmes ci-dessus sont 2D car toutes les inconnues ne dépendent que de x et y. Naturellement ils nécessitent les conditions limites adéquates et le calcul au préalable des coefficients de Fourier du champ de force f.

Le problème (1)-(3) est celui traité initialement. On pourrait y apporter une première correction en traitant le problème (4)-(7) avec $k = 1$. Ainsi on obtiendrait après correction due à la première harmonique:

$$
\begin{aligned}
U_x(x,y,z) &= u_{x,0}(x,y) + u_{x,1}(x,y)\cos(\frac{\pi}{h}z),\\
U_y(x,y,z) &= u_{y,0}(x,y) + u_{y,1}(x,y)\cos(\frac{\pi}{h}z),\\
U_z(x,y,z) &= u_{z,1}(x,y)\sin(\frac{\pi}{h}z),\\
P(x,y,z) &= p_0(x,y) + p_1(x,y)\cos(\frac{\pi}{h}z).
\end{aligned}
$$

En choisissant de calculer la vitesse en $z = \frac{h}{2}$ on obtiendrait pour U_x, U_y et P les résultats obtenus par (1)-(3) mais $U_z(x, y, z) = u_{z,1}(x, y)$. Pour obtenir une correction de U_x, U_y et P en $z = \frac{h}{2}$, il faudra calculer la deuxième harmonique $k = 2$.

Formulation faible de (4) à (7)

Si Λ est une coupe selon (x, y) de Ω et si $\partial\Lambda$ est le bord de Λ, on suppose que $u_{x,k}(x, y) = u_{y,k}(x, y) = u_{z,k}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \partial\Lambda$. L'équation (7) avec le théorème de la divergence implique$\int_\Lambda u_{z,k}(x, y)dxdxy = 0$.

De plus la pression dans (4) et (5) est définie à une constante près. On définit encore $\beta_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{\pi k}{h}$ et on formule les équations (4) à (7) sous forme faible.

Ainsi on cherchera u_x, u_y, $u_z \in H_0^1(\Lambda)$, $p_k^0 \in L_0^2(\Lambda)$, $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout v_x, v_y, $v_z \in H_0^1(\Lambda)$ et $q \in L_0^2(\Lambda)$:

$$\begin{aligned}
\mu \int_\Lambda (\nabla u_{x,k}.\nabla v_x + \beta^2 u_{x,k}.v_x)dxdy - \int_\Lambda p_k^0 \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdy &= \int_\Lambda f_{x,k}.v_x dxdy, && (8)\\
\mu \int_\Lambda (\nabla u_{y,k}.\nabla v_y + \beta^2 u_{y,k}.v_y)dxdy - \int_\Lambda p_k^0 \frac{\partial v_y}{\partial y} dxdy &= \int_\Lambda f_{y,k}.v_y dxdy, && (9)\\
\mu \int_\Lambda (\nabla u_{z,k}.\nabla v_z + \beta^2 u_{z,k}.v_y)dxdy - \beta \int_\Lambda \left(p_k^0 + C\right) v_z dxdy &= \int_\Lambda f_{z,k}.v_z dxdy && (10)\\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_{x,k}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y,k}}{\partial y}).qdxdy + \beta \int_\Lambda u_{z,k}.qdxdy &= 0, && (11)\\
\int_\Lambda u_{z,k} dxdy &= 0. && (12)
\end{aligned}$$

Proposition: Le problème de chercher $u_{x,k}$, $u_{y,k}$, $u_{z,k} \in H_0^1(\Lambda)$, $p_k^0 \in L_0^2(\Lambda)$ et $C \in \mathbb{R}$, qui satisfont les équations (8) à (12) pour tout v_x, v_y, $v_z \in H_0^1(\Lambda)$ et $q \in L_0^2(\Lambda)$, admet une et une seule solution.

Démonstration: Soit $g \in L_0^2(\Lambda)$ et résolvons le problème suivant:
Trouver u_1, $u_2 \in H_0^1(\Lambda)$ et $p \in L_0^2(\Lambda)$ qui fatisfont

$$\begin{aligned}
\mu \int_\Lambda (\nabla u_1.\nabla v + \beta^2 u_1.v)dxdy - \int_\Lambda p \frac{\partial v}{\partial x} dxdy &= \int_\Lambda f_{x,k}.vdxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda), && (13)\\
\mu \int_\Lambda (\nabla u_2.\nabla v + \beta^2 u_1.v)dxdy - \int_\Lambda p \frac{\partial v}{\partial x} dxdy &= \int_\Lambda f_{y,k}.vdxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda), && (14)\\
\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}).qdxdy + \beta \int_\Lambda g.qdxdy &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Lambda). && (15)
\end{aligned}$$

Il est bien connu que la condition $\inf_{q\in L_0^2(\Lambda)} \sup_{v\in H_0^1(\Lambda)} \frac{\int_\Lambda q.\,\mathrm{div}(v)dxdy}{\|q\|_{L^2}\|v\|_{H^1}} > 0$ est vraie et qu'elle implique que le problème $(13)-(15)$ a une solution unique u_1, u_2, p qui dépendent bien évidemment de g. De plus on a

$$\|u_1\|_{H^1} + \|u_2\|_{H^1} + \|p\|_{L^2} \leq K(\|f_{x,k}\|_{L^2} + \|f_{y,k}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}), \tag{16}$$

où ici K est une constante indépendante de g qui sera une constante générique dans la suite.

Soit maintenant $u \in H_0^1(\Lambda)$ qui satisfait

$$\mu \int_\Lambda (\nabla u.\nabla v + \beta^2 u.v)dxdy = \beta \int_\Lambda p.vdxdy + \int_\Lambda f_{z,k}.vdxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda). \tag{17}$$

Clairement, u existe et est unique. Ici encore u dépend de g puisque p en dépend. On aura

$$\|u\|_{H^1} \leq K(\|p\|_{L^2} + \|f_{z,k}\|_{L^2})$$

et avec (16):

$$\|u\|_{H^1} \leq K(\|f_{x,k}\|_{L^2} + \|f_{y,k}\|_{L^2} + \|f_{z,k}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}). \tag{18}$$

Soit encore $w \in H_0^1(\Lambda)$ (indépendant de g) qui satisfait

$$\mu \int_\Lambda (\nabla w.\nabla v + \beta^2 w.v)dxdy = \beta \int_\Lambda v.dxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda). \tag{19}$$

On définit $C \in \mathbb{R}$ par

$$C = -\frac{\int_\Lambda udxdy}{\int_\Lambda wdxdy} \tag{20}$$

et $u_3 \in H_0^1(\Lambda)$ par

$$u_3 = u + Cw. \tag{21}$$

On aura bien évidemment

$$\int_\Lambda u_3 dxdy = 0 \tag{22}$$

et en utilisant (17), (19), (21) on obtient

$$\mu \int_\Lambda (\nabla u_3.\nabla v + \beta^2 u_3.v)dxdy = \beta \int_\Lambda (p+C).vdxdy + \int_\Lambda f_{z,k}.vdxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda). \tag{23}$$

La fonction w est indépendante de $f_{x,k}$, $f_{y,k}$, $f_{z,k}$ et g. Ainsi (20) implique que $|C| \leq K\|u\|_{L^2}$, et en utilisant (18) et (21) on a

$$\|u_3\|_{H^1} \leq K(\|f_{x,k}\|_{L^2} + \|f_{y,k}\|_{L^2} + \|f_{z,k}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}). \tag{24}$$

Pour terminer on définit l'opérateur

$$\boldsymbol{T} : g \in L_0^2(\Omega) \to \boldsymbol{T}(g) \doteqdot u_3 \in L_0^2(\Omega). \tag{25}$$

On vérifie que cet opérateur est continu. D'autre part l'inégalité (24) montre que $\boldsymbol{T}$ est compact et borné. En utilisant le théorème de Leray-Schauder, l'opérateur $\boldsymbol{T}$ a au moins un point fixe, et donc il existe $\widehat{g} \in L_0^2(\Omega)$ tel que $\widehat{g} = \boldsymbol{T}(\widehat{g})$.

Si, pour cette fonction $\widehat{g}$, à laquelle lui correspondent u_1, $u_{2,}$, p, C et $u_3 = \boldsymbol{T}(\widehat{g}) = \widehat{g}$, nous posons $u_{x,k} = u_1$, $u_{y,k} = u_2$, $u_{z,k} = u_3$ et $p_k^0 = p$, alors nous vérifions que les équations (8) à (12) sont satisfaites. Ainsi le problème $(8)-(12)$ a au moins une solution $\left(u_{x,k}, u_{y,k}, u_{z,k}, p_k^0, C\right)$.

Pour montrer l'unicité de cette solution, il suffit de sommer les équations (8) à (12) avec $f_{x,k} = f_{y,k} = f_{z,k} = 0$ et $v_x = u_{x,k}$, $v_y = u_{y,k}$, $v_z = u_{z,k}$, $q = p_k^0$ pour voir que la solution triviale du problème linéaire homogène $(8) - (12)$ est unique. $\square$