Formulation avec viscosité tensorielle variable

J. Rappaz, Avril 2018

Rappel du document 07.11.2016

On considère à nouveau le problème de Stokes dans $\Omega = \Lambda \times (0, h)$ avec $\boldsymbol{u} = 0$ sur $\partial\Lambda \times (0, h)$ et des conditions de glissement en $z = 0$ et $z = h$. Pour des raisons de notations on notera $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ et $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$, $u_3 = u_z$.

Considérons maintenant les équations de Stokes avec une viscosité apriori tensorielle et variable $\mu_{i,j}$, i.e on cherche $\boldsymbol{u}$ et p qui vérifient:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(2\mu \otimes \epsilon(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{\nabla} p &= \boldsymbol{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$[\mu \otimes \epsilon(\boldsymbol{u})]_{i,j} = \frac{1}{2}\mu_{i,j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2}$$

On suppose

Hypothèses:

$\mu = \mu(x_1, x_2)$ *est un tenseur symétrique indépend de* x_3.

En posant $\beta = \frac{k\pi}{h}$ et

- $U_1(x_1, x_2, x_3) = u_{1,0}(x_1, x_2) + \sum_{k>0} u_{1,k}(x_1, x_2)\cos(\beta x_3)$,
- $U_2(x_1, x_2, x_3) = u_{2,0}(x_1, x_2) + \sum_{k>0} u_{2,k}(x_1, x_2)\cos(\beta x_3)$,
- $U_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k>0} u_{3,k}(x_1, x_2)\sin(\beta x_3)$,

- $P(x_1, x_2, x_3) = p_0(x_1, x_2) + \sum_{k>0} p_k(x_1, x_2)\cos(\beta x_3)$,

- $F_1(x_1, x_2, x_3) = f_{1,0}(x_1, x_2) + \sum_{k>0} f_{1,k}(x_1, x_2)\cos(\beta x_3)$,
- $F_2(x_1, x_2, x_3) = f_{2,0}(x_1, x_2) + \sum_{k>0} f_{2,k}(x_1, x_2)\cos(\beta x_3)$,

- $F_3(x_1,x_2,x_3) = \sum_{k>0} f_{3,k}(x_1,x_2)\sin(\beta x_3)$,

on obtient à partir de la première équation de (1) pour $\beta, k > 0$, en supprimant l'indice k pour simplifier les notations et en identifiant les différents modes dans les séries de Fourier:

$$\begin{aligned}
-2\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu_{1,1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\mu_{1,2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})) - (\mu_{1,3}(-\beta^2 u_1 + \beta\frac{\partial u_3}{\partial x_1})) + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= f_1, \quad (3)\\
-\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu_{2,1}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2})) - 2\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu_{2,2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}) - (\mu_{2,3}(-\beta^2 u_2 + \beta\frac{\partial u_3}{\partial x_2})) + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= f_2, \quad (4)\\
-\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu_{3,1}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_1)) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\mu_{3,2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2)) + 2\mu_{3,3}\beta^2 u_3 - \beta p &= f_3. \quad (5)
\end{aligned}$$

En définissant maintenant le tenseur 3x3 des déformations

$$E(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & -\beta u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & -\beta u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\\ -\beta u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & -\beta u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 2\beta u_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

et celui des viscosités

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3}\\ \mu_{1,2} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3}\\ \mu_{1,3} & \mu_{2,3} & \mu_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

on pose $(\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}))_{i,j} = \boldsymbol{\mu}_{i,j}.E(\boldsymbol{u})_{i,j}$ pour $1 \le i,j \le 3$.

REMARQUE: Dans (3) et (4) la pression p est définie à une constante près. Par contre ce n'est pas le cas dans l'équation (5). Ainsi pour définir une pression à moyenne nulle, nous ajoutons à p dans (5) une inconnue $C \in \mathbb{R}$.

En multipliant (3) , (4) , (5) , respectivement par v_1, v_2, v_3, puis en intégrant par partie, on obtient

$$\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu}\otimes E(\boldsymbol{u})\cdot E(\boldsymbol{v})\,dx_1dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})dx_1dx_2 - \beta\int_\Lambda (p+C)v_3 dx_1dx_2 = \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}dx_1dx_2, \tag{8}$$

où naturellement:
$\boldsymbol{u} = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2), u_3(x_1,x_2))$ et $\boldsymbol{v} = (v_1(x_1,x_2), v_2(x_1,x_2), v_3(x_1,x_2))$.

REMARQUE: Dans (8) on cherche $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$, $p \in L_0^2(\Lambda)$ et $C \in \mathbb{R}$. La fonction test $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,v_3) \in H_0^1(\Lambda)^3$. On complète le système par

la deuxième équation de (1) **qui, pour chaque harmonique devient:** $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 = 0$.

Ainsi on cherchera $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$, $p \in L_0^2(\Lambda)$, $C \in \mathbb{R}$ **tels que pour tout** $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^3$ **et** $q \in L^2(\Lambda)$:

$$\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\boldsymbol{v})\, dx_1 dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 - \beta \int_\Lambda (p+C) v_3 dx_1 dx_2 = \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, \tag{9}$$

$$\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.q dx_1 dx_2 = 0. \tag{10}$$

En prenant $q = 1$ **on obtient** $\beta \int_\Lambda u_3 dx_1 dx_2 = -\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 = -\int_{\partial\Lambda} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} dl = 0$. **L'inconnue** u_3 **est à moyenne nulle sur** Λ. **L'équation** (10) **est équivalente à**

$$\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.q dx_1 dx_2 = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Lambda), \tag{11}$$

$$\int_\Lambda u_3 dx_1 dx_2 = 0. \tag{12}$$

On résume le problème correspondant aux harmoniques:

Trouver $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^3$, $p \in L_0^2(\Lambda)$, $C \in \mathbb{R}$ **tels que pour tout** $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^3$ **et** $q \in L_0^2(\Lambda)$ **on a**

$$\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E(\boldsymbol{u}) \cdot E(\boldsymbol{v})\, dx_1 dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 - \beta \int_\Lambda (p+C) v_3 dx_1 dx_2 = \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, \tag{13}$$

$$\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}).q dx_1 dx_2 + \beta \int_\Lambda u_3.q dx_1 dx_2 = 0, \tag{14}$$

$$\int_\Lambda u_3 dx_1 dx_2 = 0. \tag{15}$$

Pour être explicite, dans la démonstration d'existence d'une solution de (13)**-**(15)**, pour la troisième composante** u_3 **on décompose** $H_0^1(\Lambda)$ **en** $H_{0,0}^1(\Lambda) = H_0^1(\Lambda) \cap L_0^2(\Lambda)$ **qui est un sous-espace fermé de** $H_0^1(\Lambda)$ **de codimension** 1 **et un complémentaire** $W = span(\psi)$ **où** $\psi \in H_0^1(\Lambda)$ **et** $\int_\Lambda \psi dx_1 dx_2 > 0$. **On aura** $H_0^1(\Lambda) = H_{0,0}^1(\Lambda) \times W$. **Ainsi les équations** (13)**-**(15) **deviennent: Trouver** $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$, $p \in L_0^2(\Lambda)$, **tels que pour tout** $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ **et** $q \in L_0^2(\Lambda)$ **on a**

$$\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu}\otimes E(\boldsymbol{u})\cdot E(\boldsymbol{v})\,dx_1dx_2 - \int_\Lambda p(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})dx_1dx_2 - \beta\int_\Lambda pv_3dx_1dx_2 = \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}dx_1dx_2, \quad (16)$$

$$\int_\Lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}).qdx_1dx_2 + \beta\int_\Lambda u_3.qdx_1dx_2 = 0, \quad (17)$$

et si $\overline{\boldsymbol{v}} = (0,0,\psi)$ on obtient C par:

$$-\beta C\int_\Lambda \psi dx_1dx_2 = -\int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu}\otimes E(\boldsymbol{u})\cdot E(\overline{\boldsymbol{v}})\,dx_1dx_2 + \beta\int_\Lambda p.\psi dx_1dx_2\int_\Lambda f_3.\psi dx_1dx_2. \quad (18)$$

Rappel d'une démonstration du 17.01.2017

On notera $|E(\boldsymbol{u})|^2 = \Sigma_{i,j=1,3}E^2_{i,j}(\boldsymbol{u})$ et $\left|\widetilde{E}(\boldsymbol{u})\right|^2 = \Sigma_{i,j=1,2}\widetilde{E}^2_{i,j}(\boldsymbol{u})$.

Lemme 1: Sous l'hypothèse $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\beta u_3 = 0$, on a la relation

$$\int_\Lambda |E(\boldsymbol{u})|^2 dx_1dx_2 = \int_\Lambda \{\left|\widetilde{E}(\boldsymbol{u})\right|^2 + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x_2})^2 + \beta^2u_1^2 + \beta^2u_2^2]\}dx_1dx_2. \quad (19)$$

Preuve: le calcul de $|E(\boldsymbol{u})|^2$ donne:

$$\begin{aligned} |E(\boldsymbol{u})|^2 &= \left|\widetilde{E}(\boldsymbol{u})\right|^2 + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x_2})^2 + \beta^2u_1^2 + \beta^2u_2^2] \quad (20)\\ &\quad -\beta u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta^2 u_3. \end{aligned}$$

En intégrant par partie le terme $u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1dx_2 &= \int_0^{L_2}dx_2\int_0^{L_1}u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1\\ &= -\int_0^{L_2}dx_2\int_0^{L_1}u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1\\ &= -\int_\Lambda u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1dx_2. \end{aligned}$$

De même on aura:

$$\int_\Lambda u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_1dx_2 = -\int_\Lambda u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_1dx_2.$$

En reprenant (20), en intégrant sur Λ et en utilisant l'hypothèse $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\beta u_3 = 0$, on obtient le résultat annoncé.$\square$

Lemme 2: Il existe une constante positive $\varkappa > 0$ telle que

$$\varkappa \left\| \boldsymbol{\nabla u} \right\|_{L^2(\Lambda)} \leq \left\| E\left(\boldsymbol{u}\right) \right\|_{L^2(\Lambda)}, \tag{21}$$

pour tout $\boldsymbol{u} \in H_0^1\left(\Lambda\right)^3$ qui satisfait $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 = 0$. Ici $\left\| \boldsymbol{\nabla u} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2$ et $\left\| E\left(\boldsymbol{u}\right) \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_\Lambda \left| E\left(\boldsymbol{u}\right) \right|^2 dx_1 dx_2$.

Preuve: Il est connu que l'inégalité de Korn en dimension 2 est vraie, i.e. l'existence d'une constante $\varkappa > 0$ qui satisfait:

$$\varkappa \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \int_\Lambda \left| \widetilde{E}\left(\boldsymbol{u}\right) \right|^2 dx_1 dx_2.$$

Le lemme 1 permet de conclure.$\square$

Proposition: Si le tenseur μ satisfait:

$$\mu_{i,j}(x_1, x_2) \geq \mu_0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Lambda, \ 1 \leq i, j \leq 3, \tag{22}$$

où $\mu_0 > 0$ est une constante positive indépendante de $(x_1, x_2) \in \Lambda$, alors le problème $(16) - (17)$ a une et une seule solution.

Démonstration:

Définissons l'espace $\boldsymbol{V} = H_0^1(\Lambda)^2 \times H_{0,0}^1(\Lambda)$ où $H_{0,0}^1(\Lambda) = H_0^1(\Lambda) \cap L_0^2(\Lambda)$. Clairement l'espace $H_{0,0}^1(\Lambda)$ est un sous espace fermé de $H_0^1(\Lambda)$ de codimension 1. Soit encore $a : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire continue définie par:

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Lambda 2\boldsymbol{\mu} \otimes E\left(\boldsymbol{u}\right) \cdot E\left(\boldsymbol{v}\right) dx_1 dx_2.$$

Définissons encore la forme bilinéaire continue $b : \boldsymbol{V} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, par:

$$b(\boldsymbol{u}, q) = \int_\Lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3\right).q dx_1 dx_2,$$

où ici $Y = L_0^2(\Lambda)$.

Il est facile de voir que le problème (10) est équivalent au problème de chercher $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{V} \times Y$ tel que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v}, p) &= \int_\Lambda \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} dx_1 dx_2, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= 0, \quad \forall q \in Y. \end{aligned}$$

La constante C peut s'obtenir après coup en considérant (10) avec des fonctions tests $\boldsymbol{v} = (0, 0, s)$ où $s \in H_0^1(\Lambda)$ est dans l'orthogonal de $H_{0,0}^1(\Lambda)$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de vérifier que la forme $a(.,.)$ est coercive sur $\boldsymbol{V}_0$, où $\boldsymbol{V}_0 = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} : b(\boldsymbol{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Y\}$, et que la condition classique $\inf - \sup$ sur la forme bilinéaire b est satisfaite.

Le lemme 2 avec l'hypothèse (22) montrent bien que a est coercive sur $\boldsymbol{V}_0$. D'autre part en utilisant l'inégalité concernant la condition $\inf - \sup$ dans $\mathbb{R}^2$ on a si $q \in L_0^2(\Lambda)$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Lambda)}=1} b(\boldsymbol{v}, q) &\geq \sup_{\|(v_1,v_2,0)\|_{H_0^1(\Lambda)}=1} b(\boldsymbol{v}, q) \\
&= \sup_{\|(v_1,v_2)\|_{H_0^1(\Lambda)}=1} \int_\Lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right).q dx_1 dx_2 \\
&\geq \delta \|q\|_{L_0^2(\Lambda)},
\end{aligned}$$

où $\delta > 0$. Ainsi on a prouvé la proposition.$\square$