

S5 2 Bootstrap

Table of contents

1	Introduction	1
2	Principe du bootstrap	1
2.A	Tirage avec remise	2
2.B	Histogramme des 10 000 valeurs de b	3
2.C	Faisabilité du bootstrap	4
3	Exemple en R sur expsy	4
4	Second exemple en R sur SMP (CUSM)	7

1 Introduction

Définition du bootstrap = technique de rééchantillonnage avec remise à partir d'un échantillon initial pour estimer la distribution d'un estimateur.

Utile pour petits effectifs ou lorsque les hypothèses classiques ne sont pas respectées.

En recherche clinique : souvent faible nombre de sujets et variance importantes.

- Si 2^*10 sujets :
 - ok pour tests non paramétriques : Wilcoxon et Mann-Whitney
 - bof pour tests paramétriques (car difficile de dire que ça suit une loi normale alors qu'on a peu de données) : t de Student, chi2, Fisher...
- Exemple si $n = 100$ et distribution très asymétrique :
 - test t pas terrible !!!
 - analyse de variance ou régression linéaire : il faudrait aussi une distribution normale !
- Solution : bootstrap ! = rééchantillonner avec remise à partir de l'échantillon initial pour estimer la distribution de l'estimateur.

2 Principe du bootstrap

Imaginons qu'on veuille faire la régression :

$$Y = a + bX_1 + cX_2 + \epsilon$$

Sauf que Y ne suit pas du tout une loi normale.

On reprend le jeu de données

ID	Y	X1	X2
1			
2			
3			
...			
100			

2.A Tirage avec remise

On tire au hasard avec remise 100 observations parmi les 100 initiales, c'est à dire :

- On en tire au sort 1 : **le numéro 28**
- On le remet dans le sac
- On en tire au sort un deuxième : **le numéro 77**
- On le remet dans le sac
- On en tire au sort un troisième : **le numéro 28**

ça donnera un tableau :

ID	Y	X1	X2
28			
77			
28			
...			
13			

Donc nouveau jeu de données !!

Sur lequel on fait à nouveau la régression linéaire :

$$Y = a + bX1 + cX2 + \epsilon$$

→ on met le b en mémoire !

On refait la même chose !!

ID	Y	X1	X2
6			
82			
15			
...			
6			

Nouveau modèle de régression linéaire :

$$Y = a + bX_1 + cX_2 + \epsilon$$

→ on obtient un nouveau b qu'on garde aussi

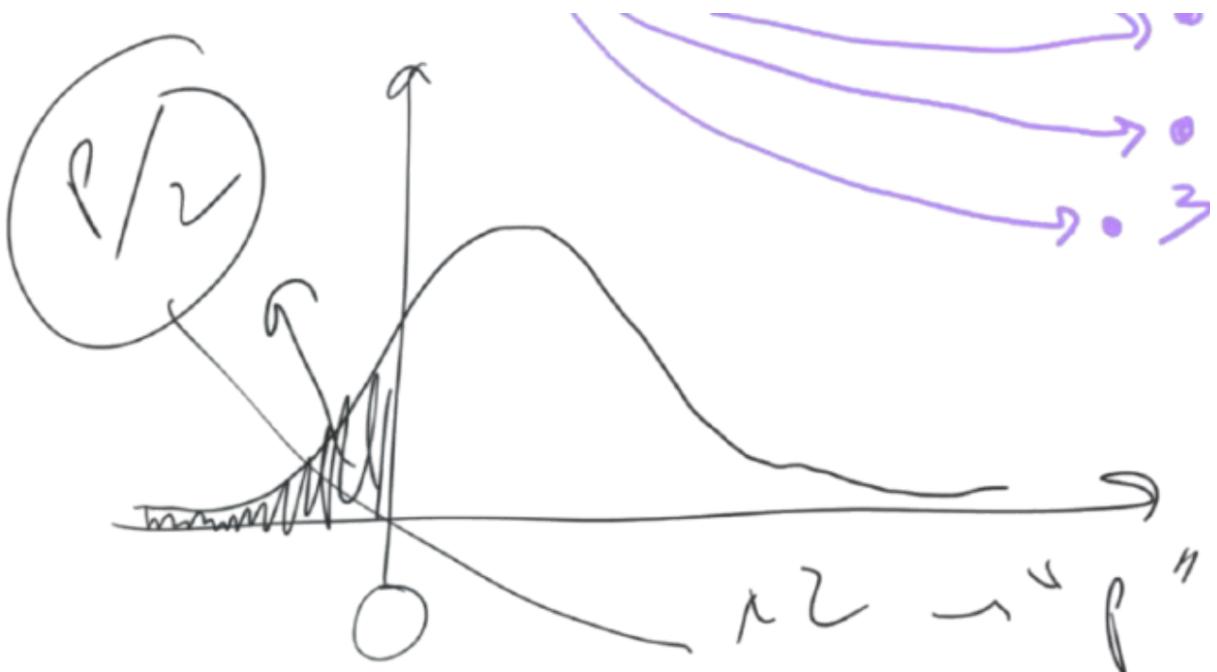
Et ainsi de suite !!!

On fait ça 10 000 fois (au delà de 10 000, pas vraiment intéressant)

2.B Histogramme des 10 000 valeurs de b

Objectif : test de $b = 0$ (c'est à dire pas d'effet de X_1 sur Y)

On trace l'histogramme des 10 000 valeurs de b obtenues



- On prend les deux extrémités (2.5% et 97.5%) pour obtenir un intervalle de confiance à 95%
- L'intervalle de confiance n'a pas besoin de la normalité de la distribution car fait à la main directement à partir des données !
- Combien de $b < 0$ donne la p value divisée par 2 multipliée par 2 donne le vrai petit p du test $b = 0$ (c'est à dire pas d'effet de X_1 sur Y)

QUESTIONS :

- Échantillons sont indépendants ?
 - Oui ! car on tire au hasard avec remise donc chaque tirage est indépendant des autres
 - C'est un tirage de 100 sujets parmi la population infinie !
- Machine learning ?
 - Non : c'est plutôt une simulation statistique
- Nombre de régressions ?

- 10 000 régressions

2.C Faisabilité du bootstrap

A partir de 30 - 50 sujets, le bootstrap est fiable.

100 : on est serein !

3 Exemple en R sur expsy

1. Librairies nécessaires

```
library(boot)
```

Attaching package: 'boot'

The following object is masked from 'package:survival':

aml

```
library(psy)

# fabriquer une fonction pour faire le bootstrap de kappa
# fonction entre accolades
# x, tirer au sort à chaque ligne
# 2, c'est pour récupérer kappa
ckappa.boot <- function(data,x) {ckappa(data[x,])[[2]]}
```

2. Faire le bootstrap

```
library(boot)
library(psy)

# fabriquer une fonction pour faire le bootstrap de kappa
# fonction entre accolades
# x, tirer au sort à chaque ligne
# 2, c'est pour récupérer kappa
ckappa.boot <- function(data,x) {ckappa(data[x,])[[2]]}
```

Syntaxe :

- créer une fonction `ckappa.boot` qui prend en entrée `data` (jeu de données) et `x` (tirage au sort des lignes)
- à l'intérieur de la fonction, on calcule `kappa` sur les données rééchantillonnées `data[x,]` et on récupère la 2ème valeur (`kappa`)
 - pour savoir que c'est la 2ème valeur, on a fait `ckappa(expsy[,c(12,14)])` pour voir la sortie

3. Lancer le bootstrap

```
res <- boot(expsy[,c(12,14)], ckappa.boot, 1000)
```

Syntaxe :

- `res` : objet qui va contenir le résultat du bootstrap
- `boot()` : fonction de la librairie `boot` pour faire le bootstrap
- `expsy[,c(12,14)]` : jeu de données
 - on ne prend que les colonnes 12 et 14 (2 évaluateurs)
- `ckappa.boot` : fonction créée précédemment pour calculer kappa sur les données rééchantillonées
- `1000` : nombre de rééchantillons

4. Résultats

```
res
```

```
ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP
```

Call:

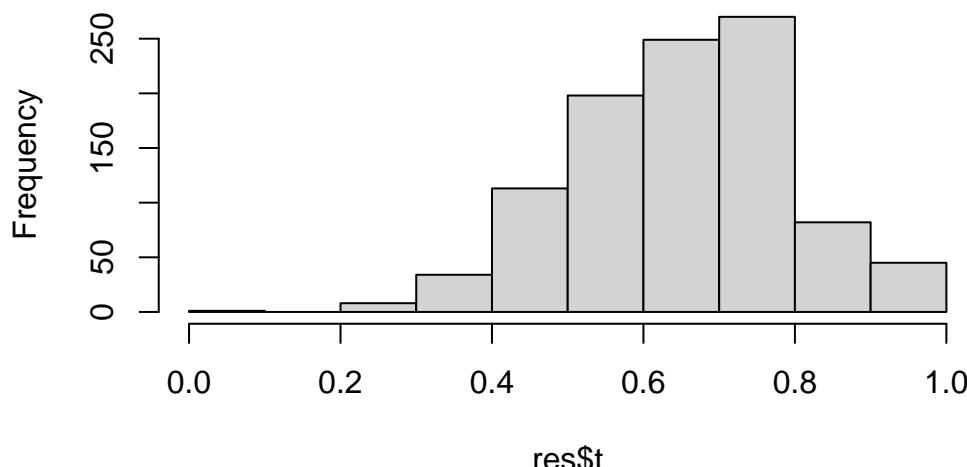
```
boot(data = expsy[, c(12, 14)], statistic = ckappa.boot, R = 1000)
```

Bootstrap Statistics :

	original	bias	std. error
t1*	0.6627907	-0.01179997	0.1453736

```
hist(res$t)
```

Histogram of res\$t



Syntaxe :

- **res** : affiche le résultat du bootstrap
 - **\$t0** : kappa calculé sur les données initiales
 - **\$t** : vecteur des 1000 kappa calculés sur les échantillons rééchantillonnés
 - **hist(res\$t)** : histogramme des 1000 kappa calculés sur les échantillons rééchantillonnés
5. Intervalles de confiance

```
quantile(res$t,c(0.025,0.975))
```

```
2.5%    97.5%
0.363536 0.920489
```

```
boot.ci(res,type="bca")
```

```
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 1000 bootstrap replicates
```

```
CALL :
boot.ci(boot.out = res, type = "bca")
```

```
Intervals :
Level      BCa
95%   ( 0.3350,  0.9112 )
Calculations and Intervals on Original Scale
```

```
ckappa(expsy[,c(11,13)])
```

```
$table
  1 2 3 4
1 1 0 0 0
2 1 4 0 0
3 0 4 9 2
4 0 0 2 6
```

```
$kappa
[1] 0.5421053
```

Syntaxe :

- **quantile(res\$t,c(0.025,0.975))** : calcul des quantiles 2.5% et 97.5% des kappa calculés sur les échantillons rééchantillonnés
- **boot.ci(res,type="bca")** : calcul de l'intervalle de confiance à 95%
 - **type = “bca”** : méthode BCa (bias-corrected and accelerated) qui est meilleure que la méthode des quantiles

6. Test statistique : exemple pour kappa > 0.2

Si on veut tester :

- hypothèse nulle **H0: kappa = 0.2**
- hypothèse alternative **H1: kappa > 0.2.**

```
# On calcule le nombre de fois où le kappa des échantillons bootstrap est inférieur ou égal à 0.2
n_inf <- sum(res$t <= 0.2)
n_inf
```

```
[1] 1
```

```
p_value <- (n_inf / 1000)
p_value
```

```
[1] 0.001
```

```
#phrase pour résultat :
cat("La p-value unilatérale pour le test kappa < 0.2 est de ", round(p_value, 4), "\n")
```

La p-value unilatérale pour le test kappa < 0.2 est de 0.001

Avec une p-value < 0.025, on rejette l'hypothèse nulle au niveau de 2.5% et on conclut que le kappa est significativement supérieur à 0.2.

4 Second exemple en R sur SMP (CUSM)

Modèle de régression linéaire expliquant la variable “durée de l'entretien” (duree.interv)

```
mod <- lm(duree.interv~schizophrenie+depression+abus.subst+ gravite+charactere+trauma.enfant+age
summary(mod)
```

Call:

```
lm(formula = duree.interv ~ schizophrenie + depression + abus.subst +
    gravite + charactere + trauma.enfant + age + factor(type.centre),
    data = smp)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-38.578	-13.855	-1.769	10.922	64.405

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	42.48996	3.99998	10.623	< 2e-16 ***
schizophrenie	3.06420	2.80997	1.090	0.275911
depression	6.71269	1.64793	4.073	5.21e-05 ***

```

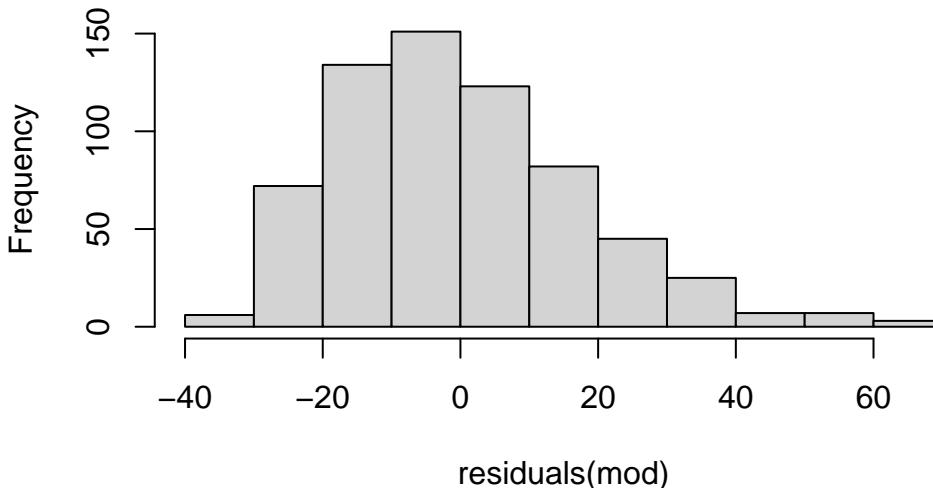
abu.subst      4.60037   1.79854   2.558 0.010760 *
gravite       1.06236   0.56548   1.879 0.060737 .
charactere    1.62547   0.93536   1.738 0.082723 .
trauma.enfant -0.66805   1.66931   -0.400 0.689144
age           0.20788   0.06066   3.427 0.000649 ***
factor(type.centre)2 4.09540   2.53401   1.616 0.106546
factor(type.centre)3 -1.29681   2.44159   -0.531 0.595509
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Residual standard error: 18.02 on 645 degrees of freedom
(144 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.1086, Adjusted R-squared: 0.09619
F-statistic: 8.734 on 9 and 645 DF, p-value: 1.919e-12

```
#histogramme des résidus
hist(residuals(mod))
```

Histogram of residuals(mod)



On constate que les résidus ne suivent pas une loi normale.

On va donc faire un bootstrap pour obtenir des intervalles de confiance et des p-values pour les coefficients.

1. Créer la fonction de bootstrap

Syntaxe :

- créer une fonction `lm.boot` : c'est la recette de cuisine, qui prend comme arguments `data` et `index`
 - `data` (jeu de données = liste d'ingrédients) : recevra le jeu de données `smp` qui passera dans la fonction `boot()`
 - `index` (lignes qui seront tirées au sort avec remise par la fonction `boot()` = liste de course spécifiques) : vecteur des indices des lignes tirées au sort avec remise (peut être `,x`)

- * Cet argument `index` est **automatiquement généré et fourni par la fonction `boot()`** à chaque itération.
- La seconde partie : le chef cuisinier `boot()` qui a accès au garde-manger (jeu de données initial `smp`) et à la recette de cuisine (fonction `lm.boot`).
- Le chef :
 - crée lui même une liste de courses spécifiques (vecteur `index` des lignes tirées au sort avec remise)
 - prend la recette de cuisine (fonction `lm.boot`) et l'exécute avec les ingrédients (jeu de données `smp[index,]`)
 - la fonction renvoie les coefficients du modèle ajusté sur l'échantillon bootstrap.
 - le chef récupère les coefficients et les stocke.
 - refait ça 10 000 fois.

1. Fonction `lm.boot` = recette de cuisine

```
# fonction pour bootstrap des coefficients de régression linéaire
lm.boot <- function(data, index) {
  # 1. Création de l'échantillon bootstrap
  # La fonction `boot()` appelle cette fonction en boucle.
  # À chaque appel, `boot()` fournit un nouveau vecteur `index` qu'elle a générée.
  smp.boot <- data[index,]

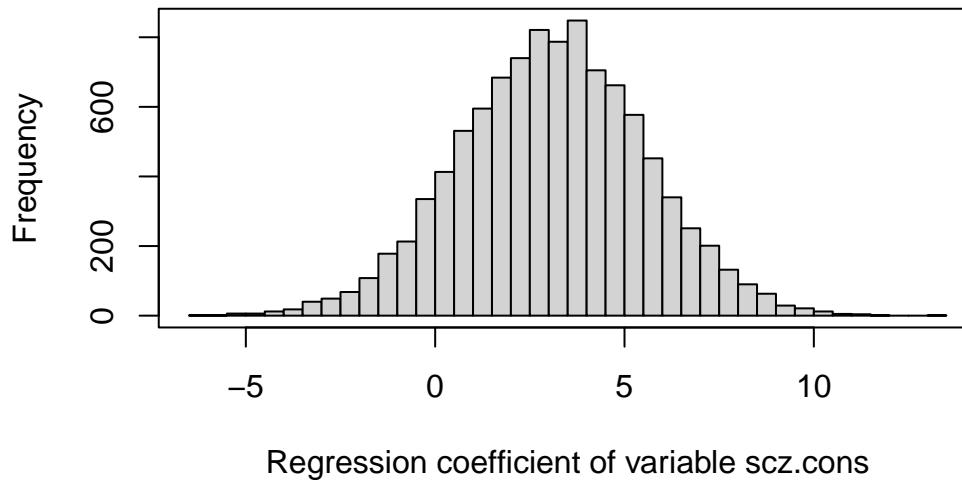
  # 2. Ajustement du modèle linéaire sur l'échantillon bootstrap
  mod <- lm(duree.interv ~ schizoprenie + depression + abus.subst + gravite + caractere + t)

  # 3. Extraction et renvoi des coefficients du modèle
  coefficients(mod)
}
```

2. Application au jeu de données `smp` et affichage de l'histogramme des coefficients de la variable `scz.cons` (schizophrénie)

```
resboot <- boot(smp, lm.boot, 10000)

hist(resboot$t[,2], breaks=40, main="", xlab="Regression coefficient of variable scz.cons")
box()
```



3. Intervalles de confiance pour tous les coefficients

```

ci_bca <- boot.ci(resboot, index = 2, type = "bca") # on stocke l'IC une seule fois
p_val_bootstrap <- 2 * sum(resboot$t[, 2] <= 0) / 10000

# Afficher proprement les deux résultats sans chevauchement d'affichage
cat(
  sprintf(
    "L'intervalle de confiance à 95% pour le coefficient de la variable scz.cons est [% .3f, % .
    ci_bca$bca[4], ci_bca$bca[5]
  ),
  sprintf(
    "La p-value bilatérale pour le test du coefficient de la variable scz.cons est de %.4f.\n",
    p_val_bootstrap
  ),
  sep = ""
)

```

L'intervalle de confiance à 95% pour le coefficient de la variable scz.cons est [-1.872, 7.759]
La p-value bilatérale pour le test du coefficient de la variable scz.cons est de 0.2070.

Syntaxe :

- `boot.ci(resboot, index=2, type="bca")` : calcul de l'intervalle de confiance à 95% pour le coefficient de la variable `scz.cons` (schizophrénie)
 - `resboot` : résultat du bootstrap
 - `index=2` : précise que c'est la variable « schizophrénie » qui nous intéresse.
 - `type="bca"` : méthode BCa (bias-corrected and accelerated) qui est meilleure que la méthode des quantiles sur les petits échantillons