

Antag att vikterna uppfyller

$$w_{11} = w_{12} = w_{21} = w_{22} = 1.$$

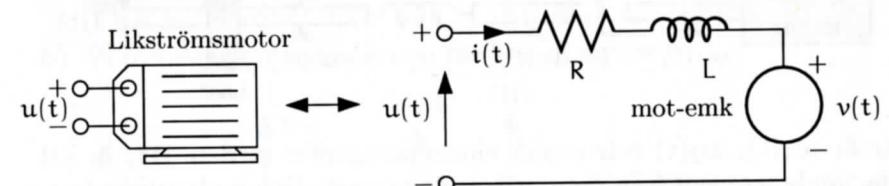
-  a) Vilka jämviktspunkter får systemet? Vilka av dessa är stabila?
- b) Simulera systemet för olika startpunkter $x_1(0)$ och $x_2(0)$. Skissa lösningstrajektorierna för dessa startvärden i ett xy-diagram (x -axeln beskriver $x_1(t)$ och y -axeln $x_2(t)$). Vilka startvärden leder till trajektorier som slutar i en stabil jämviktspunkt?

Kapitel 3

Fysikaliskt modellbygge

3.1 Likströmsmotor med last

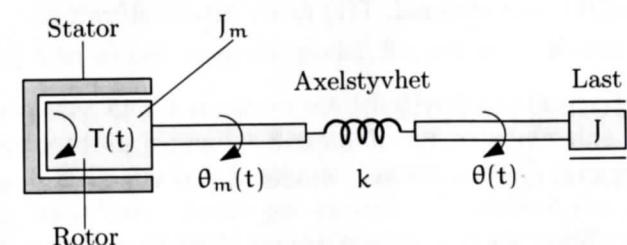
Betrakta en likströmsmotor som driver en last via en elastisk axel. Motorns elektriska del beskrivs av



där R och L är resistans respektive induktans i motorlindningarna. Den i lindningarna inducerade mot-EMK:n $v(t)$ är proportionell mot motorns rotationshastighet $\dot{\theta}_m(t)$:

$$v(t) = k_1 \dot{\theta}_m(t).$$

För den mekaniska delen av systemet gäller



där J_m och J är rotorns respektive lastens tröghetsmoment. Motorn som sådan genererar momentet

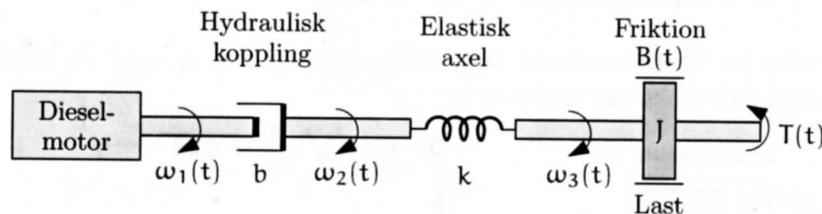
$$T(t) = k_2 i(t),$$

där $i(t)$ är strömmen genom motorlindningarna.

Inför lämpliga tillståndsvariabler och ställ upp en tillståndsform för detta system. Låt spänningen $u(t)$ vara insignal och vridningsvinkeln $\theta(t)$ utsignal.

3.2 Dieseltransmission

En transmission för en fartygsdiesel beskrivs av principschemat nedan.



Här är $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ och $\omega_3(t)$ vinkelhastigheter medan $T(t)$ är ett belastande moment från det omgivande vattnet. Den hydrauliska kopplingen överför vridmomentet $b(\omega_1(t) - \omega_2(t))$ till propelleraxeln. Fjädern med fjäderkonstant k modellerar propelleraxelns elasticitet och massan med tröghetsmoment J beskriver axelns och propellerns massa. Friktionsmomentet $B(t)$ uppfyller slutligen (viskös friktion)

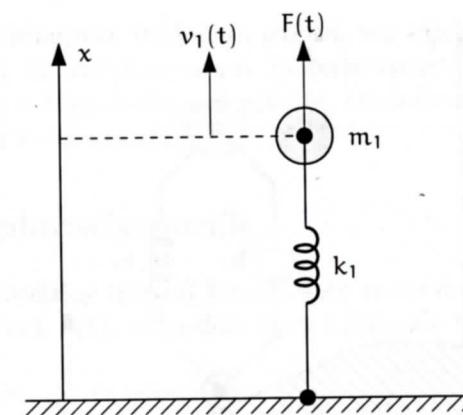
$$B(t) = \alpha \omega_3(t).$$

Ställ upp en tillståndsmodell för systemet där $\omega_1(t)$ betraktas som insignal och $\omega_3(t)$ som utsignal. $T(t)$ är en extern störning.

3.3 Fordondynamik

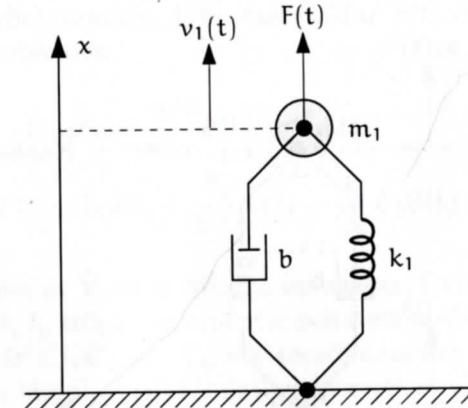
Vi ska nu bygga en gradvis förfinad modell av en bilstötdämpare.

a) En enkel första approximation ges av följande mekanism.



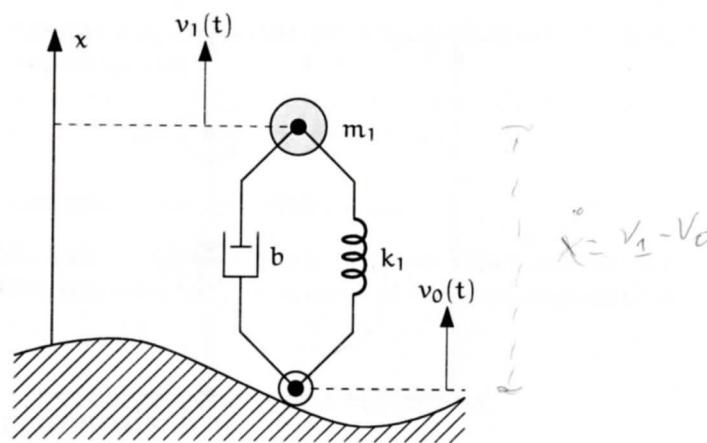
Här är m_1 bilens massa och fjädern med fjäderkonstant k_1 representerar stötdämparen. Mass/fjädersystemet är i nederänden förankrat i vårt referensplan. Modellera systemet då kraften $F(t)$ är insignal och hastigheten $v_1(t)$ utsignal. Hänsyn ska även tas till gravitationen g . Använd trefasmetoden och blockschemarepresentation.

b) Vi utvidgar nu mekanismen med en dämpare b :

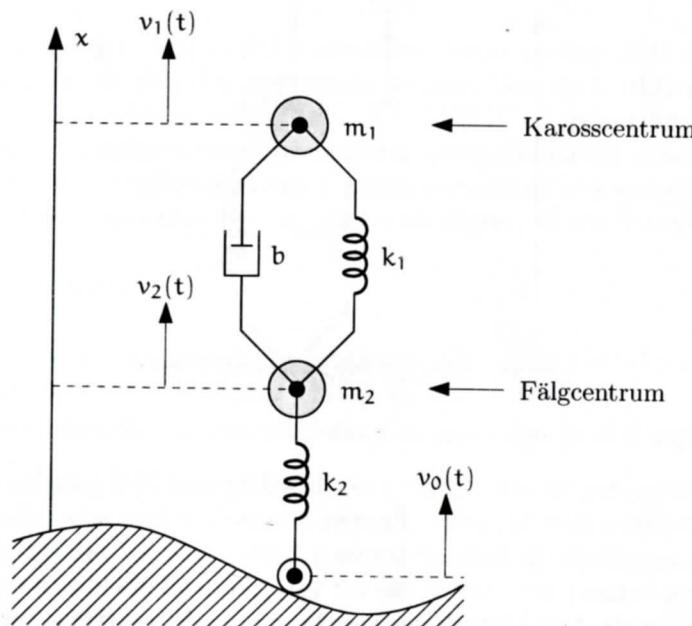


Utgå från a) och ange en modell för det modifierade systemet.

c) Nästa steg är att montera ett friktionsfritt hjul i nederdelen av systemet från b), enligt figuren överst på nästa sida. Härigenom kan vi förflytta hela systemet i horisontalldel över ett underlag (vägbanan) vars profil ges av $v_0(t)$. Modellera det nu erhållna systemet. Låt hastigheten $v_0(t)$ vara in- och $v_1(t)$ utsignal.



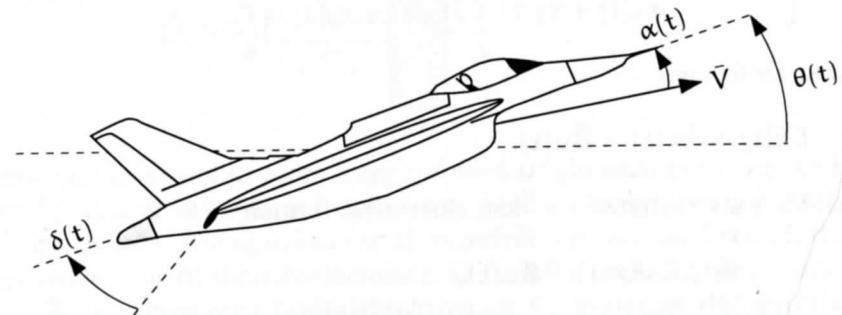
- d) Under förutsättning att vi försummar dynamiken i själva däcken, så utgör ovan erhållna modell en bra beskrivning av ett fordons rörelse i vertikalled då det färdas över ett underlag vars profil ges av $v_0(t)$. Vi förfinrar nu modellen ytterligare genom att ta hänsyn även till däckens dynamik genom att modellera dessa med ytterligare ett mass/fjäder-system:



Här betecknar m_1 fordonets massa, m_2 däckens och fälgarnas massa, k_1 är stötdämparnas fjäderkonstant, b stötdämparnas dämpning och k_2 däckens elasticitet. Modellera systemet då $v_0(t)$ är in- och $v_1(t)$ utsignal.

3.4 Flygplansdynamik

Ett flygplans rörelse i tippled beskrivs av rodervinkeln $\delta(t)$ samt av vinklarna $\alpha(t)$ och $\theta(t)$, vilka definieras i följande figur



där \bar{V} är hastighetsvektorn. För små vinklar $\alpha(t)$ och $\theta(t)$ gäller approximativt sambanden

$$\begin{aligned} \frac{mV}{Sq} \dot{\alpha}(t) - C_1 \alpha(t) - \frac{mV}{Sq} \dot{\theta}(t) &= C_2 \delta(t) \\ -\frac{c}{2V} C_3 \dot{\alpha}(t) - C_4 \alpha(t) + \frac{I_y}{Sq c} \ddot{\theta}(t) - \frac{c}{2V} C_5 \dot{\theta}(t) &= C_6 \delta(t), \end{aligned}$$

där V är beloppet av \bar{V} , m är flygplanets massa, S vingareaen, q det dynamiska trycket, I_y tröghetsmomentet och c ett medelvärde på vingens bredd. Vidare är C_1, C_2, \dots, C_6 s k aerodynamiska derivator (dimensionslösa). Inför lämpliga tillståndsvariabler och ställ upp en tillståndsmodell där $\delta(t)$ är insignal. ($m, V, S, q, c, I_y, C_1, \dots, C_6$ betraktas alla som konstanter.)

3.5 Singulära tillståndsekvationer

Vi ska nu betrakta problemet att man efter modellbygggets två första faser helt enkelt inte kan lösa ut en ordinär tillståndsform. Detta kan

t ex bero på olyckligt valda tillståndsvariabler eller på s k strukturella singulariteter i systemet. Typexemplet är två parallellkopplade kondensatorer, där ju två naturliga tillstånd (spänningen över vardera kondensatoren) har blivit ett. Mer om detta i kapitlet om bindningsgrafer. Se även Cellier [1].

Antag att modellbyggets två första faser resulterat i ekvationerna

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + \dot{x}_3(t) + x_1(t) + 2x_2(t) + \beta x_3(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) - 2x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + 2\dot{x}_3(t) + x_3(t) = 0, \end{cases}$$

som är av formen

$$E\ddot{x}(t) + \bar{A}x(t) = \bar{B}u(t).$$

a) Visa att systemet inte kan skrivas på formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

där $A = -E^{-1}\bar{A}$ och $B = E^{-1}\bar{B}$.

b) Visa att systemet kan skrivas på formen

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_0u(t) + B_1\dot{u}(t)$$

$$x(t) = Cz(t) + Du(t),$$

där $z(t)$ är en vektor som innehåller färre komponenter än $x(t)$. För vilka β kan man göra detta? Vad blir $z(t)$ och matriserna A , B_0 , B_1 , C och D ? Kan man få $B_1 = 0$?

Ledning: Leta efter ett statistiskt samband och använd det för att eliminera någon av tillståndsvariablerna.

c) Visa att om β är sådant att man inte kan skriva systemet på formen från b), så kan systemet i stället skrivas på formen

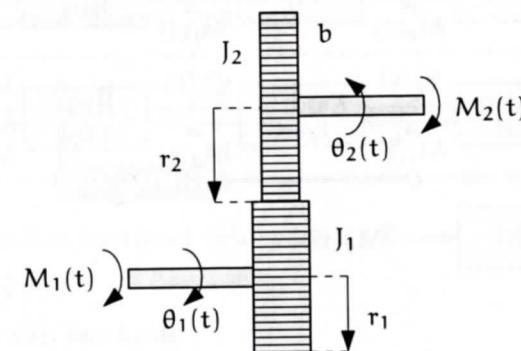
$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_0u(t) + B_1\dot{u}(t) + B_2\ddot{u}(t)$$

$$x(t) = Cz(t) + D_0u(t) + D_1\dot{u}(t).$$

Kan man få $B_1 = B_2 = 0$?

3.6 Mekanisk utväxling

Betrakta följande mekaniska utväxling

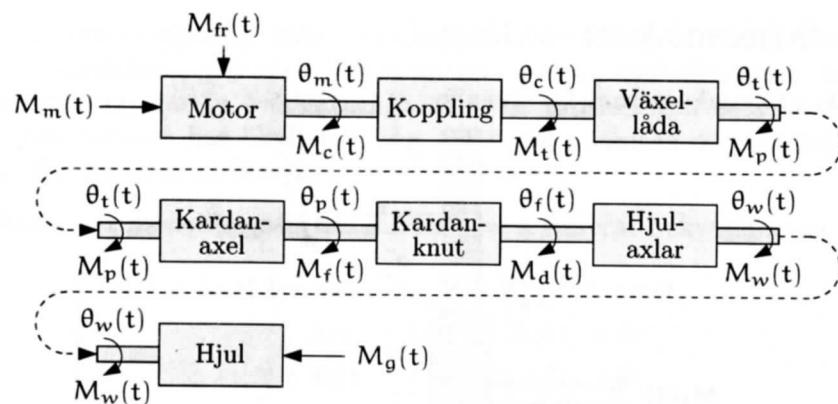


bestående av två olika stora kugghjul med tröghetsmoment J_1 respektive J_2 . Antag att själva överföringen mellan kugghjulen är glapp- och friktionsfri. Antag också att all lagerfriktion kan härföras till den övre axeln, där friktionskoefficienten är b . Inför utväxlingskonstanten $r = \frac{r_2}{r_1}$ och ange en tillståndsbeskrivning för systemet där $\theta_2(t)$ är utsignal och momenten $M_1(t)$ (drivande) och $M_2(t)$ (bromsande) är insignaler.

3.7 Framdrivningssystem i lastbil

När föraren av en lastbil ändrar gaspådraget uppstår ibland självsvängningar i framdrivningssystemet, s k "vehicle shuffle" (Pettersson [16]). För att avgöra vilka de huvudsakliga fysikaliska effekterna är och för att kunna införa aktiv, modellbaserad dämpning i framtidens lastbilsgenerationer, vill man modellera framdrivningssystemet. En första approximation är här att enbart betrakta körning rakt fram, så att båda drivhjulen snurrar lika fort. Då kan vi slå ihop hjul och hjulaxlar, vilket ger den principiella systembeskrivningen i figuren överst på nästa sida.

Motor: Förbränningen i motorn alstrar ett moment $M_m(t)$. Vidare betecknas motorns tröghetsmoment J_m och internt finns ett friktionsmoment $M_{fr}(t)$, som vi dock avstår från att modellera eftersom friktionsmodellering i regel är mycket besvärligt. Istället betraktar vi $M_{fr}(t)$ som en okänd störsignal (insignal).



Koppling: Kopplingen antas vara stel och utan massa.

Växellåda: Växellådan beskrivs av en utväxlingskonstant r_t , av det totala tröghetsmomentet J_t och av en viskös friktionskoefficient b_t , allt enligt uppgift 3.6.

Kardanaxel: Kardanaxeln antas vara stel och utan massa.

Kardanknut: Liksom växellådan ovan antas kardanknuten beskrivas av ett tröghetsmoment J_f , av utväxlingen r_f och av friktionskoefficienten b_f .

Hjulaxlar: Hjulaxlarna modelleras som en dämpad fjäder med fjäderkonstant k och dämpkonstant c .

Hjul: Hjulen beskrivs av tröghetsmomentet J_w . Dessa utsätts också för ett belastande momentet $M_g(t)$ (från rullmotstånd, luftmotstånd, etc.).

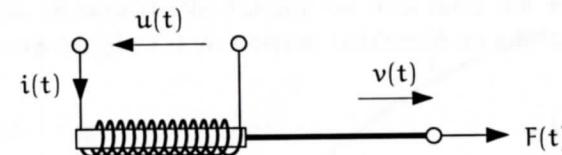
a) Ställ upp en differentialekvation (i $\theta_c(t)$) för delsystemet växellåda-kardanaxel-kardanknut. Betrakta alltså $M_t(t)$ och $M_d(t)$ som insignaler.

b) Ställ upp differentialekvationer för hela systemet i så få variabler som möjligt. Betrakta $M_m(t)$, $M_{fr}(t)$ och $M_g(t)$ som insignaler.

Ledning: Eliminera så många "mellanliggande" variabler som möjligt.

3.8 Seismometer

För att mäta lägesändringar, t ex vid jordbävningar, används ibland en rörlig permanentmagnet i en spole:



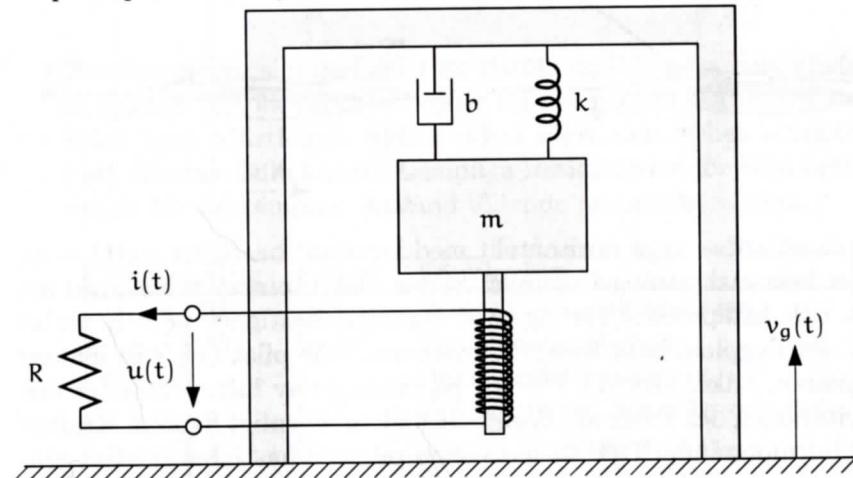
Sambandet mellan hastighet och spänning är

$$u(t) = \beta v(t)$$

och mellan ström och kraft

$$F(t) = \beta i(t).$$

Detta mätförfarande används bland annat i seismometrar. En sådan ser i princip ut som följer.



Seismometerns hölje är fast förbundet med marken, vars vertikala hastighet, $v_g(t)$, man vill mäta. Inuti höljet finns en massa m upp-hängd i en fjäder med fjäderkonstanten k och ett linjärt dämpande element med dämpkonstanten b . I massan finns en permanentmagnet fastsatt, som rör sig i förhållande till en spole fastsatt i höljet. Seismometern är ansluten till ett mätinstrument med resistansen R .

Modellera systemet på tillståndsform, med $v_g(t)$ som insignal och $u(t)$ som utsignal.

Kapitel 4

Modellförenklingar

4.1 Befolkningsstatistik

Låt $x_k(t)$ beteckna antalet kvinnor som är k år gamla år t . Nativiteten hos k -åriga kvinnor är $2\alpha_k$ och mortaliteten är $(1 - \beta_k)$. Antag att $\beta_{110} = 0$ (dvs ingen kvinna blir äldre än 110 år). Under förutsättning att det föds lika många pojkar som flickor gäller då att

$$x_0(t+1) = \sum_{k=0}^{110} \alpha_k x_k(t)$$
$$x_{k+1}(t+1) = \beta_k x_k(t).$$

Vi vill göra en aggregerad modell med tillståndsvariablerna

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \text{antalet kvinnor under 20 år}, \\ z_2(t) &= \text{antalet kvinnor mellan 20 och 65 år}, \\ z_3(t) &= \text{antalet kvinnor över 65 år}. \end{aligned}$$

För att sätta upp en sådan modell måste först en viss typ av antagande införas. Vilken typ? Inför ett enkelt sådant antagande och ställ upp en aggregerad modell beskrivande befolkningsutvecklingen.

4.2 Signaltransmission

Betrakta signalutbredningen längs en ledning som är öppen i sin högra ändpunkt:

4.4 Bildynamik

När man trycker på gaspedalen i en bil ökar hastigheten. Låt oss undersöka det statiska sambandet mellan gaspedalvinklar och bilhastigheten.

Gaspedalen är mekaniskt kopplad till ett spjäll som direkt påverkar bränsleinsprutningen i förgasaren. Antag att sambandet är linjärt:

$$b(t) = K_b \varphi(t), \quad (4.2)$$

där $b(t)$ är den mängd bensin [m^3/s] som sprutas in i förgasaren och $\varphi(t)$ är gaspedalvinkeln (i radianer). Bränslefödet $b(t)$ bestämmer sedan bränsle/luft-blandningen $H(t)$ efter förgasaren enligt

$$\dot{H}(t) + \tau H(t) = K_b b(t), \quad (4.3)$$

där tidskonstanten τ är av storleksordningen 0.2 sekunder (när bilen är varm). Detta samband är ganska förenklat. Som de flesta känner till så kan man få negativa effekter om gaspedalen trycks ner för snabbt. Sambandet (4.3) gäller därför med god noggrannhet endast då $\dot{\varphi}(t)$ (och därmed $b(t)$) inte är för stor.

Bränsle/luft-blandningen förs därefter till motorn med en transportfördräjning på 0.1 sekunder. Tryckkraften på kolvarna $T_k(t)$, mätt i [N/m^2], är en funktion av bränsle/luft-blandningen, som inom det aktuella arbetsområdet kan approximeras med

$$T_k(t) = K_k \sqrt{H(t)}. \quad (4.4)$$

Tryckkraften på kolvarna överförs sedan via svänghjul och kardanaxel till drivkraften $F(t)$ [N] på bakhjulen. På grund av torsion i axlarna ges sambandet av ett andra ordningens system:

$$\ddot{F}(t) + \gamma_1 \dot{F}(t) + \gamma_2 F(t) = \beta T_k(t), \quad (4.5)$$

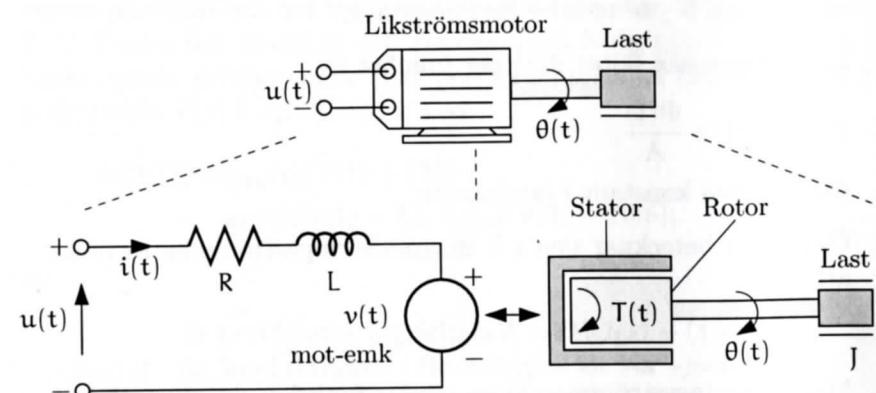
där γ_1 , γ_2 och β är konstanter. På bilen verkar också en friktionskraft $F_f(t)$ [N] och en vindkraft $F_{wind}(t)$ [N]

$$F_{wind}(t) = F_0 + F_1 v^2(t), \quad (4.6)$$

där $v(t)$ är bilens hastighet [m/s] och F_0 och F_1 är konstanter. Ange det statiska sambandet mellan $\varphi(t)$ och $v(t)$.

4.5 Likströmsmotor med last

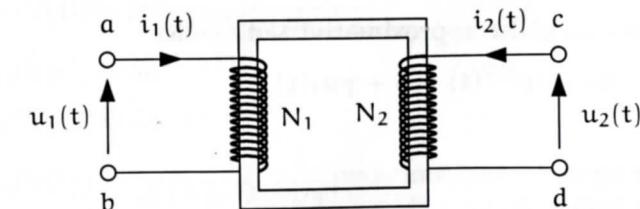
En likströmsmotor beskrivs av följande principskiss.



Insignal är den pålagda spänningen $u(t)$ och utsignal är vridningsvinkel $\theta(t)$. Motoraxeln med last antas ha tröghetsmomentet J och bromsas av ett visköst friktionsmoment $f\dot{\theta}(t)$, där f är en konstant. En ström $i(t)$ ger upphov till ett vridmoment $T(t) = k_1 i(t)$ på motoraxeln. Samtidigt uppstår en mot-EMK $v(t)$ som är proportionell mot vinkelhastigheten $\dot{\theta}(t)$, dvs $v(t) = k_2 \dot{\theta}(t)$. Ange en tillståndsform sofn beskriver motorn med last. Diskutera vad som händer med modellen om induktansen L är liten. Ange en approximativ modell av lägre ordning för detta fall.

4.6 Transformator med järnkärna

Nedan finns en skiss över en transformator med järnkärna.



Transformatorn kan modelleras på följande sätt:

- Spänningarna är proportionella mot tidsvariationen av det mag-

- a) Vilket ordningstal har modellen?
- b) Ange ett ekvationssystem för den stationära potentialen V_0 (dvs den stationära punkt som beskrivs av differentialekvationerna).
- c) Dynamiken i variablene $m(t)$ och $h(t)$ är klart snabbare än dynamiken i $n(t)$. De förra antar också sina stationära värden snabbt i förhållande till variationerna i $V(t)$. Ange baserat på dessa observationer en förenklad modell (dvs en modell av lägre ordning) för hur potentialen $V(t)$ varierar i nerven.

4.9 Tidskonstanter

I ett system beskrivs sambandet mellan in- och utsignal av följande tillståndsform

$$\dot{x}_1(t) = -0.001x_1(t) + 0.001u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -1000x_2(t) + 1000u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

- a) Man önskar simulera $y(t)$ när $u(t)$ ändras långsamt under 5000 sekunder. Ange en approximativ första ordningens differentialekvation som är lämplig att studera i detta fall.
- b) Vid nästa experiment önskar man i stället studera $y(t)$ under 10 millisekunder efter det att $u(t)$ ändrats stegvis. Ange en lämplig första ordningens differentialekvation för detta fall. Antag att $x_1(0) = 5$ och $x_2(0) = 0$ (initialvärden för tillstånden).
- c) Varför är det olämpligt att direkt simulera den ursprungliga differentialekvationen?

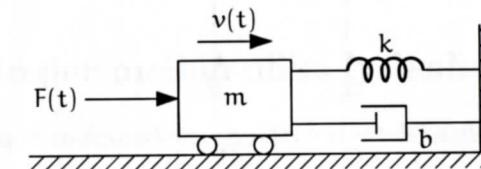
Kapitel 5

Bindningsgrafer

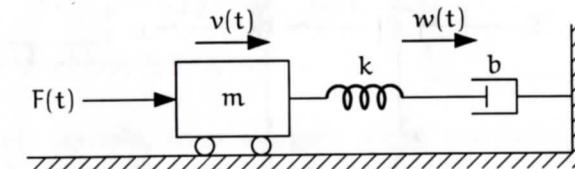
5.1 Enkla system

Rita bindningsgrafer och ta fram tillståndsformer för följande system.

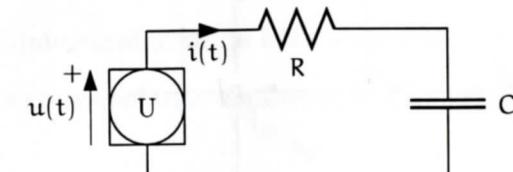
a)



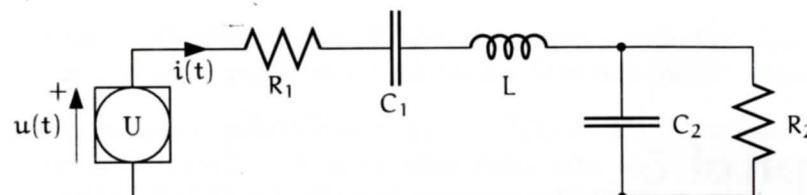
b)



c)



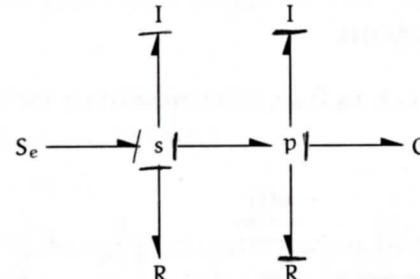
d)



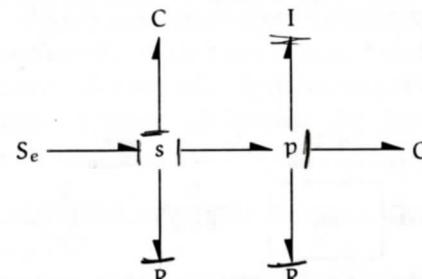
5.2 Kausalitet

Vilka av nedanstående bindningsgrafer har konfliktfri kausalitet? Markera kausaliteten i de konfliktfria fallen. Är kausaliteten entydig?

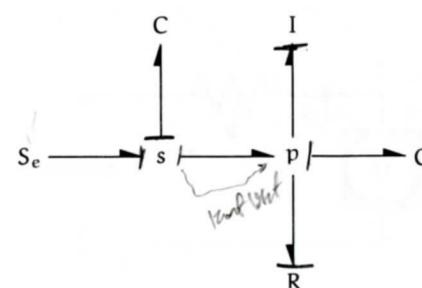
a)



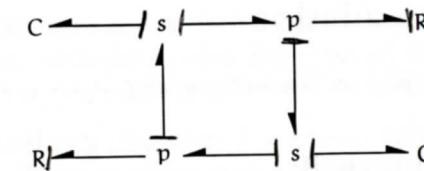
b)



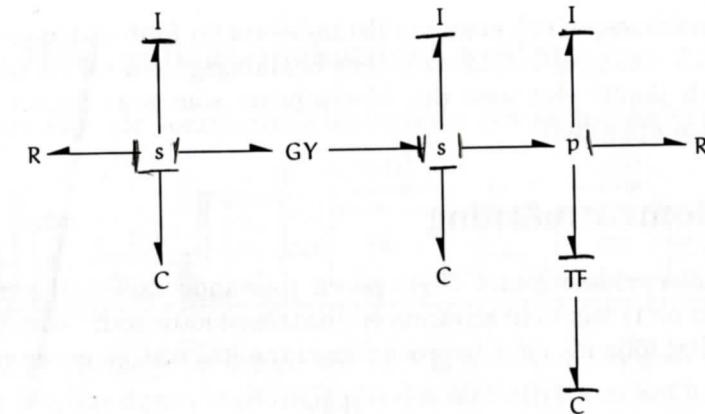
c)



d)

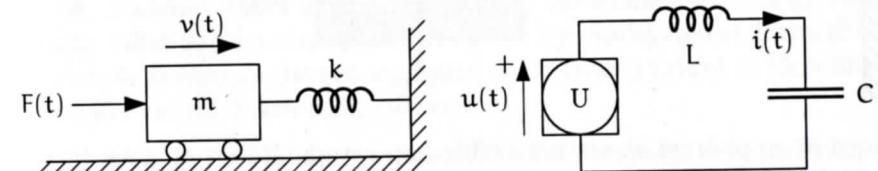


e)



5.3 Analogier mellan olika fysikaliska domäner

Betrakta följande mekaniska respektive elektriska system.



- Fundera igenom, utan att göra några beräkningar, hur systemen kommer att bete sig om de drivs med en kraft- respektive spänningssimpuls. Vagnen antas rulla friktionsfritt. Finns det några likheter/skillnader i beteendena?
- Rita bindningsgrafer för de båda systemen.
- Rita blockscheman som motsvarar bindningsgraferna från b).

5.4 Dieseltransmission

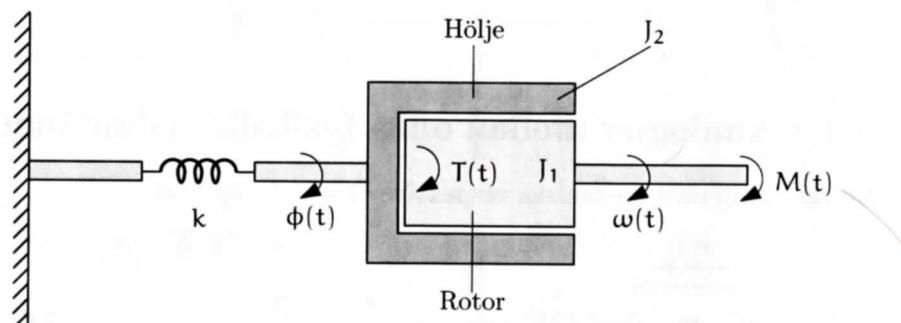
Lös uppgift 3.2 med hjälp av bindningsgrafer.

5.5 Fordondynamik

Rita en bindningsgraf och ange en tillståndsform för fordondynamiken i uppgift 3.3, deluppgift d). Konvertera bindningsgrafen till ett blockschema och jämför det med det blockschema som togs fram i den ursprungliga uppgiften.

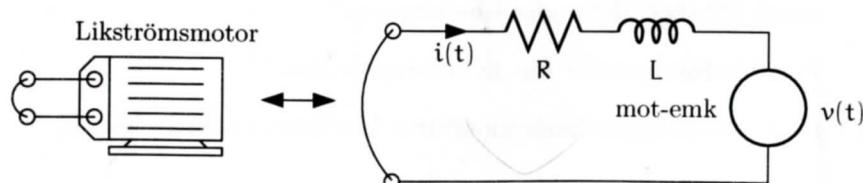
5.6 Momentmätning

För att mäta vridmomentet $M(t)$ på en roterande axel med vinkelhastigheten $\omega(t)$ kan man använda en likströmsmotor som "körs baklänges" enligt följande figur (motorn fungerar alltså som en generator).



Motorn är upphängd så att dess hölje kan rotera. Höljet är dock fäst i en fjäder så att det uppstår ett återställande moment proportionellt mot vridningsvinkeln $\phi(t)$. Motorns rotor och hölje har tröghetsmoment J_1 respektive J_2 .

Elektriskt är motorn kortsluten via en resistans R :

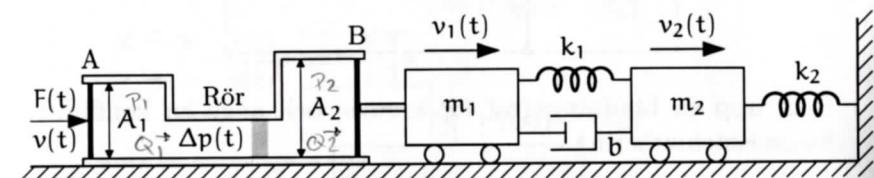


Dessutom finns i kretsen en viss induktans L . Växelverkan mellan den mekaniska och den elektriska delen fungerar på samma sätt som för likströmsmotorn i uppgift 3.1.

Ställ upp en modell och diskutera i vad mån höljets vridningsvinkel $\phi(t)$ är ett mått på hur stort momentet $M(t)$ är.

5.7 Hydrauliskt-mekaniskt system

Betrakta följande kombinerade hydrauliska och mekaniska system.



En kraft $F(t)$ läggs på kolven vid A. Via en inkompresibel hydrauliska överförs denna kraft till B, där den får förflytta en last bestående av två massor, sammansatta med fjädrande och dämpande element enligt figuren. Mellan A och B finns en rörledning som ger energiförlust p_g g a friktion i röret enligt $\Delta p(t) = \alpha Q^2(t) \operatorname{sign}(Q(t)) [N/m^2]$, där $\Delta p(t)$ är tryckskillnaden mellan rörets ändar, $Q(t) [m^3/s]$ är flödet genom röret och $\operatorname{sign}(x)$ returnerar -1 om x är negativ och 1 annars. Detta samband gäller approximativt vid turbulent strömning, vilket ofta är fallet i hydraulsystem. I övrigt är hydraulsystemet förlustfritt, dvs intensitetsupplagringen av energi (inertansen) i röret är försumbar i förhållande till friktionsförlusterna.

Ange en bindningsgraf för systemet. Välj $F(t)$ eller $v(t)$ som insignal, så att grafen får konfliktfri kausalitet. Ange därefter en tillståndsmodell som beskriver systemet.

5.8 Ett elektriskt och ett termiskt system

- Betrakta följande elektriska krets där spänningen $u(t)$ är insignal.

9.7 Nivåfel vid minstakvadratskattning

Antag att ett system beskrivet av en differensekvation

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) \\ = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_nu(t-n) + K \end{aligned}$$

($u(t)$ är in- och $y(t)$ utsignal) ska identifieras. Konstanten K är okänd, vilket t ex kan vara fallet om mätsignalen kommer från en mätgivare som hela tiden ger ett konstant mätfel. I första hand är vi här intresserade av att bestämma parametrarna a_j och b_j med minstakvadratmetoden.

- a) Visa att det oavsett värde på K går att bestämma alla a_j - och b_j -parametrar med minstakvadratmetoden genom att betrakta differenserna

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= u(t) - u(t-1) \\ \Delta y(t) &= y(t) - y(t-1) \end{aligned}$$

som nya in- och utsignaler.

- b) Visa hur man kan inkludera K i den vanliga minstakvadratformismen ($\hat{y}(t, \theta) = \theta^T \varphi(t)$) så att såväl a_j och b_j som K kan skattas.

9.8 Parameterskattning vid återkoppling

Parametrarna a och b i systemet

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + v(t)$$

ska skattas. Systemet regleras med en proportionell regulator $u(t) = -k_p y(t)$. Kan parametrarna a och b entydigt bestämmas med någon identifieringsmetod. I så fall, vilken? Vad gäller om regulatorn ändras till $u(t) = -k_p y(t-1)$?

9.9 Noggrannhet vid parameterskattning

Parametrarna b_1 och b_2 i systemet (av s k FIR-typ)

$$y(t) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + v(t)$$

ska skattas med minstakvadratmetoden. Här anger $u(t)$ och $y(t)$ inrespektive utsignal medan $v(t)$ är en okänd störning. Som insignal används ett steg

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

- a) Kan b_1 och b_2 bestämmas med godtycklig noggrannhet då antalet data går mot oändligheten?
- b) Vad gäller om man vet att $b_2 = 0$?
- c) Vilka krav ställs allmänt på insignalen för att b -parametrarna i

$$y(t) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_nu(t-n) + v(t)$$

ska kunna skattas?

9.10 Noggrannhet vid parameterskattning

För ett visst system ges sambandet mellan in- $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ av

$$y(t) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + e(t),$$

där $\{e(t)\}$ är en följd av oberoende stokastiska variabler med medelvärde noll och varians 1. Vi vill skatta parametrarna b_0 och b_1 med minstakvadratmetoden. Utseendet hos insignalen $u(t)$ kan väljas fritt, dock med bivillkoret att (begränsad medeleffekt)

$$R_u(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) \leq 1.$$

Målet är att välja $u(t)$ på ett sådant sätt att noggrannheten hos skattningarna av b_0 och b_1 blir så bra som möjligt (dvs att parametrarna har så liten varians som möjligt) då antalet data, N , går mot oändligheten.

- a) Visa att noggrannheten bara beror på kovarianserna $R_u(0)$ och $R_u(1)$, där

$$R_u(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1).$$

Gör räkningarna under förutsättning att gränsvärdena $R_u(0)$ och $R_u(1)$ existerar.

Ledning: För ett system på formen

$$y(t) = \theta_0^T \varphi(t) + e(t),$$

där $\{e(t)\}$ är en följd av oberoende stokastiska variabler med medelvärde noll och varians λ så ges kovariansmatrisen av ekvationerna (12.51a)–(12.51c) i kursboken [12] (sid 298).

- b) Bestäm värden på $R_u(0)$ och $R_u(1)$ så att parameterskattningarnas varians minimeras.

9.11 Konvergens hos skattningen

Ett system ges av

$$y(t) = u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t),$$

där $\{e(t)\}$ är vitt brus med varians 1. För att beskriva systemet ansätts modellstrukturen

$$y(t) = bu(t-1) + e(t).$$

Vad konvergerar minstakvadratskattningen av b till då antalet observationer går mot oändligheten och (insignalen antas vara oberoende av störningen)

- a) $\{u(t)\}$ är vitt brus med varians 1.
- b) $\{u(t)\}$ har kovariansfunktion

$$\begin{aligned} R_u(0) &= 1, \\ R_u(1) &= 0.5, \\ R_u(2) &= 0.25, \\ R_u(3) &= 0.125, \end{aligned}$$

och så vidare.

Ledning: Kom ihåg att prediktionsfelsskattningen konvergerar mot det värde som minimerar prediktionsfelets varians.

9.12 Konvergens hos skattningen

Antag att en modell tillhörande modellstrukturen

$$y(t) = bu(t-1) + e(t)$$

ska anpassas till insamlade data. I verkligheten är data genererade av systemet

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t),$$

där $\{e(t)\}$ är vitt brus med varians λ . Som vanligt vill vi minimera kvadratsumman av prediktionsfelen.

Vad blir b (uttryckt i b_1 och b_2) då antalet insamlade data växer mot oändligheten och

- a) insignalsekvensen $\{u(t)\}$ är vitt brus.
- b) $\{u(t)\}$ enbart består av frekvenser koncentrerade till ett mycket smalt band kring frekvensen ω_1 . (Det räcker med att undersöka infinitesimalt små band!)

Ledning: Använd ekvation (12.46), kursboken [12], sid 296.

9.13 Kemisk reaktor

Ladda ner data från en kemisk reaktor med kontinuerlig omrörning. De finns på

<http://www.control.isy.liu.se/books/MoS/data>

under namnet **stirred_tank**. Dessa data kommer från Daisy-hemsidan

<http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/daisypdata.html>

nummer [98-002], och de härrör från en exotermisk reaktion, som regleras med hjälp av flödet hos en kylvätska. Samplingstiden är 0.1 minuter, och insignalen är kylfödet [liter/minut], medan utsignal 1 är koncentrationen av produkten [mol/liter] och utsignal 2 är temperaturen (i Kelvin) i reaktorn.

Skatta en bra modell för reaktorn.



Rita utsignalen för samma värden på a, b och c men då $k_1 = 2$ och $k_2 = 0.5$.

11.8 Raketsläde och skalning

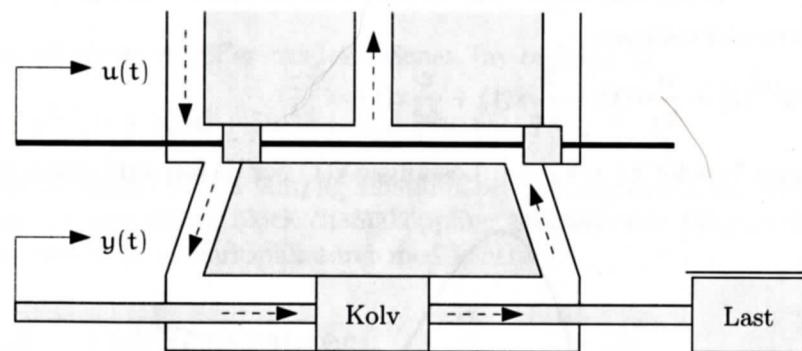
En raketsläde med massan m rör sig längs en horisontell räls. Släden accelereras av en konstant kraft $F(t) = F$ när raketen brinner och bromsas av luftmotståndet med kraften

$$F_l(t) = \frac{\rho S}{2} v^2(t),$$

där ρ är luftens täthet, S är tvärsnittsarean och $v(t)$ slädens hastighet. Ställ upp en matematisk modell för slädens rörelse. Visa sedan hur man med skalning kan beräkna rörelsen som funktion av tiden för godtyckliga parametervärden m , ρ , S och F ur en enda simulering.

11.9 Hydraul servo och skalning

Betrakta hydraulervot nedan



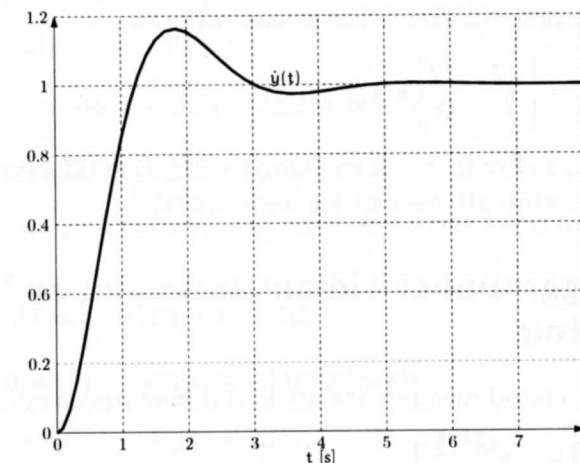
där insignalen $u(t)$ är ett ventilläge och utsignalen $y(t)$ ett kolvläge. En enkel beskrivning av systemet är

$$\frac{1}{\omega_0^2} y^{(3)}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \frac{k_u}{A} u(t),$$

där $A = 1$ är kolvens tvärsnittsarea och $k_u = 1$ en hydraulisk konstant. Vidare är $\omega_0 = 2$ en egenfrekvens medan $\xi = 0.5$ är en dämpkonstant (relativ dämpning).

a) Ange ett SIMULINK-schema [14] som simulerar detta system. Låt $u(t)$ vara insignal och $y(t)$ samt $\dot{y}(t)$ utsignaler.

b) Följande kurva visar en simulering av hastigheten $\dot{y}(t)$ då $u(t)$ är ett enhetssteg. Skissa under samma betingelser $\dot{y}(t)$ då $k_u = 2$ och $\omega_0 = 1$.



11.10 Representationsfel i dator

Följande tidsdiskreta modell ska simuleras (här är $qx(t) = x(t+1)$)

$$y(t) = \left(\frac{1}{q - 0.95} \right)^5 u(t).$$

Skriv modellen på styrbar kanonisk tillståndsform. Antag nu att det påga representationsfel i datorn (signalprocessorn) är så att koefficienten i rad 1, kolumn 5 i systemmatrisen A ändras (minskar) med 10^{-5} . Vad händer?



11.11 Eulers metod för differentialekvationer

Eulers metod för att lösa differentialekvationen

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

finns i två versioner:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) & (\text{vanlig Euler}) \\ \text{II. } \mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t+h)). & (\text{omvänt Euler}) \end{array}$$

- a) Vilka blir stabilitetsområdena för metoderna?
- b) Antag att man vill lösa differentialekvationen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

med metod I eller II. Vilka steg längder kan man då använda i de olika fallen utan att råka ut för instabilitet?

11.12 Noggrannhet vid användandet av Eulers metod

Eulers (vanliga) metod används för att lösa differentialekvationen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}^2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{1}$$

numeriskt. (Den exakta lösningen är $\mathbf{x}(t) = \frac{1}{1-t}$.)

- a) Vilket värde på $\mathbf{x}(0.2)$ får man då steg längden är $h = 0.1$?
- b) Vilket värde på $\mathbf{x}(0.2)$ får man då steg längden är $h = 0.2$?
- c) Vilka feluppskattningar kan man få genom att jämföra resultatet från a) med det från b)? Hur stämmer det med de verkliga felet?

11.13 En Adams-metod

Antag att den numeriska metoden

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \alpha h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t+h)) + \beta h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

används för att lösa differentialekvationen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Beräkna det lokala felet och ange hur koefficienterna α och β ska väljas för att det ska bli en så hög potens som möjligt av h .

11.14 En Runge-Kutta-metod

Man använder Runge-Kutta-metoden

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{k}_2(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1(t)) \\ \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{k}_2(t) \end{aligned}$$

för att lösa den skalära differentialekvationen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

(med reellt λ). För vilka värden på h och λ blir iterationen stabil?

11.15 DAE-simulering

Antag att man vill styra dubbelintegratorn

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t), \quad \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t)$$

så att $\mathbf{y}(t)$ följer en given tidsfunktion $\mathbf{g}(t)$. Detta kan uppnås genom att man löser följande DAE i de tre variablerna $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ och $\mathbf{u}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{g}(t). \end{aligned}$$

- a) Vilket index har denna DAE?
- b) Hur blir lösningen till denna DAE?
- c) Antag fortsättningsvis att DAE:n löses genom en första ordningens bakåtdifferensmetod, dvs genom att

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), t) = 0$$

ersätts med

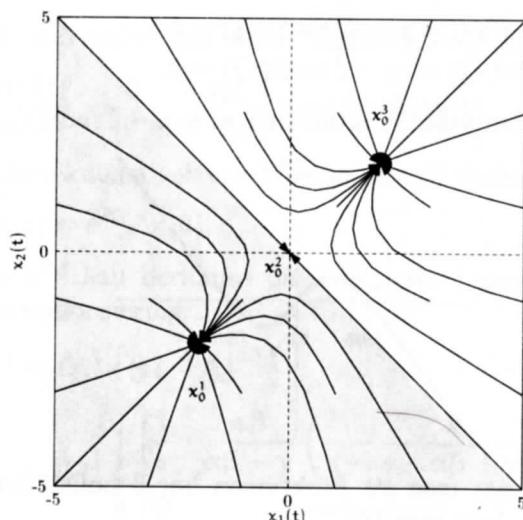
$$\mathbf{F}(h^{-1}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{x}_n, t_n) = 0.$$

Vilken blir den numeriska lösningen till denna?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.92 & 0.08 \\ 0.08 & -0.92 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.92 & 0.08 \\ 0.08 & -0.92 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena till \mathbf{A} hörande till x_0^1 och x_0^3 är -1.0 och -0.84 , dvs båda egenvärdena ligger i vänster halvplan, vilket betyder att x_0^1 och x_0^3 är stabila jämnviktspunkter. Egenvärdena till \mathbf{A} hörande till x_0^2 är ± 1 , dvs ett egenvärde ligger i höger halvplan, och därmed är x_0^2 en instabil jämnviktspunkt.

b) Några lösningstrajektorier:



Oavsett startpunkt så gäller dels $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) < \infty$ och dels $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) < \infty$, dvs inget av tillstånden växer obegränsat. I själva verket kommer lösningen i samtliga fall att röra sig mot en av jämnviktspunkterna. Om $x_1(0) + x_2(0) < 0$ (det grå området i figuren) så gäller att $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0^1$. Om $x_1(0) + x_2(0) > 0$ så gäller att $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0^3$. Slutligen, om $x_1(0) = -x_2(0)$ så ändras det ursprungliga systemet till

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t),\end{aligned}$$

vilket betyder att $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0^2$. Eftersom dessa ekvationer är identiska måste alla trajektorier följa $x_1(t) + x_2(t) = 0$.

Slutsats: Om $x_1(0) \neq -x_2(0)$ så slutar lösningstrajektorian alltid i en stabil jämnviktspunkt.

Kapitel 3

Fysikaliskt modellbygge

3.1 Likströmsmotor med last

Kirchoffs spänningsslag för den elektriska kretsen ger

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_1 \dot{\theta}_m(t).$$

Med Newtons momentlag ($J\ddot{\theta}(t) = \Delta M(t)$) tillsammans med fjäder-ekvationen $M_f(t) = k\Delta\theta(t)$ fås

$$\begin{aligned}J_m \ddot{\theta}_m(t) &= k_2 i(t) + k(\theta_m(t) - \theta_m(t)) \\ J\ddot{\theta}(t) &= k(\theta_m(t) - \theta(t)).\end{aligned}$$

Introduceras tillståndsvariablerna $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = \theta_m(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}_m(t)$, $x_4(t) = \theta(t)$ och $x_5(t) = \dot{\theta}(t)$ fås

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k_1}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{k_2}{J_m}x_1(t) - \frac{k}{J_m}x_2(t) + \frac{k}{J_m}x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_5(t) \\ \dot{x}_5(t) &= \frac{k}{J}x_2(t) - \frac{k}{J}x_4(t) \\ y(t) &= x_4(t),\end{aligned}$$

vilket är en tillståndsbeskrivning för systemet.

3.2 Dieseltransmission

Inför t ex $\omega_3(t)$, $\theta_2(t)$ och $\theta_3(t)$ som tillstånd, där $\theta_2(t)$ och $\theta_3(t)$ är de vinklar som svarar mot $\omega_2(t)$ och $\omega_3(t)$ (dvs $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$ och $\dot{\theta}_3(t) = \omega_3(t)$).

Momentbalans (dels vid lasten och dels efter kopplingen):

$$\begin{aligned} J\ddot{\omega}_3(t) &= k(\theta_2(t) - \theta_3(t)) - \alpha\omega_3(t) - T(t) \\ b(\omega_1(t) - \omega_2(t)) &= k(\theta_2(t) - \theta_3(t)), \end{aligned}$$

vilket ger tillståndsformen ($\omega_2(t) = \omega_1(t) - \frac{k}{b}(\theta_2(t) - \theta_3(t))$)

$$\dot{\theta}_2(t) = -\frac{k}{b}\theta_2(t) + \frac{k}{b}\theta_3(t) + \omega_1(t)$$

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3(t)$$

$$\ddot{\omega}_3(t) = \frac{k}{J}\theta_2(t) - \frac{k}{J}\theta_3(t) - \frac{\alpha}{J}\omega_3(t) - \frac{1}{J}T(t).$$

Anmärkning: Om vi som tillståndsvariabler istället väljer $\Delta\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_3(t)$ och $\omega_3(t)$, så kan systemet skrivas

$$\dot{\Delta\theta}(t) = -\frac{k}{b}\Delta\theta(t) + \omega_1(t) - \omega_3(t)$$

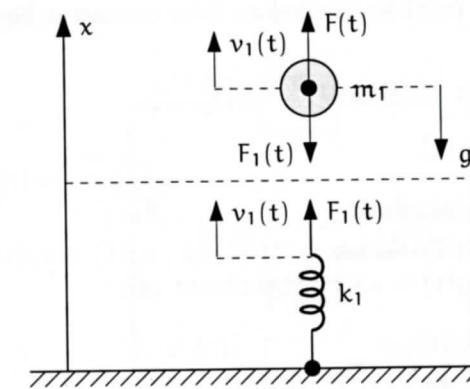
$$\ddot{\omega}_3(t) = \frac{k}{J}\Delta\theta(t) - \frac{\alpha}{J}\omega_3(t) - \frac{1}{J}T(t),$$

dvs som ett andra ordningens system med samma insignal-utsignal-samband som det som erhölls ovan. Mer strukturerade tillvägagångssätt (trefasmetoden eller bindningsgrafer) hjälper oss att välja "bra" tillståndsvariabler. Se vidare uppgift 5.4.

3.3 Fordondynamik

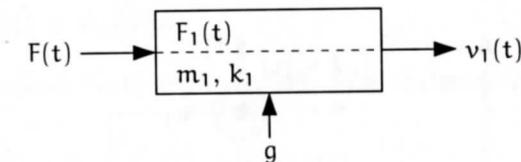
a) **Fas I** Problemet struktureras:

- Frilägg de mekaniska komponenterna: (pilarna anger endast krafterna/hastigheternas riktning, inte deras storlek)

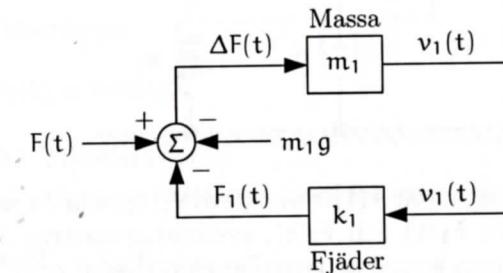


In- och utsignal är $F(t)$ respektive $v_1(t)$. Intern variabel är $F_1(t)$, systemparametrar är m_1 och k_1 . Extern signal är tyngdaccelerationen g .

2. Blockschema (massa + fjäder):



3. Delsystem:



Fas II Basekvationer:

Massan:

$$\Delta F(t) = F(t) - m_1 g - F_1(t)$$

$$\Delta F(t) = m_1 \dot{v}_1(t).$$

Fjädern: ($x(t)$ är avvikelsen från obelastat läge)

$$F_1(t) = k_1 \int^t v_1(s) ds \triangleq k_1 x(t)$$

$$\dot{x}(t) = v_1(t).$$

Fas III Tillståndsform:

Välj t ex tillstånden $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = v_1(t)$. Låt $u(t) = F(t)$ och $y(t) = x_2(t)$. Resultatet blir

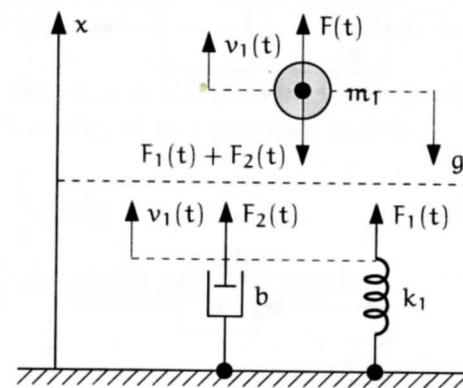
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1}{m_1}x_1(t) + \frac{1}{m_1}u(t) - g$$

$$y(t) = x_2(t).$$

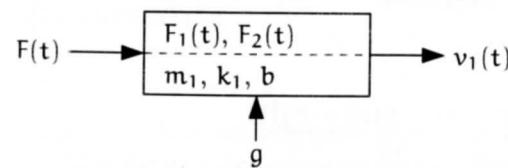
b) Fas I Problemet struktureras:

1. Frilägg de mekaniska komponenterna:

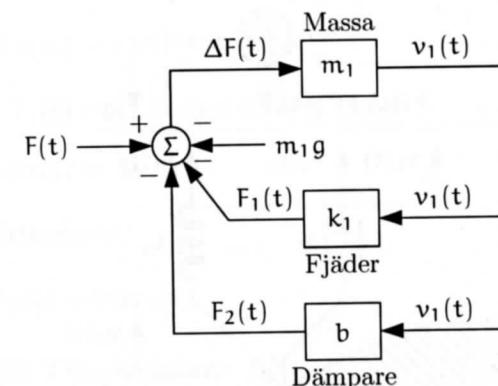


In- och utsignal är $F(t)$ respektive $v_1(t)$ som förut. Interna variabler är $F_1(t)$ och $F_2(t)$, systemparametrar är m_1 , k_1 och b . Extern signal är tyngdaccelerationen g .

2. Blockschema (massa + fjäder + dämpare):



3. Delsystem:



Fas II Basekvationer:

Massan:

$$\Delta F(t) = F(t) - m_1 g - F_1(t) - F_2(t)$$

$$\Delta F(t) = m_1 \dot{v}_1(t).$$

Fjädern: ($x(t)$ är avvikelsen från obelastat läge)

$$F_1(t) = k_1 \int^t v_1(s) ds \triangleq k_1 x(t)$$

$$\dot{x}(t) = v_1(t).$$

Dämparen:

$$F_2(t) = bv_1(t).$$

Fas III Tillståndsform:

Med samma tillståndsvariabler som i a) fås

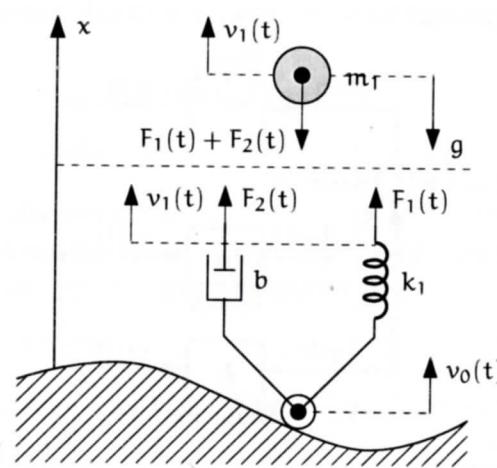
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1}{m_1}x_1(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{1}{m_1}u(t) - g$$

$$y(t) = x_2(t).$$

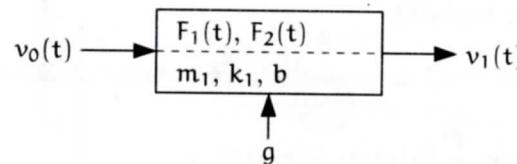
c) Fas I Problemet struktureras:

1. Frilägg de mekaniska komponenterna:

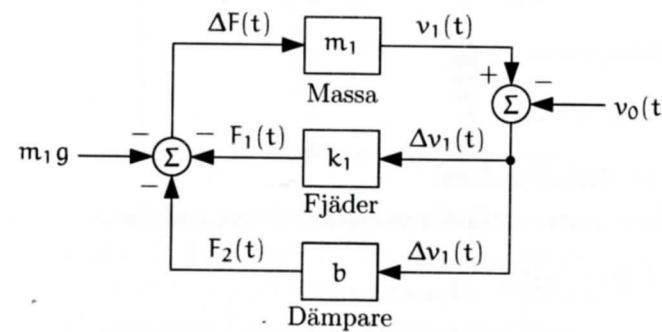


Skillnaden mot b) är enbart bytet av insignal från $F(t)$ till $v_0(t)$.

2. Det nya blockschemat är (massa + fjäder + dämpare):



3. Delsystem:



Fas II Basekvationer:

Massan:

$$\Delta F(t) = -m_1 g - F_1(t) - F_2(t)$$

$$\Delta F(t) = m_1 \dot{v}_1(t).$$

Fjädern: ($\Delta x(t)$ är avvikelsen från obelastat läge)

$$\Delta v_1(t) = v_1(t) - v_0(t)$$

$$F_1(t) = k_1 \int^t \Delta v_1(s) ds \triangleq k_1 \Delta x(t)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta v_1(t).$$

Dämparen:

$$F_2(t) = b \Delta v_1(t).$$

Fas III Tillståndsform:

Välj t ex $x_1(t) = \Delta x(t)$, $x_2(t) = v_1(t)$ samt $y(t) = x_2(t)$ och $u(t) = v_0(t)$. Detta ger

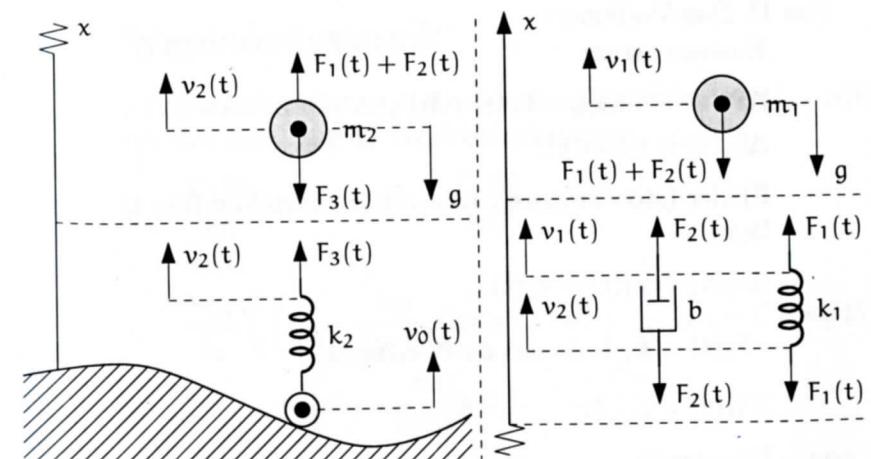
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1}{m_1}x_1(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}u(t) - g$$

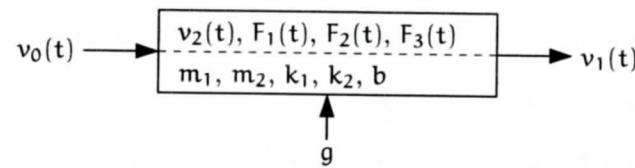
$$y(t) = x_2(t).$$

d) **Fas I** Problemet struktureras:

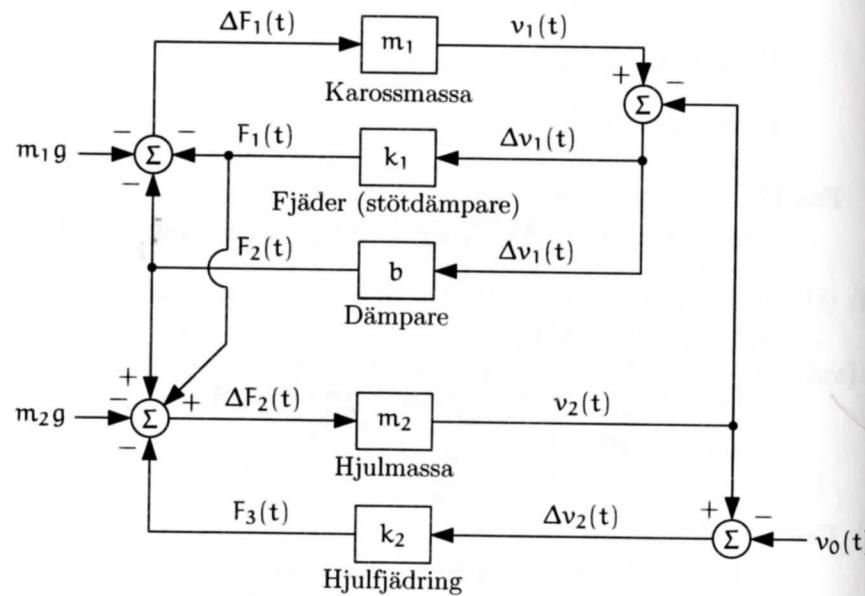
1. Frilägg de mekaniska komponenterna:



2. Blockschema (kaross + stötdämpare + fälgar + hjul):



3. Delsystem:



Fas II Basekvationer:

Karossmassan:

$$\Delta F_1(t) = -m_1 g - F_1(t) - F_2(t)$$

$$\Delta F_1(t) = m_1 \dot{v}_1(t).$$

Fjäder (stötdämppare): ($\Delta x_1(t)$ är avvikelsen från obelastat läge)

$$\Delta v_1(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

$$F_1(t) = k_1 \int^t \Delta v_1(s) ds \triangleq k_1 \Delta x_1(t)$$

$$\Delta \dot{x}_1(t) = \Delta v_1(t).$$

Dämparen:

$$F_2(t) = b \Delta v_1(t).$$

Hjulmassan:

$$\Delta F_2(t) = -m_2 g + F_1(t) + F_2(t) - F_3(t)$$

$$\Delta F_2(t) = m_2 \dot{v}_2(t).$$

Fjäder (hjul): ($\Delta x_2(t)$ är avvikelsen från obelastat läge)

$$\Delta v_2(t) = v_2(t) - v_0(t)$$

$$F_3(t) = k_2 \int^t \Delta v_2(s) ds \triangleq k_2 \Delta x_2(t)$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = \Delta v_2(t).$$

Fas III Tillståndsform:

Lämpliga tillståndsvariabler är t ex $x_1(t) = \Delta x_1(t)$, $x_2(t) = v_1(t)$, $x_3(t) = \Delta x_2(t)$ och $x_4(t) = v_2(t)$, samt $u(t) = v_0(t)$ och $y(t) = x_2(t)$ som förut. Tillståndsekvationerna blir då

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_4(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1}{m_1}x_1(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) - g$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) - u(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k_1}{m_2}x_1(t) + \frac{b}{m_2}x_2(t) - \frac{k_2}{m_2}x_3(t) - \frac{b}{m_2}x_4(t) - g$$

$$y(t) = x_2(t).$$

3.4 Flygplansdynamik

Här krävs 3 tillståndsvariabler. Introduceras tillstånden $x_1(t) = \alpha(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$, och $x_3(t) = \dot{\theta}(t)$ fås tillståndsformen

$$\dot{x}_1(t) = \frac{C_1 S q}{m V} x_1(t) + x_3(t) + \frac{C_2 S q}{m V} u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) = & \frac{S q c}{I_y} \left(\left(C_4 + \frac{S q c}{2 m V^2} C_1 C_3 \right) x_1(t) + \frac{c}{2 V} (C_3 + C_5) x_3(t) \right. \\ & \left. + \left(C_6 + \frac{S q c}{2 m V^2} C_2 C_3 \right) u(t) \right), \end{aligned}$$

där $u(t) = \delta(t)$. Den sista ekvationen fås genom att ersätta $\dot{\alpha}(t) = \dot{x}_1(t)$ med den första ekvationens högerled.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}(t), \quad (3.19)$$

dvs vi har fortfarande beroende ekvationer. Den första ekvationen i (3.19) är återigen ett statiskt samband mellan tillståndsvariablerna:

$$2x_2(t) + x_3(t) = \dot{u}(t) \Rightarrow x_3(t) = -2x_2(t) + \dot{u}(t).$$

Använder vi detta och derivatan därav,

$$\dot{x}_3(t) = -2\dot{x}_2(t) + \ddot{u}(t),$$

för att eliminera $x_3(t)$ och $\dot{x}_3(t)$ ur andra ekvationen i (3.19) fås

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + \ddot{u}(t).$$

Systemet blir alltså av första ordningen för $\beta = 2$. Vi vill nu införa en ny tillståndsvariabel $z(t)$, så att $\dot{u}(t)$ och $\ddot{u}(t)$ försvinner ur tillståndsekvationen. Då valet inte är direkt glasklart ansätter vi

$$z(t) = x_2(t) + \alpha_1 u(t) + \alpha_2 \dot{u}(t).$$

Deriveras denna fås

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}_2(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_2 \ddot{u}(t) \\ &= -2x_2(t) + \ddot{u}(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_2 \ddot{u}(t) \\ &= -2z(t) + 2\alpha_1 u(t) + (2\alpha_2 + \alpha_1) \dot{u}(t) + (1 + \alpha_2) \ddot{u}(t), \end{aligned}$$

vilket med $\alpha_2 = -1$ och $\alpha_1 = 2$ ger tillståndsformen

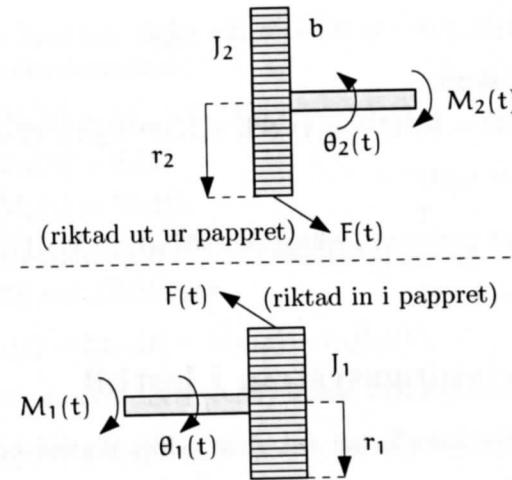
$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -2z(t) + 4u(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{u}(t), \end{aligned}$$

som alltså har $B_1 = B_2 = 0$.

3.6 Mekanisk utväxing

Fas I Problemet struktureras:

Frilägg kugghjulen:



Fas II Basekvationer:

Mellan vinkelhastigheterna råder det statiska sambandet

$$\dot{\theta}_1(t) = r\dot{\theta}_2(t),$$

och därmed även

$$\ddot{\theta}_1(t) = r\ddot{\theta}_2(t). \quad (3.20)$$

Newtonens momentlag ger

$$J_1 \ddot{\theta}_1(t) = M_1(t) - r_1 F(t)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2(t) = r_2 F(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t).$$

Löser vi ut kraften $F(t)$ ur dessa fås sambandet

$$-\frac{J_1}{r_1} \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{r_1} M_1(t) = \frac{J_2}{r_2} \ddot{\theta}_2(t) + \frac{1}{r_2} M_2(t) + \frac{b}{r_2} \dot{\theta}_2(t),$$

eller ekvivalent

$$J_1 \frac{r_2}{r_1} \ddot{\theta}_1(t) + J_2 \ddot{\theta}_2(t) = \frac{r_2}{r_1} M_1(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t),$$

vilket, om vi eliminerar $\ddot{\theta}_1(t)$ med hjälp av (3.20) och använder $r = \frac{r_2}{r_1}$, kan skrivas

$$(J_1 r^2 + J_2) \ddot{\theta}_2(t) = r M_1(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t).$$

De två momentekvationerna reduceras således till en momentekvation, vilken uppvisar ett resulterande tröghetsmoment på

$$J = J_1 r^2 + J_2.$$

Fas III Tillståndsform:

Låt t ex $x_1(t) = \theta_2(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$, vilket ger

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J_1 r^2 + J_2} (-bx_2(t) + rM_1(t) - M_2(t))$$

$$y(t) = x_1(t).$$

3.7 Framdrivningssystem i lastbil

a) Ekvationer för växellådan (utväxlingsförhållande och momentbalans):

$$\theta_c(t) = r_t \theta_t(t) \quad (3.21)$$

$$J_t \ddot{\theta}_t(t) = r_t M_t(t) - b_t \dot{\theta}_t(t) - M_p(t), \quad (3.22)$$

för kardanaxeln (utväxlingsförhållande och momentbalans):

$$\theta_t(t) = \theta_p(t) \quad (3.23)$$

$$M_p(t) = M_f(t), \quad (3.24)$$

och för kardanknuten (utväxlingsförhållande och momentbalans):

$$\theta_p(t) = r_f \theta_f(t) \quad (3.25)$$

$$J_f \ddot{\theta}_f(t) = r_f M_f(t) - b_f \dot{\theta}_f(t) - M_d(t). \quad (3.26)$$

Vi vill alltså ha en ekvation i $\theta_c(t)$, $M_t(t)$ och $M_d(t)$. Utnyttjas sambanden (3.21) och (3.24) i (3.22) får

$$J_t \ddot{\theta}_c(t) = r_t^2 M_t(t) - b_t \dot{\theta}_c(t) - r_t M_f(t). \quad (3.27)$$

Oönskad i ekvation (3.27) är fortfarande $M_f(t)$. Med ekvationerna (3.21), (3.23) samt (3.25) i (3.26) får

$$M_f(t) = \frac{J_f}{r_t r_f^2} \ddot{\theta}_c(t) + \frac{b_f}{r_t r_f^2} \dot{\theta}_c(t) + \frac{1}{r_f} M_d(t),$$

vilket insatt i (3.27) till slut renderar differentialekvationen

$$(J_t r_f^2 + J_f) \ddot{\theta}_c(t) + (b_t r_f^2 + b_f) \dot{\theta}_c(t) = r_t^2 r_f^2 M_t(t) - r_t r_f M_d(t). \quad (3.28)$$

b) Vi börjar med att lägga till motorn och kopplingen. Dessa beskrivs av ekvationerna

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) = M_m(t) - M_{fr}(t) - M_c(t) \quad (3.29)$$

$$\theta_m(t) = \theta_c(t) \quad (3.30)$$

$$M_c(t) = M_t(t). \quad (3.31)$$

Vi vill nu eliminera $\theta_c(t)$ och $M_t(t)$ i ekvation (3.28). Ekvationerna (3.29) och (3.31) ger

$$M_t(t) = M_m(t) - M_{fr}(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t),$$

vilket tillsammans med (3.30) insatt i (3.28) resulterar i

$$(J_m r_t^2 r_f^2 + J_t r_f^2 + J_f) \ddot{\theta}_m(t) + (b_t r_f^2 + b_f) \dot{\theta}_m(t) = r_t^2 r_f^2 (M_m(t) - M_{fr}(t)) - r_t r_f (t) M_d(t). \quad (3.32)$$

Detta är en modell för systemet från motorn till kardanknuten. För att lägga till hjulaxlarna och hjulen skriver vi upp motsvarande ekvationer. Hjulaxlarna modelleras som en dämpad fjäder:

$$M_d(t) = M_w(t) = k(\theta_f(t) - \theta_w(t)) + c(\dot{\theta}_f(t) - \dot{\theta}_w(t)).$$

Vi kan uttrycka $\theta_f(t)$ i $\theta_m(t)$ via $\theta_f(t) = \frac{1}{r_t r_f} \theta_m(t)$. Därmed fås

$$M_d(t) = M_w(t) = k \left(\frac{1}{r_t r_f} \theta_m(t) - \theta_w(t) \right) + c \left(\frac{1}{r_t r_f} \dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_w(t) \right). \quad (3.33)$$

Hjulen modelleras som en roterande massa:

$$J_w \ddot{\theta}_w(t) = M_w(t) - M_g(t). \quad (3.34)$$

Använder vi (3.33) för att eliminera $M_d(t)$ respektive $M_w(t)$ ur (3.32) och (3.34) får differentialekvationerna

$$(J_m r_t^2 r_f^2 + J_t r_f^2 + J_f) \ddot{\theta}_m(t) + (b_t r_f^2 + b_f + c) \dot{\theta}_m(t) + k \theta_m(t) - c r_t r_f \dot{\theta}_w(t) - k r_t r_f \theta_w(t) = r_t^2 r_f^2 (M_m(t) - M_{fr}(t)),$$

$$J_w \ddot{\theta}_w(t) + c \dot{\theta}_w(t) + k \theta_w(t) - \frac{c}{r_t r_f} \dot{\theta}_m(t) - \frac{k}{r_t r_f} \theta_m(t) = -M_g(t).$$

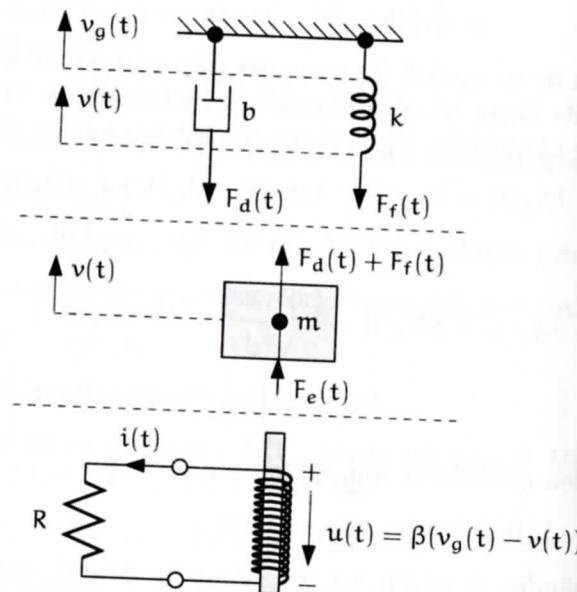
Väljs $\theta_m(t)$, $\dot{\theta}_m(t)$, $\theta_w(t)$ och $\dot{\theta}_w(t)$ som tillståndsvariabler och $M_m(t)$, $M_{fr}(t)$ samt $M_g(t)$ som insignaler, så fås en (fjärde ordningens) tillståndsform för hela framdrivningssystemet.

Anmärkning: En mer omfattande modell för framdrivningsystemet finns beskriven i Pettersson [16]. Speciellt betraktas där fallet med fjädrande axlar, olinjära kopplingar och därtill olika sätt att beskriva rull- samt luftmotstånd.

3.8 Seismometer

Fas I Problemet struktureras:

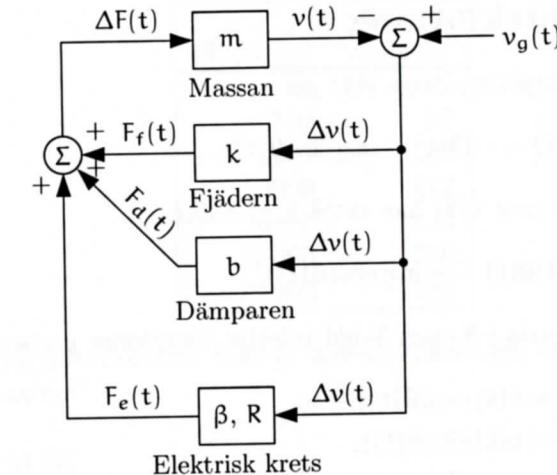
Frilägg komponenterna:



Ett blockschema för delsystemen visas överst på nästa sida.

Gravitationen kan utelämnas då vi utgår från att mass/fjädersystemet är i jämvikt.

Fas II Basekvationer:



Newton's kraftlag tillsammans med elementära elektriska samband ger

$$m\ddot{v}(t) = F_f(t) + F_d(t) + F_e(t)$$

$$\Delta v(t) = v_g(t) - v(t)$$

$$F_f(t) = k \int^t \Delta v(s) ds \triangleq k \Delta x(t)$$

$$F_d(t) = b \Delta v(t)$$

$$F_e(t) = \beta i(t)$$

$$u(t) = \beta \Delta v(t)$$

$$u(t) = R i(t).$$

Fas III Tillståndsform:

Lämpliga tillståndsvariabler är t ex $x_1(t) = v(t)$ och $x_2(t) = \Delta x(t)$. Insignal är $v_g(t)$ och utsignal är spänningen $y(t) = u(t) = \beta \Delta v(t) = \beta(v_g(t) - x_1(t))$. Tillståndsformen blir

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{m} \left(b + \frac{\beta^2}{R} \right) x_1(t) + \frac{k}{m} x_2(t) + \frac{1}{m} \left(b + \frac{\beta^2}{R} \right) v_g(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + v_g(t)$$

$$y(t) = -\beta x_1(t) + \beta v_g(t).$$

Kapitel 4

Modellförenklingar

4.1 Befolningsstatistik

Vi har att

$$z_1(t+1) = \sum_{k=0}^{19} x_k(t+1) = \sum_{k=0}^{110} \alpha_k x_k(t) + \sum_{k=0}^{18} \beta_k x_k(t)$$

$$z_2(t+1) = \sum_{k=20}^{65} x_k(t+1) = \sum_{k=19}^{64} \beta_k x_k(t)$$

$$z_3(t+1) = \sum_{k=66}^{110} x_k(t+1) = \sum_{k=65}^{109} \beta_k x_k(t).$$

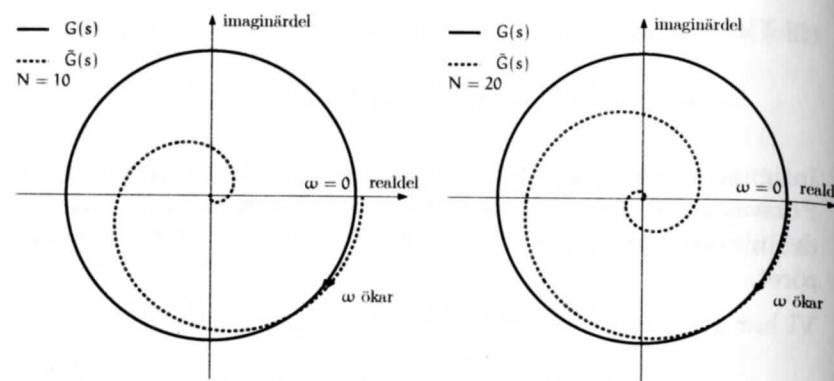
Observera hur summationsindexet k varierar i dessa uttryck. För att kunna återföra högerleden till de aggregerade tillståndsvariablerna, $z_j(t)$, måste vi kunna uttrycka $x_k(t)$ i termer av $z_j(t)$. Detta är möjligt om åldersprofilen inom varje ålderskategori är känd. Ett mycket enkelt antagande är att åldersprofilen är jämn, dvs att

$$x_k(t) = \frac{1}{20} z_1(t) \quad 0 \leq k \leq 19$$

$$x_k(t) = \frac{1}{46} z_2(t) \quad 20 \leq k \leq 65$$

$$x_k(t) = \frac{1}{45} z_3(t) \quad 66 \leq k \leq 110.$$

(Hur realistiskt är antagandet om en jämn åldersprofil? Tänk igenom konsekvenserna av antagandet!) Detta ger tillståndsformen



" $G(s)$ " följer alltså en cirkel med radien e^{-1} . Av figuren framgår att approximationen blir bättre ju större N är. Notera dock att approximationen alltid är bättre för låga än för höga frekvenser.

4.4 Bildynamik

Vi börjar med att beskriva systemets krafter. Newtons kraftlag ger

$$m\ddot{v}(t) = F(t) - F_f(t) - F_{\text{vind}}(t) = F(t) - F_f(t) - F_0 - F_1 v^2(t),$$

där m är bilens massa. Stationärt gäller att $\dot{v}(t) = 0$, dvs

$$v(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{F_1} (F(t) - F_f(t) - F_0)}, \quad (4.9)$$

med den positiva lösningen som den enda rimliga. Stationärt gäller vidare att (4.5) kan skrivas som

$$F(t) = \frac{\beta}{\gamma_2} T_k(t) = \frac{\beta K_k}{\gamma_2} \sqrt{H(t-0.1)}, \quad (4.10)$$

där den sista likheten inkluderar transportfordräjningen på 0.1 sekunder. Med $b(t) = K_\varphi \varphi(t)$ i (4.3) får också det statiska sambandet

$$H(t) = \frac{K_b K_\varphi}{\tau} \varphi(t). \quad (4.11)$$

Stationärt gäller nu att $H(t) = H(t-0.1)$. Detta tillsammans med ekvationerna (4.10) och (4.11) i (4.9) ger det sökta statiska sambandet:

$$v(t) = \sqrt{\frac{1}{F_1} \left(\frac{\beta K_k}{\gamma_2} \sqrt{\frac{K_b K_\varphi}{\tau} \varphi(t)} - F_f(t) - F_0 \right)}.$$

4.5 Likströmsmotor med last

Kirchoffs spänningsslag, Ohms lag samt lagen som beskriver spänningsfallet över en ideal spole modellerar den elektriska delen:

$$\begin{aligned} u(t) - u_R(t) - u_L(t) - v(t) \\ = u(t) - R i(t) - L \frac{di(t)}{dt} - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Momentjämvikt för den mekaniska delen:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = T(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt} = k_1 i(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Med tillståndsvariablerna $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ och $x_3(t) = i(t)$ fås tillståndsformen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{f}{J} x_2(t) + \frac{k_1}{J} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{k_2}{L} x_2(t) - \frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

dvs en tillståndsform med 3 tillstånd. Om L är liten sker insvängningen för $x_3(t)$ mycket snabbt; med ett tillräckligt litet L kan man anse att insvängningen sker momentant. Det är då rimlig att sätta $L \dot{x}_3(t) = 0$ (inget spänningssfall över spolen), vilket betyder att den elektriska delen approximeras av det statiska sambandet

$$x_3(t) = -\frac{k_2}{R} x_2(t) + \frac{1}{R} u(t).$$

Detta ger tillståndsformen (som har 2 tillstånd)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{f}{J} + \frac{k_1}{J} \frac{k_2}{R}\right) x_2(t) + \frac{k_1}{J} \frac{1}{R} u(t) \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\frac{1}{C}120m^3(t)h(t)(V(t) - 115) \\ &\quad - \frac{1}{C}36n^4(t)(V(t) - 12) - \frac{1}{C}0.3(V(t) + 10.6)\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\dot{m}(t) = \alpha_m(V(t)) + (\alpha_m(V(t)) + \beta_m(V(t)))m(t) \quad (4.13)$$

$$\dot{h}(t) = \alpha_h(V(t)) + (\alpha_h(V(t)) + \beta_h(V(t)))h(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{n}(t) = \alpha_n(V(t)) + (\alpha_n(V(t)) + \beta_n(V(t)))n(t). \quad (4.15)$$

Eftersom samtliga $\alpha_k(V(t))$ och $\beta_k(V(t))$ beror statiskt på tillståndet $V(t)$ så är ovanstående beskrivning en komplett tillståndsform med 4 tillstånd. Ordningstalet är alltså 4.

- b) Stationärt ska gälla att $\dot{V}(t) = \dot{m}(t) = \dot{h}(t) = \dot{n}(t) = 0$. Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{C}(120m_0^3h_0(V_0 - 115) + 36n_0^4(V_0 - 12) \\ &\quad + 0.3(V_0 + 10.6))\end{aligned}$$

$$0 = \alpha_m(V_0) + (\alpha_m(V_0) + \beta_m(V_0))m_0$$

$$0 = \alpha_h(V_0) + (\alpha_h(V_0) + \beta_h(V_0))h_0$$

$$0 = \alpha_n(V_0) + (\alpha_n(V_0) + \beta_n(V_0))n_0,$$

ur vilka V_0 kan lösas ut.

- c) Eftersom dynamiken i $m(t)$ och $h(t)$ är snabb så kan ekvationerna (4.13) och (4.14) approximeras med statiska samband:

$$m(t) = \frac{\alpha_m(V(t))}{\alpha_m(V(t)) + \beta_m(V(t))}$$

$$h(t) = \frac{\alpha_h(V(t))}{\alpha_h(V(t)) + \beta_h(V(t))}.$$

Detta ger den "förenklade" modellen (av ordning 2)

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\frac{1}{C}120 \left(\frac{\alpha_m(V(t))}{\alpha_m(V(t)) + \beta_m(V(t))} \right)^3 \\ &\quad \cdot \frac{\alpha_h(V(t))}{\alpha_h(V(t)) + \beta_h(V(t))} \cdot (V(t) - 115) \\ &\quad - \frac{1}{C}36n^4(t)(V(t) - 12) - \frac{1}{C}0.3(V(t) + 10.6)\end{aligned}$$

$$\dot{n}(t) = \alpha_n(V(t)) + (\alpha_n(V(t)) + \beta_n(V(t)))n(t),$$

4.9 Tidskonstanter

Lösningarna till tillståndsekvationerna är enkla att beräkna då tillstånden inte påverkar varandra. Vi har att

$$x_1(t) = e^{-0.001t}x_1(0) + 0.001 \int_0^t e^{-0.001(t-\tau)}u(\tau) d\tau, \quad (4.16)$$

$$x_2(t) = e^{-1000t}x_2(0) + 1000 \int_0^t e^{-1000(t-\tau)}u(\tau) d\tau. \quad (4.17)$$

- a) Då simuleringen är lång gäller att första termen i (4.17) snabbt blir liten. Dess verkan kan därför försummas. (Notera att detta inte är fallet i (4.16).) Vidare är integraltermen $e^{-1000(t-\tau)}u(\tau)$ mycket liten utom då τ är nära t . Om $u(t)$ ändras långsamt kan man därför approximera $u(\tau)$ med $u(t)$ utan att integralens värde ändras nämnvärt. Således har vi approximationen

$$\begin{aligned}x_2(t) &\approx 1000u(t) \int_0^t e^{-1000(t-\tau)} d\tau \\ &= (1 - e^{-1000t}) u(t) \approx u(t),\end{aligned}$$

vilket leder till systemapproximationen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -0.001x_1(t) + 0.001u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + u(t).\end{aligned}$$

- b) Betrakta ekvation (4.16). Då $u(t) = K$ (någon konstant) så gäller att integraldelens bidrag till $x_1(t)$ är

$$0.001K \int_0^t e^{-0.001(t-\tau)} d\tau = 0.001K (1 - e^{-0.001t}),$$

som vid korta simuleringsstider ($t = 0.01$) blir mycket liten, åtminstone om K är något så nära begränsad. Det är därför rimligt

att försumma integraltermen vid beräkningen av $x_1(t)$. (Notera att detta inte är fallet för (4.17).) Kvar har vi då att

$$x_1(t) \approx e^{-0.001t} x_1(0) = e^{-1 \cdot 10^{-5}} x_1(0) \approx x_1(0) = 5.$$

En lämplig första ordningens systemapproximation är således

$$\dot{x}_2(t) = -1000x_2(t) + 1000u(t)$$

$$y(t) = 5 + x_2(t).$$

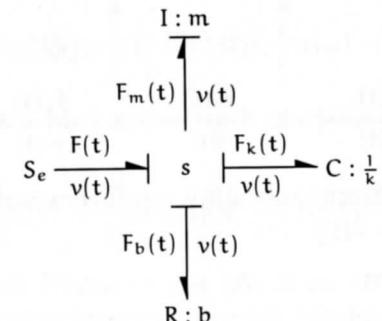
- c) Systemets tidskonstanter är 1000 och 0.001. Eftersom dessa är så olika blir systemet styvt. Det är ett välkänt faktum att styva differentialekvationer är svåra att simulera, åtminstone om ordinära lösningsmetoder används.

Kapitel 5

Bindningsgrafer

5.1 Enkla system

- a) **Bindningsgraf:** I och med att massan (I-element), fjädern (C-element) och dämparen (R-element) alla rör sig med samma hastighet $v(t)$ knyts de ihop av en s-knuspunkt. Den yttre kraften $F(t)$ är en intensitetskälla. Vi får följande bindningsgraf.



Kausalitetsreglerna (boken [12], sid 132–141) ger att grafen har konfliktfri kausalitet (vilket är bra ur beräkningssynpunkt).

Basekvationer:

$$S_e : F(t) \quad (u(t))$$

$$s : F(t) - F_m(t) - F_k(t) - F_b(t) = 0$$

$$I : m : v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F_m(\tau) d\tau \quad (x_1(t))$$

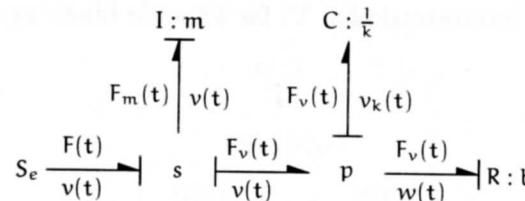
$$R : b : F_b(t) = bv(t)$$

$$C : \frac{1}{k} : F_k(t) = k \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (x_2(t))$$

Tillståndsform: Med insignal och tillstånd enligt ovan fås

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{m} F_m(t) = \frac{1}{m} (u(t) - x_2(t) - bx_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= kv(t) = kx_1(t).\end{aligned}$$

b) **Bindningsgraf:** Här gäller att kraften som påverkar fjädern och dämparen är den samma och lika med den resulterande kraften från vagnen $F_v(t)$. Vagnen känner av hastigheten $v(t)$, fjädern $v_k(t) = v(t) - w(t)$ och dämparen $w(t)$. Då insignalen $F(t)$ (intensitetskälla) och massan har samma hastighet knyts dessa samman via en s-knutpunkt. Detta kopplas sedan till dämparen och fjädern via en p-knutpunkt (ty objekten har olika hastighet men känner av samma kraft). Bindningsgrafen blir således



Grafen har konfliktfri kausalitet (applicera reglerna från kursboken [12], sid 132–141).

Basekvationer:

$$S_e : F(t) \quad (u(t))$$

$$s : F(t) - F_m(t) - F_v(t) = 0$$

$$I : m : v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F_m(\tau) d\tau \quad (x_1(t))$$

$$p : v(t) - v_k(t) - w(t) = 0$$

$$C : \frac{1}{k} : F_v(t) = k \int_0^t v_k(\tau) d\tau \quad (x_2(t))$$

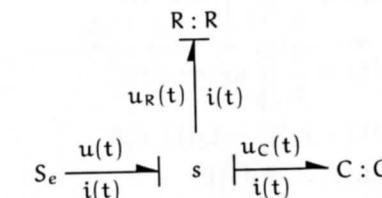
$$R : b : F_v(t) = bw(t).$$

Tillståndsform: Med insignal och tillstånd enligt ovan fås

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{m} F_m(t) = \frac{1}{m} (F(t) - F_v(t)) = \frac{1}{m} (u(t) - x_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = kv(t) = k(v(t) - w(t)) = k(x_1(t) - \frac{1}{b}x_2(t)).$$

c) **Bindningsgraf:** Eftersom komponenterna är seriekopplade fås bindningsgrafen (som har konfliktfri kausalitet)



Basekvationer:

$$S_e : u(t)$$

$$s : u(t) - u_R(t) - u_C(t) = 0$$

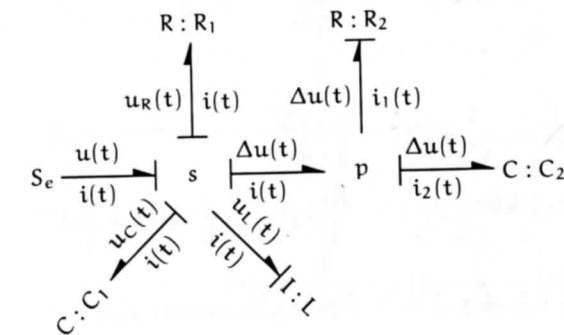
$$R : R : u_R(t) = Ri(t)$$

$$C : C : u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (x_1(t))$$

Tillståndsform: Med spänningen över kondensatoren som tillstånd fås

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} i(t) = \frac{1}{RC} u_R(t) = \frac{1}{RC} (u(t) - x_1(t)).$$

d) **Bindningsgraf:** Eftersom det här finns en parallellkoppling i serie med tre andra komponenter blir bindningsgrafen



vilken har konfliktfri kausalitet.

Basekvationer:

$$S_e : u(t)$$

$$s : u(t) - u_R(t) - u_C(t) - u_L(t) - \Delta u(t) = 0$$

$$R : R_1 : u_R(t) = R_1 i(t)$$

$$C : C_1 : u_C(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (x_1(t))$$

$$I : L : i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \quad (x_2(t))$$

$$p : i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0$$

$$R : R_2 : \Delta u(t) = R_2 i_1(t)$$

$$C : C_2 : \Delta u(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau. \quad (x_3(t))$$

Tillståndsform: Med tillstånd enligt ovan fås

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C_1} i(t) = \frac{1}{C_1} x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{L} u_L(t) = \frac{1}{L} (u(t) - u_R(t) - u_C(t) - \Delta u(t)) \\ &= \frac{1}{L} (u(t) - R_1 x_2(t) - x_1(t) - x_3(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{C_2} i_2(t) = \frac{1}{C_2} (i(t) - i_1(t)) \\ &= \frac{1}{C_2} \left(x_2(t) - \frac{1}{R_2} x_3(t) \right), \end{aligned}$$

eller

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C_1} x_2(t)$$

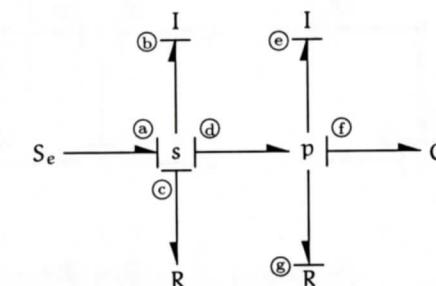
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R_1}{L} x_2(t) - \frac{1}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{C_2} x_2(t) - \frac{1}{R_2 C_2} x_3(t).$$

Kausalitet

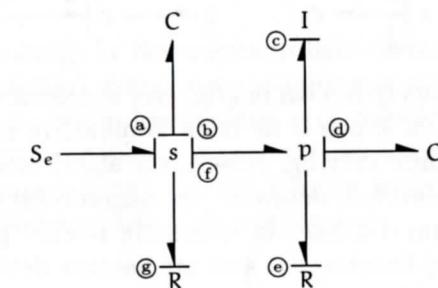
Vi använder algoritmen från kursboken [12], sid 139. (Bokstäverna anger ordningen i vilken kausalitetsmarkeringarna sätts ut.)

a)



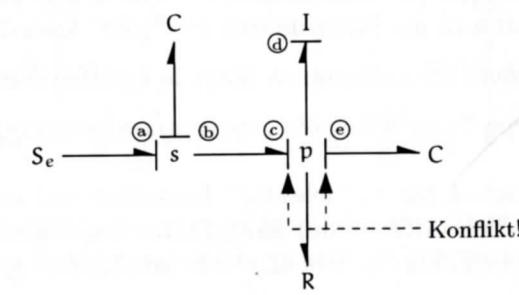
Slutsats: Konfliktfri entydig kausalitet.

b)



Slutsats: Konfliktfri entydig kausalitet.

c)

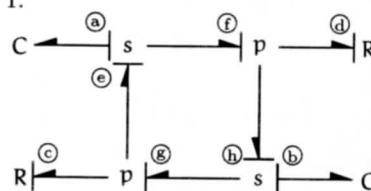


Slutsats: De kausalitetsmarkeringar som är utsatta kan inte flyt-

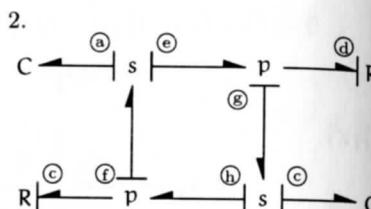
tas. Det går alltså inte att få rätt kausalitet vid p-knuspunkten, dvs ingen konfliktfri kausalitetsmarkering är möjlig.

d)

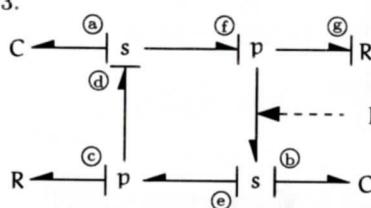
1.



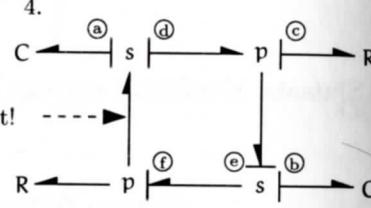
2.



3.



4.

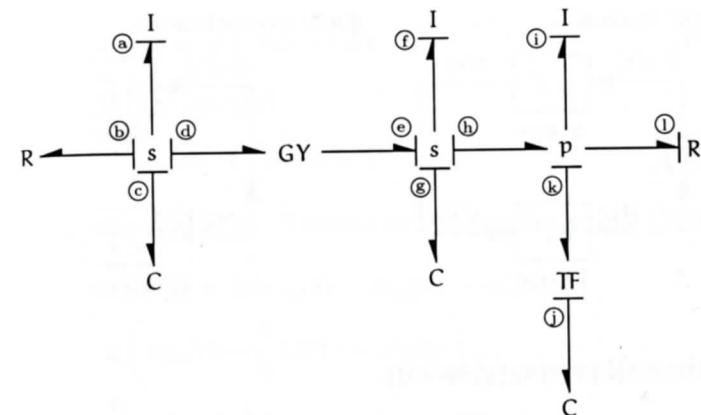


Slutsats: Här finns fyra olika möjligheter att sätta ut kausalitetsmarkeringar. Graf 1 och 2 är båda konfliktfria men olika, dvs kausaliteten är inte entydig. Notera att algoritmen i boken [12] inte klarar av dessa fall; det finns inte någon regel som säger vad som ska göras om det finns kvarvarande s- eller p-knuspunkter vars kausalitet ej fixeras. Ett sätt att hantera detta är att lägga till tre steg i algoritmen:

7. Välj godtycklig s- eller p-knuspunkt som ej har kausalitetsmarkeringar på alla bindningar. Fixera om möjligt markeringarna så att knuspunkten får "rätt" kausalitet.
8. Propagera kausaliteten så långt in i grafen som möjligt.
9. Upprepa 7 och 8 för alla kvarvarande knuspunkter.

I fallen 3 och 4 får vi "felaktig" kausalitet vid en s- eller p-knuspunkt. Beroende på hur kausaliteten hos R-elementen väljs kan vi således få konfliktfria eller icke konfliktfria grafer.

e) Kausalitetsmarkering:



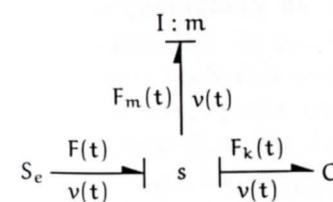
Slutsats: Konfliktfri entydig kausalitet.

5.3 Analogier mellan olika fysikaliska domäner

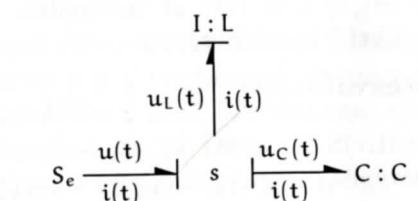
- a) Beteendemässigt är dessa system helt ekvivalenta. Kraften $F(t)$ (intensitetskälla) svarar mot spänningen $u(t)$. I respektive fall genereras ett flöde: hastigheten $v(t)$ respektive strömmen $i(t)$. Vidare svarar massan mot spolen (energiupplagring, i detta fall intensitetsupplagring), medan fjädern motsvarar kondensatoren (energiupplagring, här flödesupplagring).

- b) Bindningsgraf:

Mekaniskt system:

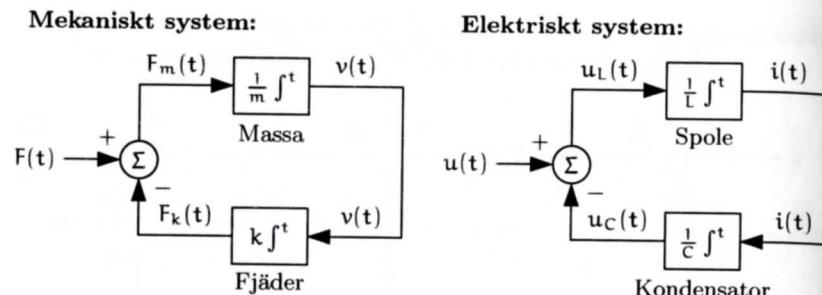


Elektriskt system:



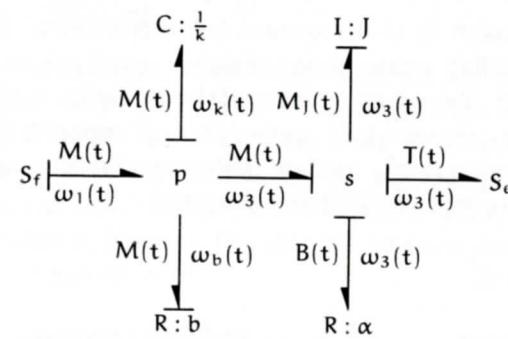
Eftersom systemen är beteendemässigt ekvivalenta så beskrivs de av samma bindningsgraf (då vi bortser från parametervärden).

c) Blockschema:



5.4 Dieseltransmission

Bindningsgraf: Dieselmotorn, den hydrauliska kopplingen och den fjädrande axeln känner av samma moment. Dessa objekt rör sig dessutom med olika vinkelhastigheter, vilket ger att de kopplas samman via en p-knutpunkt. Tröghetsmomentet, friktionen och det yttre momentet verkar däremot vid samma vinkelhastighet, dvs de kopplas samman via en s-knutpunkt. Detta ger



där $\omega_1(t)$ och $T(t)$ är insignaler. Vi får en bindningsgraf som har konfliktfri kausalitet.

Basekvationer:

$$S_f : \omega_1(t) \quad (\text{insignal})$$

$$p : \omega_1(t) - \omega_k(t) - \omega_b(t) - \omega_3(t) = 0$$

$$C : \frac{1}{k} : M(t) = k \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau \quad (\text{tillstånd})$$

$$R : b : M(t) = b\omega_b(t)$$

$$s : M(t) - M_J(t) - B(t) - T(t) = 0$$

$$I : J : \omega_3(t) = \frac{1}{J} \int_0^t M_j(\tau) d\tau \quad (\text{tillstånd})$$

$$R : \alpha : B(t) = \alpha \omega_3(t) \\ S_e : T(t). \quad (\text{insignal})$$

Tillståndsform: Väljer vi tillstånd och insignaler enligt ovan fås

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= k\omega_k(t) = k(\omega_1(t) - \omega_b(t) - \omega_3(t)) \\ &= k \left(\omega_1(t) - \frac{1}{b} M(t) - \omega_3(t) \right) \\ \dot{\omega}_3(t) &= \frac{1}{J} M_j(t) = \frac{1}{J} (M(t) - B(t) - T(t)) \\ &= \frac{1}{J} (M(t) - \alpha \omega_3(t) - T(t)). \end{aligned}$$

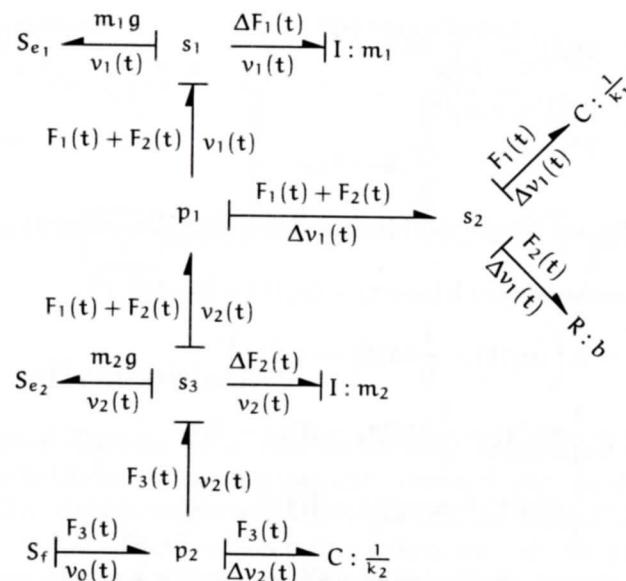
Notera att denna tillståndsframställning skiljer sig från resultatet i uppgift 3.2. Orsaken är att olika tillståndsvariabler används i de båda fallen. De båda framställningarna är dock ekvivalenta i insignal-utsignalmening. Sammanfattningsvis har vi alltså

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -\frac{k}{b} M(t) - k\omega_3(t) + k\omega_1(t) \\ \dot{\omega}_3(t) &= \frac{1}{J} M(t) - \frac{\alpha}{J} \omega_3(t) - \frac{1}{J} T(t) \\ y(t) &= \omega_3(t). \end{aligned}$$

5.5 Fordonsdynamik

Bindningsgraf: Här är $v_0(t)$ insignal (flödeskälla) och $v_1(t)$ utsignal. Vidare kan krafterna som uppstår p g a tyngdaccelerationen g betraktas som störsignaler (intensitetskällor). Med beteckningar enligt ursprungsuppgiften får då bindningsgrafen på nästa sida (vilken är uppbyggd uppifrån och ned på samma sätt som ursprungsfiguren över systemet).

Notera att tyngdkrafterna snarast är att betrakta som intensitets-sänkor. Vidare ser vi att bindningsgrafen har konfliktfri kausalitet. En tillståndsform som beskriver systemet kan därför enkelt konstrueras.



Basekvationer:

$$S_{e_1} : m_1 g$$

(insignal)

$$s_1 : F_1(t) + F_2(t) - m_1 g - \Delta F_1(t) = 0$$

$$I : m_1 : v_1(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^t \Delta F_1(\tau) d\tau \quad (x_2(t))$$

$$p_1 : v_2(t) - \Delta v_1(t) - v_1(t) = 0$$

$$s_2 : F_1(t) + F_2(t) - F_1(t) - F_2(t) = 0$$

$$C : \frac{1}{k_1} : F_1(t) = k_1 \int_0^t \Delta v_1(\tau) d\tau \quad (-k_1 x_1(t))$$

$$R : b : F_2(t) = b \Delta v_1(t)$$

$$S_{e_2} : m_2 g$$

(insignal)

$$s_3 : F_3(t) - F_1(t) - F_2(t) - m_2 g - \Delta F_2(t) = 0$$

$$I : m_2 : v_2(t) = \frac{1}{m_2} \int_0^t \Delta F_2(\tau) d\tau \quad (x_4(t))$$

$$p_2 : v_0(t) - \Delta v_2(t) - v_2(t) = 0$$

$$S_f : v_0(t)$$

(u(t))

$$C : \frac{1}{k_2} : F_3(t) = k_2 \int_0^t \Delta v_2(\tau) d\tau \quad (-k_2 x_3(t))$$

Tillståndsform: Väljer vi tillståndsvariabler enligt ovan fås

$$\dot{x}_1(t) = -\Delta v_1(t) = v_1(t) - v_2(t) = x_2(t) - x_4(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m_1} \Delta F_1(t) = \frac{1}{m_1} (F_1(t) + F_2(t) - m_1 g)$$

$$= -\frac{k_1}{m_1} x_1(t) - \frac{b}{m_1} (x_2(t) - x_4(t)) - g$$

$$\dot{x}_3(t) = -\Delta v_2(t) = v_2(t) - v_0(t) = x_4(t) - u(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{1}{m_2} \Delta F_2(t) = \frac{1}{m_2} (F_3(t) - F_1(t) - F_2(t) - m_2 g)$$

$$= -\frac{k_2}{m_2} x_3(t) + \frac{k_1}{m_2} x_1(t) + \frac{b}{m_2} (x_2(t) - x_4(t)) - g,$$

vilket betyder att tillståndsformen är

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_4(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1}{m_1} x_1(t) - \frac{b}{m_1} x_2(t) + \frac{b}{m_1} x_4(t) - g$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) - u(t)$$

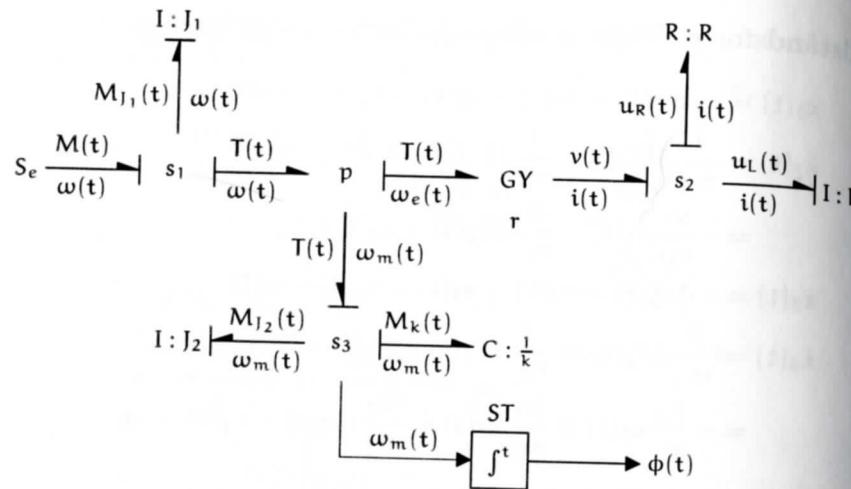
$$\dot{x}_4(t) = \frac{k_1}{m_2} x_1(t) + \frac{b}{m_2} x_2(t) - \frac{k_2}{m_2} x_3(t) - \frac{b}{m_2} x_4(t) - g$$

$$y(t) = x_2(t),$$

dvs exakt samma som erhölls i uppgift 3.3 d) (vilket också är anledningen till de något udda valen av tillstånd som gjordes ovan). Konverteras bindningsgrafen till ett blockschema får naturligtvis samma resultat som i ursprungsuppgiften. Se sid 152.

5.6 Momentmätning

Här är vridmomentet $M(t)$ insignal (intensitetskälla) och vridningsvinkel $\phi(t)$ utsignal. Momentet $M(t)$ genererar ett drivande moment $T(t)$ som bromsas dels av den elektriska kretsen och dels av motorns hölje i kombination med fjädern. Den del av momentet som överförs till den elektriska kretsen beskrivs av sambanden $v(t) = k_1 \omega_e(t)$ och $i(t) = \frac{1}{k_2} T(t)$. Om vi antar att $k_1 = k_2 = r$ så betyder detta att energi överförs från den mekaniska till den elektriska delen via en gyrorator. Dessa iakttagelser leder till följande bindningsgraf.



För att få vinkeln $\phi(t)$ har vi här använt ett styrt element, som helt enkelt integrerar signalen $\omega_m(t)$ (signalen tillgänglig i s_3 -knutpunkten) och därigenom skapar $\phi(t)$. Observera också att bindningsgrafen har konfliktfri kausalitet.

Basekvationer:

$$S_e: \quad M(t)$$

$$s_1: \quad M(t) - M_{J_1}(t) - T(t) = 0$$

$$I: J_1: \quad \omega(t) = \frac{1}{J_1} \int_0^t M_{J_1}(\tau) d\tau$$

$$p: \quad \omega(t) - \omega_e(t) - \omega_m(t) = 0$$

$$GY: \quad v(t) = r\omega_e(t), \quad i(t) = \frac{1}{r}T(t)$$

$$s_2: \quad v(t) - u_R(t) - u_L(t) = 0$$

$$R: R: \quad u_R(t) = Ri(t)$$

$$I: L: \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

$$s_3: \quad T(t) - M_{J_2}(t) - M_k(t) = 0$$

$$I: J_2: \quad \omega_m(t) = \frac{1}{J_2} \int_0^t M_{J_2}(\tau) d\tau$$

$$C: \frac{1}{k}: \quad M_k(t) = k \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau$$

$$(u(t))$$

$$(x_1(t))$$

$$(x_2(t))$$

$$(x_3(t))$$

$$(x_4(t))$$

$$ST: \quad \phi(t) = \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau. \quad (y(t) = \frac{1}{k}x_4(t))$$

Här behövs inget extra tillstånd för att generera $\phi(t)$.

Tillståndsform: Med tillståndsvariabler enligt ovan får

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{J_1} M_{J_1}(t) = \frac{1}{J_1} (M(t) - T(t)) = \frac{1}{J_1} (\omega(t) - rx_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L} u_L(t) = \frac{1}{L} (v(t) - u_R(t)) = \frac{1}{L} (r\omega_e(t) - Ri(t))$$

$$= \frac{1}{L} (r(\omega(t) - \omega_m(t)) - Rx_2(t)) \\ = \frac{1}{L} (rx_1(t) - rx_3(t) - Rx_2(t))$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{J_2} M_{J_2}(t) = \frac{1}{J_2} (T(t) - M_k(t)) = \frac{1}{J_2} (rx_2(t) - x_4(t))$$

$$\dot{x}_4(t) = k\omega_m(t) = kx_3(t),$$

eller på matrisform

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{r}{L} & -\frac{R}{L} & -\frac{r}{L} & 0 \\ 0 & \frac{r}{J_2} & 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} x(t) = Cx(t).$$

Kopplingen mellan $u(t) = M(t)$ och $y(t) = \phi(t)$ kan fås om vi undersöker vad som händer stationärt, dvs då $\dot{x}(t) = 0$. Vi har att

$$\phi(t) = y(t) = \frac{1}{k}x_4(t) \stackrel{(3)}{=} \frac{r}{k}x_2(t) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{k}u(t) = \frac{1}{k}M(t),$$

så att det stationärt gäller att $M(t) = k\phi(t)$, vilket betyder att det pålagda momentet $M(t)$ är proportionellt (proportionalitetskonstant k) mot vridningsvinkeln $\phi(t)$. Hur snabbt insvängningen sker mot jämnviktsläget ges av egenvärdena till systemmatrisen A .

5.7 Hydrauliskt-mekaniskt system

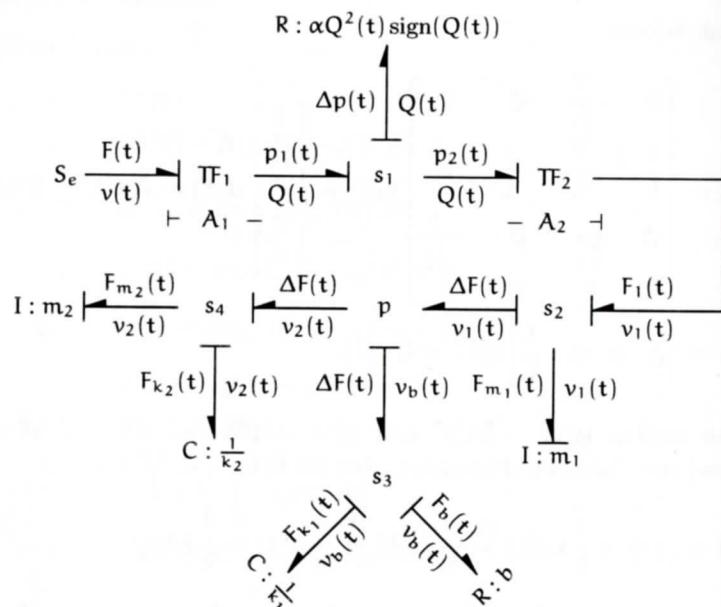
Bindningsgraf: Kraften $F(t)$ överförs först till ett tryck $p_1(t)$, medan hastigheten $v(t)$ övergår i ett flöde $Q(t)$. Detta sker enligt $p_1(t) = \frac{1}{A_1}F(t)$ och $Q(t) = A_1v(t)$, dvs kopplingen ges av en transformator med omsättningstal $\frac{1}{A_1}$.

Vidare noterar vi att flödet genom den hydrauliska delen alltid är det samma, men att en del av trycket $p_1(t)$ förloras på grund av friktion i röret.

Låt $p_2(t)$ beteckna trycket vid rörets utlopp. Tas hänsyn till de i röret uppkomna friktionsförlusterna får $p_1(t) = p_2(t) + \Delta p(t)$.

Trycket $p_2(t)$ och flödet $Q(t)$ överförs därefter vid B till en kraft $F_1(t)$ respektive till en hastighet $v_1(t)$, varigenom den mekaniska delen bringas i rörelse. Detta sker enligt $F_1(t) = A_2p_2(t)$ och $v_1(t) = \frac{1}{A_2}Q(t)$, dvs övergången sker via en andra transformator med omsättningstal A_2 .

Utifrån dessa iakttagelser får nu följande bindningsgraf.



För att få konfliktfri kausalitet måste kraften $F(t)$ vara insignal.

Basekvationer:

$$S_e : F(t) \quad (u(t))$$

$$TF_1 : p_1(t) = \frac{1}{A_1}F(t), \quad Q(t) = A_1v(t)$$

$$s_1 : p_1(t) - \Delta p(t) - p_2(t) = 0$$

$$R : \alpha Q^2(t) \operatorname{sign}(Q(t)) : \Delta p(t) = \alpha Q^2(t) \operatorname{sign}(Q(t))$$

$$TF_2 : F_1(t) = A_2 p_2(t), \quad v_1(t) = \frac{1}{A_2} Q(t)$$

$$s_2 : F_1(t) - F_{m_1}(t) - \Delta F(t) = 0$$

$$I : m_1 : v_1(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^t F_{m_1}(\tau) d\tau \quad (x_1(t))$$

$$p : v_1(t) - v_b(t) - v_2(t) = 0$$

$$s_3 : \Delta F(t) - F_b(t) - F_{k_1}(t) = 0$$

$$R : b : F_b(t) = b v_b(t)$$

$$C : \frac{1}{k_1} : F_{k_1}(t) = k_1 \int_0^t v_b(\tau) d\tau \quad (x_2(t))$$

$$s_4 : \Delta F(t) - F_{k_2}(t) - F_{m_2}(t) = 0$$

$$I : m_2 : v_2(t) = \frac{1}{m_2} \int_0^t F_{m_2}(\tau) d\tau \quad (x_3(t))$$

$$C : \frac{1}{k_2} : F_{k_2}(t) = k_2 \int_0^t v_2(\tau) d\tau. \quad (x_4(t))$$

Tillståndsform: Med tillståndsvariabler enligt ovan får

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{m_1} F_{m_1}(t) = \frac{1}{m_1} (F_1(t) - \Delta F(t)) \\ &= \frac{1}{m_1} (A_2 p_2(t) - F_b(t) - F_{k_1}(t)) \\ &= \frac{1}{m_1} (A_2 (p_1(t) - \Delta p(t)) - b v_b(t) - x_2(t)) \\ &= \frac{1}{m_1} \left(\frac{A_2}{A_1} F(t) - A_2 \alpha Q^2(t) \operatorname{sign}(Q(t)) - b (v_1(t) - v_2(t)) - x_2(t) \right) \\ &= \frac{1}{m_1} \left(\frac{A_2}{A_1} u(t) - \alpha A_2^3 v_1^2(t) \operatorname{sign}(v_1(t)) - b x_1(t) + b x_3(t) - x_2(t) \right) \end{aligned}$$

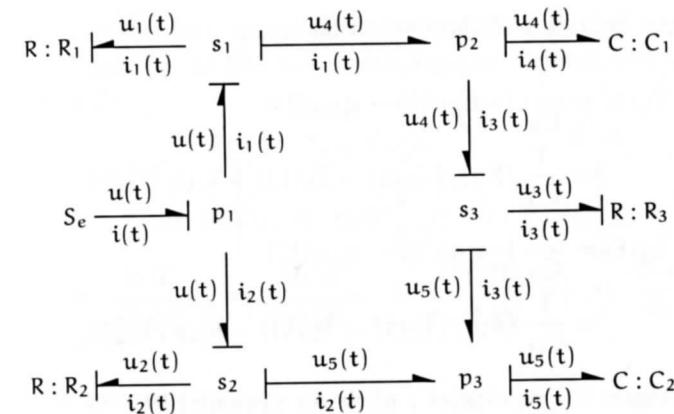
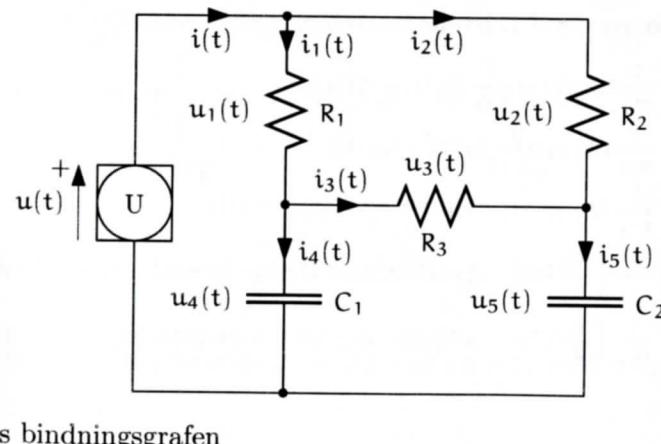
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m_1} \left(\frac{A_2}{A_1} u(t) - \alpha A_2^3 x_1^2(t) \operatorname{sign}(x_1(t)) - bx_1(t) + bx_3(t) - x_2(t) \right) \\
 \dot{x}_2(t) &= k_1 v_b(t) = k_1 (v_1(t) - v_2(t)) = k_1 (x_1(t) - x_3(t)) \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{m_2} F_{m_2}(t) = \frac{1}{m_2} (\Delta F(t) - F_{k_2}(t)) \\
 &= \frac{1}{m_2} (F_b(t) + F_{k_1}(t) - x_4(t)) \\
 &= \frac{1}{m_2} (bv_b(t) + x_2(t) - x_4(t)) \\
 &= \frac{1}{m_2} (b(x_1(t) - x_3(t)) + x_2(t) - x_4(t)) \\
 \dot{x}_4(t) &= k_2 v_2(t) = k_2 x_3(t),
 \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{m_1} \left(-bx_1(t) - x_2(t) + bx_3(t) - \alpha A_2^3 x_1^2(t) \operatorname{sign}(x_1(t)) + \frac{A_2}{A_1} u(t) \right) \\
 \dot{x}_2(t) &= k_1 x_1(t) - k_1 x_3(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{m_2} (bx_1(t) + x_2(t) - bx_3(t) - x_4(t)) \\
 \dot{x}_4(t) &= k_2 x_3(t).
 \end{aligned}$$

5.8 Ett elektriskt och ett termiskt system

a) **Bindningsgraf:** Med beteckningar enligt nedan



vilken har konfliktfri kausalitet.

Basekvationer:

$$S_e : u(t) \quad \text{(insignal)}$$

$$p_1 : i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0$$

$$p_2 : i_1(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0$$

$$p_3 : i_2(t) + i_3(t) - i_5(t) = 0$$

$$s_1 : u(t) - u_1(t) - u_4(t) = 0$$

$$s_2 : u(t) - u_2(t) - u_5(t) = 0$$

$$s_3 : u_5(t) + u_3(t) - u_4(t) = 0$$

$$R : R_1 : u_1(t) = R_1 i_1(t)$$

$$R : R_2 : u_2(t) = R_2 i_2(t)$$

$$R : R_3 : u_3(t) = R_3 i_3(t)$$

$$C : C_1 : u_4(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_4(\tau) d\tau \quad \text{(tillstånd)}$$

$$C : C_2 : u_5(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_5(\tau) d\tau. \quad \text{(tillstånd)}$$

Tillståndsform: Med ekvationer ovan fås tillståndsformen

$$\dot{u}_4(t) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} (u(t) - u_4(t)) + \frac{1}{R_3} (u_5(t) - u_4(t)) \right)$$

$$\dot{u}_5(t) = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} (u(t) - u_5(t)) - \frac{1}{R_3} (u_5(t) - u_4(t)) \right).$$

Antar vi att alla $v(t)$ är stokastiska variabler med medelvärde noll så gäller att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N v(t) = 0,$$

vilket betyder att $\hat{b}_1 \rightarrow b_1$, dvs noggrannheten hos skattningen kan göras godtyckligt bra.

- c) En allmän FIR-struktur (med n parametrar) har regressionsmatris

$$\mathbf{R}_N = \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} u^2(t-1) & u(t-1)u(t-2) & \dots & u(t-1)u(t-n) \\ u(t-2)u(t-1) & u^2(t-2) & \dots & u(t-2)u(t-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-n)u(t-1) & u(t-n)u(t-2) & \dots & u^2(t-n) \end{bmatrix}.$$

Om man ska skatta b_1 (samt resterande parametrar) i en struktur av formen

$$y(t) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + v(t)$$

krävs att \mathbf{R}_N går mot något som kan inverteras då $N \rightarrow \infty$. Detta kan åstadkommas genom att insignalen görs "tillräckligt" variationsrik.

9.10 Noggrannhet vid parameterskattning

- a) Låt $\theta_0^T = [b_0 \ b_1]$ och $\varphi(t) = [u(t) \ u(t-1)]^T$. Det verkliga systemet är därmed $y(t) = \theta_0^T \varphi(t) + e(t)$. Minstakvadratskattningen är

$$\hat{\theta}_N = \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{f}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right],$$

där regressionsmatrisen ges av

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{R}_N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N u^2(t) & \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1) \\ \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1) & \sum_{t=1}^N u^2(t-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) \\ R_u(1) & R_u(0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

För noggrannheten (variansfelet) gäller enligt ledningen att

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_N - \theta_0)(\hat{\theta}_N - \theta_0)^T &= E \begin{bmatrix} (\hat{b}_1 - b_1)^2 & (\hat{b}_1 - b_1)(\hat{b}_2 - b_2) \\ (\hat{b}_1 - b_1)(\hat{b}_2 - b_2) & (\hat{b}_2 - b_2)^2 \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \frac{\lambda}{N} \bar{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{\lambda}{N} \frac{1}{R_u^2(0) - R_u^2(1)} \begin{bmatrix} R_u(0) & -R_u(1) \\ -R_u(1) & R_u(0) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

där $\lambda = 1$ (variansen hos bruset). Variansen hos parameterskattningen ges av diagonalelementen:

$$E(\hat{b}_1 - b_1)^2 = E(\hat{b}_2 - b_2)^2 = \frac{1}{N} \frac{R_u(0)}{R_u^2(0) - R_u^2(1)},$$

som således bara beror på $R_u(0)$ och $R_u(1)$, vilket skulle visas. Notera att variansen går mot noll då $N \rightarrow \infty$. Detta betyder att $\hat{b}_1 \rightarrow b_1$ och $\hat{b}_2 \rightarrow b_2$, dvs konvergens mot de sanna parametervärdena.

- b) Vi har att $0 \leq R_u(0) \leq 1$. Vidare gäller Schwarz olikhet:

$$\begin{aligned} R_u^2(1) &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1) \right)^2 \\ &\leq \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) \right) \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t-1) \right) \\ &= R_u^2(0). \end{aligned}$$

För att minimera variansen bör nämnaren göras så stor som möjligt, varför vi väljer $R_u(1) = 0$ och $R_u(0) = 1$ (som uppfyller olikheten ovan). Varianserna blir då

$$E(\hat{b}_1 - b_1)^2 = E(\hat{b}_2 - b_2)^2 = \frac{1}{N}.$$

9.11 Konvergens hos skattningen

Introducera $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|b)$, där $\hat{y}(t|b) = bu(t-1)$. Vi har att

$$\varepsilon(t) = (1-b)u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t).$$

Variansen hos skattningen är

$$\begin{aligned} E\varepsilon^2(t) &= (1-b)^2E u^2(t-1) + (1-b)E u(t-1)u(t-2) \\ &\quad + 0.25E u^2(t-2) + 2(1-b)E u(t-1)e(t) \\ &\quad + E u(t-2)e(t) + E e^2(t) \\ &= (1-b)^2E u^2(t-1) + (1-b)E u(t-1)u(t-2) \\ &\quad + 0.25E u^2(t-2) + E e^2(t), \end{aligned}$$

där den sista likheten följer av det att insignalen är oberoende av störningen.

a) Om $u(t)$ är vitt brus gäller att $E u(t-1)u(t-2) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} E\varepsilon^2(t) &= (1-b)^2 \underbrace{E u^2(t-1)}_{=1} + 0.25 \underbrace{E u^2(t-2)}_{=1} + \underbrace{E e^2(t)}_{=1} \\ &= (1-b)^2 + 0.25 + 1. \end{aligned}$$

Vi ser direkt att det b -värde som minimerar variansen är 1, och därmed får $\hat{b} = 1$.

b) I detta fallet har vi att $R_u(1) = E u(t-1)u(t-2) = 0.5$, och därmed blir variansen

$$\begin{aligned} E\varepsilon^2(t) &= (1-b)^2 + 0.5(1-b) + 0.25 + 1 \\ &= b^2 - 2.5b + 2.75. \end{aligned}$$

Minimum ges av det b -värde för vilket det gäller att $\frac{dE\varepsilon^2(t)}{db} = 0$. Här får

$$\frac{dE\varepsilon^2(t)}{db} = 2b - 2.5 = 0 \Rightarrow \hat{b} = 1.25.$$

(Minimum ty $\frac{d^2E\varepsilon^2(t)}{db^2} = 2 > 0$.)

9.12 Konvergens hos skattningen

a) Denna uppgift kan lösas på samma sätt som uppgift 9.11 a). Dock blir räkningarna ofta lättare att utföra i frekvensplanet. Då insignalen är vitt brus gäller att $\Phi_u(\omega) = R$ och $H_*(e^{i\omega}) = 1$ (bruset modelleras inte). Vidare har vi $G_0(e^{i\omega}) = b_1 e^{-i\omega} + b_2 e^{-i2\omega}$ (det sanna systemet) samt $G(e^{i\omega}) = b e^{-i\omega}$ (modellen). Med $\theta = b$ i ekvation (12.46) [12] får minstakvadratskattningen

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \arg \min_b \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega})|^2 R d\omega \\ &= \arg \min_b \int_{-\pi}^{\pi} |b_1 e^{-i\omega} + b_2 e^{-i2\omega} - b e^{-i\omega}|^2 R d\omega \\ &= \arg \min_b \int_{-\pi}^{\pi} ((b_1 - b)^2 + 2b_2(b_1 - b) \cos(\omega) + b_2^2) R d\omega \\ &= \arg \min_b 2\pi R((b_1 - b)^2 + b_2^2), \end{aligned}$$

som har min då $b = b_1$, dvs $\hat{b} = b_1$.

b) Mycket smalt frekvensband tolkas här som att endast en frekvens, ω_1 , ger något bidrag, dvs

$$\Phi_u(\omega) = R(\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1))$$

där $\delta(\cdot)$ är en diracfunktion. Integralen i (12.46) (se kursboken [12], sid 296) reduceras då till värdet av $|G_0(\cdot) - G(\cdot)|^2 \Phi_u(\cdot)$ i ω_1 , dvs till

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \arg \min_b \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) d\omega \\ &= \arg \min_b ((b_1 - b)^2 + 2b_2(b_1 - b) \cos(\omega_1) + b_2^2) R \\ &= \arg \min_b V(b). \end{aligned}$$

11.10 Representationsfel i dator

Modellens karakteristiska ekvation är

$$(q - 0.95)^5 = q^5 + a_1 q^4 + a_2 q^3 + a_3 q^2 + a_4 q + a_5 = 0,$$

vilket leder till följande styrbara kanonisk tillståndsform:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] x(t).$$

Enligt förutsättningarna ska $-a_5$ minskas med 10^{-5} , dvs från -0.7737809735 till -0.7737909375 .

Den karakteristiska ekvationen ändras då till

$$(q - 0.95)^5 - 0.00001 = 0,$$

vilken har rötterna

$$q = 0.95 + 0.1e^{\frac{2\pi ik}{5}} \text{ för } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

För $k = 0$ fås roten $q = 1.05$, som alltså ligger utanför enhetscirkeln (de andra polerna ligger innanför denna). Modellen har alltså blivit instabil, trots att vi gjort en relativ förändring på endast 0.001% av en koefficient! Det är ett välkänt faktum att kanoniska former är känsliga för avrundningsfel. Genom att använda andra representationer (t ex balanserad tillståndsrepresentation) så kan detta problem reduceras avsevärt.

11.11 Eulers metod för differentialekvationer

- a) För att undersöka metodernas stabilitet använder vi här testekvationen $\dot{x}(t) = \lambda x(t) = f(x(t))$, där λ reflekterar det största egenvärdet (vilket är helt avgörande för stabiliteten) hos det verkliga systemet.

I. Vanlig Euler: Med testekvationen får lösningen

$$x(h) = x(0) + h\lambda x(0) = (1 + h\lambda)x(0)$$

$$x(2h) = x(h) + h\lambda x(h) = (1 + h\lambda)^2 x(0)$$

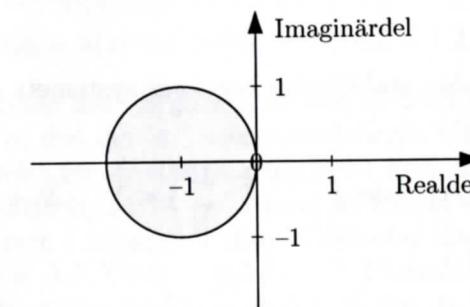
⋮

$$x(nh) = (1 + h\lambda)^n x(0).$$

Kravet för att metoden ska vara asymptotiskt stabil är att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} x(nh) = 0$, vilket här är fallet om

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Då λ kan vara komplex gäller att stabilitetsområdet är en cirkel med radien 1 och medelpunkt i -1 , dvs $h\lambda$ ska ligga i det skuggade området nedan.



II. Omvänd Euler: I detta fall får

$$x(h) = x(0) + h\lambda x(h)$$

$$x(2h) = x(h) + h\lambda x(2h)$$

⋮

$$x(nh) = x((n-1)h) + h\lambda x(nh)$$

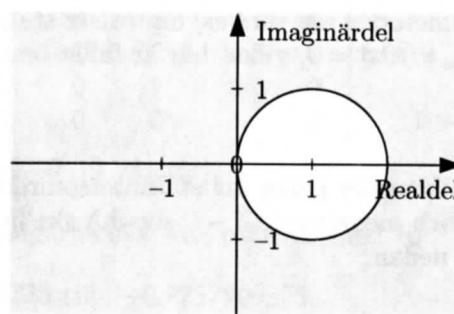
så att

$$x(nh) = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n x(0),$$

vilket ger stabilitet om bara

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1, \text{ dvs } |1 - h\lambda| > 1.$$

Stabilitetsområdet är i detta fall ett område utanför en cirkel med radie 1 och medelpunkt i 1, dvs $h\lambda$ ska ligga i det skuggade området nedan.



- b) För att undersöka stabiliteten beräknas systemets största egenvärde:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i.$$

I. Vanlig Euler: Här måste det gälla att

$$|1 + h\lambda|^2 = |1 - h \mp ih|^2 = 2h^2 - 2h + 1 < 1 \Leftrightarrow h^2 - h = h(h - 1) < 0,$$

vilket betyder att stabilitet fås då $0 < h < 1$.

II. Omvänd Euler: Här måste det gälla att

$$|1 - h\lambda|^2 = |1 + h \pm ih|^2 = (1 + h)^2 + h^2 > 1,$$

vilket är fallet då $h > 0$, dvs stabilitet fås om $h > 0$.

Omvänd Euler (en implicit metod) har som väntat ett större stabilitetsområde än vanlig Euler (en explicit metod).

11.12 Noggrannhet vid användandet av Eulers metod

- a) Med Eulers vanliga metod

$$x(t + h) = x(t) + hf(x(t))$$

ges lösningen till differentialekvationen $\dot{x}(t) = x^2(t) = f(x(t))$ av

$$x(t + h) = x(t) + hx^2(t). \quad (11.9)$$

För $h = 0.1$ får sekvensen

$$x(0) = 1$$

$$x(0.1) = x(0) + 0.1x^2(0) = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$x(0.2) = x(0.1) + 0.1x^2(0.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1^2 = 1.221.$$

- b) För $h = 0.2$ får iterationen (11.9)

$$x(0) = 1$$

$$x(0.2) = x(0) + 0.2x^2(0) = 1 + 0.2 = 1.2.$$

- c) Eulers metod har ett globalt fel som är proportionellt mot steglängden h , dvs det är i storleksordningen $\mathcal{O}(h)$. Antag att det globala felet för steglängden $h_1 = 0.1$ är E . Då bör det globala felet för steglängden $h_2 = 0.2$ vara $2E$. Låt nu $x(0.2)$ beteckna den exakta (men i feluppskattningen okända) lösningen. Låt vidare $x_{h_1}(0.2) = 1.221$ och $x_{h_2}(0.2) = 1.2$ beteckna lösningarna för respektive steglängd vid tiden 0.2. Vi har då ekvationssystemet

$$\begin{cases} E = x(0.2) - x_{h_1}(0.2) \\ 2E = x(0.2) - x_{h_2}(0.2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 0.021 \\ 2E = 0.042 \end{cases} \Rightarrow x(0.2) = 1.242.$$

Då steglängden är $h = 0.1$ får feluppskattningen $E = 0.021$ och då steglängden är $h = 0.2$ får feluppskattningen $2E = 0.042$.

Nu vet vi att den exakta lösningen till differentialekvationen i 0.2 är

$$x(0.2) = \frac{1}{1 - 0.2} = 1.25.$$

De verkliga globala felet är därmed $1.25 - 1.221 = 0.029$ för fallet $h = 0.1$ och $1.25 - 1.2 = 0.05$ för fallet $h = 0.2$. Dessa värden stämmer hyggligt med feluppskattningarna ovan.