INNOVATION

三角形中兩點的圓西瓦三角形透視性質之研究

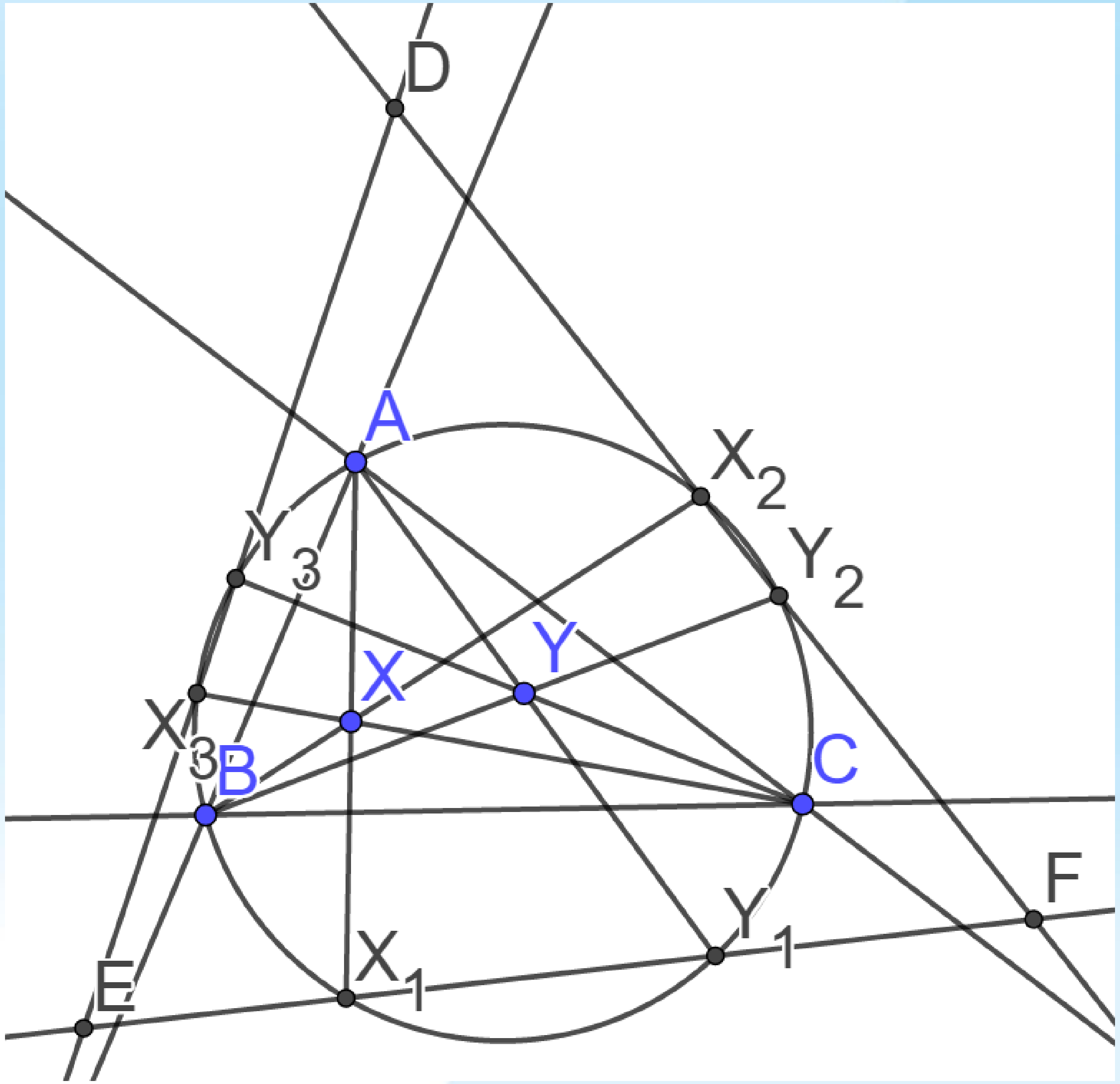
指導老師：尤貴弘老師

227 15 張杰暉

數學組 MATHEMATICS

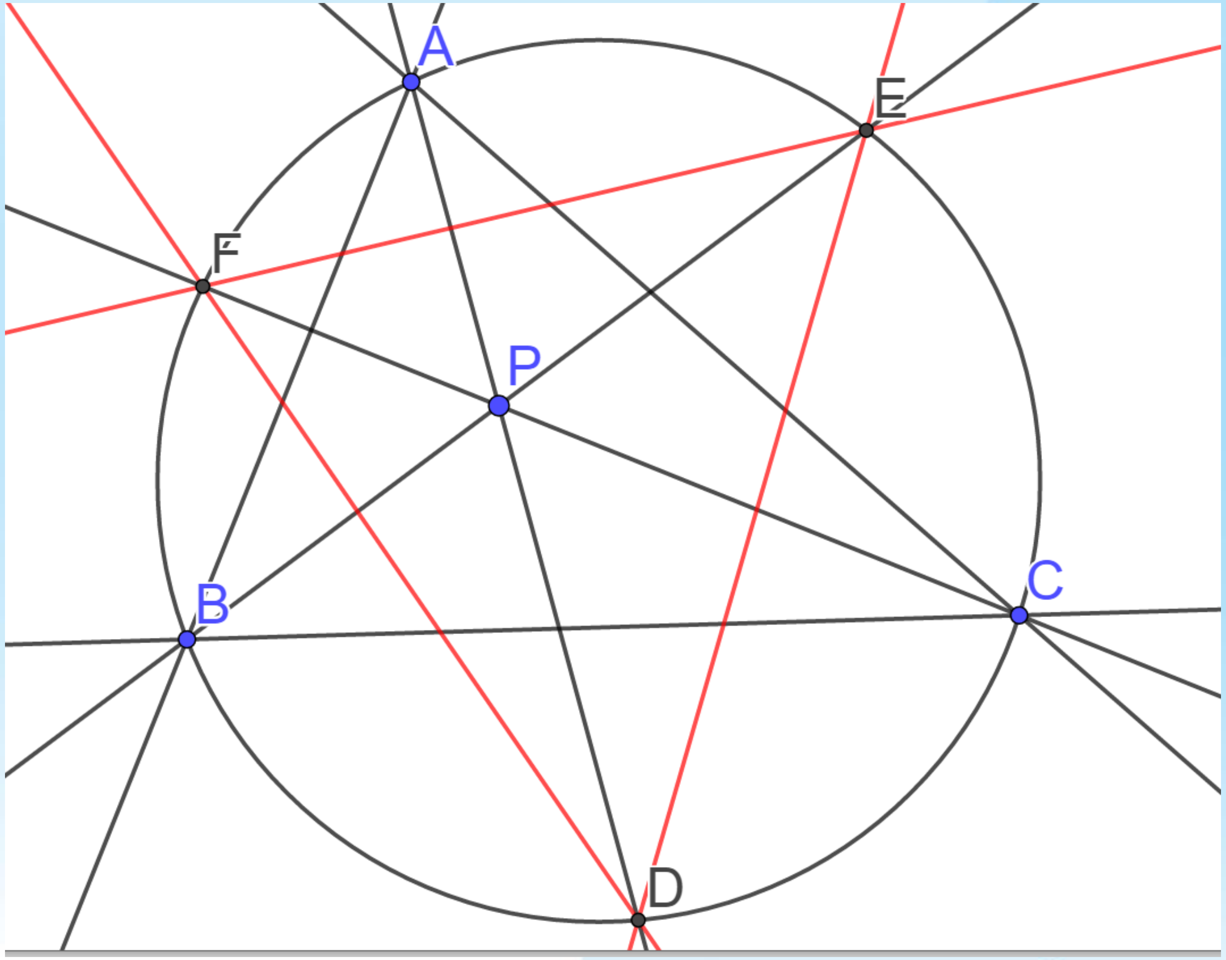
摘要

- 本研究以圓西瓦三角形為主軸，探討一些特殊點的性質。發現任意兩點的圓西瓦三角形對應頂點相連，會與原三角形透視，想嘗試證明此結果。



名詞定義

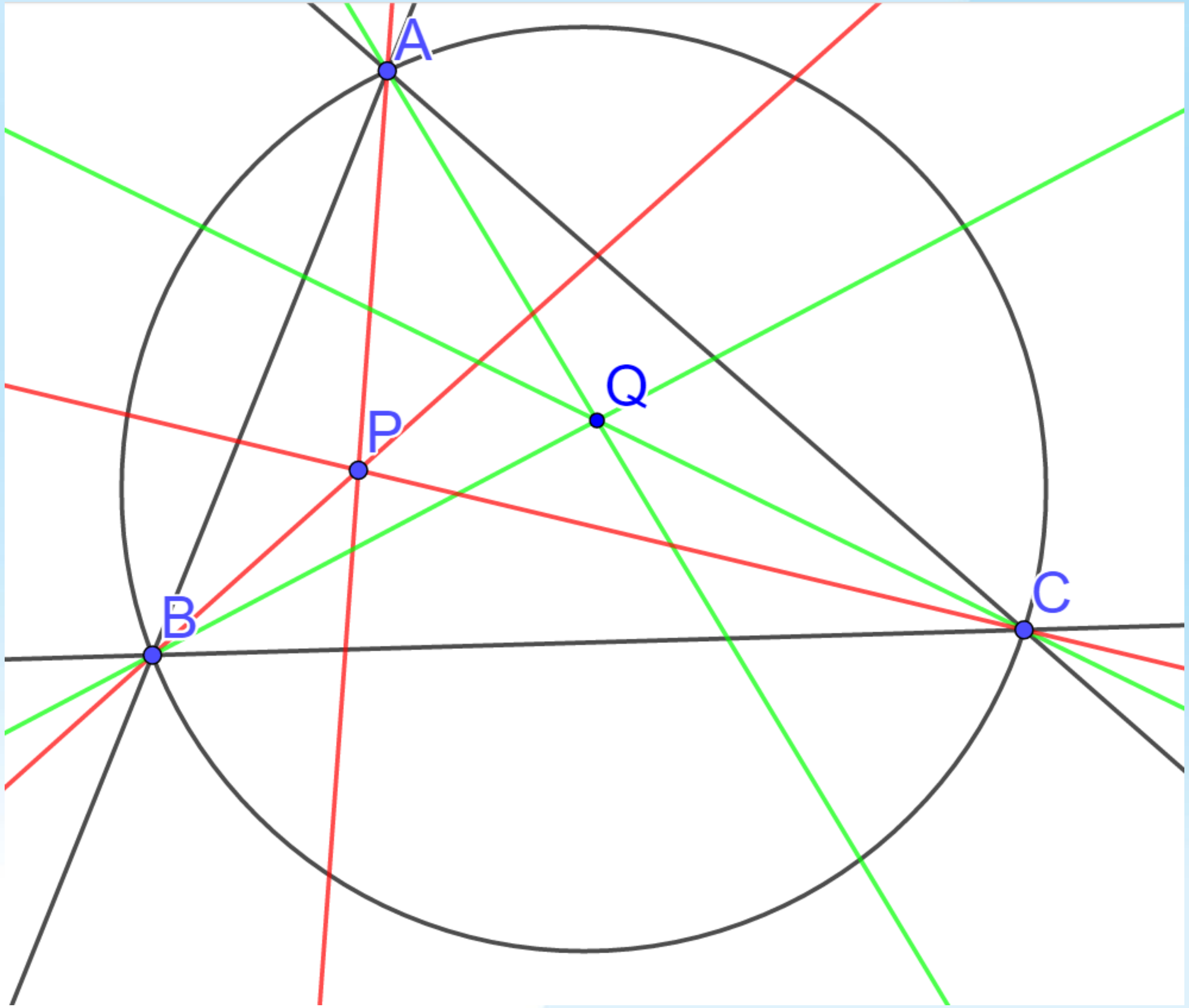
- 圓西瓦三角形：三角形ABC，平面一點P，連AP、BP、CP分別交外接圓於D、E、F
- 三角形DEF稱作P對三角形ABC的圓西瓦三角形



INNOVATION

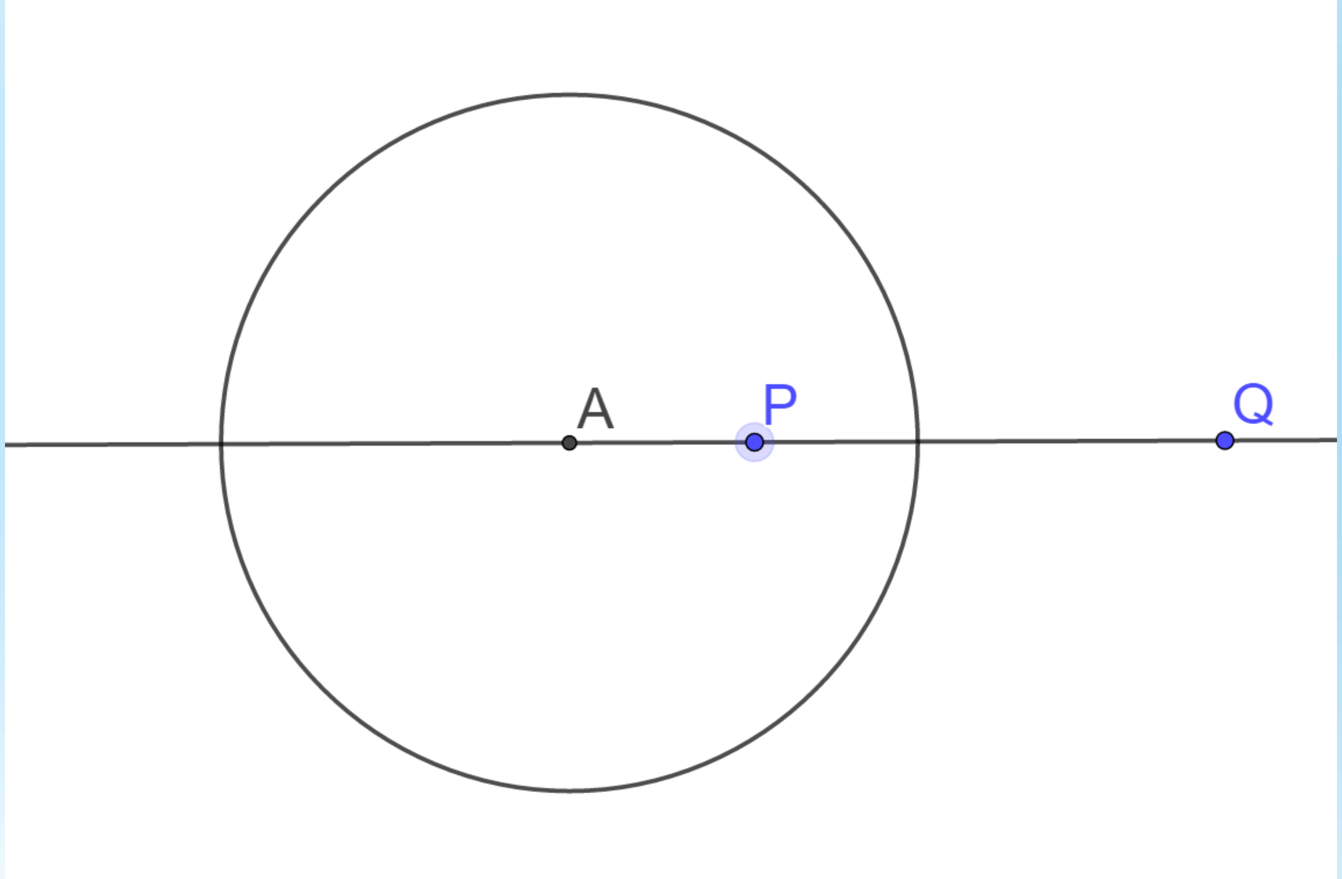
名詞定義

- 等角共軛點：三角形ABC，平面一點P，作AP、BP、CP的等角線，則AP、BP、CP共點在Q
- Q稱作P對三角形ABC的等角共軛點



名詞定義

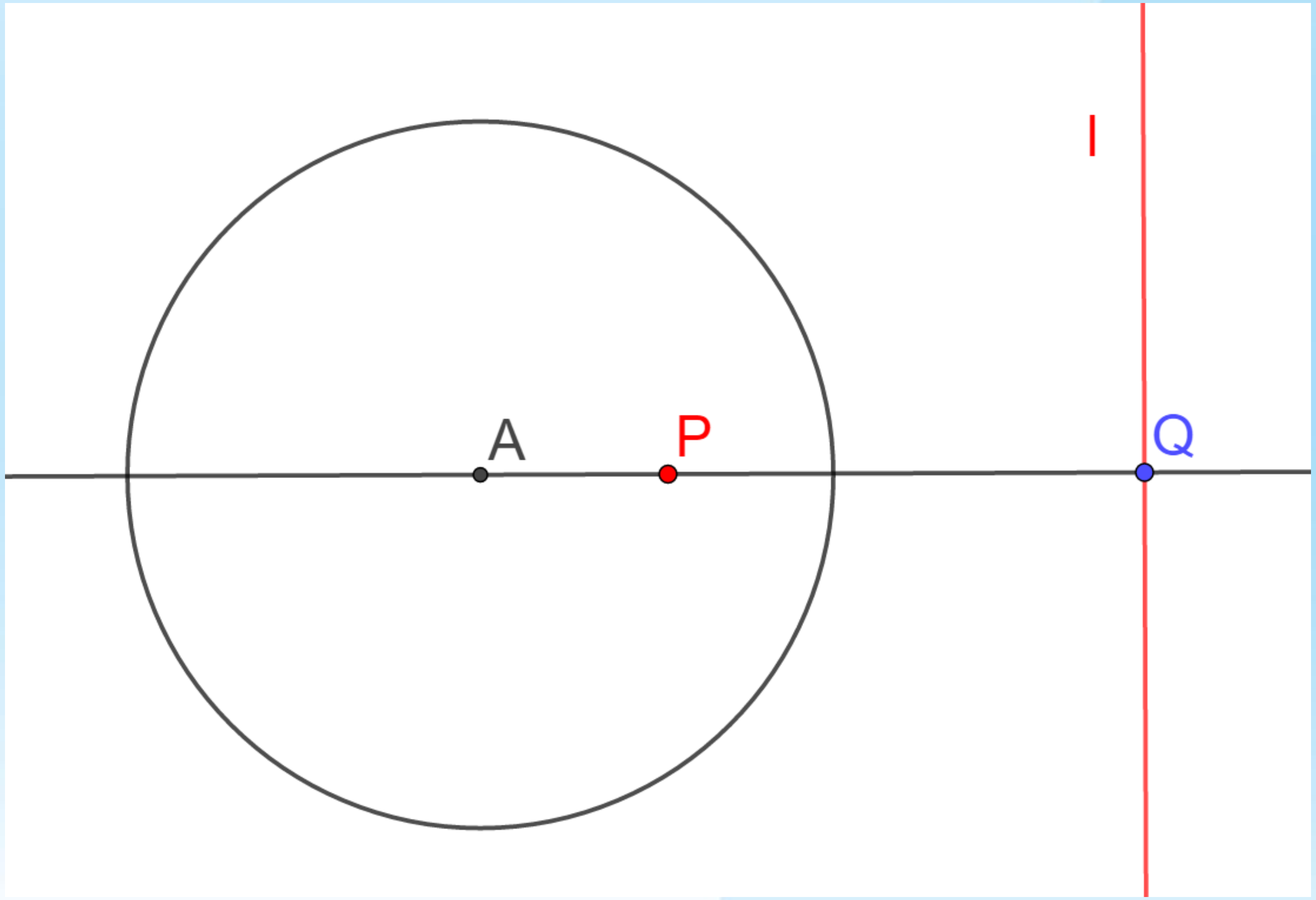
- 反演：A為反演中心，$AP*AQ=r^2$，P、Q互為反演點，r^2為反演冪



INNOVATION

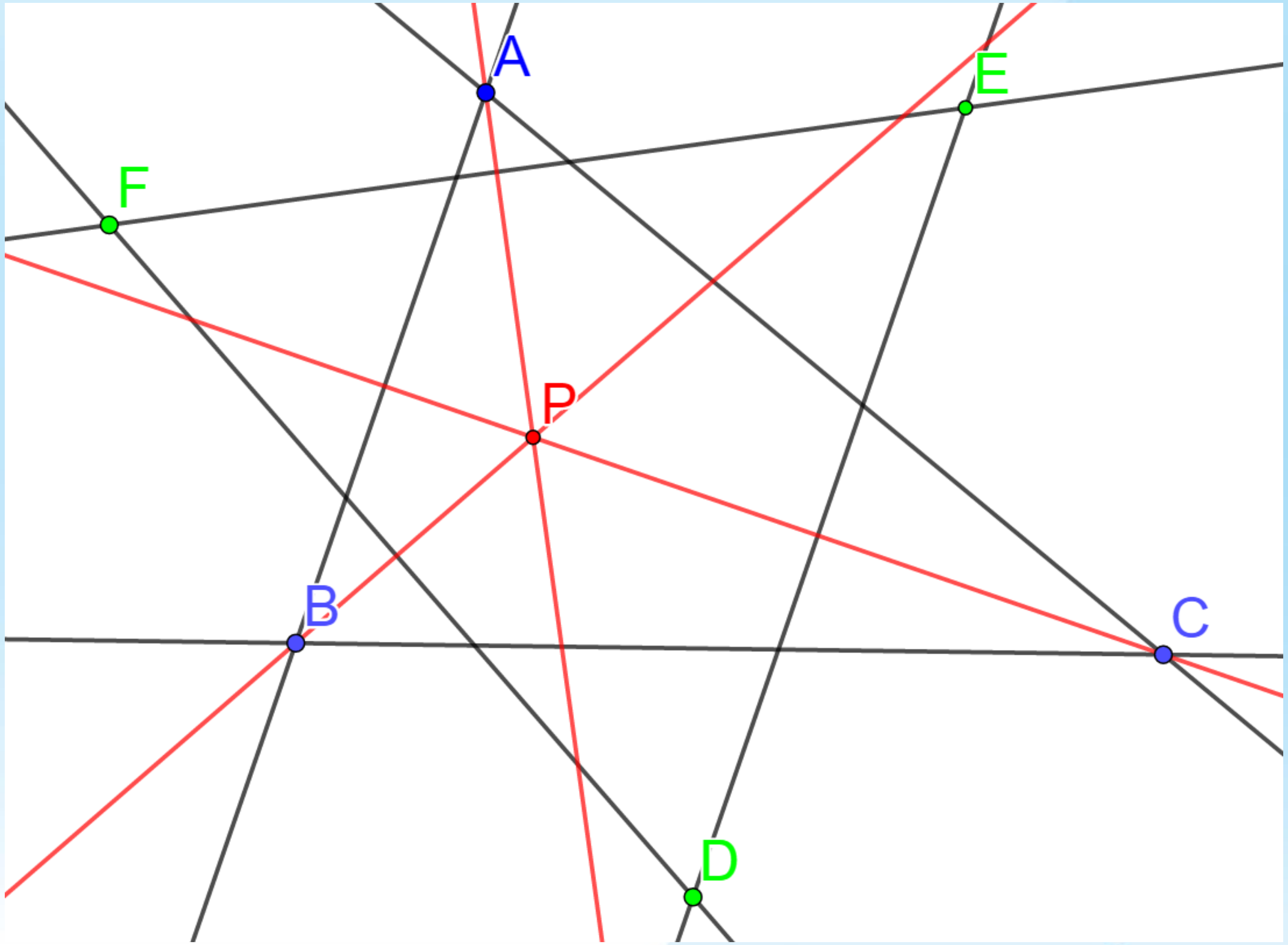
名詞定義

- 配極：A為反演中心，P反演到Q，作過Q且垂直AQ的直線l
- 稱P經過此配極變換變成l且l亦經此配極變成P



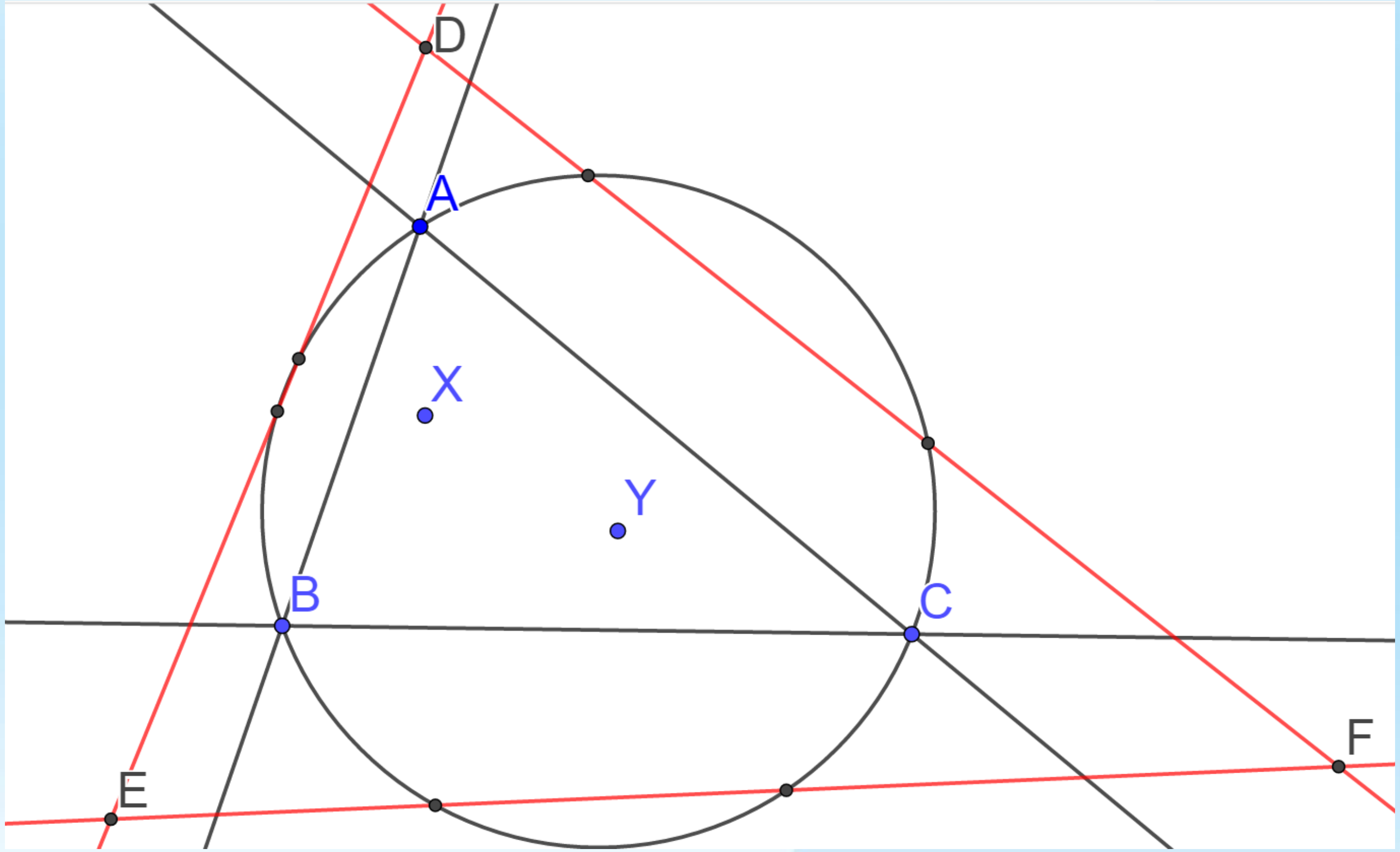
名詞定義

- 正交：有兩三角形，其中一個三角形的三頂點分別作與另一個三角形的對應邊垂直的線，若三垂直線共點在P
- 稱共點P為兩三角形的正交中心



名詞定義

- 函數F(X、Y)：X、Y分別對三角形ABC的圓西瓦三角形對應頂點相連所圍出的三角形DEF



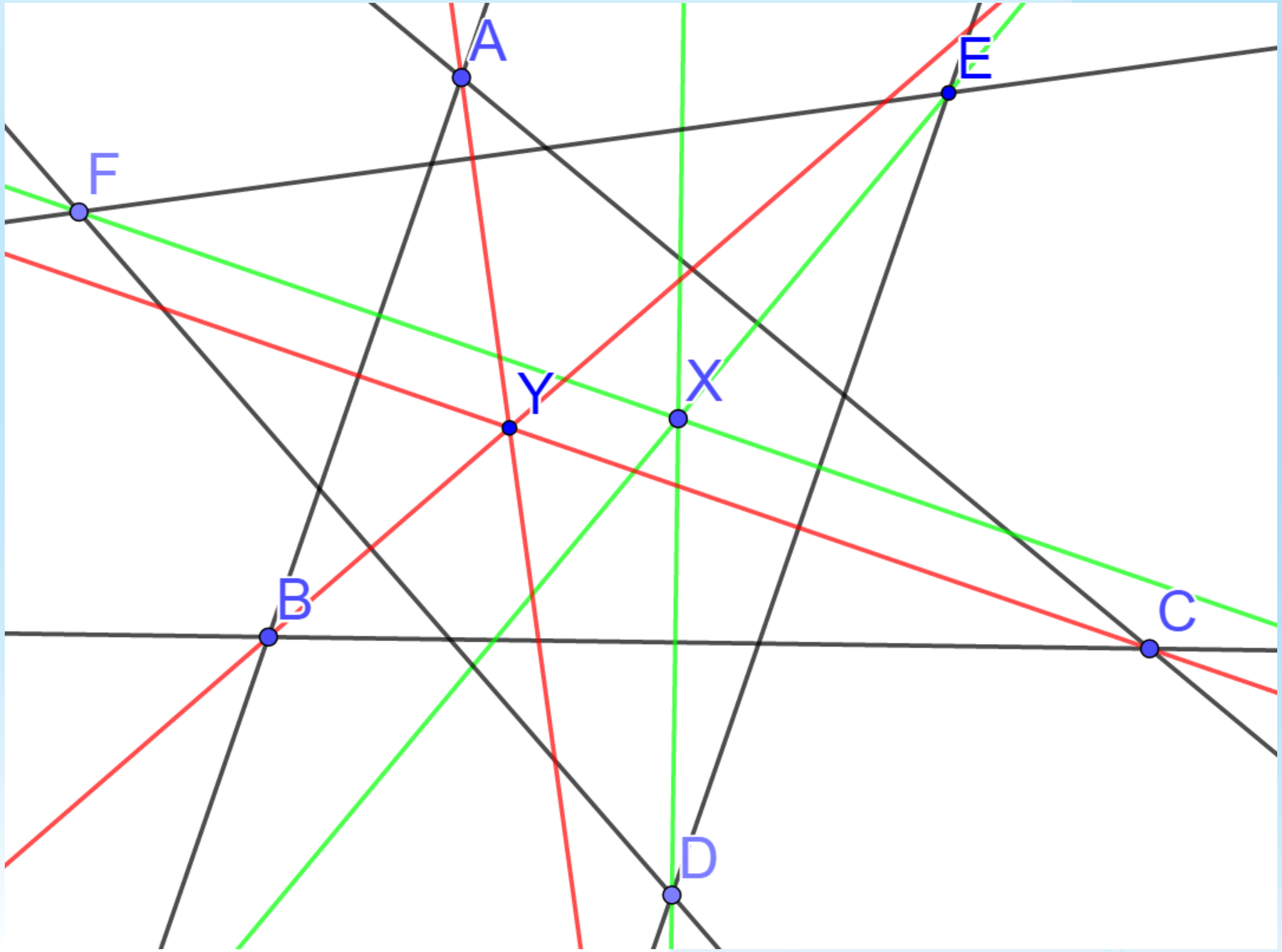
研究目的

- 探討F(I、O)的相關性質
- 探討F(O、P)的相關性質，其中P為動點
- 探討F(X、Y)的相關性質，其中X、Y皆為動點

INNOVATION

先備知識

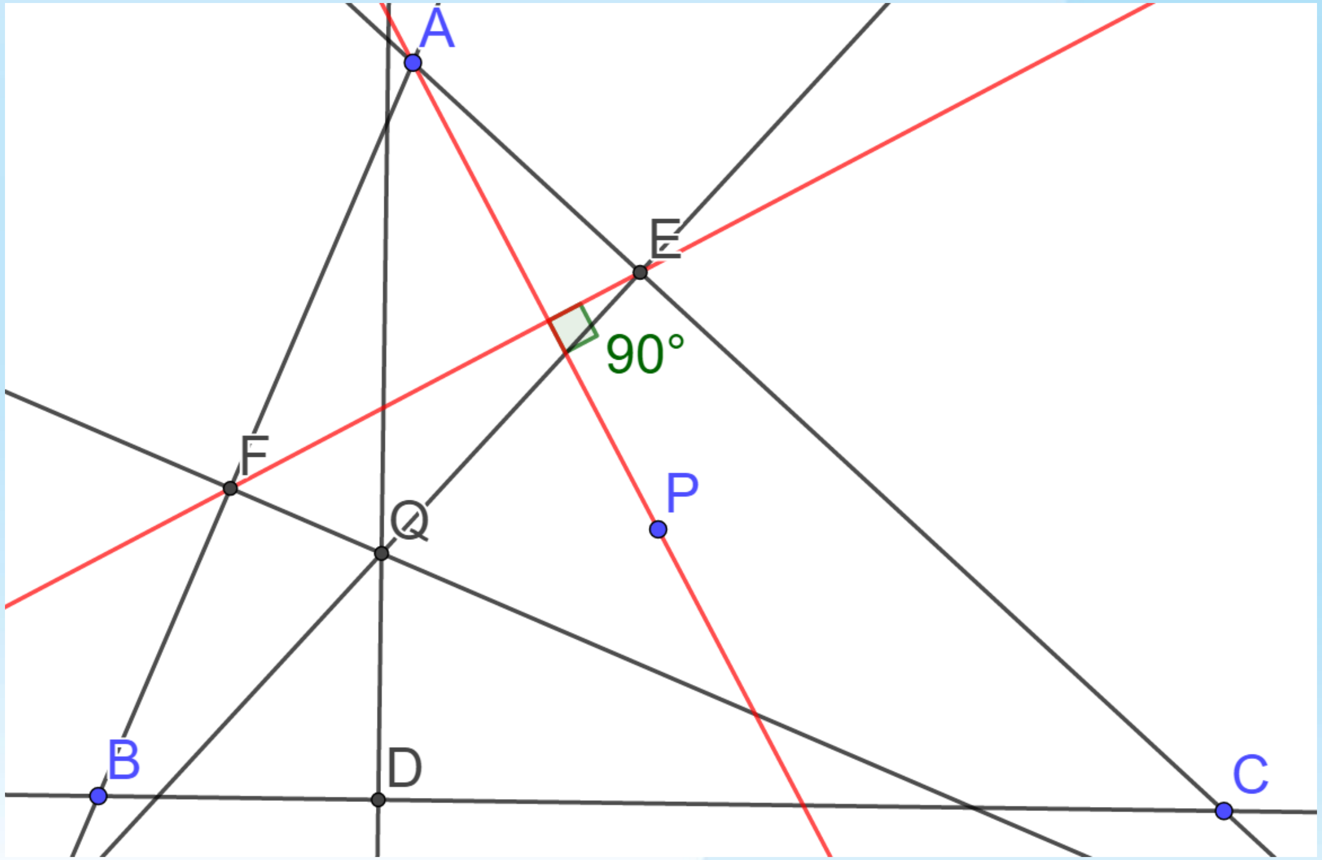
- 性質 1：正交中心必定互相出現(X、Y)，即三角形ABC對三角形DEF正交若且唯若三角形DEF對三角形ABC正交



INNOVATION

先備知識

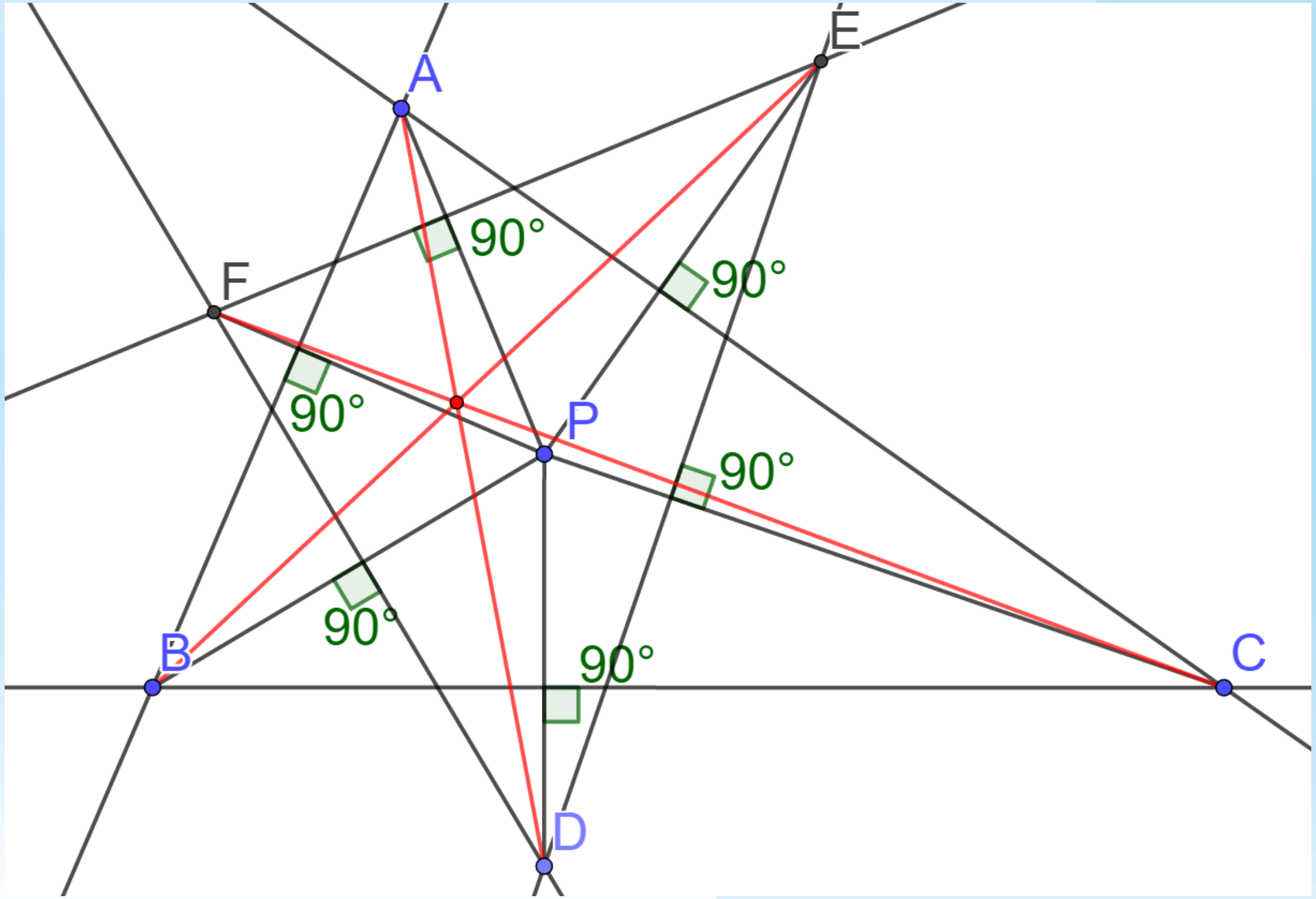
- 性質 2：三角形ABC，P、Q為等角共軛點，Q的佩多三角形為DEF，則AP垂直EF



INNOVATION

先備知識

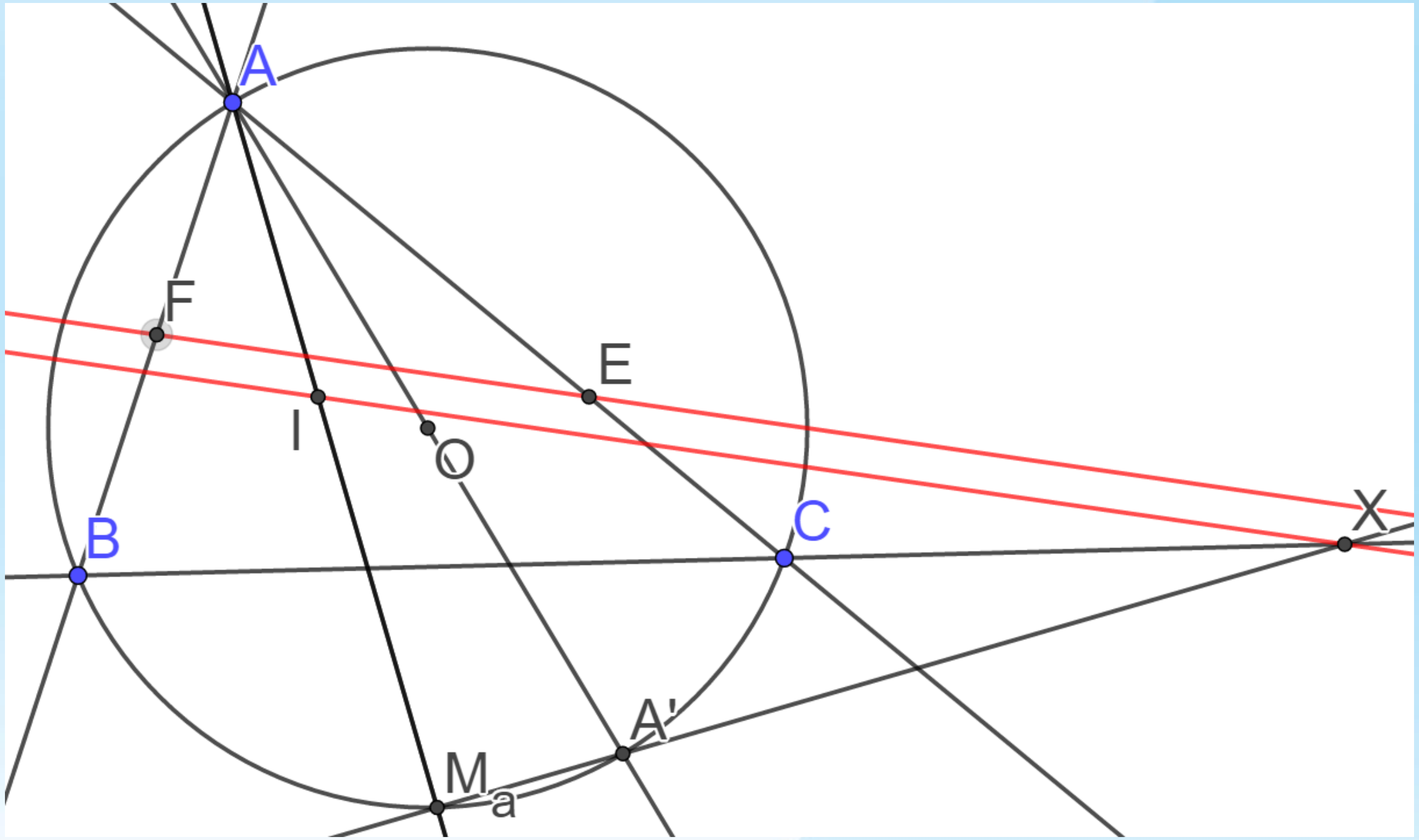
- 性質 3：若兩三角形正交中心重合，則兩三角形透視



INNOVATION

先備知識

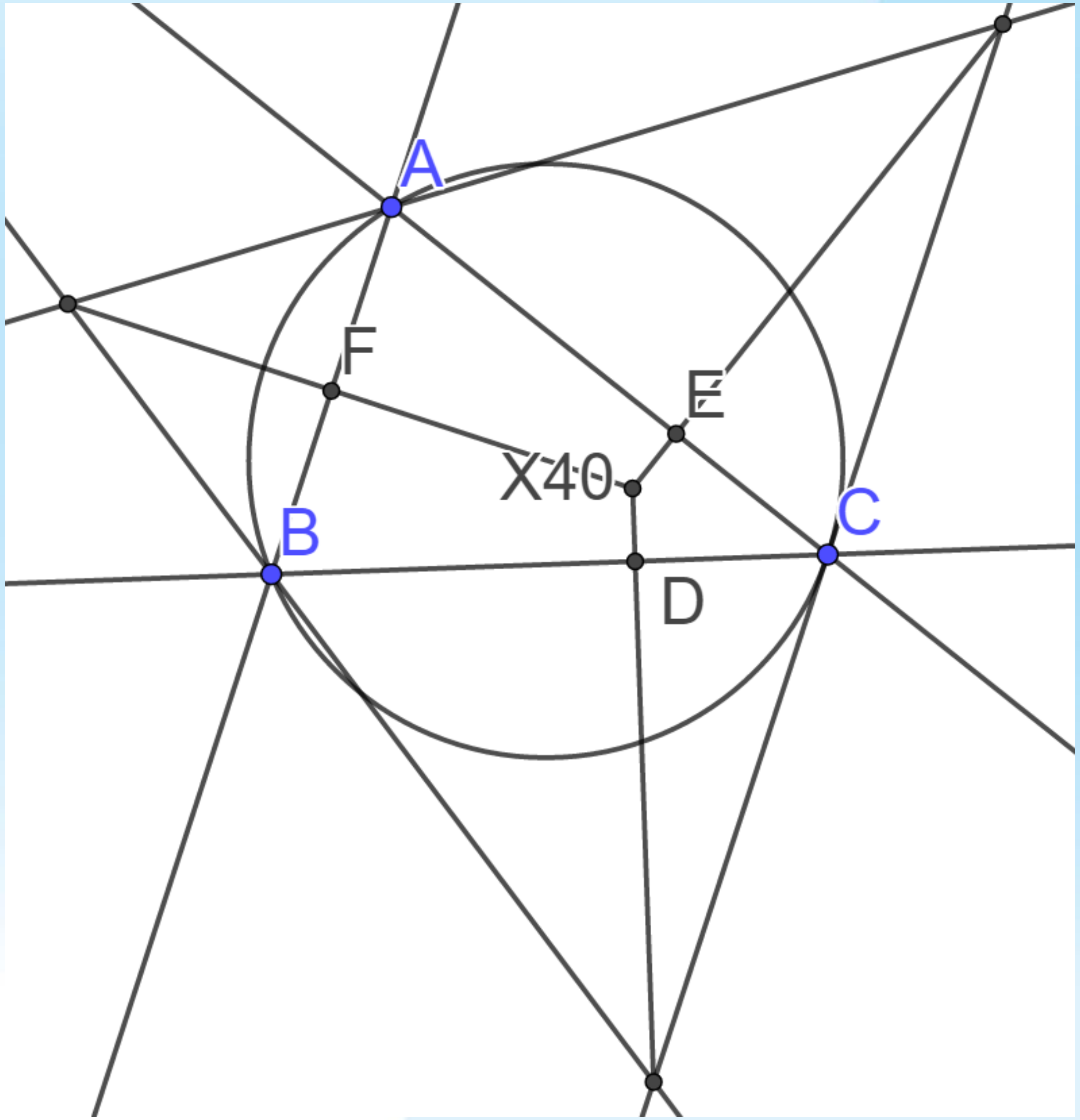
- 性質 4：A弧中點M_a與A的對徑點A’ 連線交BC於X，則IX與旁切點連線EF平行



INNOVATION

先備知識

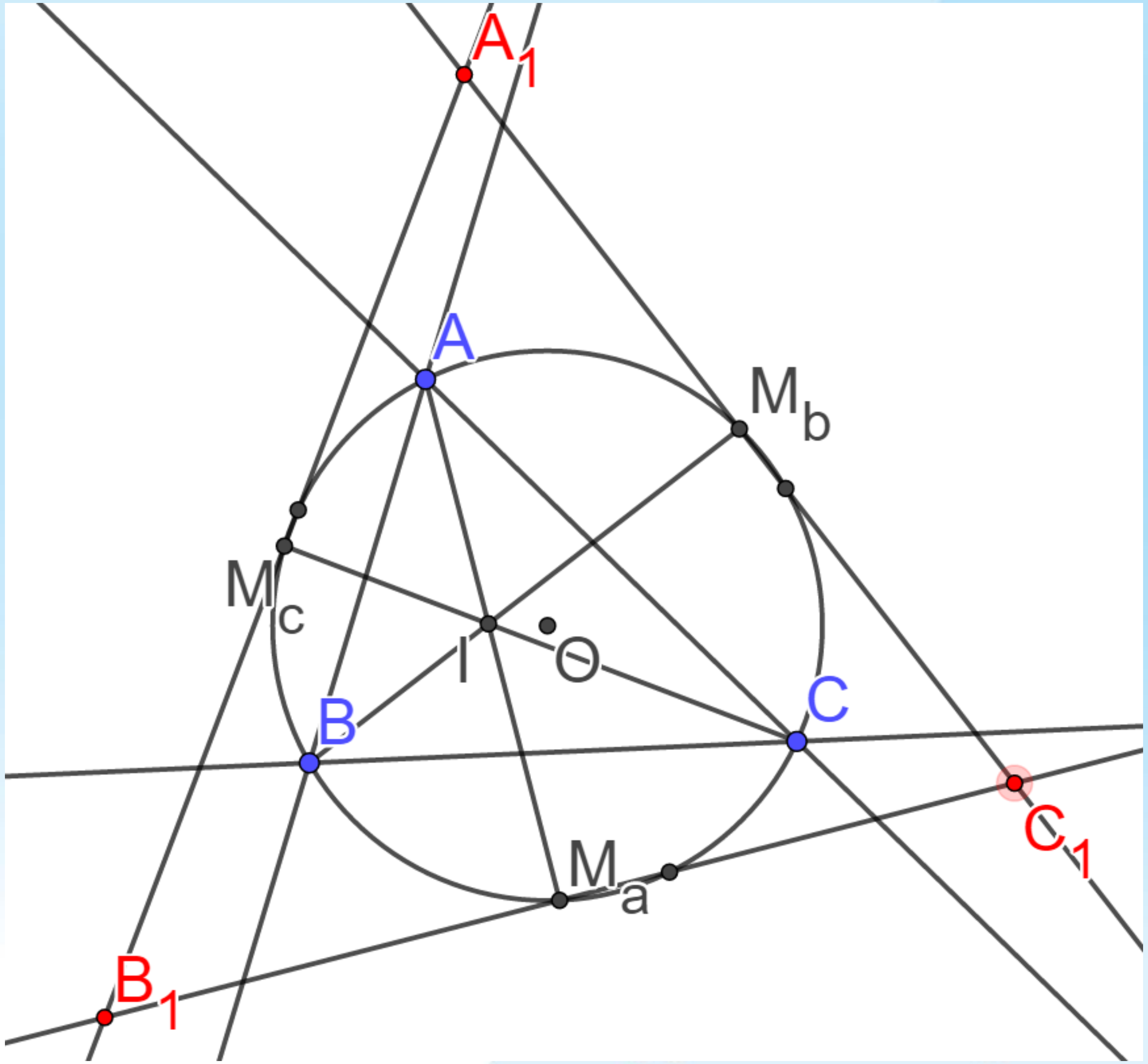
- 性質 5：定義X40為旁心三角形的外心，則X40的佩多三角形為旁切三角形



研究結果：F(I、O）與ABC透視

- 方法一：

　　如右圖，$M_aM_bM_c$為弧中點
F(I、O)為$A_1B_1C_1$
可知$\angle AM_aC_1=90°$
以反演冪為$IA*IM_a$配極
$IA*IM_a=IB*IM_b=IC*Im_c$
A會配極成B_1C_1，依此類推
因此ABC會配極成$A_1B_1C_1$



研究結果：F(I、O) 與ABC透視

C_1是B_1C_1、A_1C_1相交

A配極成B_1C_1，B配極成A_1C_1

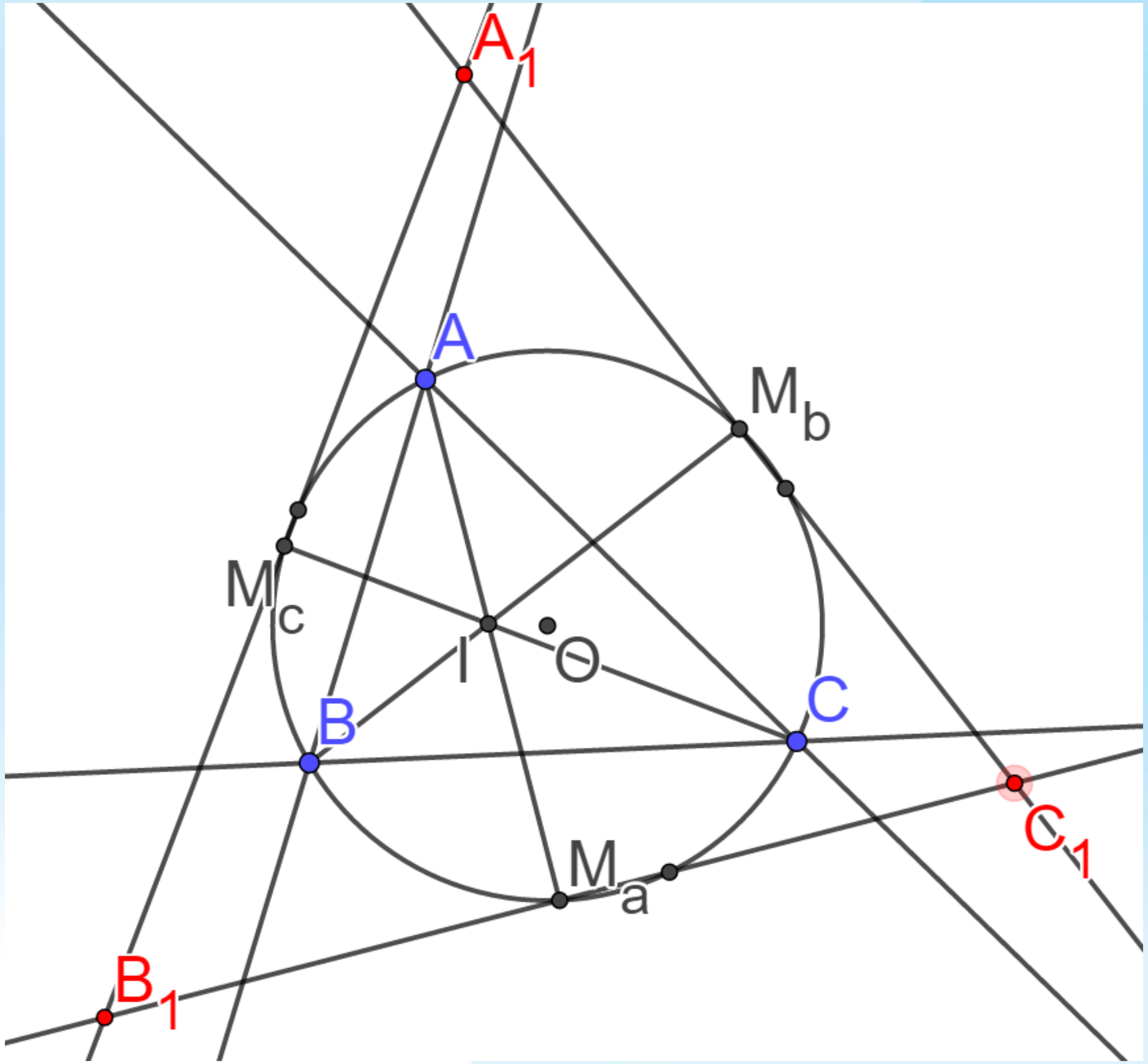
所以C_1會配極成AB

因此IC_1垂直AB，依此類推

注意到ABC和$A_1B_1C_1$正交，且

兩個正交中心皆為I

由性質 3知兩三角形透視



研究結果：F(I、O）與ABC透視

- 方法二：

如右圖，B_1C_1交BC於X

X配極成AA_1，IX垂直AA_1

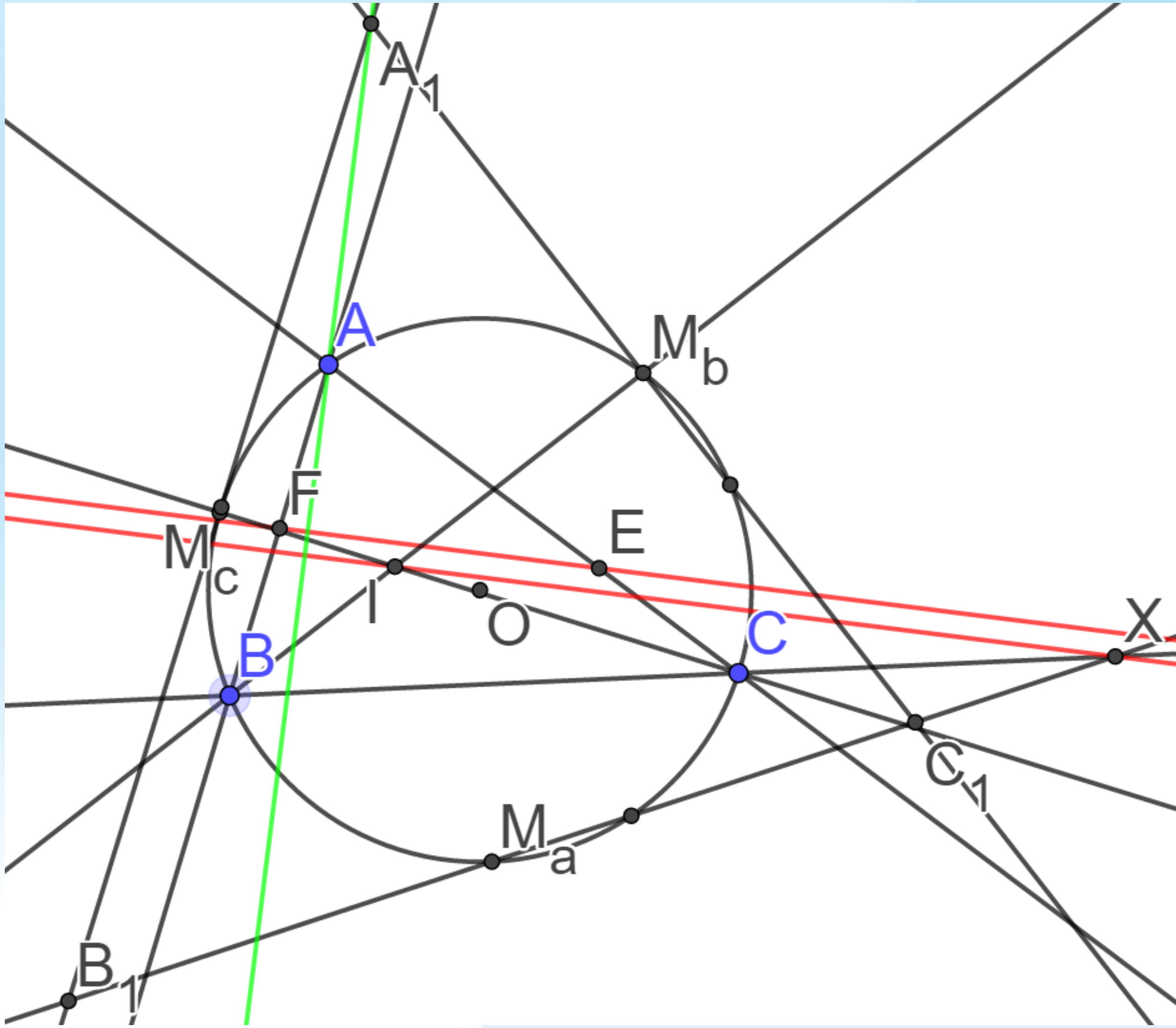
由性質 4知IX平行EF，因此AA_1垂直EF

由性質 5知DEF為X_{40}的配多三角形

由性質 2知AX_{40}^*(等角共軛點)垂直EF

AA_1也垂直EF，故A、A_1、X_{40}^*三點共線

同理知透視中心為X_{40}^*。



研究結果：F(O、P)與ABC透視

令AP、BP、CP分別交圓於 P_A、P_B、P_C，F(O、P)為$A_1B_1C_1$

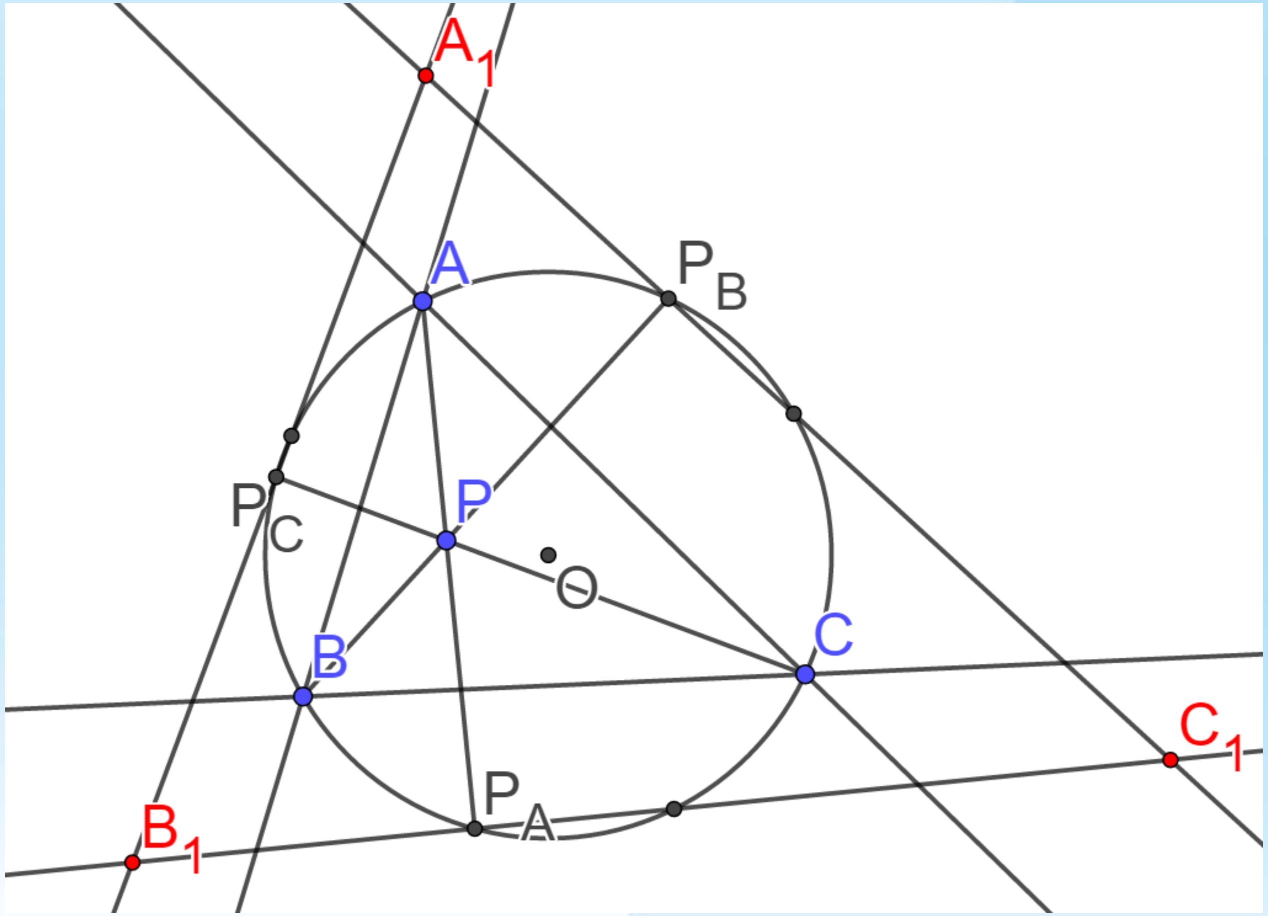
以反演冪$PA*PP_A$配極

因為$PA*PP_A=PB*PP_B=PC*PP_C$

因此ABC會被配極成$A_1B_1C_1$

又兩三角形的正交中心皆為P

由性質 3知兩三角形透視



INNOVATION

研究結果：F(X、Y)與ABC透視

讓X是任意點但固定不動

Y_1當作動點在AJ上跑

因此J, U, V, W都是定點

因為迪沙格定理知道證明

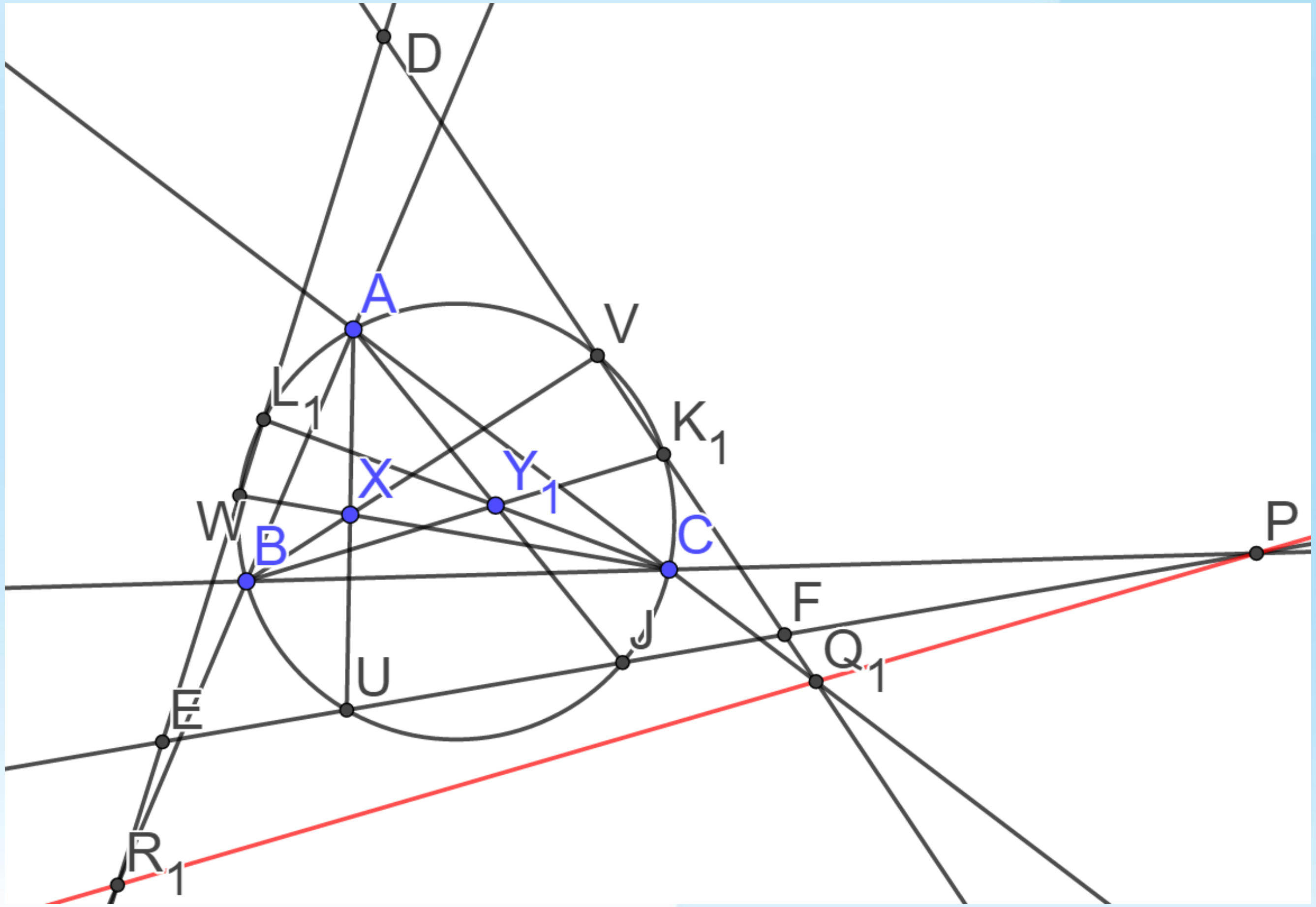
F(X、Y)和ABC透視等價證明

它們有透視軸

令BC交UJ於P，AC交VK_1於Q_1

AB交WL_1於R_1

則等價證明PQ_1R_1共線



INNOVATION

研究結果：F(X、Y)與ABC透視

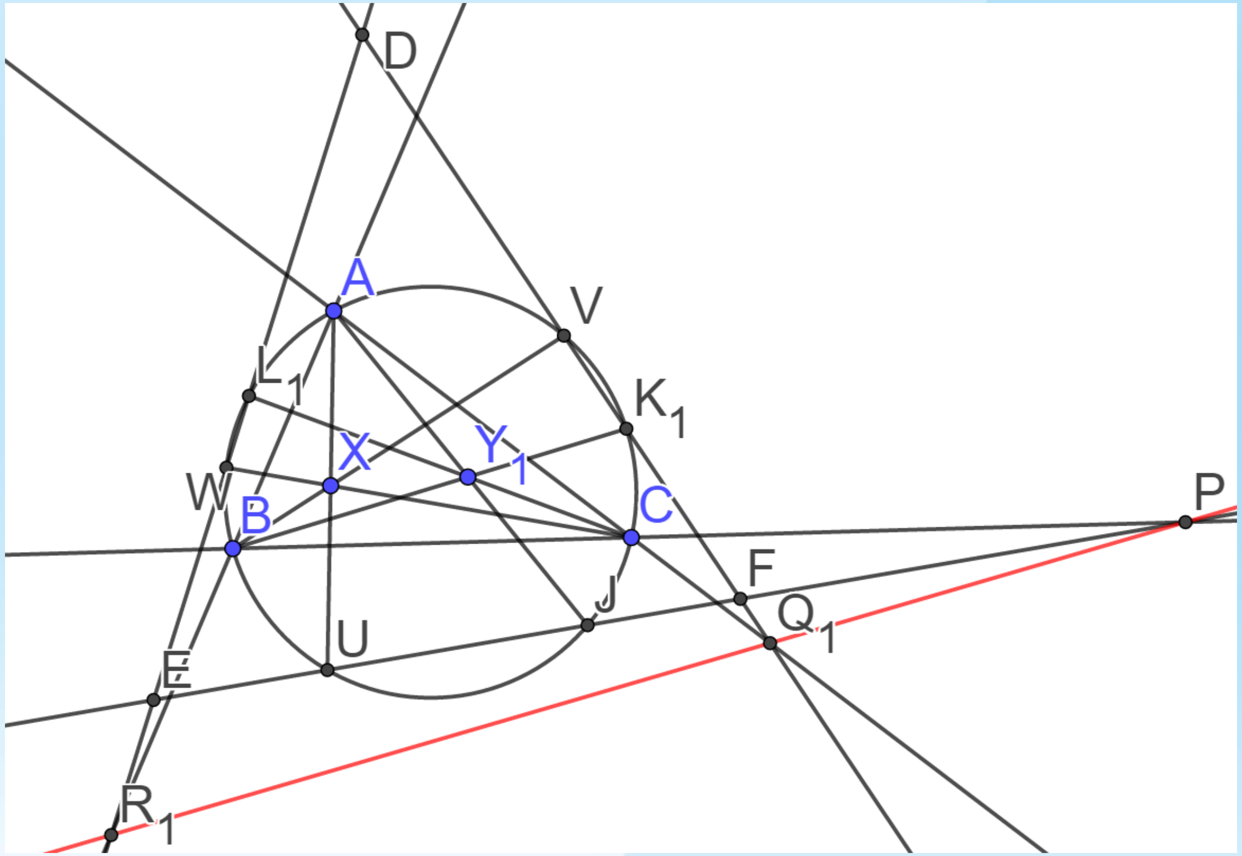
假設AJ上有四個Y分別是

$Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4$(圖中下標1亦可代表2、3、4)，則

$(Y_1, Y_2; Y_3, Y_4)=(K_1, K_2; K_3, K_4)=(Q_1, Q_2; Q_3, Q_4)$

$(Y_1, Y_2; Y_3, Y_4)=(L_1, L_2; L_3, L_4)=(R_1, R_2; R_3, R_4)$

即$(Q_1, Q_2; Q_3, Q_4)=(R_1, R_2; R_3, R_4)$



INNOVATION

研究結果：F(X、Y)與ABC透視

若能夠找到三組QR，使得

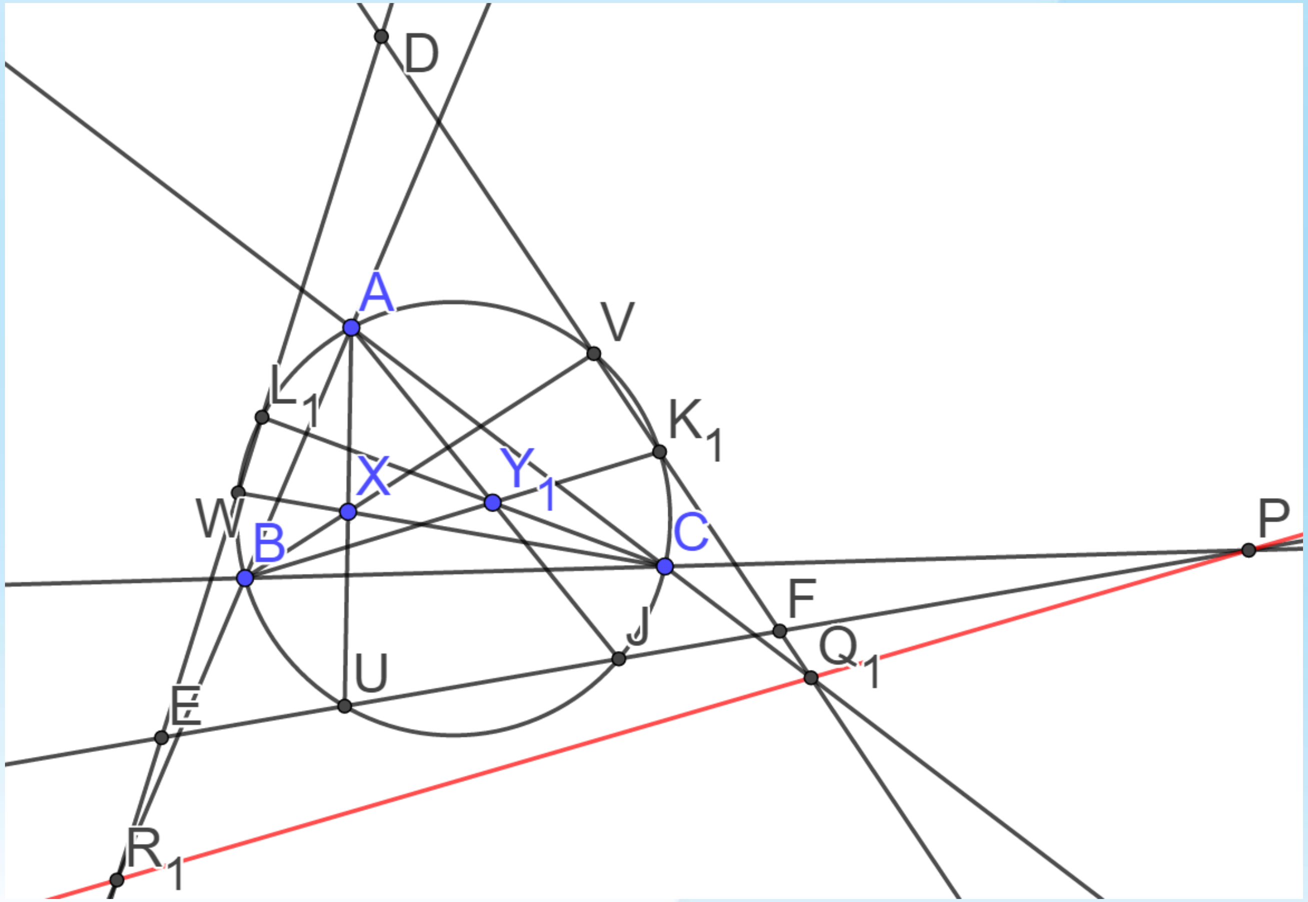
PQ_1R_1、PQ_2R_2、PQ_3R_3皆共線

則$P(Q_1, Q_2; Q_3, Q_4) =$
$(R_1, R_2; R_3, PQ_4\text{交}AB) =$
$(R_1, R_2; R_3, R_4)$

由交比唯一性知PQ_4交AB於R_4，

即PQ_4R_4亦共線

亦即對於任意兩點皆透視



INNOVATION

研究結果：F(X、Y)與ABC透視

對於剩下三個點取

Y=A、Y=J

F(X、A)、F(X、J)

退化成A、J，可得到

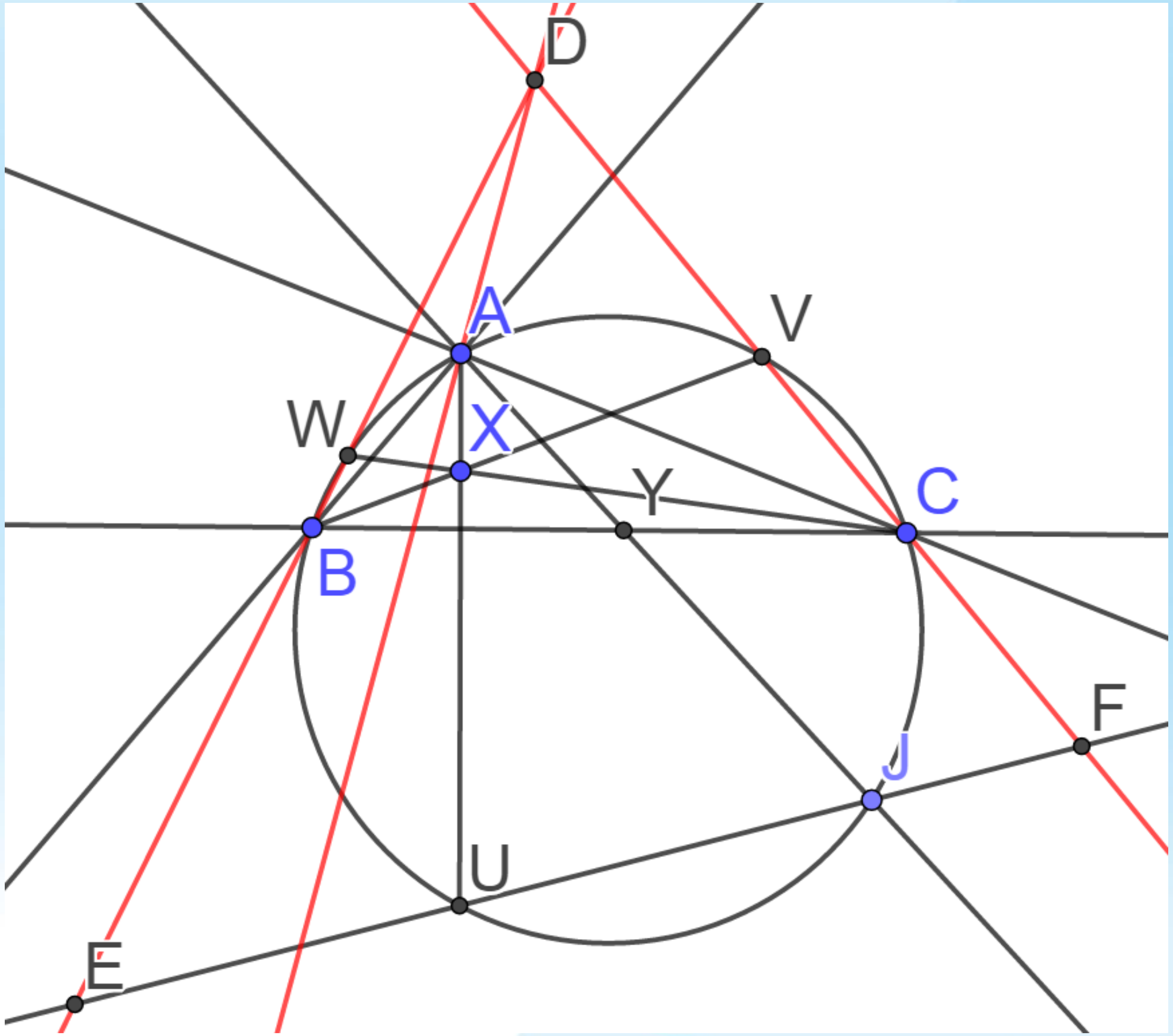
ABC與F(X、A)、F(X、J)皆透視

剩下一個取AJ交BC的交點為Y

則F(X、Y)為右圖中的DEF

因BE交CF於D，DA亦過D

故F(X、Y)與ABC透視



討論

- F(I、O)與ABC透視

　　從發現可以把ABC配極成F(I、O)就知道接下來是好做的，但是如果僅是配極的話那大可以把I換成動點P，因此就想進一步思考若是我們熟悉的I和O，可否探討出透視中心，結果發現是X_{40}的等角共軛點X_{40}^*，也讓這個原本的題目告一段落。

討論

- F(O、P)與ABC透視

因為上一題的發現ABC可配極成F(I、O)，但是卻又不依賴I的存在，因此容易想到把I換成動點P應該也可以做類似的事，這個題目也這樣告一段落。

INNOVATION

討論

- F(X、Y)與ABC透視

　　如果沒有了0就沒辦法輕易配極了，那我嘗試了很多方法都沒有甚麼頭緒，最後想到可以使用交比，利用交比的唯一性可以化簡兩個動點的難度，只要找到滿足的三個點，就可以做出此問題。

參考資料

- AOPS上某國家選訓題

致謝

謝謝大家的聆聽，也謝謝尤貴弘老師的指導

INNOVATION