INNOVATION

阻擋病毒大賽

指導老師：尤貴弘老師

227 25 劉得徵

數學組 MATHEMATICS

摘要

- 本主題主要探討當人類面臨病毒攻擊時，運用方法將病毒造成的傷害降至最輕。而本篇討論半平面及全平面正方形鑲嵌，一開始其中一格有病毒，一次病毒可擴散至和原病毒佔據格有公用邊，且該邊未被阻擋。
- 而人類選擇兩相鄰正方形公用邊阻擋。人類先阻擋，輪流進行。人類是否有機會讓病毒自某刻起完全無法擴散？如果是，要怎麼讓病毒佔據格數萬無一失的降到最少？本篇將介紹已知的結論。

研究過程或方法

- 坐標系建立：

1. 全平面可設x, y座標均為整數，病毒初始位置（0,0）。
2. 半平面可設x座標為整數，y座標為正整數，病毒初始位置(0,1)。

- 定義兩方格公用邊：(a^{+}, b)表示$(a,b)$$(\mathrm{a}+1,b)$公用邊。
- (a^{-}, b)表示(a,b) $(a\text{-}1,b)$公用邊。
- (a, b^{+})表示(a,b) $(a,b+1)$公用邊。
- (a,b^{-})表示(a,b) $(a,b\text{-}1)$公用邊。

INNOVATION

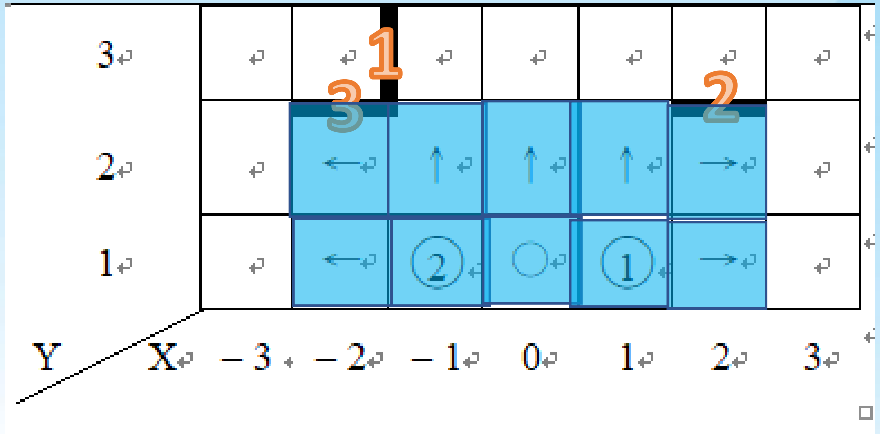
半平面人類保證控制在11格

半平面病毒保證佔據10格

全平面病毒保證佔據18格

全平面人類保證控制在41格

- 人類將病毒控制在11格的構造：第一次擋$(-1^{-}, 3)$，
- **Case1.** 病毒第一次移到(1,1)則第二次擋$(2,2^{+})$
- **Case1-1.** 病毒第二次移到(-1,1)則第三次擋$(-2,2^{+})$，如圖一，
- 可控制在$y \leq 2$，
- $-2 \leq x \leq 2$，
- 共10格內



半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

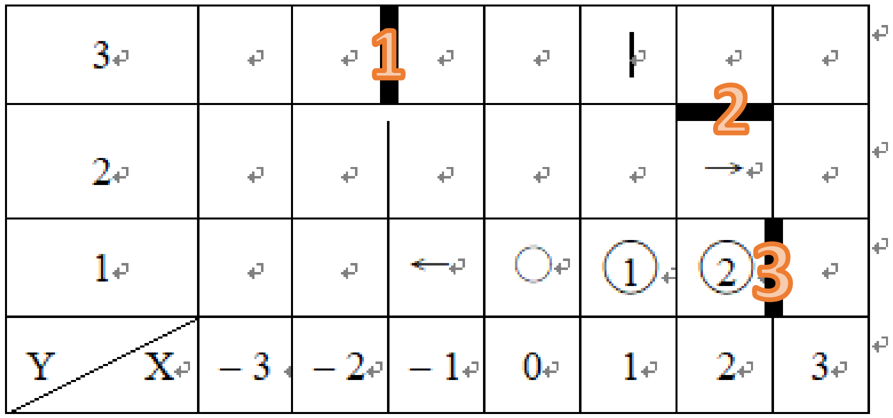
- **Case1-2.**病毒第二次移到(0,2)第三次擋(1^{+},3)公用邊，如圖二，可控制在$y \le 3$，$-1 \le x \le 2$，扣除(2,3)，共11格內

3			↑	↑	↑		
2			←	②		→	
1			←	○	①	→	
Y \ X	−3	−2	−1	0	1	2	3

圖二

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- **Case1-3.**
- 病毒第二次移到(2,1)，第三次擋$(2^+,1)$
- 對應後，病毒必逃到
- (i,2)(i=0 or 1),(-1,1)
- 其中一格
- （已擋好$(2,2^+)$）
- 同Case1-1、1-2。



圖二

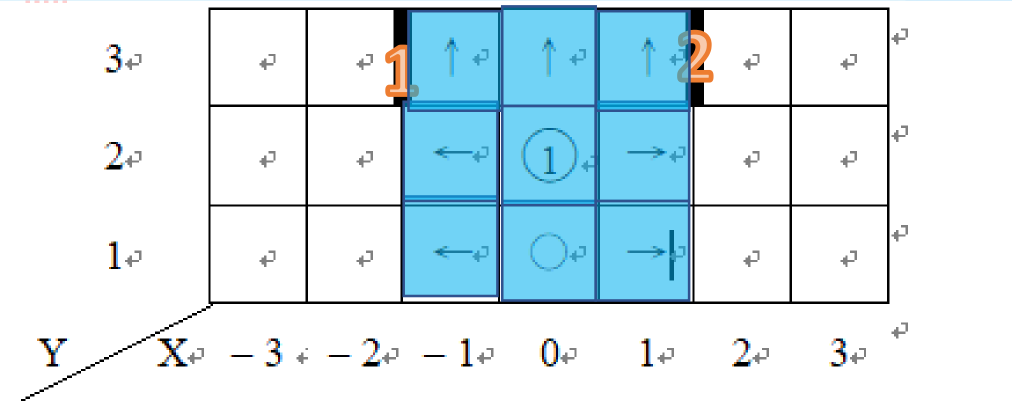
半平面人類保證控制在11格

半平面病毒保證佔據10格

全平面病毒保證佔據18格

全平面人類保證控制在41格

- **Case2.**
- 病毒第一次移到(0, 2)，
- 第二次擋(1^+, 3)，
- 如圖三，
- 可控制在9格內



圖三

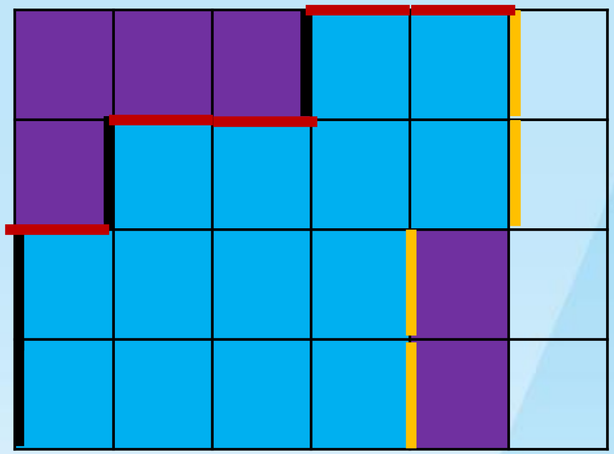
INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- Case3.
- 病毒第一次移到(-1, 1)，左右對稱性知將Case1. 的所有x座標變號，y座標不變即可。

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- 先假定病毒結束時佔據a個不同的x座標，b個不同的y座標(藍色底)
- (右圖為a=5,b=4特例)



- 人類至少用$a+2b$個隔板，(a個紅色，黑、橙各b個)
- 病毒至多佔據ab格
- (藍色底和紫色底)

知結束時隔板數和病毒擴佔據格數相等，

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- $a+2b\leq$結束時隔板數=病毒佔據格數$\leq ab$，再由算幾不等式知：

$$a+2b\geq 2\sqrt{2ab}\text{ ，}ab\geq 8\text{，}$$

- 病毒佔據格數$\geq a+2b$

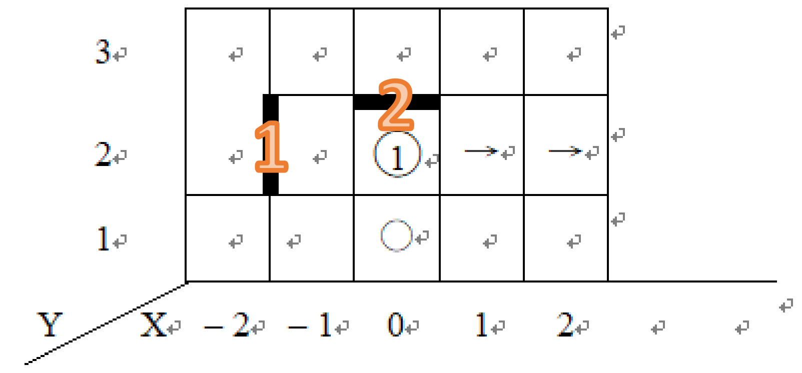
$$\geq 2\sqrt{2ab}\geq 2\sqrt{16}\geq 8\text{，}$$

- 由算幾不等式等號成立條件知
  達成8格時，$a=4$，$b=2$，
  即可不讓病毒移到$y=3$，
  且由不可浪費隔板知
  不可阻擋$y=1$和$y=2$之間

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- 而8個隔板必為2*4方格的邊界(不含已給定邊界)，故其內部無隔板，而4種可能圍成的2*4方格邊界必不含$(0,1^{+})$，第一步可移到(0,2)，病毒進行的前兩次阻擋必包含$(0,2^{+})$(否則病毒逃到(0,3))，如圖六，

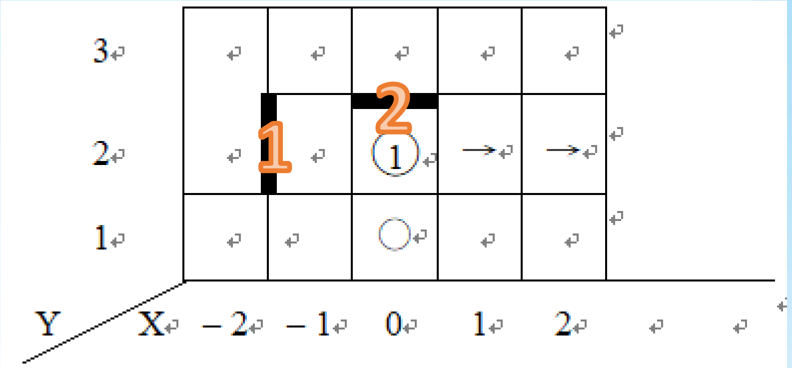


圖六

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- 兩條路徑((0, 2)(-1, 2)(-2, 2)~~) ((0, 2) (1, 2)(2, 2)~~)必有一條路徑中及兩側不被原先兩隔板中除$(0, 2^+)$外另一者阻擋(鴿籠原理)，而在路徑上移到(i, 2)時，$(i, 2^+)$必定原先無隔板，且在避免讓病毒移到$y = 3$下必擋$(i, 2^+)$，如此下去病毒
- 可無限擴散。病毒至少
- 佔據8格且達不到
- 病毒至少佔據9格。



圖六

半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

進一步說明9格無法達成：

當病毒佔據恰好9格且無法移動時，

$$ab \geq 9，a + 2b \geq \sqrt{72} > 8，$$

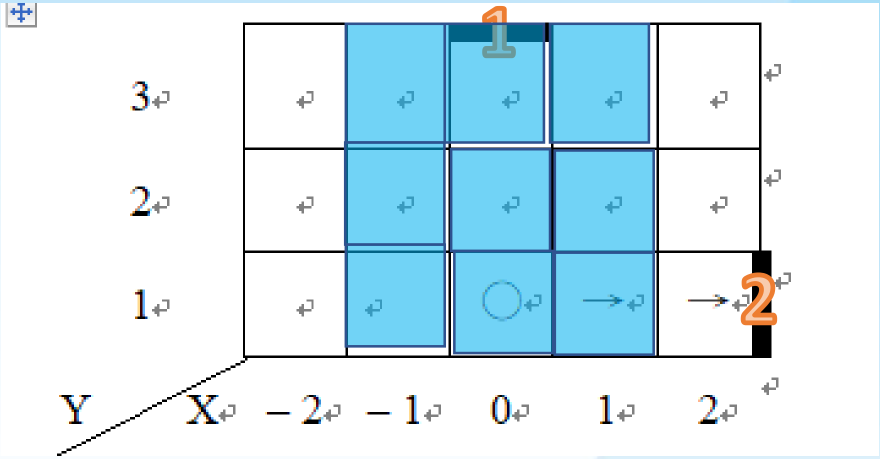
至少用9個擋板，意即圍完後所用的擋板剛好是病毒圍的區域的邊界(不能浪費任何擋板)，

而$a + 2b = 9$的正整數解(a, b)=(1, 4)，(3, 3), (5, 2), (7, 1)，只有(5, 2)、(3, 3)滿足$ab \geq 9$。
$a = 3，b = 3$：僅3*3區域邊界周長為9，
$a = 5，b = 2$：僅挖去$y = 2$，x為區域中所有x座標的極值可使區域邊界周長為9。

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- Case1 .

- 若人類最終欲將病毒控制在3*3內，
  (1)至少一次擋$(x, 3^{+})$，人類第一次擋$(x, 3^{+})$，如下圖。
  (2)不能讓它佔據4個不同的y座標。
  病毒的策略是(0, 1)→(1, 1)→(2, 1)，則病毒必須在某一次擋板方向平行y軸，設擋板為(a^{+}, b)，



- $a \geq 0$，則人類圍的的3*3為
- $a-2 \leq x \leq a$，$1 \leq y \leq 3$；

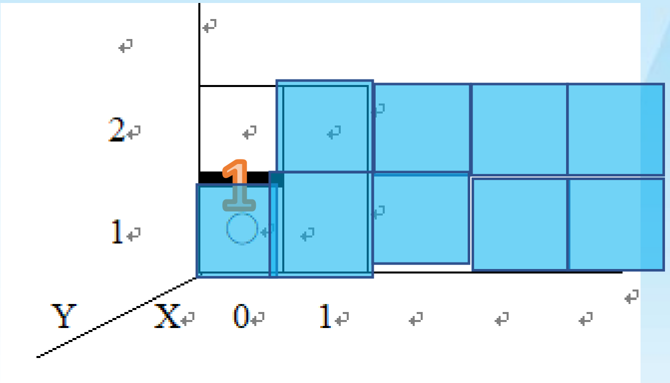
- $a < 0$，則人類圍的3*3為
- $a \leq x \leq a+2$， $1 \leq y \leq 3$。

半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

- 又其中心方格y座標為2，病毒尚未佔去中心方格，病毒可運用前7次佔據中心方格外的其他8格(區域確定後，由於擋板不能被浪費，其內部不可放置格板，病毒可在內部任意移動)病毒接下來擋的8次，不可能圍住3*3，而開口和中心方格外的其他8格的其中一格相鄰，病毒可逃脫。

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- Case2. 人類欲將病毒控制在2*5-1方格中，
- Case2-1. 人類第一次擋$(0,1^+)$，如圖。
- 圍成的區域為$(0,1), 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq 2$ 或$(0,1), -4 \leq x \leq -1,\ 1 \leq y \leq 2$ 病毒逃到$(1,1)$後區域即確定為$(0,1), 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2$，第二次必須阻擋$(0^-,1)$否則病毒可脫逃。病毒再移到$(1,2)$即有兩條邊界用到$(1,2)$
- 而第三次只能阻擋
- 其中一條，必可逃脫。



INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- Case2. 人類第一次不擋$(0,1^+)$，病毒第一次移到$(0,2)$，如圖。
- 人類能將病毒控制在9格，只能是2*5挖去1格，前二次必有一次必擋$(0,2^+)$，不能浪費擋板之另一次必不能擋$(0,b^+)(b\geq 3)$，將形如$(a,b^+)(a>0)$、$(a^+,b)(a\geq 0)$的擋板視為右擋板，$(a,b^+)(a<0)$、$(a^+,b)(a<0)$的擋板視為左擋板，

		1					
2		①					
1		○					
Y/X	-1	0	1	2	3	4	5

INNOVATION

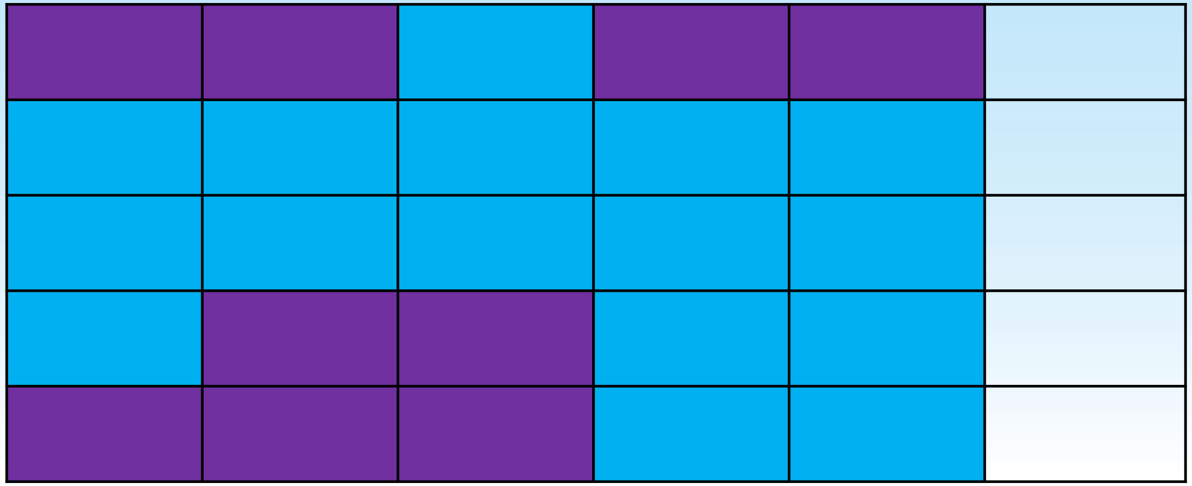
半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- 其中一次為(0, 2)且已經過$(0, 1^+)$，故另一次必為左擋板或右擋板，不失一般性假設為左擋板，右半邊原無擋板，病毒策略：(0, 1)=>(0, 2)=>(1, 2)=>(2, 2)⋯=>(5, 2)而過程中人類為了讓病毒逃不出 在病毒逃到(b, 2)時只能擋$(b, 2^+)$，病毒逃到(5, 2)後即佔據6個不同的x座標，矛盾。
- 病毒存在策略使其不被控制在9格。

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- 至少佔據18格：先假定病毒結束時佔據a個不同的x座標，b個不同的y座標(下圖為a=b=5特例，病毒佔據藍色區域)對於每個x座標，至少對應兩隔板，每個y座標至少對應兩隔板。至少用$2a+2b$ 個隔板(綠、紅色各a個，黑、橙各b個)
- ，而病毒至多佔據ab格(藍、紫色區域)



半平面人類保證控制在11格 | 半平面病毒保證佔據10格 | 全平面病毒保證佔據18格 | 全平面人類保證控制在41格

- 結束時隔板數和病毒佔據格數相等，$2a+2b\le$ 結束時隔板數=病毒佔據格數$\le ab$ ，再由算幾不等式知$2a+2b\ge 2\sqrt{4ab}$，$ab\ge 2\sqrt{4ab}$，$ab\ge 16$， 病毒佔據格數$\ge 2a+2b\ge 2\sqrt{4ab}\ge 2\sqrt{64}=16$。

半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

- 由算幾不等式等號成立條件知達成16格時，$a = b = 4$（即4*4），又初始位置為(0, 0)，最終範圍必為$c \leq x \leq c + 3$，$d \leq y \leq d + 3$，無隔板時將平面旋轉90度
- 仍為原平面，不妨設第一次
- 隔板放置方向平行y軸
- ，即(m^{+}, n)。如圖七
- $(m = n = 1$ 特例），
- 下表知m可確定c。

2			2		
1			1		
0			○		
-1					
-2					
Y X	-2	-1	0	1	2

半平面人類保證控制在11格

半平面病毒保證佔據10格

全平面病毒保證佔據18格

全平面人類保證控制在41格

m	c
0, −4	−3
1, −3	−2
2, −2	−1
3, −1	0

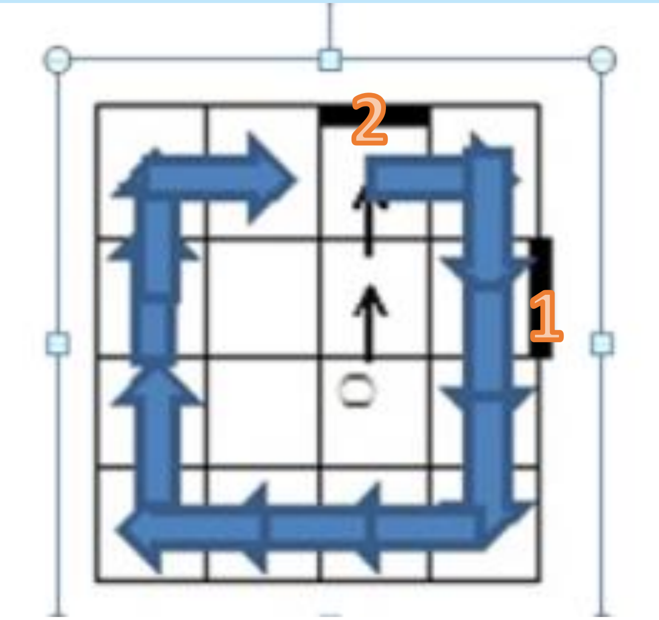
半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

- 病毒的策略是(0, 0)→(1, 0)→(2, 0)→(3, 0)……
- 若病毒移到(4, 0)則占據了5個y座標，矛盾。
- 為了讓病毒不要移到(4, 0)，必須至少一次讓隔板平行x軸，同理可得該擋板確定d值，即確定整個4*4區域，確定後由於恰有16條邊在區域的邊界，而剛好區域內有16格，必不能在區域內部放置擋板。故病毒可在4*4區域內設計一條動線。

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

- 對4*4區域中每個方格，若存在區域外的一方格和該方格有共用邊，則定義為「邊格」，顯然有12個邊格，區域內有4個非邊格。非邊格和 至多交於2格，確定區域內後不難知可將12個邊格佔滿
- (如右圖八粗箭頭所示)，



半平面人類保證控制在11格	半平面病毒保證佔據10格	全平面病毒保證佔據18格	全平面人類保證控制在41格

- 加上非邊格共至多$12+2=14$格，人類至多進行第15次放置隔板，16條邊必有一條未放置隔板，又12個邊格均被佔據，存在一邊格可由沒有隔板的邊逃脫(邊格定義)，故16不可達。 $a+b\le 8$時必有　病毒佔據格數$ab\le\frac{8^2}{4}$（算幾不等式)=16矛盾，故$9\le a+b$，$18\le 2a+2b\le$ 病毒佔據格數。

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格

半平面病毒保證佔據10格

全平面病毒保證佔據18格

全平面人類保證控制在41格

- 全平面控制在41格的方法情況較多，大概的想法是先大略控制病毒在4*5、5*5或5*6去域內，留下一個開口，病毒只能從開口逃離，而開口處和區域的兩側距離至少為2，又半平面控制在11格的結果所用的區域的x座標都在[-2,2]之間，故可知接套用在全平面有單一開口的情形，最多再讓病毒多占11格，病毒可占最多格數是5*6+11=41

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- 第一次擋$(2, 2^{+})$，分第一次病毒移動方向討論。
- Case1.
- 病毒第一次移到(0, -1)，第二次擋$(-2, -3^{-})$，可控制在30+11=41格內。
- Case2.
- 病毒第一次移到(-1, 0)，第二次擋$(-3, -2^{-})$，可控制在30+11=41格內。

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- 第一次擋$(2,2^+)$，分第一次病毒移動方向討論。
- Case3. 病毒第一次移到(0,1)，第二次擋$(-2,2^+)$
- 病毒第二次必定移到(0,2)(1,0)(1,1)(0,-1)(-1,0)(-1,1)中的其中一格
- Case3-1. 病毒第二次移到(1,0)(0,-1)(-1,0)中的其中一格，可控制在25+11=36格內。
- Case3-2. 病毒第二次移到(1,1)(-1,1)中的其中一格，可控制在25+11=36格內。

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- Case3-3. 病毒第二次移到(0, 2)，第三次擋(2, −1¯)，
- 病毒第三次可能逃到(0, -1), (1, 0), (-1, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, 2), (-1, 2), (0, 3)。
- Case3-3-1. 控制在20+11=31格內。
- Case3-3-2. 病毒第三次逃到(0, -1)
- Case3-3-2-1. 病毒從(0, 3)到(1, 3)或(-1, 3)，共30+11=41格。
- Case3-3-2-2. 病毒從(3, 0)移到(4, 0)，在20+5+11=36格內

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- Case3-3-3可控制在41格內。
- Case3-3-4. 病毒第三次逃到(1, 2), (-1, 2)
- 第四次擋(-2, −1¯)後，分逃到(0, 3), (1, 3)討論。
- 病毒逃到(0, 3)時，可控制在20+11=31格內。
- 病毒逃到(1, 3) 時，可控制在30+11=41格內。

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- **Case4.** 病毒第一次移到(1, 0)，第二次擋$(2, -2^{-})$
- **Case4-1.** 病毒第二次移到(0, 1)(0, -1)(-1, 0)中的其中一格，可控制在36格內。
- **Case4-2.** 病毒第二次移到(1, 1)(1, -1)中的其中一格，可控制在25+11=36格內。
- **Case4-3.** 病毒第二次移到(2, 0)，第三次擋$(-1, 2^{+})$
- 病毒第三次可能逃到(-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1), (2, 1), (2, -1), (3, 0)。
- **Case4-3-1.** 病毒第三次逃到(0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1)其中一格，可控制在20+11=31格內。

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證估據10格 → 全平面病毒保證估據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- Case4-3-2. 病毒第三次逃到(-1,0)則第四次擋(-1, -2^{-})
- 可不妨設病毒從(2,0)逃到(3,0)，分擋完後病毒的動向討論。
- Case4-3-2-1. 病毒從(3,0)到(3,1) or (3,-1)，可控制在30+11=41格。
- Case4-3-2-2. 病毒從(3,0)移到(4,0)，可控制在20+5+11=36格內

INNOVATION

半平面人類保證控制在11格 → 半平面病毒保證佔據10格 → 全平面病毒保證佔據18格 → 全平面人類保證控制在41格

- Case4-3-3. 可控制在41格內。
- Case4-3-4. 病毒第三次逃到(2, 1), (2, -1)
- 第四次擋(-1, −2¯)後，分逃到(3, 0), (3, -1)討論。
- 病毒逃到(3, 0)時，可控制在20+11=31格內。
- 病毒逃到(3, -1) 時，可控制在30+11=41格內。

INNOVATION

研究結果

- 一邊有邊界(半平面)的情況病毒至少保證佔據10格，人類保證控制病毒在11格內。
  無邊界的情況病毒至少保證佔據18格，人類保證控制病毒在41格內。

INNOVATION

未來展望

- 1.將正方形鑲嵌推廣到正三角形及正六邊形鑲嵌，將平面鑲嵌推廣到立體鑲嵌。
- 2.將人類與病毒輪流操作的規則改變。
- 3.將擋板的功能改變
- 4.改變病毒初位置

INNOVATION

謝謝大家

INNOVATION