INNOVATION

探討金n點在正N邊形中的存在性及幾何特性

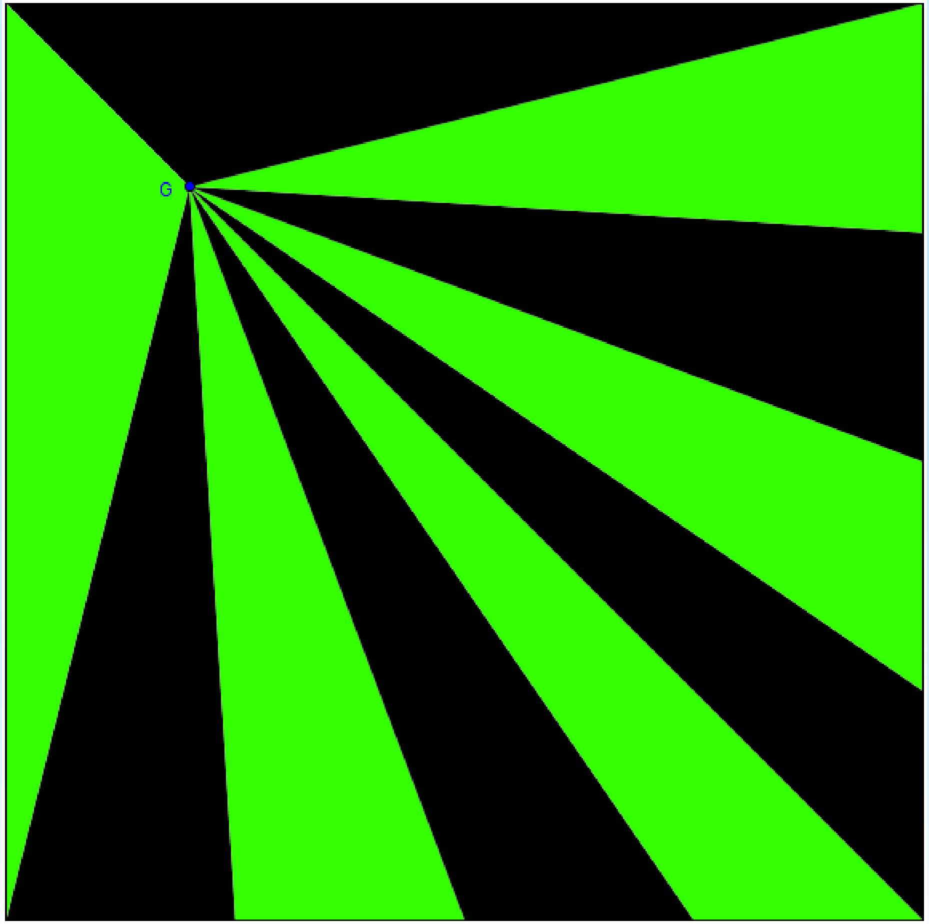
指導老師：尤貴弘老師

227 22 黃文宏

數學組 MATHEMATICS

什麼是金n點？

不是他，謝謝



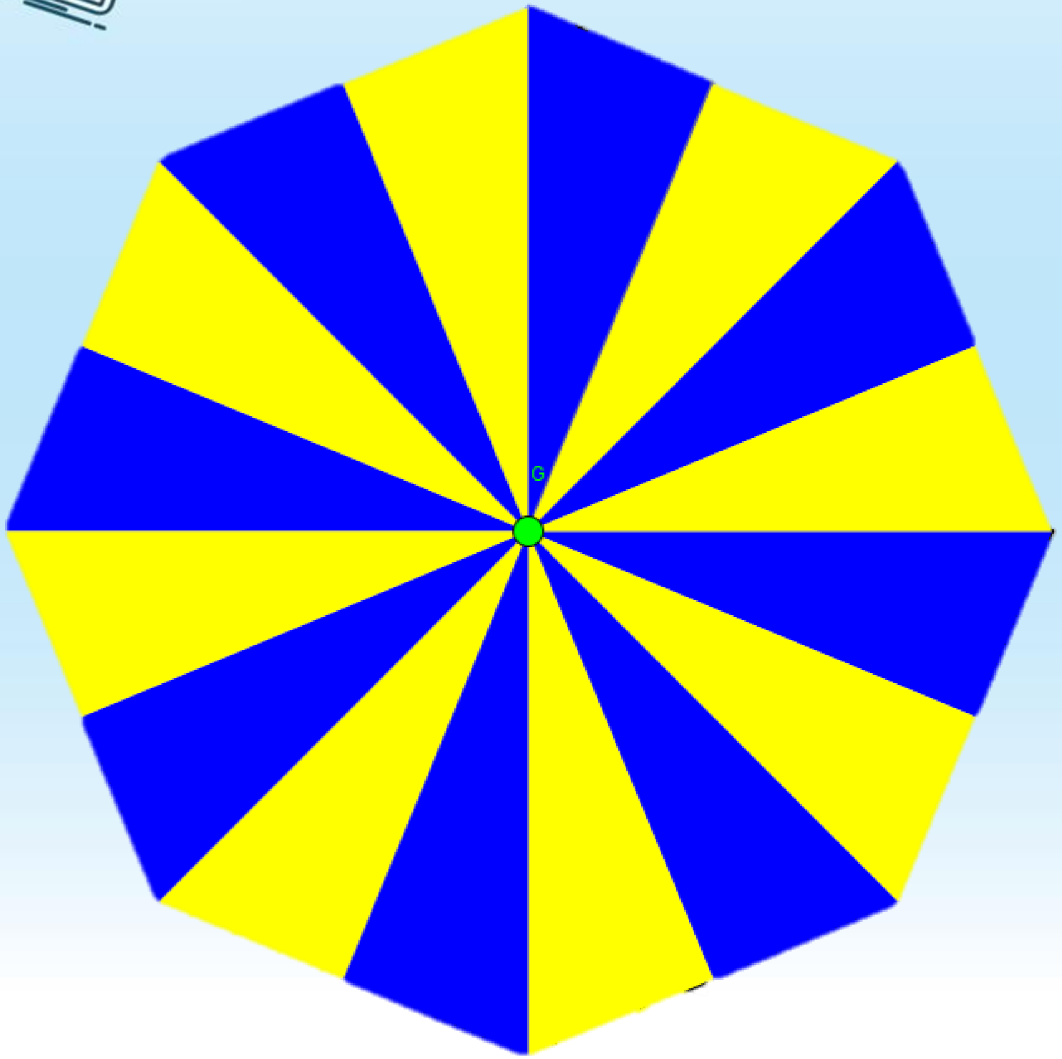
設 $ABCD$ 是座標平面上給定的正方形。對正整數 $n \geq 4$ (假設 P 在 $ABCD$ 內部)。我們稱 P 為「金 n 點」若 P 滿足以下性質：「可以在正方形 $ABCD$ 的邊界上依序標示出 n 個點 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (其中 4 個點為 A, B, C, D)，使得每個 ΔPQ_iQ_{i+1} 的面積都相等。」試求正整數 n 使得正方形 $ABCD$ 的內部恰含有 25 個金 n 點。

(本題是 105 年北二區筆試(一)的問題二)

INNOVATION

注意到邊上所選的等分點們需要包含所有頂點
因此，每一邊上的三角形數為整數
也因此，可能的金n點到每邊的距離比(三角形的高)
需要為有理數！

觀察：



左邊的中心點是唯一可能存在的金n點嗎？

直覺：向某邊移近1格

=向另一邊移近$\frac{1}{\sqrt{2}}$格

所以答案為是！

發想：

根據剛剛那個觀察
我們應該可以來
BuaBueh(擲筊=直角)解
析一下(??)
右邊有沒有中心以外
的金n點？

INNOVATION

沒空導的引理：

點到直線的距離公式

給定點 $P(x_0, y_0)$ 與直線 $L: ax+by+c=0\,(a^2+b^2\neq 0)$

則 P 點到直線 L 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

若 $q\in Q$，則

1. 當且僅當 $q=180k+m(m=-60,0,60,90),k\in Z$ 時， $\cos q^{o}\in Q$

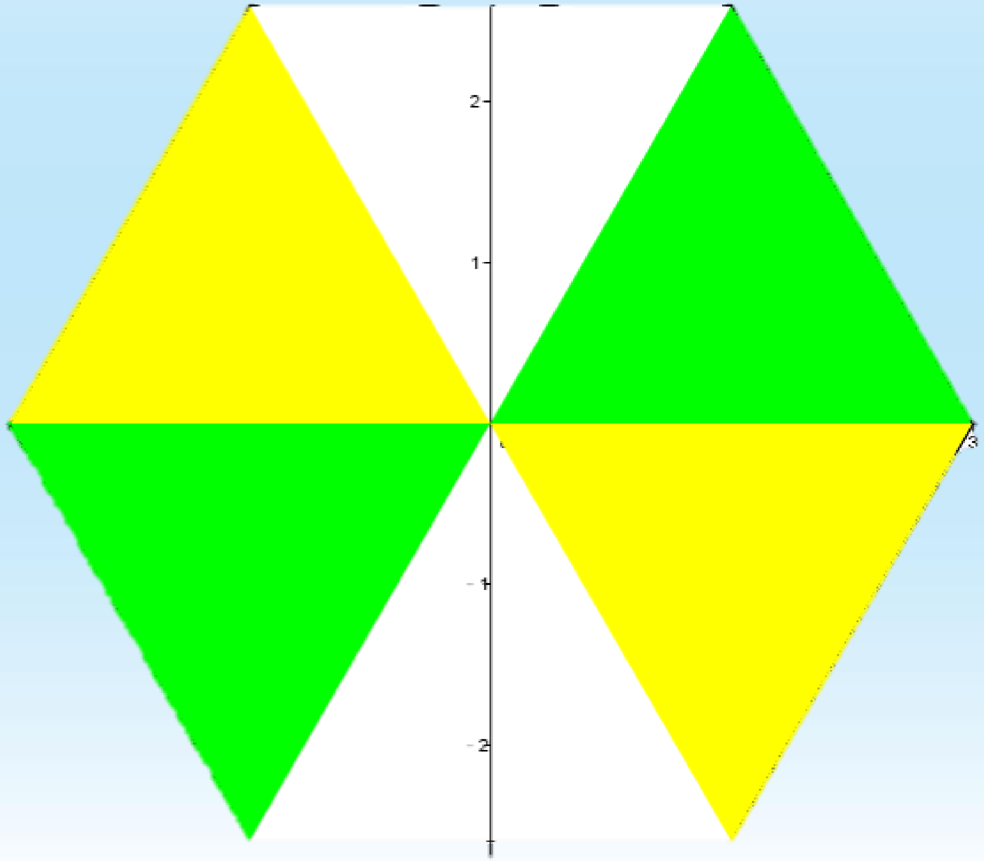
2. 當且僅當 $q=180k+m(m=-30,0,30,90),k\in Z$ 時， $\sin q^{o}\in Q$

3. 當且僅當 $q=180k+m(m=-45,0,45),k\in Z$ 時， $\tan q^{o}\in Q$

INNOVATION

Case 1：正偶數邊形

重點：金n點到每邊的距離比都是有理數比



WLOG可假設對邊的距離是有理數(設為2)

→金n點到每邊的距離都要是有理數

設中心為原點

觀察左圖的兩對三角形！

開炸！

如右是示意圖，其中N=6：

由右下角的圖可以發現AB的斜率為

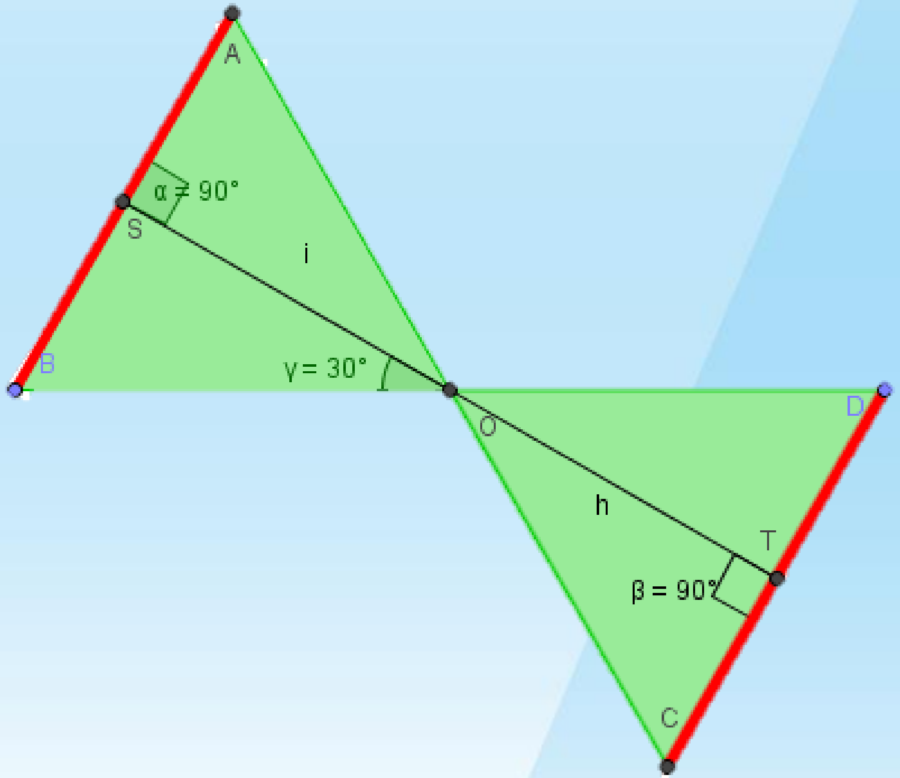
$tan(90^o-\frac{\pi}{N})=cot\frac{\pi}{N}$

B點座標為$(-sec\frac{\pi}{N},0)$

因此

$AB: y=cot\frac{\pi}{N}x+csc\frac{\pi}{N}$

$CD: y=cot\frac{\pi}{N}x-csc\frac{\pi}{N}$



INNOVATION

若設金n點為(a,b)，則他到兩邊的距離為

$$\frac{|a\cot\frac{\pi}{N}-b\pm\csc\frac{\pi}{N}|}{\sqrt{1+\cot^2\frac{\pi}{N}}}=\frac{|a\cot\frac{\pi}{N}-b\pm\csc\frac{\pi}{N}|}{\csc\frac{\pi}{N}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{N}|a\cot\frac{\pi}{N}-b\pm\csc\frac{\pi}{N}|$$

因此我們可以發現

$$a\cos\frac{\pi}{N}-b\sin\frac{\pi}{N}\in Q$$

INNOVATION

觀察右圖
我們又能發現

$$BE: y = -\cot\frac{\pi}{N}x - \csc\frac{\pi}{N}$$

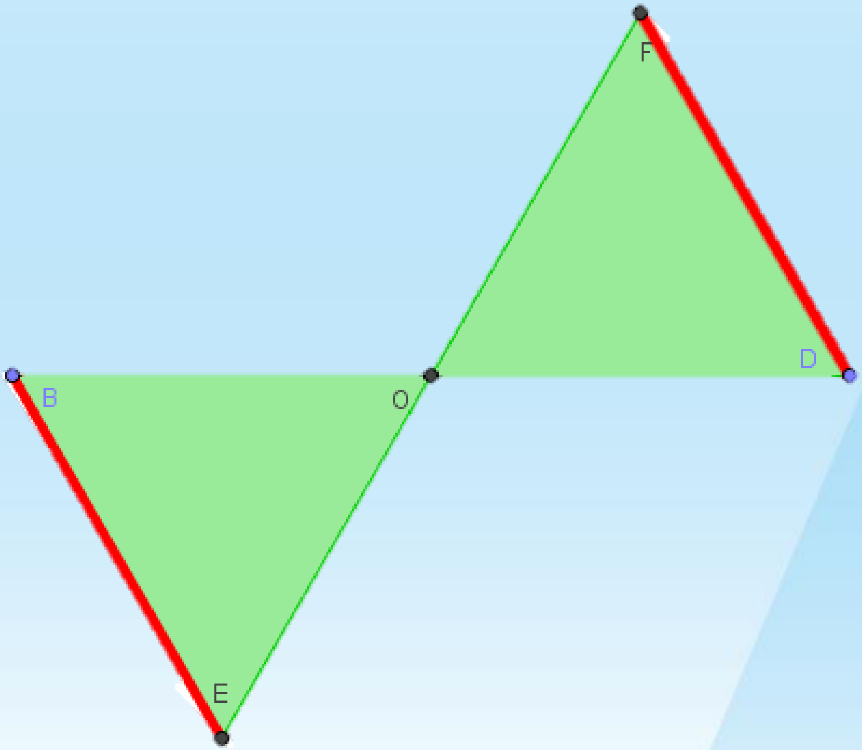
$$DF: y = -\cot\frac{\pi}{N}x + \csc\frac{\pi}{N}$$

於是透過以上的計算我們可以得到

$$a\cos\frac{\pi}{N} + b\sin\frac{\pi}{N} \in Q$$

配合之前的內容告訴我們

$$a\cos\frac{\pi}{N}, b\sin\frac{\pi}{N} \in Q$$



INNOVATION

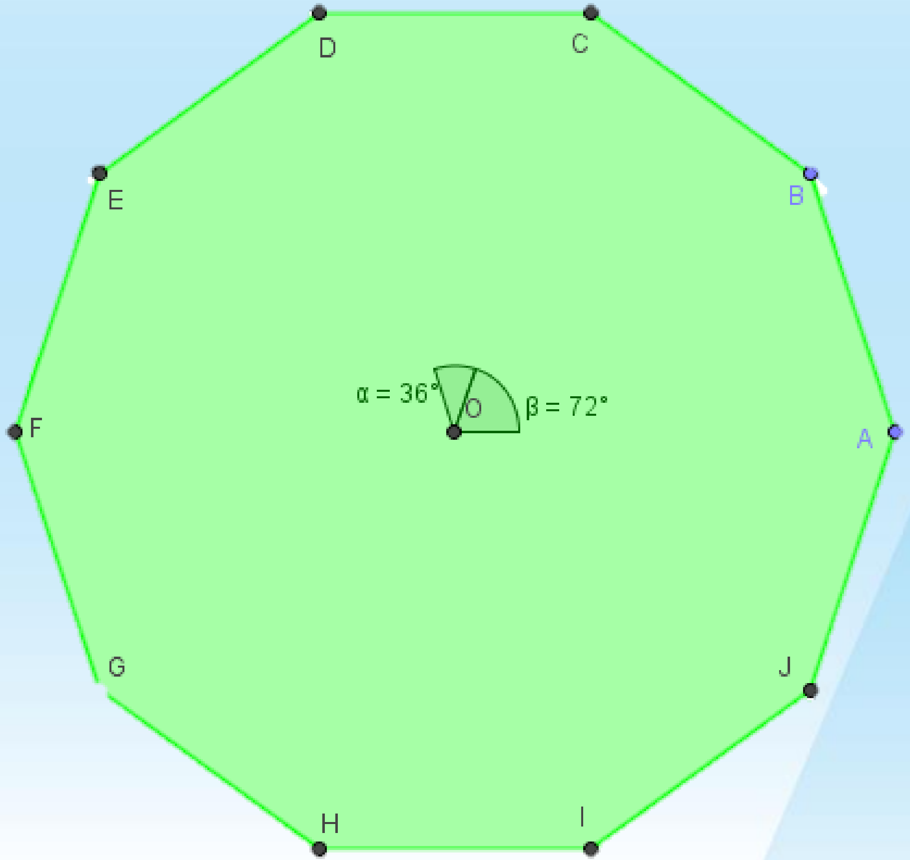
正4k+2邊形的情況

而因為左圖為4k+2邊形

故$b \in Q$，可得$sin\frac{\pi}{N} \in Q$

根據引理得N=6

b=0的情況後面有



正4k邊形的情況

因為我們會發現

由x,y座標的對稱性

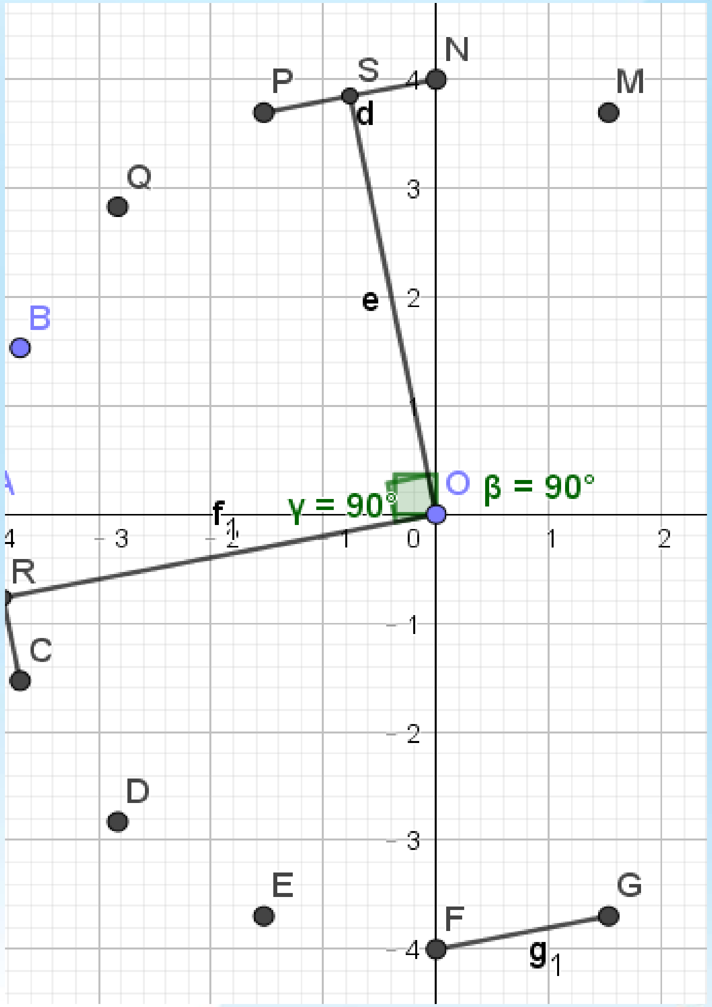
(其實是我懶得打其他算式，嘻嘻)

可以得到$a\sin\frac{\pi}{N}, b\cos\frac{\pi}{N} \in Q$

於是再根據前面的$a\cos\frac{\pi}{N}, b\sin\frac{\pi}{N} \in Q$

我們知道a,b不會同時是0

相除得到$tan\frac{\pi}{N}$為有理數，故N=4



關於前兩頁的b=0的case (ˊ・ω・ˋ)

右圖以$N = 10$為例

易見PJ的斜率分別為$cot\frac{3\pi}{N}$

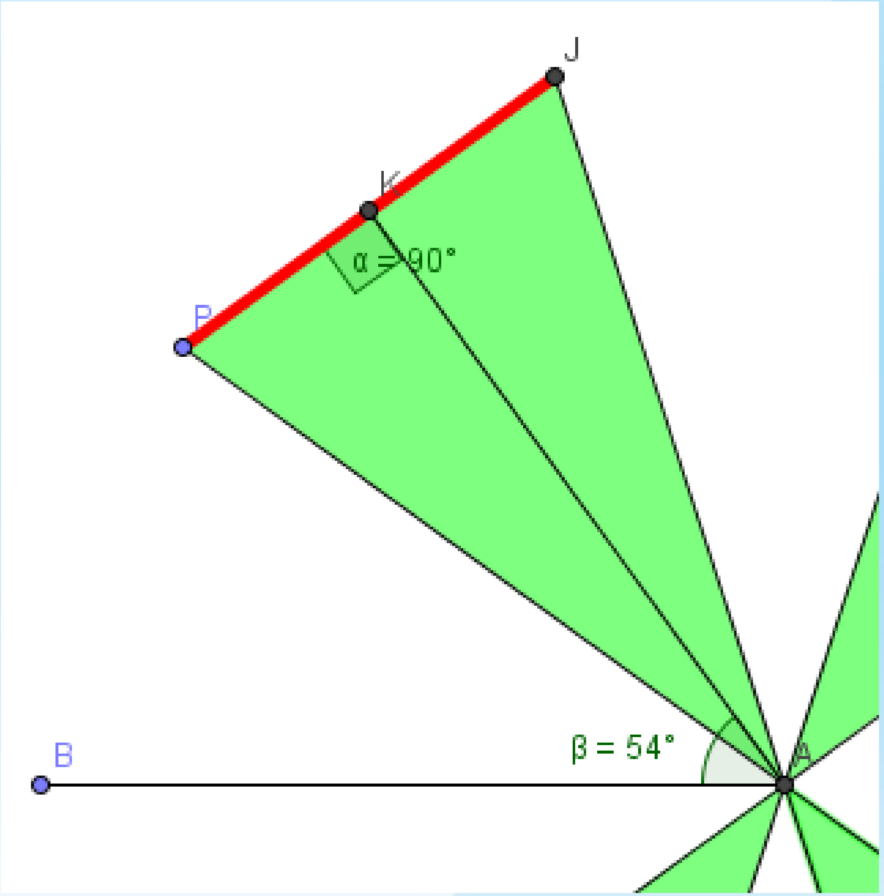
而P點的座標為

$(-sec\frac{\pi}{N}cos\frac{2\pi}{N}, sec\frac{\pi}{N}sin\frac{2\pi}{N})$

(其實就是邊長乘以三角函數再判別正負)

因此PJ的方程式為

$$y = cot\frac{3\pi}{N}x + cot\frac{3\pi}{N}sec\frac{\pi}{N}cos\frac{2\pi}{N} + sec\frac{\pi}{N}sin\frac{2\pi}{N}$$



INNOVATION

若金n點為(a,0)，則其到PJ的距離為

$$sin\frac{3\pi}{N}\left|a\,cot\frac{3\pi}{N}+cot\frac{3\pi}{N}sec\frac{\pi}{N}cos\frac{2\pi}{N}+sec\frac{\pi}{N}sin\frac{2\pi}{N}\right|$$

$$=\left|a\,cos\frac{3\pi}{N}+cos\frac{3\pi}{N}sec\frac{\pi}{N}cos\frac{2\pi}{N}+sec\frac{\pi}{N}sin\frac{2\pi}{N}sin\frac{3\pi}{N}\right|$$

$$=\left|a\,cos\frac{3\pi}{N}+sec\frac{\pi}{N}cos\frac{\pi}{N}\right|=\left|a\,cos\frac{3\pi}{N}+1\right|$$(差角公式)

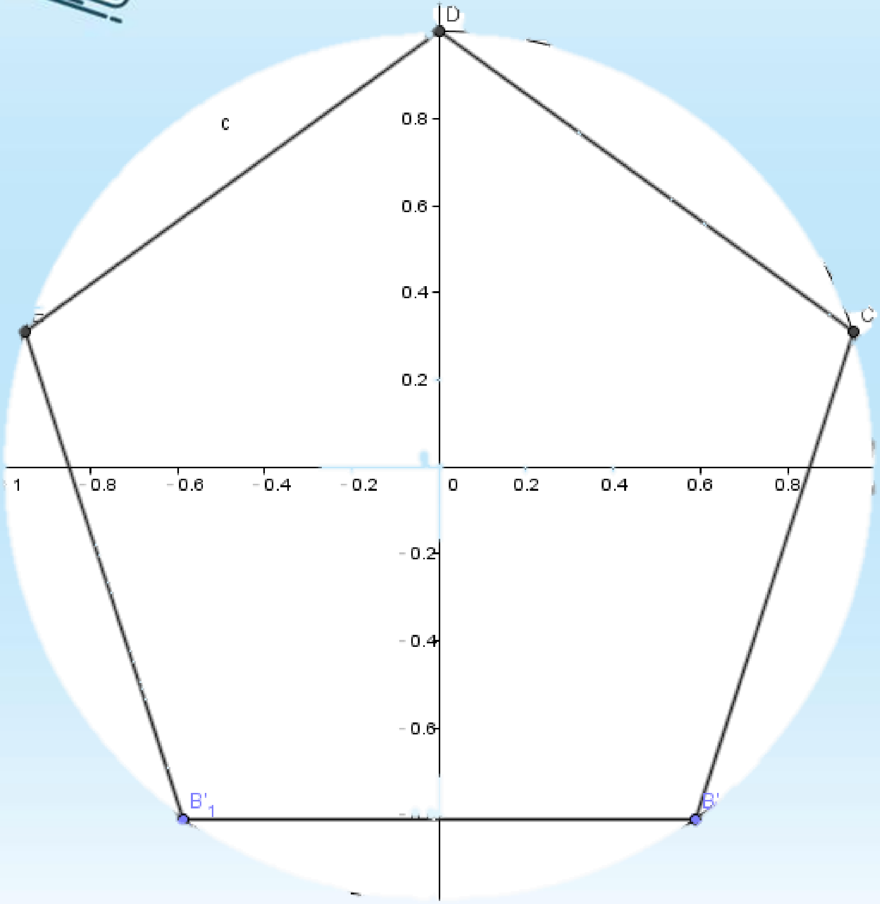
因此$a\,cos\frac{3\pi}{N}\in Q$，又根據前述有$a\,cos\frac{\pi}{N}\in Q$，又a不為0

兩者相除得$4cos^2\frac{\pi}{N}-3=2cos^2\frac{\pi}{N}-2sin^2\frac{\pi}{N}-1\rightarrow 2cos\frac{2\pi}{N}\in Q$

根據引理得N=6

INNOVATION

Case 2：正奇數邊形



重點：金n點到每邊的距離比
都是有理數比

WLOG可假設外接圓為單位圓
設中心為原點
觀察左圖，由底邊開始

再次開炸！

我們可以發現D$\left(-\sin\frac{\pi}{N}, -\cos\frac{\pi}{N}\right)$

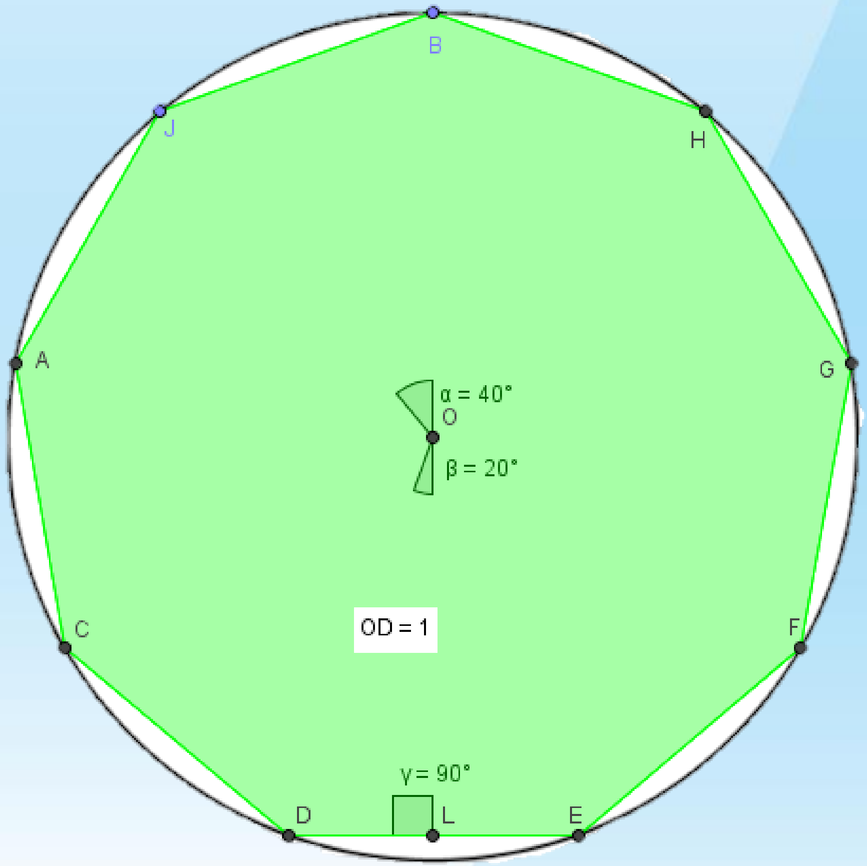
又因為外角為$\frac{2\pi}{N}$

所以CD的方程式為

$$y = -\tan\frac{2\pi}{N}x - \tan\frac{2\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N} - \cos\frac{\pi}{N}$$

與之對稱的邊(EF)為

$$y = \tan\frac{2\pi}{N}x - \tan\frac{2\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N} - \cos\frac{\pi}{N}$$



如果假設金點為(a,b)

其到底邊的距離為$b+\cos\frac{\pi}{N}$

而其到CD為$\frac{\left|-a\tan\frac{2\pi}{N}-b-\tan\frac{2\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}\right|}{\sqrt{1+\tan\frac{2\pi}{N}^{2}}}=\left|-a\sin\frac{2\pi}{N}-b\cos\frac{2\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}\right|$

同理其到EF的距離為$\left|a\sin\frac{2\pi}{N}-b\cos\frac{2\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}\right|$

因此$\frac{-a\sin\frac{2\pi}{N}-b\cos\frac{2\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}}{b+\cos\frac{\pi}{N}},\frac{a\sin\frac{2\pi}{N}-b\cos\frac{2\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}}{b+\cos\frac{\pi}{N}}\in Q\rightarrow\frac{2a\sin\frac{2\pi}{N}}{b+\cos\frac{\pi}{N}}\in Q$

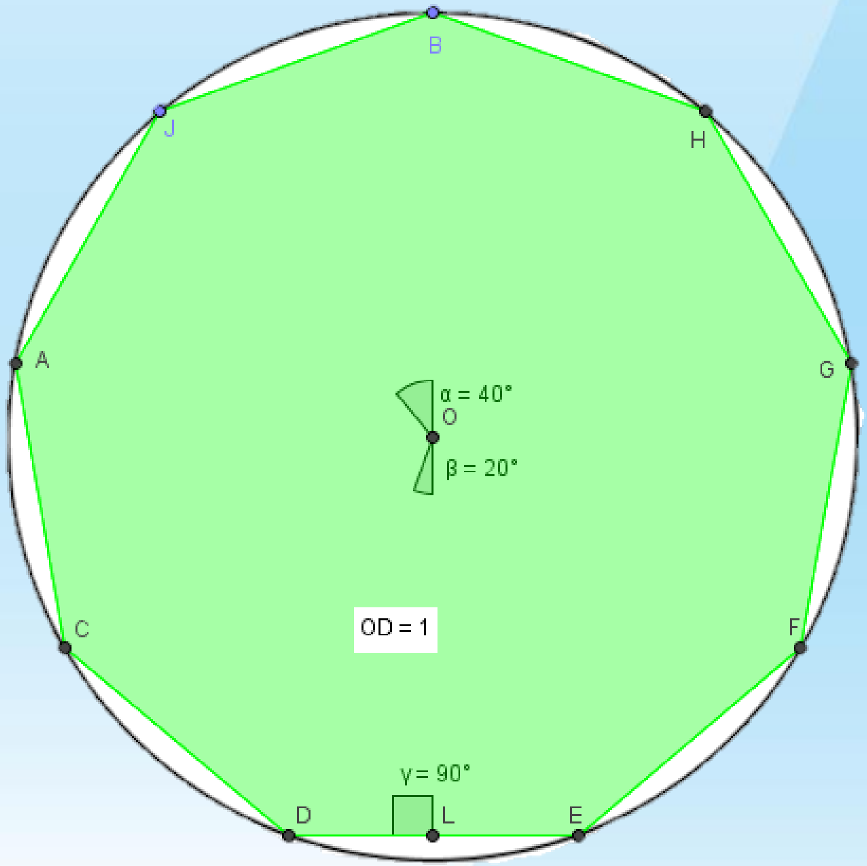
算角可以發現BJ與BH的斜率為

$$\tan\frac{\pi}{N}, -\tan\frac{\pi}{N}$$

故直線方程式為

$$BJ：y = \tan\frac{\pi}{N}x + 1$$

$$BH：y = -\tan\frac{\pi}{N}x + 1$$



可算出其距離為

$$\frac{\left|\pm a \tan\frac{\pi}{N} - b + 1\right|}{\sqrt{1+\tan\frac{\pi}{N}^{2}}} = \left|\pm a \sin\frac{\pi}{N} - b\cos\frac{\pi}{N} + \cos\frac{\pi}{N}\right|$$

於是也知道

$$\frac{\pm a \sin\frac{\pi}{N} - b\cos\frac{\pi}{N} + \cos\frac{\pi}{N}}{b+\cos\frac{\pi}{N}} \in Q \rightarrow \frac{2a\sin\frac{\pi}{N}}{b+\cos\frac{\pi}{N}} \in Q$$

相除可得$2\cos\frac{\pi}{N} \in Q$，根據引理得到N=3為唯一解

a=0的情況後面有

關於前兩頁的a=0的case (´・ω・`)

以上的情況，到剛剛的邊的距離可以化簡成

$$b+cos\frac{\pi}{N}, \left|-b\,cos\frac{2\pi}{N}-cos\frac{\pi}{N}\right|, \left|(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}\right|$$

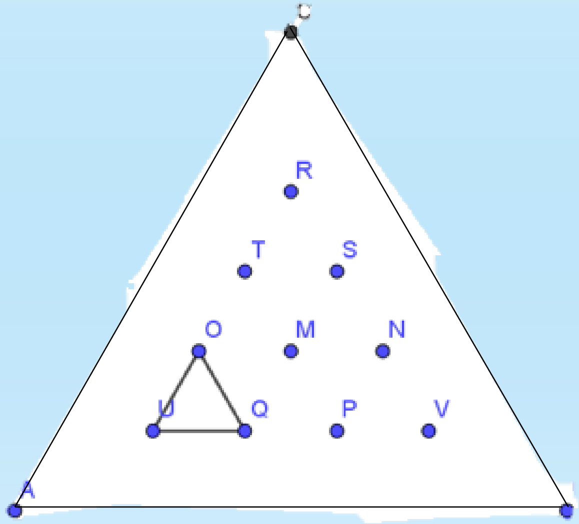
我們知道$\frac{b+cos\frac{\pi}{N}}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} \in Q \rightarrow \frac{b+cos\frac{\pi}{N}}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} - 1 = \frac{b\left(1+cos\frac{\pi}{N}\right)}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} \in Q$

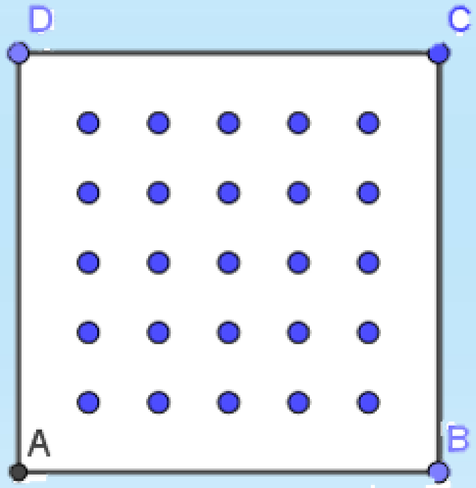
又$\frac{-b\,cos\frac{2\pi}{N}-cos\frac{\pi}{N}}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} \in Q$，故$\frac{-b\,cos\frac{2\pi}{N}-cos\frac{\pi}{N}}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} + \frac{b+cos\frac{\pi}{N}}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} = \frac{b\left(1-cos\frac{2\pi}{N}\right)}{(1-b)\,cos\frac{\pi}{N}} \in Q$

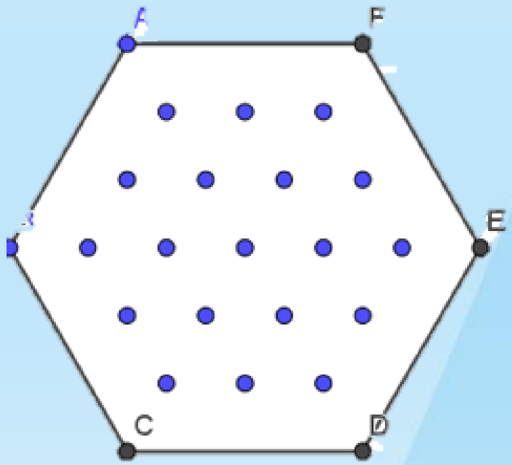
又b不為0，故兩者相除得到$2\left(1-cos\frac{\pi}{N}\right) \in Q \rightarrow$ N=3

INNOVATION

Case 3：正3,4,6邊形

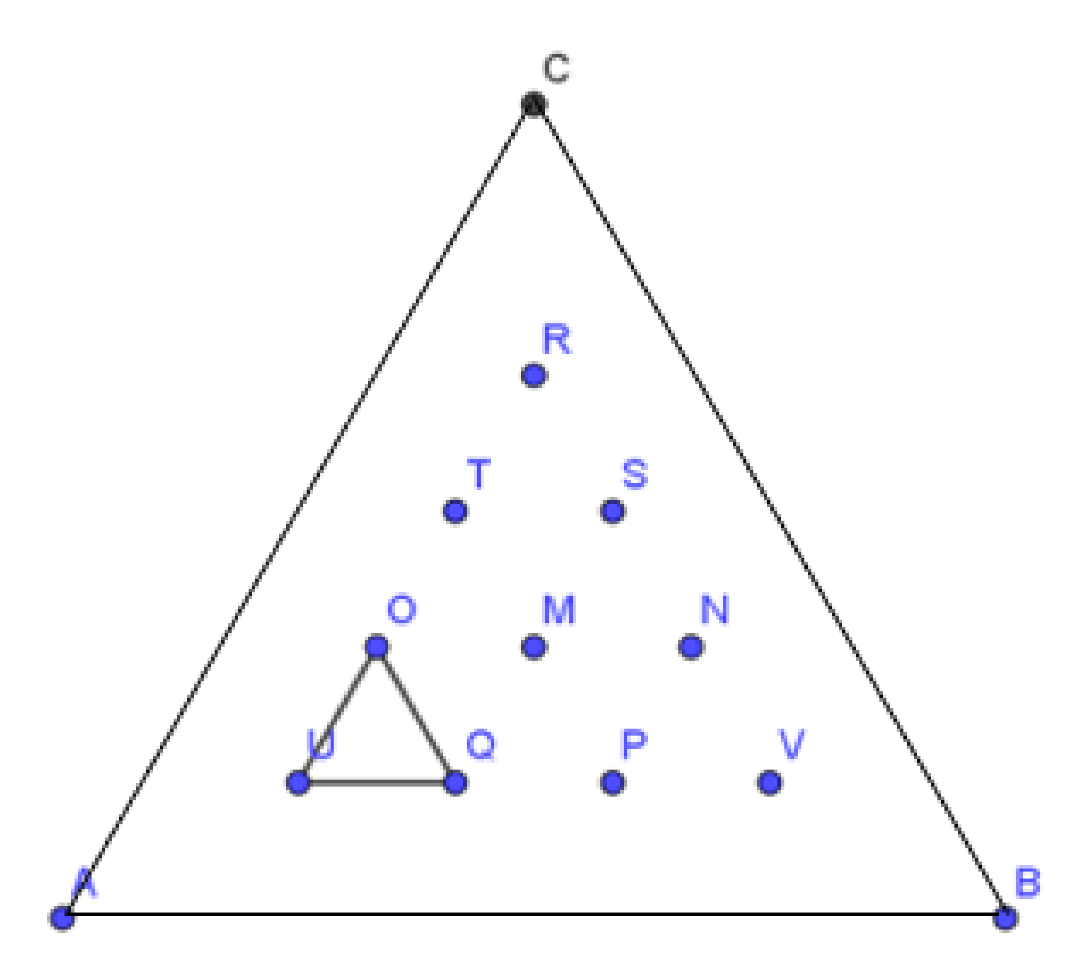






我的去背過程是個真真實實的悲劇

Case 3-1：三角形



引述重心座標的結論

得到金n點重心座標為$[\frac{a}{n},\frac{b}{n},\frac{c}{n}]$

其中$a+b+c=n,\ \ a,b,c\in N$

得出對於$n\geq 3$，金n點有

$$H_{n-3}^{3}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$個

INNOVATION

Case 3-2：正方形

參考原本的題目解法

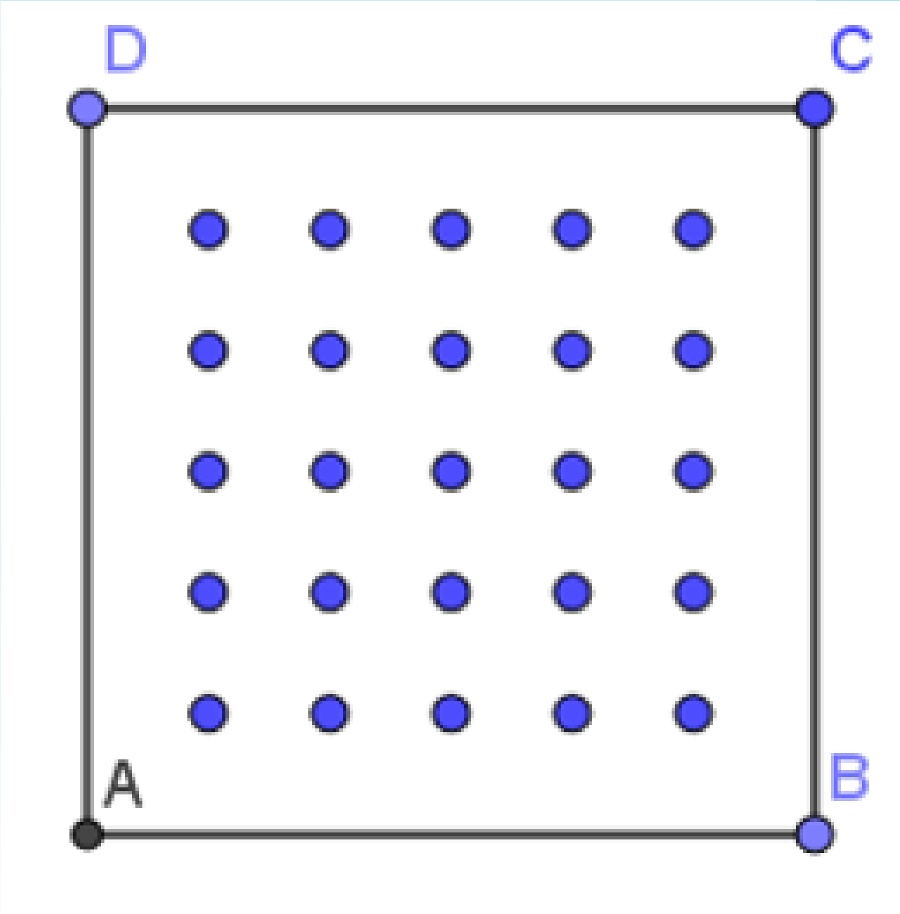
設A(0,0),B(1,0),C(1,1),D(0,1)

並設金n點為$\left(\frac{q}{p},\frac{r}{p}\right)$ $p,q,r \in N$

可知此時$n = 2p$ (n須為偶數)

則$0 < q,r < p$皆為合理的解

亦可知此時有$(p-1)^2 = \frac{(n-2)^2}{4}$個金n點



Case 3-3：正六邊形

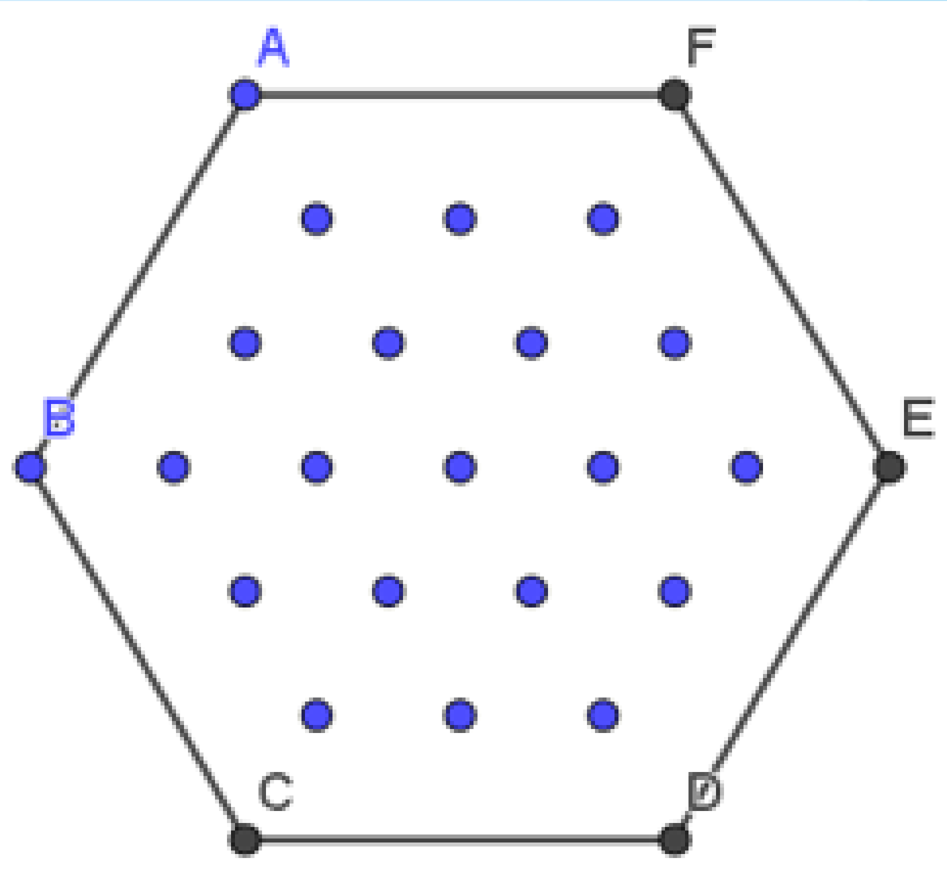
假設金點為(a, b)，其中

$$a = \frac{q}{\sqrt{3}p}, b = \frac{r}{p}$$

q, r均為整數或分母為2的分數
$, p$為正整數
而其到六邊的距離比為

$$p + 2r : p - 2r : p + q - r : p - q + r : p + q + r : p - q - r$$

目標是求出$2|r| \leq p - 1, |q| + |r| \leq p - 1$的所有q,r解



INNOVATION

我們可以注意到當|r|=0時

$|q| \leq p-1$且為整數

故中間一排有2p-1個點

當$|r|=\frac{1}{2}$，$|q| \leq p-\frac{3}{2}$且為分數

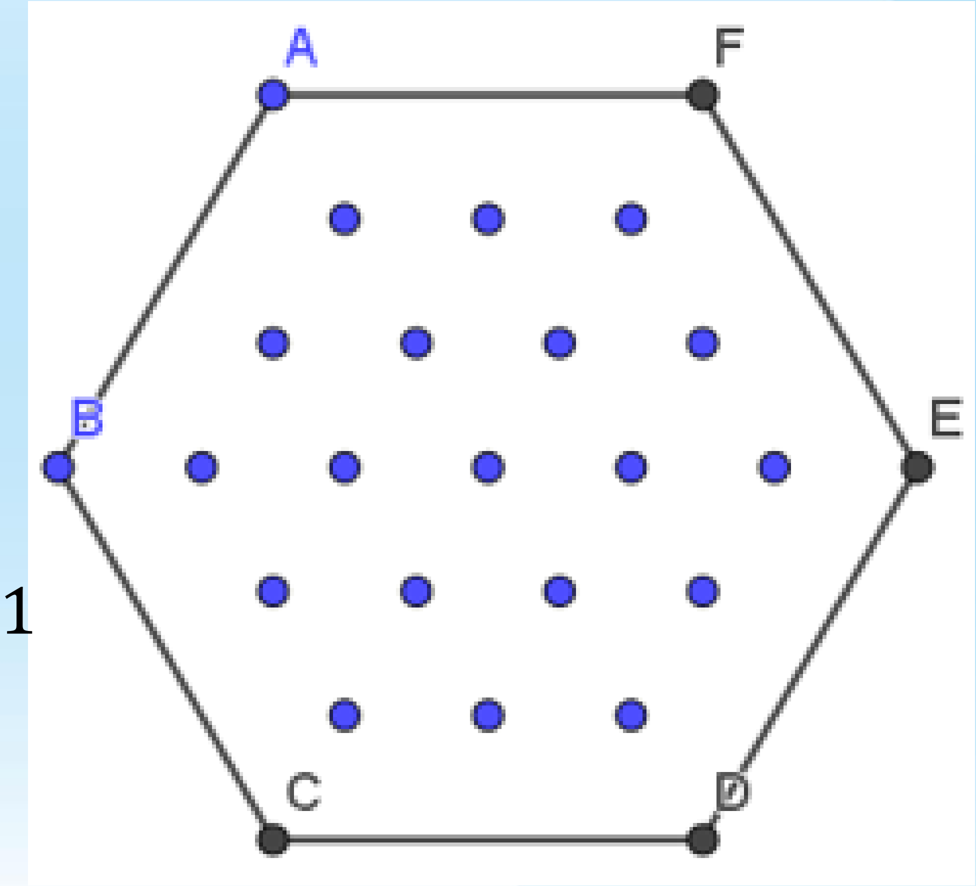
故上下一排有2p-2個點

以此類推，易見上下半均有p排

故有$\frac{(2p-1+p)p}{2} * 2-(2p-1)=3p^2-3p+1$

個不同的金n點

再用n=6p代換即為答案



INNOVATION

結論1：

當 N 不為 3,4,6 時：

1. 如果n整除N時，金n點只有1個。
2. 如果n不整除N，沒有金n點。

當N=3，金n點有$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$個。

當N=4時：

1. 若n為奇數，則沒有金n點。
2. 若n為偶數，則金n點有$\frac{(n-2)^2}{4}$個。

當N=6時：

1. 若n不為6的倍數，則沒有金n點。
2. 若n為6的倍數，則金n點有$\frac{n^2-6n+12}{12}$

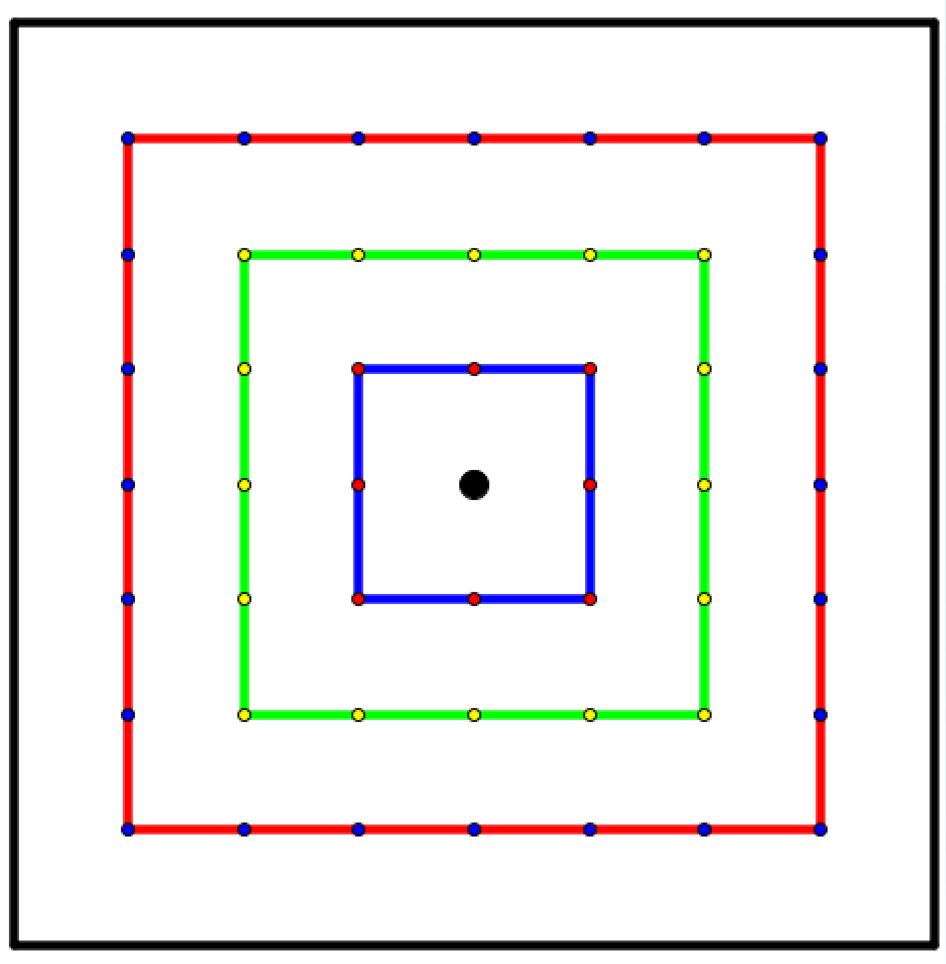
INNOVATION

金n點有哪些性質-1

右圖是當n=16時的金16點圖形(共49個點)，看到這個圖形，我們會想問：

1. 這49個點的圖形是什麼？

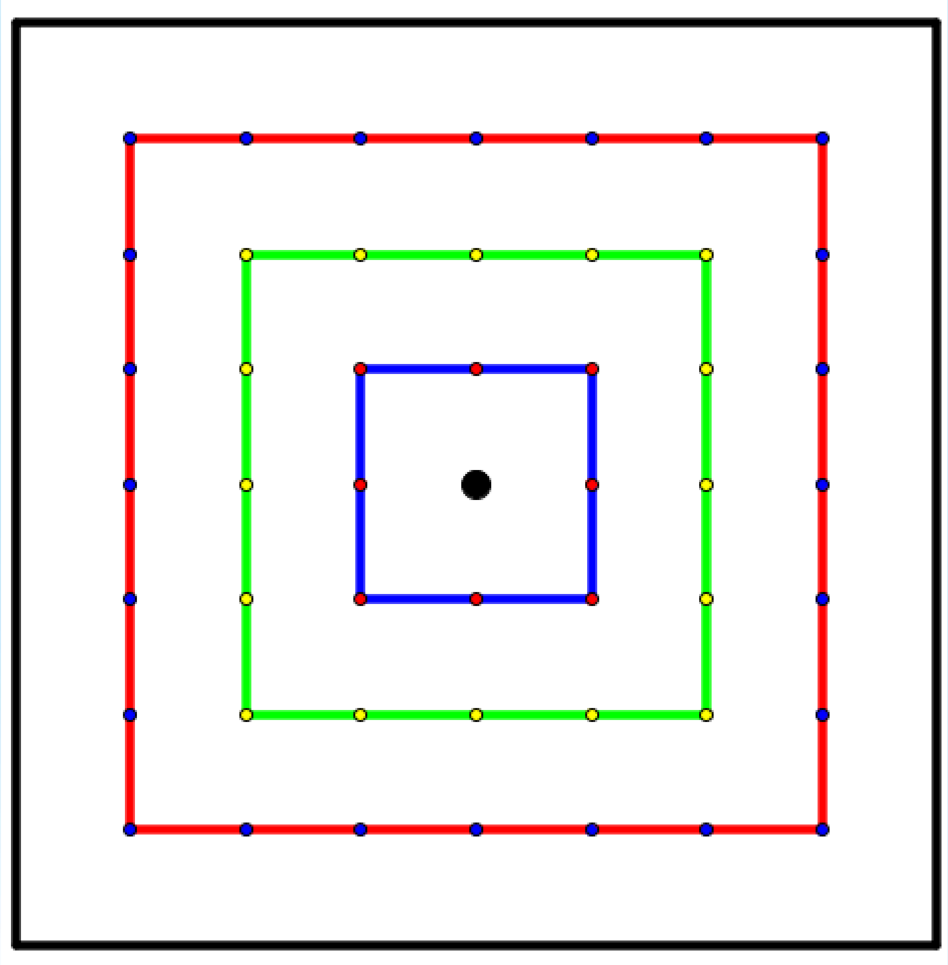
很顯而易見的是個方陣。



金n點有哪些性質-2

2. 見右圖，總共有幾層？

顯然是4



金n點有哪些性質-3

3. 其邊長的公差為何？

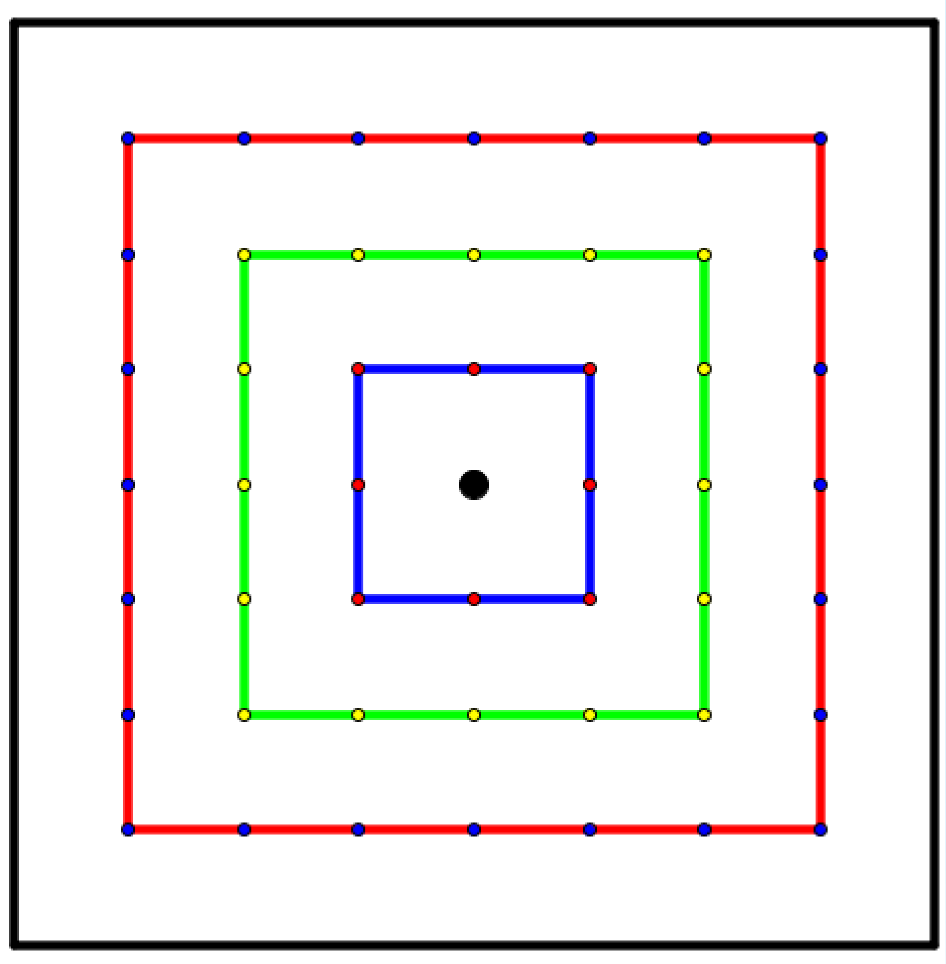
假設原本的正方形邊長為a

中間黑點顯然是0

因為n=16，故p=8 (見之前的推導)

因此紅框的邊長是$\frac{7}{8}a-\frac{1}{8}a=\frac{3}{4}a$

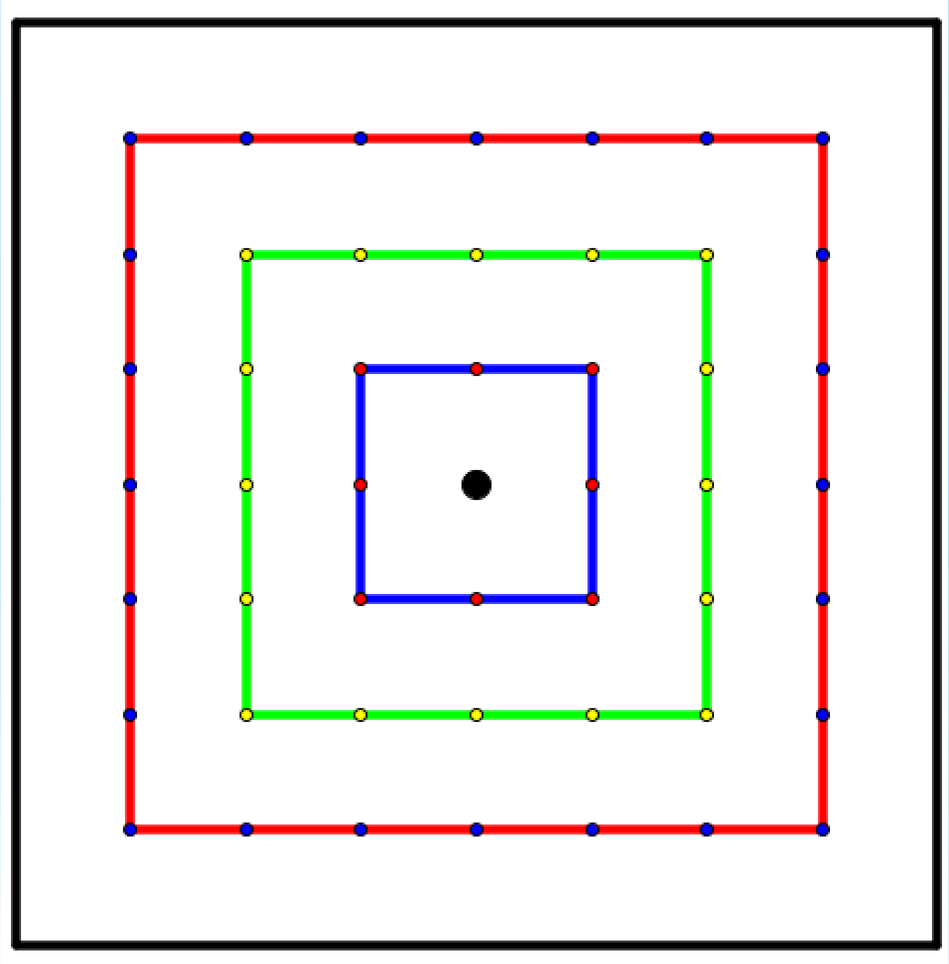
故公差為$\frac{1}{4}a$



INNOVATION

金n點有哪些性質-4

4. 我們知道紅色邊框是金16點圖形的最外層，其與黑色邊框的邊長比？



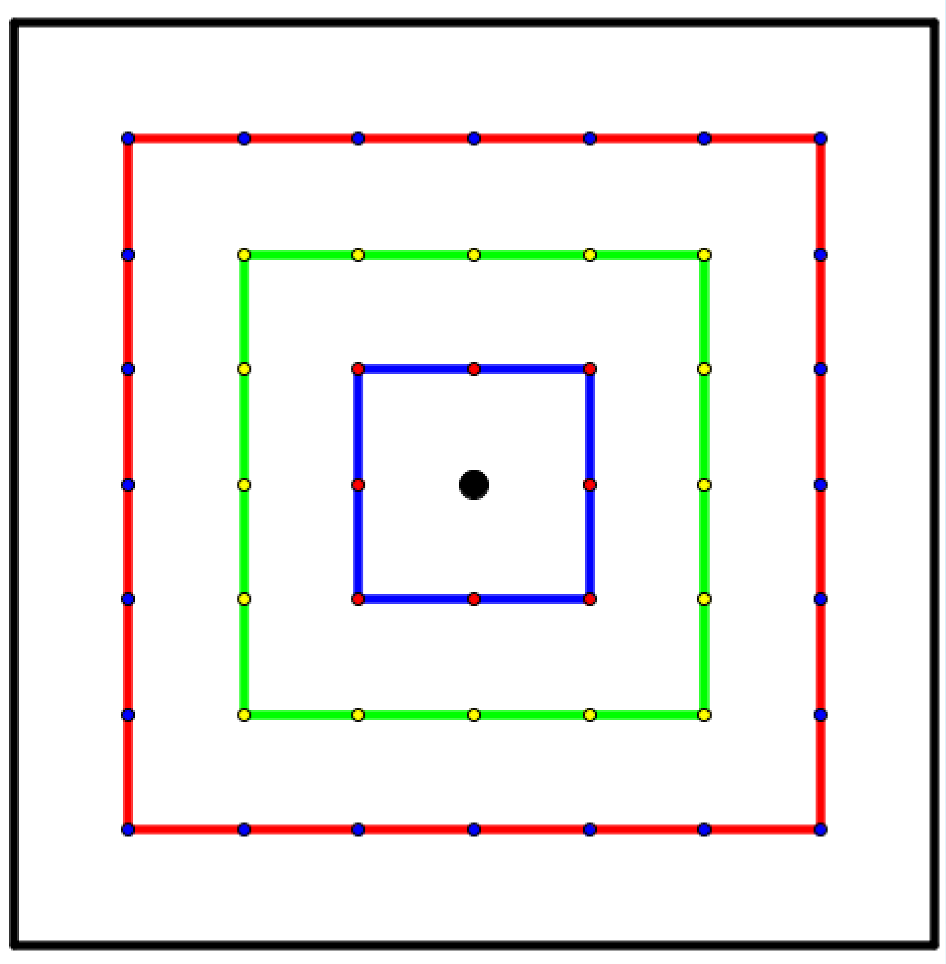
這在上一頁有提到，是$\frac{3}{4}a$

也就是原圖的$\frac{3}{4}$倍

INNOVATION

金n點有哪些性質-5

5. 如果綠色邊框是黑色邊框金m點的最外層，求m。

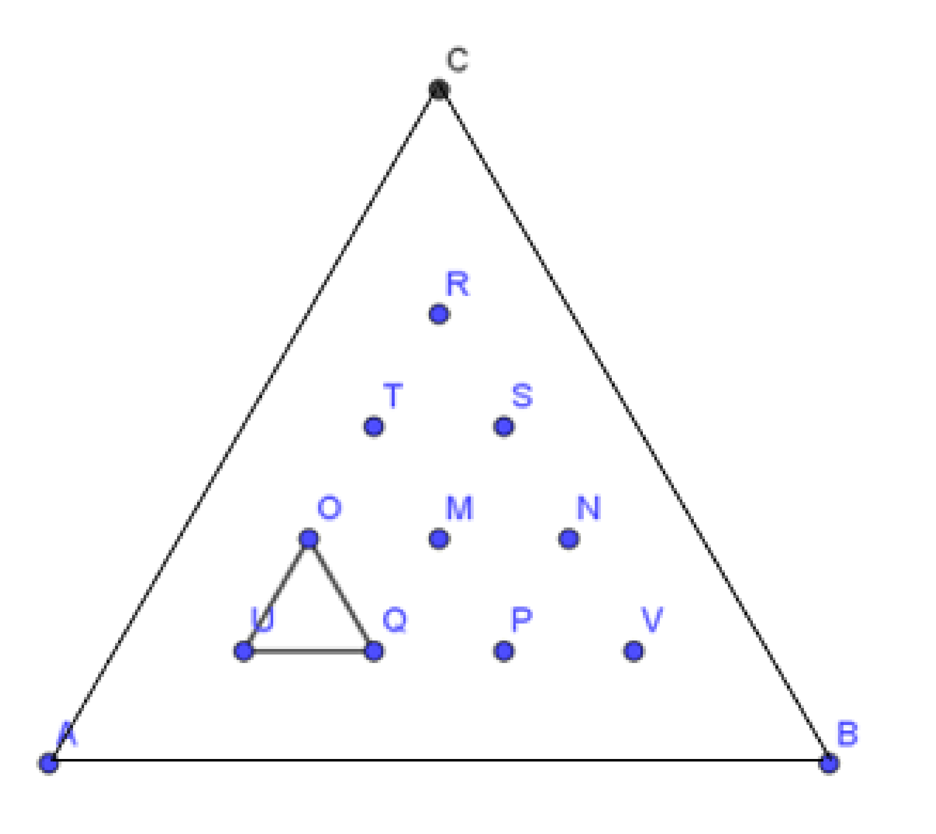


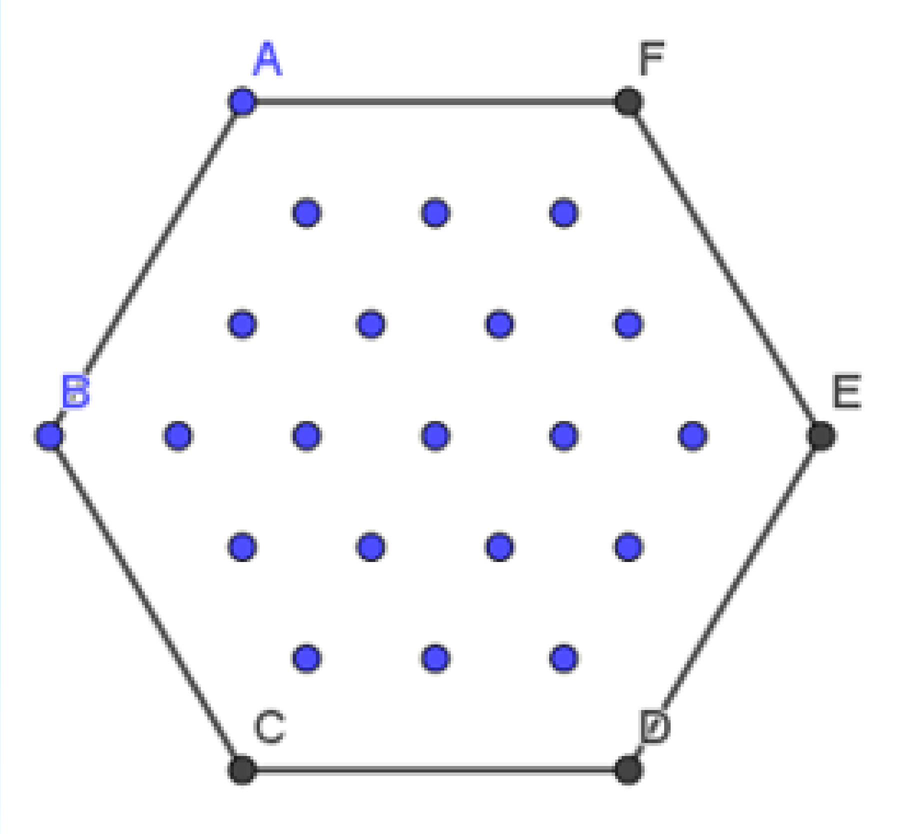
根據先前的推導，綠框邊長為原本的$\frac{1}{2}$倍。

因此p=4，從而m=8。

如果把n改為其他數，這5題也是用同樣的邏輯解

三角形與正六邊形





- 探討跟剛剛相同的問題
- 只是……我懶得再把圖重畫XP

結論2：

	正三角形	正方形	正六邊形
金n點的圖形	正三角形點陣	正方形點陣	正六邊形點陣
可區分成?層	$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$	$\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$	$\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor$
每一層的邊長差	原圖形的$\frac{3}{n}$倍	原圖形的$\frac{4}{n}$倍	原圖形的$\frac{6}{n}$倍
由外往內數第m層	原圖形的$1-\frac{3m}{n}$倍	原圖形的$1-\frac{4m}{n}$倍	原圖形的$1-\frac{6m}{n}$倍
第m層是原圖形的金r點的最外層	$r=\frac{n}{m}, m\|n$	$r=\frac{n}{m}, m\|n$	$r=\frac{n}{m}, m\|n$

剩下的問題留給你們做

如果你們想收這個爛攤子的話
X)

1. 如果可以Define「體的金n點」可以考慮去求體金n點。

2. 解除正N邊形的限制，但有額外附加條件像是點對稱或者線對稱。

特別感謝：指導老師 尤貴弘老師

謝謝大家的聆聽！