

**Σημειώσεις στο μάθημα**  
**”Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα”**  
**Διαλέξη 6<sup>η</sup>: Εναλλακτικές Διαμορφώσεις**  
**Θωμάς Καμαλάκης**

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών

## 1 Σκοπός

Στο έκτο μάθημα θα ασχοληθούμε με εναλλακτικούς τρόπους μετάδοσης της πληροφορίας που δεν αποτυπώνουν την πληροφορία μόνο στο πλάτος αλλά και στην φάση του σήματος. Πρόκειται για τις διαμορφώσεις κατά φάση (phase shift keying - PSK) και και την ορθογώνια διαμόρφωση πλάτους (quadrature amplitude modulation - QAM).

## 2 Συναρτήσεις βάσης

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η διαμόρφωση PAM στην βασική ζώνη συνίσταται στην αλλαγή του πλάτους ενός βασικού παλμού  $p(t)$ . Έτσι για το σύμβολο το οποίο καταλαμβάνει την διάρκεια μεταξύ  $[0, T_s]$  όπου  $T_s$  είναι η διάρκεια του συμβόλου θα έχουμε,

$$x(t) = A_m p(t) \quad (1)$$

όπου το  $A_m$  είναι το πλάτος του συμβόλου που θέλουμε να μεταδώσουμε. Ο παλμός  $p(t)$  καθορίζεται από το κύκλωμα του πομπού. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το  $p(t)$  όπως εμείς επιθυμούμε αρκεί να λαμβάνουμε υπόψη το σωστό πλάτος του όταν υπολογίζουμε την μέση ισχύ. Για παράδειγμα στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε θέσει:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < T_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2)$$

Η μέση ισχύς  $p_{av}$  του  $p(t)$  εντός του διαστήματος  $[0, T_s]$  είναι ίση με:

$$p_{av} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} p^2(t) dt = 1 \quad (3)$$

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να κανονικοποιήσουμε το  $p(t)$  έτσι ώστε να έχει ενέργεια  $\varepsilon_p$  ίση με 1. Αν

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_s}} & , 0 \leq t < T_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\varepsilon_p = \int_0^{T_s} p^2(t) dt = 1 \quad (5)$$

Στην περίπτωση αυτή η μέση ενέργεια του σήματος  $m(t)$

$$m(t) = \sum_k m_k p(t - kT_s) \quad (6)$$

σε ένα διάστημα  $[(k-1)T_s, kT_s]$  θα είναι:

$$\varepsilon_{av} = \mathbb{E} \left\{ \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} m_k^2 p^2(t - kT_s) dt \right\} = \mathbb{E} \{ m_k^2 \} \varepsilon_p = \beta^2 \frac{M^2 - 1}{3} \varepsilon_p = \beta^2 \frac{M^2 - 1}{3} \quad (7)$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε καταλήξει στην ίδια ακριβώς έκφραση για την μέση ισχύ του σήματος PAM όταν ο παλμός  $p(t)$  όμως δινόταν από την (2) και όχι την (4). Ο δέκτης θα μπορούσε να περιγραφεί από το παρακάτω σχήμα: Πλέον οι έξοδοι

$$m(t) + n(t) \longrightarrow \int_{T_s} p(t) dt \longrightarrow y_k = m_k + n_k$$

**Εικόνα 1.** Υπολογισμός των συμβόλων εξόδου στην περίπτωση του PAM

υπολογίζονται από τις:

$$y_k = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} y(t) p(t - kT_s) dt = \bar{m}_k + n_k \quad (8)$$

$$\bar{m}_k = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} m(t)p(t - kT_s)dt \quad (9)$$

$$n_k = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p(t - kT_s)dt \quad (10)$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι:

$$\bar{m}_k = m_k \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} p^2(t - kT_s)dt = m_k \quad (11)$$

όπου γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma^2 = \mathbb{E} \{m_k^2\} = \varepsilon_{av} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{n_k^2\} &= \mathbb{E} \left\{ \left( \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p(t - kT_s)dt \right)^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t_1)n(t_2)p(t_1 - kT_s)p(t_2 - kT_s)dt_1dt_2 \right\} = \\ &= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \mathbb{E} \{n(t_1)n(t_2)\} p(t_1 - kT_s)p(t_2 - kT_s)dt_1dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \delta(t_1 - t_2)p(t_1 - kT_s)p(t_2 - kT_s)dt_1dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} p^2(t_1 - kT_s)dt_1 = \frac{N_0}{2} \quad (13) \end{aligned}$$

Αν συγκρίνουμε το τι κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και το τι κάναμε εδώ καταλήγουμε στα εξής:

- στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε τον παλμό  $p(t)$  να έχει μέγιστο πλάτος ίσο με 1 κάτι που είχε ως αποτέλεσμα ο παλμός να έχει μέση ισχύ ίση με 1. Εδώ ορίσαμε το  $p(t)$  να έχει ενέργεια  $\varepsilon_p$  ίση με 1.
- ο δέκτης δεν υπολογίζει την μέση τιμή του αναλογικού σήματος  $m(t) + n(t)$  σε κάθε διάρκεια συμβόλου αλλά το ολοκλήρωμα του γινομένου  $(m(t) + n(t))p(t)$ .
- η ενέργεια του σήματος είναι  $\varepsilon_{av} = \mathbb{E} \{m_k^2\}$  ενώ με την προηγούμενη κανονικοποίηση η μέση ισχύς  $P_{av}$  ήταν ίση με  $\mathbb{E} \{m_k^2\}$  και η ενέργεια  $\varepsilon_{av} = P_{av}T_s = \mathbb{E} \{m_k^2\} T_s$ .
- η μέση τιμή του  $\mathbb{E} \{n_k^2\}$  με την προηγούμενη κανονικοποίηση ήταν  $N_0/(2T_s)$  ενώ με την τωρινή είναι ίση με  $N_0/2$ .

Αν υπολογίσουμε το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο ως:

$$\text{SNR}_S = \frac{\varepsilon_{av}}{N_0} \quad (14)$$

τότε βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις θα λάβουμε το αποτέλεσμα

$$\text{SNR}_S = \frac{\varepsilon_{av}}{N_0} = \frac{\mathbb{E} \{m_k^2\}}{2 \mathbb{E} \{n_k^2\}} \quad (15)$$

Επομένως και στις δύο περιπτώσεις το πηλίκο σήμα προς θόρυβο είναι το ίδιο και δεν αλλάζει τίποτα με την κανονικοποίηση του  $p(t)$ .

Η συνάρτηση  $p(t)$  όταν έχει ενέργεια ίση με 1 ονομάζεται συνάρτηση βάσης. Θα δούμε και παρακάτω ότι οι συναρτήσεις βάσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες. Προς το παρόν ας θεωρήσουμε δύο άλλες συναρτήσεις την

$$p_1(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (16)$$

$$p_2(t) = p(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (17)$$

όπου το  $p(t)$  τώρα δίνεται από την σχέση:

$$p(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T_s}} & , 0 \leq t < T_s \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (18)$$

Ο λόγος για τον οποίο έχουμε επιλέξει τον παράγοντα  $\sqrt{\frac{2}{T_s}}$  θα γίνει σαφής παρακάτω. Αν υπολογίσουμε την ενέργεια του  $p_1(t)$  θα έχουμε:

$$\int_0^{T_s} p_1^2(t)dt = \int_0^{T_s} p^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t)dt = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi f_0 t)dt \quad (19)$$

Δεδομένου ότι

$$\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \quad (20)$$

θα έχουμε:

$$\int_0^{T_s} \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{T_s}{2} + \frac{1}{8\pi f_0 T_s} (\sin(4\pi f_0 T_s) - 1) \quad (21)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η συχνότητα  $f_0$  είναι πολύ μεγάλη ( $f_0 T_s \gg 1$ ) τότε ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος. Επομένως θα έχουμε,

$$\int_0^{T_s} \cos^2(2\pi f_0 t) dt \cong \frac{T_s}{2} \quad (22)$$

και

$$\int_0^{T_s} p_1^2(t) dt \cong 1 \quad (23)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\int_0^{T_s} p_2^2(t) dt \cong 1 \quad (24)$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του  $p_1(t)p_2(t)$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} p_1(t)p_2(t) dt &= \int_0^{T_s} p^2(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} p^2(t) \sin(4\pi f_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{2T_s} \int_0^{T_s} \sin(4\pi f_0 t) dt = \frac{1}{4\pi f_0 T_s} (\cos(4\pi f_0 T_s) - 1) \cong 0 \end{aligned} \quad (25)$$

όπου πάλι έχουμε θεωρήσει ότι  $f_0 T_s \gg 1$ . Όταν δύο συναρτήσεις έχουν ολοκλήρωμα σε ένα διάστημα π.χ.  $[0, T_s]$  ίσο με μηδέν τότε λέμε ότι είναι μεταξύ τους *κάθετες*. Όταν δύο συναρτήσεις είναι μεταξύ τους κάθετες και έχουν ενέργεια ίση με 1 τότε λέμε ότι αποτελούν *συναρτήσεις βάσης*. Προφανώς ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερες συναρτήσεις  $p_i(t)$ . Οι συναρτήσεις βάσης που ορίσαμε στις (16) και (17) θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε τα εναλλακτικά σχήματα διαμόρφωσης παρακάτω.

### 3 Διαμόρφωση φάσης

Ξεκινάμε με την διαμόρφωση φάσης (phase shift keying - PSK). Η κυματομορφή PSK μπορεί να περιγραφεί από μία εξίσωση της μορφής:

$$x(t) = A \sum_k p(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (26)$$

όπου με  $\phi_k$  έχουμε συμβολίσει τις φάσεις των επιμέρους συμβόλων οι οποίες μπορεί να είναι μία εκ των παρακάτω πιθανών τιμών

$$\theta_m = 2\pi \frac{(m-1)}{M} \quad (27)$$

όπου με το  $m$  είναι ένας ακέραιος,  $1 \leq m \leq M$ . Όπως και στην περίπτωση των πλατών  $A_m$  του PAM, θεωρούμε ότι οι φάσεις είναι ισοπίθανες, δηλαδή:

$$P\{\phi_k = \theta_m\} = \frac{1}{M} \quad (28)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορούμε μέσα στην διάρκεια  $[(0, T_s)]$  να γράψουμε το σήμα ως εξής:

$$x(t) = Ap(t) [\cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi_0) - \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi_0)] = A \cos(\phi_0) p_1(t) - A \sin(\phi_0) p_2(t) \quad (29)$$

Παρατηρούμε επομένως πως το σήμα αναλύεται σε έναν *γραμμικό συνδυασμό*<sup>1</sup> των συναρτήσεων βάσης  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$ . Η κατάσταση είναι ανάλογη με την περίπτωση των διανυσμάτων στις δύο διαστάσεις. Αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  τότε αυτό μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \quad (30)$$

Επομένως αν θέσουμε

$$\mathbf{p}_1 = (1, 0) \quad (31)$$

$$\mathbf{p}_2 = (0, 1) \quad (32)$$

τότε πολύ απλά θα έχουμε,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 \quad (33)$$

Συγκρίνοντας τις (29) και (3) βλέπουμε οι συναρτήσεις  $p_1(t)$  και  $p_2(t)$  παίζουν τον ρόλο των διανυσμάτων  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$  ενώ τα  $A \cos \phi_0$  και  $-A \sin \phi_0$  παίζουν το ρόλο των  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα. Μπορούμε επομένως να αντιστοιχήσουμε το  $x(t)$  με ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$

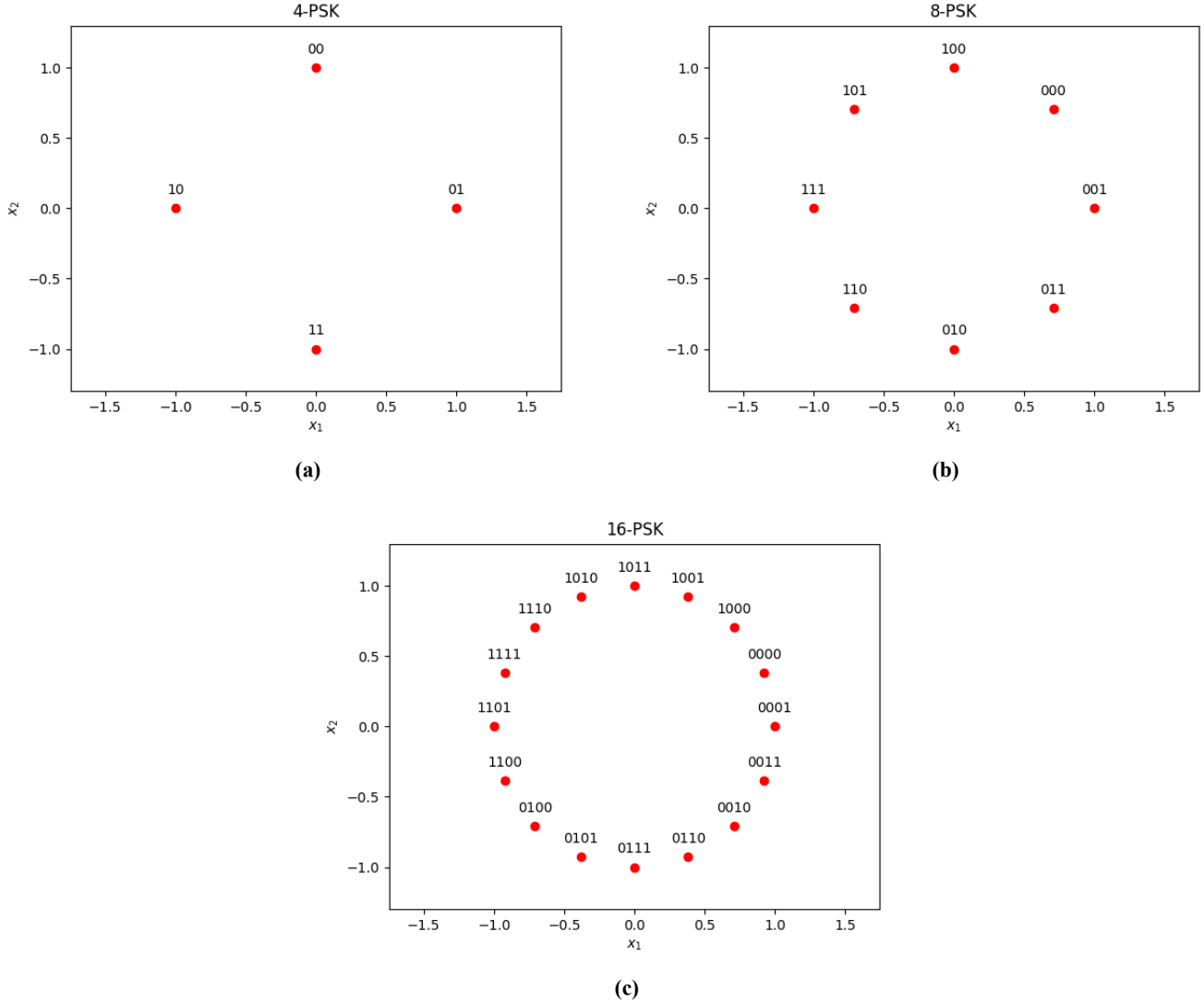
$$\mathbf{x} = A(\cos \phi_0, -\sin \phi_0) \quad (34)$$

<sup>1</sup> Αν έχουμε δύο συναρτήσεις  $f_1$  και  $f_2$  τότε οποιοσδήποτε άθροισμα της μορφής  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  όπου  $c_1$  και  $c_2$  είναι σταθερές, ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των  $f_1$  και  $f_2$

ενώ κάθε σύμβολο  $\theta_m$  μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{s}_m$ :

$$\mathbf{s}_m = A(\cos \theta_m, -\sin \theta_m) \quad (35)$$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε τα  $\mathbf{s}_m$  ως τα  $M$  διαφορετικά σύμβολα του συστήματος και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα Gray για να αντιστοιχήσουμε  $\log_2 M$  bits σε κάθε ένα από τα σύμβολα. Στο listing 1 δείχνουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε και να αναπαραστήσουμε τα διάφορα σύμβολα  $\mathbf{s}_m$  στις δύο διαστάσεις μαζί με την αντίστοιχη κωδική λέξη Gray. Στην εικόνα 2 δείχνουμε τα διαγράμματα του PSK στην περίπτωση όπου  $M = 4, 8$  και 16.



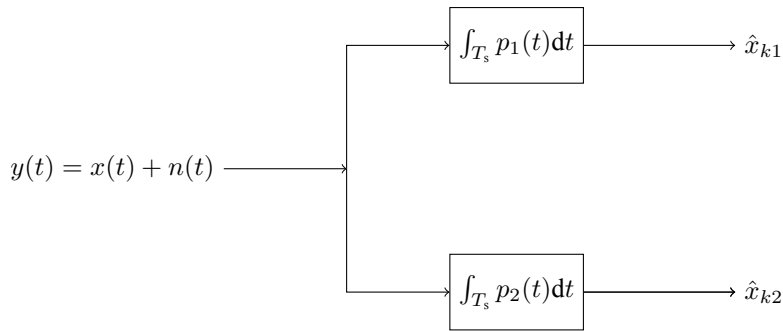
Εικόνα 2. Παραδείγματα αστερισμών του PSK

$$\mathcal{E} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^{T_s} x^2(t) dt \right\} \quad (36)$$

#### 4 Ο δέκτης του PSK

Στην εικόνα 3 δείχνουμε τον δέκτη του PSK ο οποίος μοιάζει με τον δέκτη του PAM στην εικόνα 1 μόνο που τώρα έχουμε δύο κλάδους, έναν για την συνιστώσα  $x_1$  και ένα για την συνιστώσα  $x_2$ . Στην πρώτη έξοδο υπολογίζουμε το

$$\hat{x}_{k1} = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} x(t) p_1(t - kT_s) dt \quad (37)$$



**Εικόνα 3.** Υπολογισμός των συμβόλων εξόδου στην περίπτωση του PSK

Αντικαθιστώντας την (29) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k1} &= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} x(t)p_1(t-kT_s)dt + \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p_1(t-kT_s)dt \\ &= A \cos \phi_k \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} p_1^2(t-kT_s)dt + A \cos \phi_k \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} p_1(t-kT_s)p_2(t-kT_s)dt + \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p_1(t-kT_s)dt + \\ &\quad A \cos \phi_k \int_0^{T_s} p_1^2(t)dt + A \cos \phi_k \int_0^{T_s} p_1(t)p_2(t)dt \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p_1(t-kT_s)dt = A \cos \phi_k + n_{k1}\end{aligned}\quad (38)$$

όπου η συνιστώσα του θορύβου δίνεται από την σχέση:

$$n_{k1} = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p_1(t-kT_s)dt \quad (39)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{x}_{k1} = x_{k1} + n_{k1} = A \cos \phi_k + n_{k1} \quad (40)$$

όπου  $x_{k1} = \cos \phi_k$  είναι η έξοδος του συστήματος απουσία θορύβου ( $n(t) = 0$ ). Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

$$\hat{x}_{k2} = x_{k2} + n_{k2} = -A \sin \phi_k + n_{k2} \quad (41)$$

$$n_{k2} = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} n(t)p_2(t-kT_s)dt \quad (42)$$

όπου  $x_{k2} = -\sin \phi_k$  είναι η δεύτερη έξοδος του συστήματος απουσία θορύβου ( $n(t) = 0$ ).

## 5 Ζωνοπερατό PAM

Χρησιμοποιώντας τη λογική που είδαμε για το PSK, μπορούμε να αναλύσουμε και την περίπτωση του ζωνοπερατού PAM όπου η κυματομορφή δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = \sum_k m_k p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t) \quad (43)$$

Θεωρούμε και πάλι ότι ισχύει η (18) ενώ τα σύμβολα  $m_k$  είναι ένα από τα  $A_m$  που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο,

$$A_m = \beta(2m - M - 1) \quad (44)$$

## 6 Listings

Listing 1: pskconstellation.py

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Thu Nov 28 11:44:47 2019
5
6 @author: thomas
7 """
8
9 import numpy as np
10 import matplotlib.pyplot as plt
```

```
11
12 def graycode(M):
13
14     if (M==1):
15         g=['0','1']
16
17     elif (M>1):
18         gs=graycode(M-1)
19         gsr=gs[::-1]
20         gs0=['0'+x for x in gs]
21         gs1=['1'+x for x in gsr]
22         g=gs0+gs1
23     return(g)
24
25 def psk_symbol(m,M):
26     theta = 2 * np.pi * (m-1) / M
27     s = np.array([np.cos(theta), -np.sin(theta)])
28     return(s)
29
30 def psk_symbols(M):
31     syms = np.zeros([M,2])
32     for m in range(0,M):
33         syms[m] = psk_symbol(m,M)
34     return syms
35
36
37 M=16
38 plt.close('all')
39 code_words = graycode(np.log2(M))
40 symbols = psk_symbols(M)
41 for i,code_word in enumerate(code_words):
42     x = symbols[i,0]
43     y = symbols[i,1]
44
45     plt.plot(x,y,'ro')
46     plt.text(x,y+0.1,code_word,horizontalalignment='center')
47     plt.axis('equal')
48     plt.xlim([-1.3,1.3])
49     plt.ylim([-1.3,1.3])
50     plt.xlabel('$x_1$')
51     plt.ylabel('$x_2$')
52     cname = str(M) + '—PSK'
53     plt.title(cname)
54
55 name = 'PSK' + str(M) + '.png'
56 plt.savefig(name)
```

---