



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS JOINVILLE  
ENGENHARIA AEROESPACIAL

Thomas Pereira do Carmo  
Vinícius Soares de Souza

## **Trabalho 01**

Joinville  
2024

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1	INTRODUÇÃO . . . . .	2
1.2	MODELAGEM DO SISTEMA . . . . .	2
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>SOLUÇÃO</b> . . . . .	<b>6</b>
3.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA . . . . .	6
<b>3.1.1</b>	<b>Método 1</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Método 2</b> . . . . .	<b>7</b>
3.2	IMPLEMENTAÇÃO OCTAVE . . . . .	8
3.3	IMPLEMENTAÇÃO ABAQUS . . . . .	8
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO OCTAVE</b> . . . . .	<b>12</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO

O presente relatório tem por objetivo descrever as metodologias utilizadas para resolução de um problema de rigidez de um sistema constituído por 10 molas e 6 nós. A presente análise será feita com base nos valores estabelecidos pelo professor e que são apresentados a seguir. Para a relação de nós que cada mola conecta:

*Elemento1* : ( $u_1, u_2$ )

*Elemento2* : ( $u_2, u_3$ )

*Elemento3* : ( $u_3, u_4$ )

*Elemento4* : ( $u_4, u_5$ )

*Elemento5* : ( $u_5, u_6$ )

*Elemento6* : ( $u_1, u_3$ )

*Elemento7* : ( $u_2, u_4$ )

*Elemento8* : ( $u_3, u_5$ )

*Elemento9* : ( $u_1, u_5$ )

*Elemento10* : ( $u_4, u_6$ )

Para a rigidez de cada elemento:

$k_1 = 100\text{N/mm}$

$k_2 = 105\text{N/mm}$

$k_3 = 137\text{N/mm}$

$k_4 = 97\text{N/mm}$

$k_5 = 106\text{N/mm}$

$k_6 = 117\text{N/mm}$

$k_7 = 115\text{N/mm}$

$k_8 = 134\text{N/mm}$

$k_9 = 92\text{N/mm}$

$k_{10} = 88\text{N/mm}$

Para as forças exercidas sobre cada nó:

$F_2 = -64\text{N}$

$F_3 = 0\text{N}$

$F_4 = 0\text{N}$

$F_5 = 62\text{N}$

$F_6 = 96\text{N}$

Como condição de contorno sabe-se que o **primeiro nó** encontra-se **fixado**.

## 1.2 MODELAGEM DO SISTEMA

Abaixo é apresentado um esquemático do sistema, para melhor visualização e entendimento do problema, construído a partir das informações apresentadas acima.

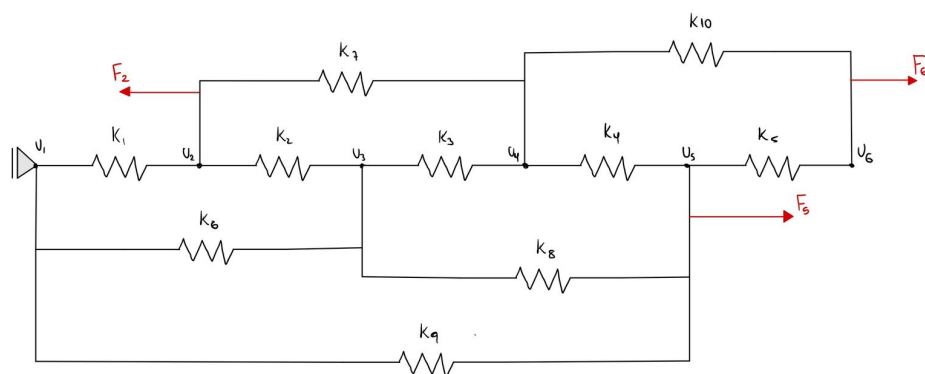


Figura 1 – Modelagem do Sistema

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O primeiro passo no procedimento de resolução do problema é a modelagem matemática do mesmo. Este desenvolvimento inicia-se por meio da construção das matrizes de rigidez para cada elemento, de forma individual.

Figura 2 – Matrizes de rigidez individuais

$$\begin{array}{cc}
 \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_1 & -u_1 \\ -u_1 & u_1 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_2 & u_3 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_2 & -u_2 \\ -u_2 & u_2 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_3 & u_4 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_3 & -u_3 \\ -u_3 & u_3 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_4 & u_5 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_4 & -u_4 \\ -u_4 & u_4 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_4 \\ u_5 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_5 & u_6 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_5 & -u_5 \\ -u_5 & u_5 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_5 \\ u_6 \end{matrix} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} u_6 & u_7 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_6 & -u_6 \\ -u_6 & u_6 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_6 \\ u_7 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_7 & u_8 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_7 & -u_7 \\ -u_7 & u_7 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_7 \\ u_8 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_8 & u_9 \\ \left[ \begin{array}{cc} u_8 & -u_8 \\ -u_8 & u_8 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_8 \\ u_9 \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_9 & u_{10} \\ \left[ \begin{array}{cc} u_9 & -u_9 \\ -u_9 & u_9 \end{array} \right] & \begin{matrix} u_9 \\ u_{10} \end{matrix} \end{matrix} &
 \begin{matrix} u_{10} & u_{11} \\ \left[ \begin{array}{cc} u_{10} & -u_{10} \\ -u_{10} & u_{10} \end{array} \right] & \begin{matrix} u_{10} \\ u_{11} \end{matrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

Uma vez que cada elemento possui sua matriz de rigidez, deve-se construir a matriz de rigidez geral, que representa o sistema como um todo. Primeiro, cria-se uma matriz de ordem 6x6, devido à presença de 6 nós no sistema, constituída inteiramente por zeros, inicialmente.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3 – Matriz geral nula

Para cada posição desta, o valor 0 será substituído pelo respectivo valor presente nas matrizes individuais. Começando a análise no elemento 1, têm-se os seguintes valores:

$$(u_1, u_1) = k_1$$

$$(u_1, u_2) = -k_1$$

$$(u_2, u_1) = -k_1$$

$$(u_2, u_2) = k_1$$

Substituindo-nos na matriz geral:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \\ \hline \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_6 \end{array}$$

Figura 4 – Matrizes geral com matriz do elemento 1

Para o elemento 2, têm-se:

$$(u_2, u_2) = k_2$$

$$(u_2, u_3) = -k_2$$

$$(u_3, u_2) = -k_2$$

$$(u_3, u_3) = k_2$$

Repetindo o mesmo procedimento de substituição adotado previamente, mas tendo em mente que as rigidezes em uma mesma posição se somam, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \\ \hline \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \mu_1 + \mu_2 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_2 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_6 \end{array}$$

Figura 5 – Matrizes geral com matriz dos elementos 1 e 2

Realizando a mesma operação para os demais elementos do sistema:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_6 + k_9 & -k_1 & -k_6 & 0 & -k_9 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_7 & -k_2 & -k_7 & 0 & 0 \\ -k_6 & -k_2 & k_2 + k_3 + k_6 + k_8 & -k_3 & -k_8 & 0 \\ 0 & -k_7 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_7 + k_{10} & -k_4 & -k_{10} \\ -k_9 & 0 & -k_8 & -k_4 & k_4 + k_5 + k_8 + k_9 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{10} & -k_5 & k_5 + k_{10} \end{bmatrix}$$

Figura 6 – Matriz de rigidez global

Uma vez que a matriz de rigidez global é conhecida, a equação de equilíbrio pode ser escrita. Assim:

$$\begin{bmatrix} u_1 + u_6 + u_9 & -u_1 & -u_6 & 0 & -u_9 & 0 \\ -u_1 & u_1 + u_2 + u_7 & -u_2 & -u_7 & 0 & 0 \\ -u_6 & -u_2 & u_2 + u_3 + u_6 + u_8 & -u_3 & -u_8 & 0 \\ 0 & -u_7 & -u_3 & u_3 + u_4 + u_7 + u_{10} & -u_4 & -u_{10} \\ -u_9 & 0 & -u_8 & -u_4 & u_4 + u_5 + u_8 + u_9 & -u_5 \\ 0 & 0 & 0 & -u_{10} & -u_5 & u_5 + u_{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

Figura 7 – Equação de equilíbrio algébrica

### 3 SOLUÇÃO

#### 3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica começa pela substituição dos valores apresentados no capítulo 1 ao sistema de equilíbrio construído no capítulo anterior. Obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{vmatrix} 309 & -300 & -117 & 0 & -92 & 0 \\ -100 & 320 & -105 & -115 & 0 & 0 \\ -117 & -105 & 493 & -137 & -134 & 0 \\ 0 & -115 & -137 & 437 & -97 & -88 \\ -92 & 0 & -134 & -97 & 429 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & -88 & -106 & 194 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -64 \\ 0 \\ 0 \\ 62 \\ 96 \end{vmatrix}$$

Figura 8 – Equação de equilíbrio numérica

Este sistema pode ser resolvido por 2 metodologias diferentes, especificadas nas subseções abaixo.

##### 3.1.1 Método 1

Neste método, como é conhecida a condição de fixação do nó 1, o deslocamento do mesmo é, necessariamente, igual a 0. Desta forma, substituindo  $u_1 = 0$ , a primeira linha e coluna do sistema matricial podem ser retirados do sistema.

$$\begin{vmatrix} \cancel{309} & \cancel{-300} & \cancel{-117} & \cancel{0} & \cancel{-92} & \cancel{0} \\ -100 & 320 & -105 & -115 & 0 & 0 \\ -117 & -105 & 493 & -137 & -134 & 0 \\ 0 & -115 & -137 & 437 & -97 & -88 \\ -92 & 0 & -134 & -97 & 429 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & -88 & -106 & 194 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{u_1} \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{F_1} \\ -64 \\ 0 \\ 0 \\ 62 \\ 96 \end{vmatrix}$$

Figura 9 – Método 1a

$$\begin{vmatrix} 320 & -105 & -115 & 0 & 0 \\ -105 & 493 & -137 & -134 & 0 \\ -115 & -137 & 437 & -97 & -88 \\ 0 & -134 & -97 & 429 & -106 \\ 0 & 0 & -88 & -106 & 194 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -64 \\ 0 \\ 0 \\ 62 \\ 96 \end{vmatrix}$$

Figura 10 – Método 1b

O sistema acima foi resolvido pelo Octave e gerou os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lll}
 u_1 = 0 \text{ mm} & u_3 = 0,294228 \text{ mm} & u_5 = 0,587421 \text{ mm} \\
 u_2 = 0,055326 \text{ mm} & u_4 = 0,441829 \text{ mm} & u_6 = 1,016225 \text{ mm}
 \end{array}$$

### 3.1.2 Método 2

Neste método, chamado de método da penalização, o elemento fixado será “penalizado” e forma a obter um resultado próximo à zero, resolvendo o sistema matricial original. Neste caso, o valor da penalização adotado foi  $P = 1 \text{ e}6$ .

$$\begin{vmatrix} P \cdot 309 & -100 & -117 & 0 & -92 & 0 \\ -100 & 320 & -105 & -115 & 0 & 0 \\ -117 & -105 & 493 & -137 & -134 & 0 \\ 0 & -115 & -137 & 437 & -97 & -88 \\ -92 & 0 & -134 & -97 & 429 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & -88 & -106 & 194 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -64 \\ 0 \\ 0 \\ 62 \\ 96 \end{vmatrix}$$

Figura 11 – Método 2

Resolvendo o sistema acima, obteve-se os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lll}
 u_1 = 3,0421 \text{ e} - 7 \text{ mm} & u_3 = 0,29423 \text{ mm} & u_5 = 0,58742 \text{ mm} \\
 u_2 = 0,055326 \text{ mm} & u_4 = 0,44183 \text{ mm} & u_6 = 1,01623 \text{ mm}
 \end{array}$$



Observa-se grande concordância com os valores obtidos no método 1, com um deslocamento desprezível no nó 1, fruto de resíduo numérico.

### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO OCTAVE

Em anexo, encontra-se a adaptação realizada ao código fornecido pelo Prof.Dr.Victor Takashi. As modificações realizadas foram com relação ao tamanho das matrizes de rigidez e força, mantendo a forma de resolução original.

A solução pela implementação numérica obteve os mesmos resultados apresentados na subseção analítica, para ambos os métodos, e por isso não serão reescritas aqui.

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO ABAQUS

A modelagem do sistema foi baseado no esquemático elaborado na figura 1. De início, foi adicionado os 6 nós, espaçados em 125mm, onde serão referenciadas as molas a partir do esquema elaborado para os acoplamentos no Capítulo 1

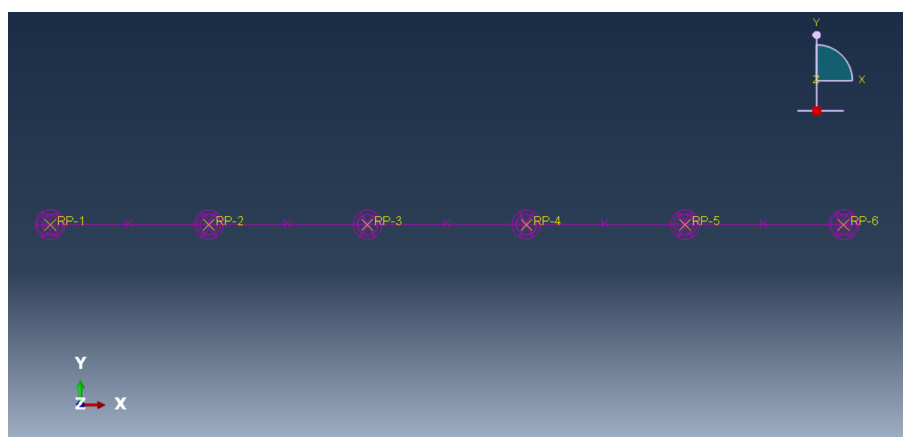


Figura 12 – Pontos de Referência com elementos de mola

Tendo essa primeira configuração, torna-se necessário realizar a indicação das condições de contorno (*Boundary Conditions* - BC). Como somente o nó 1 apresenta restrição de fixação e o problema é puramente unidimensional, é posto que não há deslocamento no eixo X para o ponto de referência 1. Já as forças, são configuradas de acordo com os dados apresentados também no capítulo 1 com seus respectivos nós de atuação, direção e módulo (referenciado positivo para a direita).

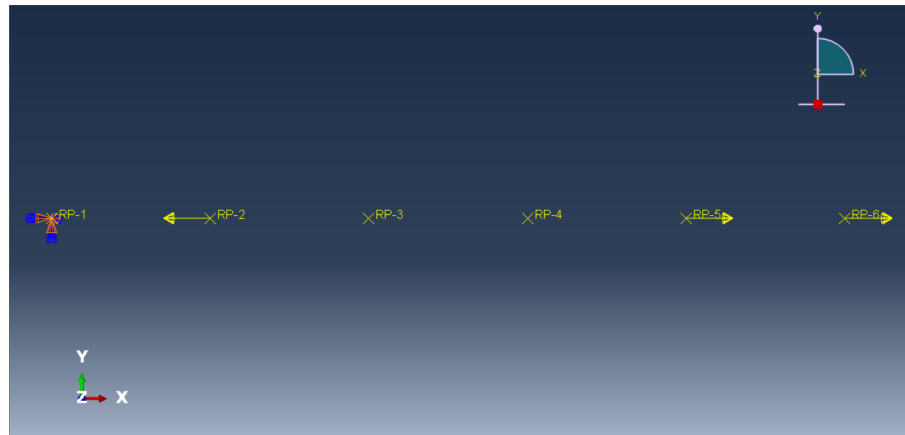


Figura 13 – Condições de contorno e Forças

Após toda a configuração, o resultado da simulação é apresentado abaixo:



Figura 14 – Resultados

$$\begin{array}{lll}
 u_1 = 0,00\text{mm} & u_2 = 5,53e-02\text{mm} & u_3 = 2,94e-01\text{mm} \\
 u_4 = 4,42e-01\text{mm} & u_5 = 5,87e-01\text{mm} & u_6 = 1,02\text{mm}
 \end{array}$$

## 4 CONCLUSÃO

O sistema apresentado no capítulo 1 foi resolvido por 3 métodos diferentes, resultando em soluções extremamente concordantes entre si. Dessa forma, conclui-se a validade dos resultados e dos métodos.

Analisando a implementação e forma de operação de cada método, podem ser feitas algumas observações:

- A solução analítica demanda mais tempo de construção e resolução, mas permite o entendimento do sistema e da forma que os demais métodos “enxergarão” o problema.
- A implementação numérica, pelo método de penalização, permite uma maior generalidade do problema, sendo possível alterar as condições de contorno sem necessidade de fazer grandes alterações ao código.
- A implementação pelo software Abaqus permite uma análise gráfica dos resultados, permitindo uma melhor visualização dos pontos mais suscetíveis à deformação.

Assim sendo, concluímos que cada metodologia oferece determinadas vantagens ao processo de solução, podendo ser mais vantajosa, ou não, dependendo de cada caso e necessidade.

# **Anexos**

## ANEXO A – CÓDIGO OCTAVE

```

1 % vetor contendo a rigidez de cada mola
2 k_n = [100;           % rigidez da mola 1 (N/mm)
3       105;           % rigidez da mola 2 (N/mm)
4       137;           % rigidez da mola 3 (N/mm)
5       97;            % rigidez da mola 4 (N/mm)
6       106;           % rigidez da mola 5 (N/mm)
7       117;           % rigidez da mola 6 (N/mm)
8       115;           % rigidez da mola 7 (N/mm)
9       134;           % rigidez da mola 8 (N/mm)
10      92;            % rigidez da mola 9 (N/mm)
11      88];           % rigidez da mola 10 (N/mm)
12
13 % calculo do numero de linhas do vetor k_n
14 e_total = rows(k_n); % numero total de elementos
15
16 % matriz de conectividade (graus de liberdade u_n)
17 dof_e = [1 2;        % elemento 1 conecta dof1 (u_1) e dof2 (u_2)
18          2 3;
19          3 4;
20          4 5;
21          5 6;
22          1 3;
23          2 4;
24          3 5;
25          1 5;
26          4 6];
27
28 % criar matriz quadrada nula
29 K = zeros(6,6);      % total de dof do problema: 5
30
31 for e = 1:e_total     % loop para cada elemento
32     k = k_n(e);        % rigidez do elemento (escalar)
33     K_e = k*[1 -1;-1 1]; % matriz de rigidez do elemento
34     % contribui o do elemento na matriz de rigidez global
35     K(dof_e(e,:),dof_e(e,:)) = K(dof_e(e,:),dof_e(e,:)) + K_e;
36 end
37
38 display("matriz de rigidez global:"); K
39
40 % Aplica o de condicoes de contorno
41 P = 1e8;              % fator de penalizacao
42 K(1,1) = K(1,1)*P;    % penalizacao aplicada no termo 1,1 de K
43
44
45 % Aplica o dos carregamentos

```

```
46 f = zeros(6,1);           % vetor com 3 linhas e 1 coluna
47 f(1) = 0;
48 f(2) = -64;
49 f(3) = 0;
50 f(4) = 0;
51 f(5) = 62;
52 f(6) = 96
53
54 display("vetor de carregamentos:"); f
55
56 % Solução do sistema de equações
57 u = (K^-1)*f;             % resultado de deslocamentos nodais
58 display("vetor de deslocamentos nodais:"); u
```

Listing A.1 – Código genérico para deslocamento nodais de múltiplas molas acopladas