

Opgave 4: Procentvis ændring for potensfunktioner

Et forskerhold har undersøgt forskellige mælkeproduktionsbedrifter i det sydlige Uruguay. De har set på hvordan forskellige græsningsbaserede driftsformer påvirker klimaafttrykket. Resultaterne viser, at store forskelle i bl.a. mælkeydelse pr. ko, fodersammensætning og arealanvendelse fører til betydelige variationer i klimaafttrykket. Hvis man vil gøre noget for klimaet, er det derfor vigtigt nøje at overveje mælkeproduktionens driftform (måden man laver mælkeproduktion på).

I gennemsnit producerede gårdene 5672 kg mælk pr. ko pr. år, og spændet var fra ca. 3184 til 7772 kg. Samtidig lå klimaafttrykket fra 0,87 til 1,24 kg CO₂ pr. kg mælk med et gennemsnit på 0,99.

En statistisk analyse viste, at klimaafttrykket havde en tydelig negativ sammenhæng med mælkeydelsen pr. ko: Jo mere mælk en ko producerer, desto mindre bliver klimaafttrykket pr. kg mælk. Denne sammenhæng kan beskrives med modellen:

$$CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326},$$

hvor MYC er mælkeydelse (i kg pr. år pr. ko) og CF er klimaafttrykket (i kg CO₂ pr. kg mælk)¹. Der er tale om en såkaldt potensfunktion. Modellen viser en aftagende marginal effekt: Den største forbedring sker, når mælkeydelsen stiger fra lave til moderate niveauer, mens gevinsten flader ud ved meget høje ydelser.².

Procentændringer for en potensfunktion

Den omtalte model er en potensfunktion

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor a kaldes *eksponenten* og $b > 0$ er en proportionalitetskonstant. For sådanne modeller gælder den præcise procentsammenhæng

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a,$$

når x ændres med r_x (f.eks. $r_x = 0,10$ for 10%), og funktionsværdien $y = f(x)$ dermed ændres med r_y .

Hvordan læses formlen? Hvis x ganges med $(1 + r_x)$, så ganges $f(x)$ med $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$. Er $a > 0$, stiger y når x stiger; er $a < 0$, falder y når x stiger. Når $|a| < 1$, er effekten *elastisk dæmpet*: en given procentvis ændring i x giver en mindre procentvis ændring i y (men modsat rettet, hvis $a < 0$).

Anvendt på modellen her. I denne opgave bruger vi modellen

$$CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326},$$

hvor MYC er mælkeydelse pr. ko og CF er klimaaftryk (kg CO₂ pr. kg mælk). Her er $a = -0,326 < 0$, så højere MYC medfører lavere CF, og effekten er dæmpet i størrelsesordenen $|a| = 0,326$.

Opgaver

Vi kigger på modellen $CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326}$. Brug procentsammenhængen

$$1 + r_{CF} = (1 + r_{MYC})^{-0,326}$$

til at besvare følgende. Svar med % afrundet passende.

¹Mere præcist måles MYC i kg fedt- og proteinkorrigered mælk (FPCM) pr. år og CF (Carbon Footprint) i CO₂-ækvivalenter pr. kg mælk.

²Data stammer fra: https://www.researchgate.net/publication/269989556_Practices_to_Reduce_Milk_Carbon_Footprint_on_Grazing_Dairy_Farms_in_Southern_Uruguay_Case_Studies (Practices to Reduce Milk Carbon Footprint on Grazing Dairy Farms in Southern Uruguay: Case Studies)

- a) **Graf.** Tegn først grafen for potensfunktionen med MYC mellem fra 3000 til 8000
- b) **Stigninger.** Hvor meget (%) ændres CF, når MYC stiger med hhv. 5%, 10% og 20%?
- c) **Fald.** Hvor meget (%) ændres CF, når MYC falder med 5% og 10%?
- d) **Sammensatte ændringer.** MYC stiger først med 10% og dernæst med 15%. Hvad er den samlede procentvise ændring i CF?
- e) **Målrettet reduktion af CF.** Hvor stor en procentvis stigning i MYC kræves for at *reducere* CF med 15%?

Løsninger

Vi anvender $r_{CF} = (1 + r_{MYC})^{-0,326} - 1$.

a) ...

b) Med $r_{MYC} = 0,05$ fås $r_{CF} = (1 + 0,05)^{-0,326} - 1 = -0,01578 = -1,58\%$.

Man får altså $r_{CF} = -0,01578 = -1,58\%$.

Tilsvarende:

$r_{MYC} = 0,10$ Man får $r_{CF} = -0,03059 = -3,06\%$.

$r_{MYC} = 0,20$ Man får $r_{CF} = -0,05770 = -5,77\%$.

c) $r_{MYC} = -0,05 \Rightarrow r_{CF} = +0,01686 = 1,69\%$.

$r_{MYC} = -0,10 \Rightarrow r_{CF} = +0,03494 = 3,49\%$.

d) Samlet $r_{MYC} = (1,10) \cdot (1,15) - 1 = 0,265$.

$r_{CF} = (1 + 0,265)^{-0,326} - 1 = -0,07377 = -7,38\%$.

e) Vi ønsker $r_{CF} = -0,15$. Løs da $1 - 0,15 = (1 + r_{MYC})^{-0,326} \Rightarrow 1 + r_{MYC} = (0,85)^{1/(-0,326)} \Rightarrow r_{MYC} = 0,6463$, altså en stigning på ca. 64,63%.