

## Opgave 4: Procentvis ændring for potensfunktioner

Et forskerhold har undersøgt forskellige mælkeproduktionsbedrifter i det sydlige Uruguay. De har set på hvordan forskellige græsningsbaserede driftsformer påvirker klimaaftrykket. Resultaterne viser, at store forskelle i bl.a. mælkeydelse pr. ko, fodersammensætning og arealanvendelse fører til betydelige variationer i klimaaftrykket. Hvis man vil gøre noget for klimaet, er det derfor vigtigt nøje at overveje mælkeproduktionens driftform (måden man laver mælkeproduktion på).

I gennemsnit producerede gårdene 5672 kg mælk pr. ko pr. år, og spændet var fra ca. 3184 til 7772 kg. Samtidig lå klimaaftrykket fra 0,87 til 1,24 kg CO<sub>2</sub> pr. kg mælk med et gennemsnit på 0,99.

En statistisk analyse viste, at klimaaftrykket havde en tydelig negativ sammenhæng med mælkeydelsen pr. ko: Jo mere mælk en ko producerer, desto mindre bliver klimaaftrykket pr. kg mælk. Denne sammenhæng kan beskrives med modellen:

$$CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326},$$

hvor MYC er mælkeydelse (i kg pr. år pr. ko) og CF er klimaaftrykket (i kg CO<sub>2</sub> pr. kg mælk)<sup>1</sup>. Der er tale om en såkaldt potensfunktion. Modellen viser en aftagende marginal effekt: Den største forbedring sker, når mælkeydelsen stiger fra lave til moderate niveauer, mens gevinsten flader ud ved meget høje ydelser.<sup>2</sup>

## Procentændringer for en potensfunktion

Den omtalte model er en potensfunktion

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor  $a$  kaldes *eksponenten* og  $b > 0$  er en proportionalitetskonstant. For sådanne modeller gælder den præcise procentsammenhæng

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a,$$

når  $x$  ændres med  $r_x$  (f.eks.  $r_x = 0,10$  for 10%), og funktionsværdien  $y = f(x)$  dermed ændres med  $r_y$ .

**Hvordan læses formelen?** Hvis  $x$  ganges med  $(1 + r_x)$ , så ganges  $f(x)$  med  $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$ . Er  $a > 0$ , stiger  $y$  når  $x$  stiger; er  $a < 0$ , falder  $y$  når  $x$  stiger. Når  $|a| < 1$ , er effekten *elastisk dæmpet*: en given procentvis ændring i  $x$  giver en mindre procentvis ændring i  $y$  (men modsat rettet, hvis  $a < 0$ ).

**Anvendt på modellen her.** I denne opgave bruger vi modellen

$$CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326},$$

hvor MYC er mælkeydelse pr. ko og CF er klimaaftryk (kg CO<sub>2</sub> pr. kg mælk). Her er  $a = -0,326 < 0$ , så højere MYC medfører lavere CF, og effekten er dæmpet i størrelsesorden  $|a| = 0,326$ .

## Opgaver

Vi kigger på modellen  $CF = 16,367 \cdot MYC^{-0,326}$ . Brug procentsammenhængen

$$1 + r_{CF} = (1 + r_{MYC})^{-0,326}$$

til at besvare følgende. Svar med % afrundet passende.

---

<sup>1</sup>Mere præcist måles MYC i kg fedt- og proteinkorrigeret mælk (FPCM) pr. år og CF (Carbon Footprint) i CO<sub>2</sub>-ækvivalenter pr. kg mælk.

<sup>2</sup>Data stammer fra: [https://www.researchgate.net/publication/269989556\\_Practices\\_to\\_Reduce\\_Milk\\_Carbon\\_Footprint\\_on\\_Grazing\\_Dairy\\_Farms\\_in\\_Southern\\_Uruguay\\_Case\\_Studies](https://www.researchgate.net/publication/269989556_Practices_to_Reduce_Milk_Carbon_Footprint_on_Grazing_Dairy_Farms_in_Southern_Uruguay_Case_Studies) (Practices to Reduce Milk Carbon Footprint on Grazing Dairy Farms in Southern Uruguay: Case Studies)

- a) **Graf.** Tegn først grafen for potensfunktionen med MYC mellem fra 3000 til 8000
- b) **Stigninger.** Hvor meget (%) ændres CF, når MYC stiger med hhv. 5%, 10% og 20%?
- c) **Fald.** Hvor meget (%) ændres CF, når MYC falder med 5% og 10%?
- d) **Sammensatte ændringer.** MYC stiger først med 10% og dernæst med 15%. Hvad er den samlede procentvise ændring i CF?
- e) **Målerettet reduktion af CF.** Hvor stor en procentvis stigning i MYC kræves for at *reducere* CF med 15%?

## Løsninger

Vi anvender  $r_{CF} = (1 + r_{MYC})^{-0,326} - 1$ .

a) ...

b) Med  $r_{MYC} = 0,05$  fås  $r_{CF} = (1 + 0,05)^{-0,326} - 1 = -0,01578 = -1,58 \%$ .

Man får altså  $r_{CF} = -0,01578 = -1,58 \%$ .

Tilsvarende:

$r_{MYC} = 0,10$  Man får  $r_{CF} = -0,03059 = -3,06 \%$ .

$r_{MYC} = 0,20$  Man får  $r_{CF} = -0,05770 = -5,77 \%$ .

c)  $r_{MYC} = -0,05 \Rightarrow r_{CF} = +0,01686 = 1,69 \%$ .

$r_{MYC} = -0,10 \Rightarrow r_{CF} = +0,03494 = 3,49 \%$ .

d) Samlet  $r_{MYC} = (1,10) \cdot (1,15) - 1 = 0,265$ .

$r_{CF} = (1 + 0,265)^{-0,326} - 1 = -0,07377 = -7,38 \%$ .

e) Vi ønsker  $r_{CF} = -0,15$ . Løs da  $1 - 0,15 = (1 + r_{MYC})^{-0,326} \Rightarrow 1 + r_{MYC} = (0,85)^{1/(-0,326)} \Rightarrow r_{MYC} = 0,6463$ , altså en stigning på ca. 64,63 %.