Representación de señales en MATLAB (→ T.II.1)

Este anexo incluye una referencia del código Matlab utilizado para calcular y visualizar el espectro en frecuencia de las señales continuas utilizadas en las prácticas, así como su justificación. Se distinguen dos casos, señales de tipo energía (tienen energía finita) y señales de tipo potencia (con duración infinita y por tanto energía infinita, pero potencia finita). **En las prácticas, la mayoría de las señales se considerarán periódicas e infinitas, por lo tanto de tipo POTENCIA**.

1 *Para señales de tipo energía*

En la asignatura de Sistemas Lineales se utiliza la **transformada de Fourier** para representar el espectro. Para señales de tipo energía, se utiliza esta representación, ya que su módulo al cuadrado tiene un sentido físico, que es la densidad espectral de **energía**:

$$G_x(f) = |X(f)|^2$$

Para obtener en Matlab la TF de una señal continua, se acude a aproximaciones numéricas. Dada una señal $x(t)$, la integral que involucra el cálculo de su TF se puede expresar como el límite de un sumatorio, del siguiente modo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\,\Delta t) \cdot e^{-j2\pi f(n\Delta t)} \Delta t$$

que equivale a expresar la integral definida como el sumatorio de las areas de rectángulos (de base Δt) encerrados bajo la función $x(t)$, cuando Δt tiende a cero (integral de Riemann).

En Matlab, las señales se describen como vectores de muestras, por lo tanto, la aproximación utilizada se basará en el muestreo de la señal original. Supondremos una señal de energía finita $x(t)$ definida en el intervalo $0 \leq t < T$. Ahora bien, la frecuencia de muestreo f_s, ha de ser suficientemente elevada para que no se produzca solapamiento espectral, es decir, que cumpla el criterio de Nyquist:

$$f_s > 2 f_{\max}$$

donde f_{max} es la frecuencia máxima de la señal $x(t)$. De forma similar, podemos obtener el número de muestras en la señal muestreada según:

$$N = T / \Delta t$$

En estas condiciones, se puede aproximar la integral de una señal definida en $0 \leq t < T$ por un conjunto de muestras tomadas con una frecuencia de muestreo $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ según

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n\,\Delta t) \cdot e^{-j2\pi f(n\Delta t)} \Delta t}$$

Obsérvese que el sumatorio es precisamente la DFT de una señal discreta $x[n]=x(n\ \Delta t)$, multiplicada por Δt, muestreando la variable continua t, desde $t = 0$ hasta $t = T - \Delta t$, y tomado N valores discretos muy próximos (tantos más cuanto menor sea Δt, que en Matlab denotaremos como `inct`). Por lo tanto, la expresión `X=inct*fft(x)` arrojará una señal discreta:

$$X[k] \approx X(f_k) \text{ donde } f_k = \frac{k}{T} = \frac{k}{N\Delta t},\ k \in [0, N-1]$$

Señal que contiene el valor aproximado de N muestras de la TF de $x(t)$. Sin embargo, dado que la función `fft` obtiene la DFT en el intervalo $\Omega \in [0,2\pi)$, en el que $\Omega \in [\pi,2\pi)$ corresponde a pulsaciones negativas, si queremos representar la transformada centrada en el origen es necesario *recolocar* la segunda mitad del vector `X` al principio del vector (`X=fftshift(X)`) para obtener la aproximación de la TF:

$$X[k] = X(f)\big|_{f=f_k} = X(f_k) \text{ donde } f_k = \frac{k}{T} = \frac{k}{N\Delta t},\ k \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right),$$ donde se asume que N es par.

Dado que $X[k]$ representa muestras de una señal continua, $X(f)$, en un intervalo de pulsaciones $\omega_k \in \left[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right)$, solamente se pueden representar tonos en la banda $f_k \in \left[-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right)$ (o lo que es lo mismo $f_k \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right)$, por lo que se recomienda representarla siempre en ese intervalo (y sin olvidar que es una aproximación –muestreo-).

Para recuperar la señal en el dominio temporal se hará uso de la expresión `x=(1/inct)*ifft(X)`, obtenida de forma análoga. Si se ha recolocado el vector con **fftshift**, hay que volverlo a colocar en la posición original con `ifftshift`.

Recuerde que tanto `fft` como `ifft` devuelven en general valores complejos. Si bien en el caso de que la transformada fuera real, la `ifft` también debería serlo. Sin embargo, en algunos casos, aparece una parte imaginaria residual muy pequeña, que puede ocasionar problemas en la representación o la reproducción, en el caso de audio, de las señales. Por eso es necesario asegurarse de que la señal no tiene parte imaginaria, utilizando la función `real(…)`.

A menudo se le pedirá que calcule la energía o la potencia de una señal. Para calcular la energía se utilizará una aproximación similar a la empleada para la TF

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} |x(n\Delta t)|^2 \Delta t$$

Y para el cálculo de la potencia **media EN ESE INTERVALO** (la potencia total, considerando todo el eje temporal es nula, por ser la señal de duración infinita y energía finita) se podría calcular a partir de la energía en el intervalo T en el que se ha definido la señal en Matlab, según

$$P_x^{(T)} = \frac{E_x}{T}$$

A veces no se dispone de la señal, sino de su espectro (su TF calculada según se ha indicado). La relación de Parseval nos permite calcularlo directamente a partir del espectro, sin realizar la transformada inversa. Esta relación se puede aproximar para el caso de las señales en Matlab por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df \approx \sum_{n=0}^{N-1} |X(n\,\Delta f)|^2 \Delta f = \sum_{n=0}^{N-1} \left| X\left(n\frac{F_s}{N}\right)\right|^2 \frac{F_s}{N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left| X\left(n\frac{F_s}{N}\right)\right|^2 \frac{1}{T},$$

donde *df* se ha aproximado por el paso en el vector de frecuencias correspondiente $\Delta f = Fs/N = 1/T$.

Por ejemplo, para calcular la energía de una señal emplearíamos:

```
Ex1 = sum((abs(x)).^2)*inct; % En el tiempo
Ex2 = sum((abs(X)).^2)/T; % En frecuencia, o bien Ex2 = sum((abs(X)).^2)*(Fs/N);
```

2 Señales de tipo potencia

En general, consideraremos que las señales son de duración infinita (energía infinita) y potencia limitada. Aunque en Matlab las señales han de ser de duración finita, consideraremos que la señales bajo estudio son infinitas pero periodicas de período T *(no tiene por qué ser el período principal)*, por lo que nos permitiremos considerar tan solo un período de la misma. Para el cálculo del espectro se utiliza, en lugar de la transformada, el **desarrollo en serie de Fourier**. Para señales de tipo potencia **PERIÓDICAS**, se utiliza esta representación, ya que su módulo al cuadrado tiene un sentido físico, que es la densidad espectral de potencia, que se define a partir de la autocorrelación temporal de la señal original, y que guarda relación con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier según:

$$S_x(f) = \sum_{k=\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(f - \frac{k}{T})$$

Si la señal se ha muestreado a la frecuencia de Nyquist, f_s, tomándose N puntos, de forma que cumpla que $\frac{f_s}{N} = \frac{1}{T}$ se obtendrán N coeficientes del desarrollo, distribuidos entre $-\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2}$ (correspondiendo a las frecuencias $-\frac{f_s}{2}$ y $\frac{f_s}{2}$, obteniéndose

$$S_x(f) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |a_k|^2 \delta(f - k \cdot \Delta f), \text{ donde } \Delta f = \frac{1}{T}$$

Por tanto, para el cálculo de la potencia de la señal, nos basta con tener el vector que contenga los coeficientes a_k. Los coeficientes se pueden obtener a partir de la función **fft** de Matlab utilizando la siguiente relación con la transformada de Fourier, ya que $x(t)$ se considera periódica:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot k \cdot \Delta f \cdot t} dt = \frac{1}{T} X(f)\Big|_{f=f_k} = \frac{1}{T} X(f_k)}$$

Por lo tanto, se obtiene que las expresiones son las **mismas que en el caso anterior salvo por un factor de escala *T*** (divisor en la Transformada directa, y multiplicador en la inversa).

Es importante destacar que la señal debe ser periódica para que la expresión sea correcta, entrando un número entero de periodos en el intervalo T. Por lo tanto, para el cálculo de los coeficientes del desarrollo de Fourier en MATLAB, utilice `ak=inct/T*fft(x) = (1/N)*fft(x)`, donde `N=T/inct=T*fs` son el número de muestras de un periodo (no necesariamente el fundamental) de la señal $x(n\tau)$, y `x` es un vector que contiene esos valores.

Para recuperar la señal en el dominio temporal se hará uso de la expresión `x=T/inct*ifft(ak)=N*ifft(ak)` si es periódica, que arrojará una señal discreta (una aproximación a las muestras a f_s de la señal temporal).

Observe que los a_k se representan respecto a índices k, mientras que lo que interesará en general es representarlo en función de la frecuencia. Por lo tanto.

$$\boxed{\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k \, \delta(f - k\cdot\Delta f) = \frac{X(f)}{T}}$$

2.1.1 Señales no periódicas

En caso de trabajar con señales no periódicas, estrictamente, no existe el desarrollo en serie de Fourier. Sin embargo se puede seguir utilizando $X(f)/T$ en Matlab desde el punto de vista práctico como una aproximación.

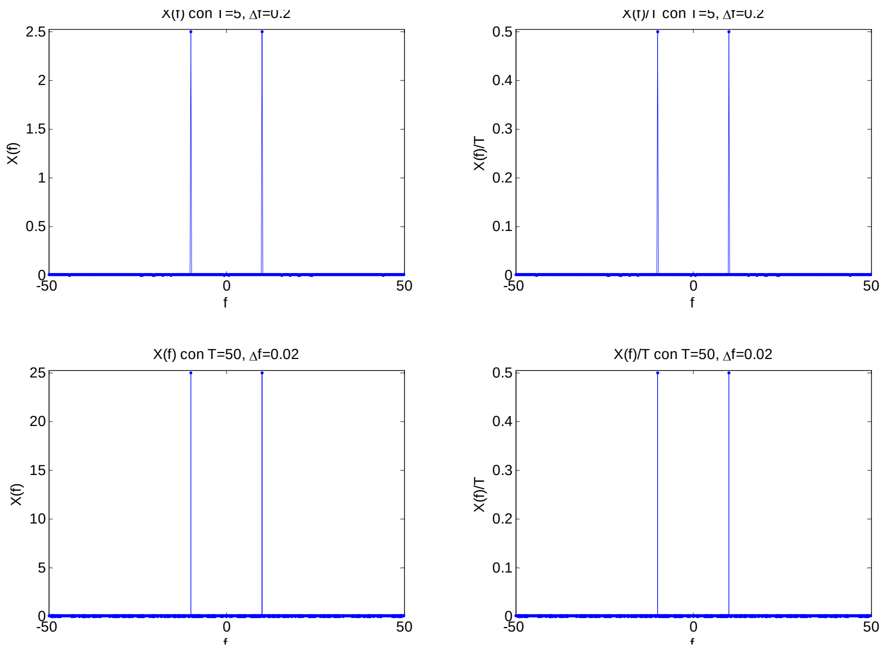
3 *Representación de señales en las prácticas de Teoría de la comunicación*

En las prácticas se trabajará fundamentalmente con señales sinusoidales las cuales, obviamente, son de potencia infinita. Si se aplica la transformada de Fourier se obtendrán deltas de una amplitud no fija y dependiente del intervalo temporal considerado. Recuerde que una delta tiene amplitud infinita y es infinitamente estrecha, así que en Matlab es imposible representarla. Lo único que se conserva es el área que encierra que es la unidad, ya que, por definición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0)\, df = 1$$

Por comodidad, se representará $X(f)/T$ en lugar de $X(f)$. Por ejemplo, consideremos la señal $x(t) = \cos(2\pi\, 10\, t)$, y su transformada de Fourier será $X(f) = 0.5\,\delta(f-10) + 0.5\,\delta(f+10)$

La figura representa la transformada utilizando T=5 (arriba) y T=50 (abajo). Como se puede observar, la amplitud es distinta, aunque el área encerrada sigue siendo la esperada (0.5=amplitud·Δf=2.5·0.2=25·0.02). Sin embargo, si se divide la transformada de Fourier respecto a T se obtiene directamente el valor que multiplica a la delta (a la derecha), independientemente de los parámetros T y f_s utilizados para representarla.



Si además, la señal es **periódica**, los valores de $X(f)/T$ coinciden estrictamente con los coeficientes a_k del desarrollo en serie de Fourier. Si no lo es, no existe estrictamente el desarrollo en serie de Fourier, pero se puede seguir utilizando $X(f)/T$ desde el punto de vista práctico.

4 Resumen

En las prácticas de Teoría de la comunicación se utilizarán las siguientes herramientas para calcular y representar los espectros de las señales:

- **Señales**: se utilizará la representación **X(f)/T**, tanto si son periódicas como si no lo son.

- **Funciones de transferencia**: se representarán utilizando la transformada de Fourier **H(f)**.

Las siguientes tablas muestran un resumen del código a utilizar.

Plantilla básica	`Fs = ...; inct = 1/Fs;`
	`T = ...; % T*Fs muestras`
	`N = Fs*T; % = T/inct;`
	
	`t = [0:1/Fs:T-1/Fs]; % Tiempo muestreado para los T segundos [0,T)`
	`f = [-Fs/2:Fs/N:Fs/2 – Fs/N]; % Frecuencia [-Fs/2,Fs/2)`

Energía en el tiempo	`sum((abs(x)).^2)*inct`

Tipo de señal	**Energía (energía finita)**	**Potencia (potencia finita)**
Tipo de espectro	Densidad de energía $G_x(f)=\left\|X(f)\right\|^2$	Densidad de potencia $S_x(f)=\sum_{k=\infty}^{\infty}\left\|a_k\right\|^2\delta(f-\frac{k}{T})$ (sólo señales periódicas)
Herramienta matemática	*X*(*f*) (Transformada de Fourier)	*X*(*f*)/T (Normalizamos la *X*(*f*) respecto a *T*) Para señales periódicas $X(f)/T=a_k$ (desarrollo en serie de Fourier).
Señal→Espectro	`Xf=fftshift(inct*fft(x))`	`ak=Xf/T`
Espectro→Señal	`x=real((1/inct)*ifft(` `ifftshift(Xf)))`	`x=real( (1/inct)*ifft(` `ifftshift(ak))*T)`
Energía	`sum((abs(Xf)).^2)*Fs/N` `sum((abs(Xf)).^2)/T`	Infinita (considerando $-\infty<t<\infty$) En el intervalo $0\leq t<T$, $E=P\cdot T$
Potencia	0 (considerando $-\infty<t<\infty$) En el intervalo $0\leq t<T$, donde está definida la potencia media es $P=E/T$	`sum((abs(ak)).^2)`