Stochastik Skript, Pickl, SS 2024

Inhalt:	Live-Transkription
Datum:	SS 2024
Author:	Pickl

[Pickl 15.04.2024]

In der Stochastik get es um die Modellierung von Experimenten, deren Ausgang vom Zufall abhängt.

1 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

1.1 Ergebnisraum, Ereignisraum

1.1.1 Definition (Grundmemnge)

Die Menge Ω, welche die möglichen Ausgänge eines Zufallexperiementes beschreibt, dennen wir *Grundmenge* oder *Ergebnismenge*.

1.1.2 Definition (Ereignismenge)

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Menge aller Teilmengen Ω, nennen wir *Ereignismenge*.

1.1.3 Beispiel

1. Wir werfen einen Würfel.
   - $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$,
   - $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \dots, \{1, 1\}, \dots\}$,
2. Glücksrad: $\Omega = [0, 2\pi[$ beschreibt die möglichen Winkel eines Glückradspiels. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist klar (keine geeignete Ereignismenge, siehe Kapitel 2).

1.2 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird auf der Ereignismenge definiert. Grund: Für überabzählbare Mengen (Glücksrad z.B.) haben einzelne Ausgänge häufig Wahrscheinlichkeit 0, obwohl global gesehen existiert ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Kapitel 2).

Die Wahrscheinlichkeit quantifiziert die Plausibilität der entsprechenden Ereignisse. Sie gibt die relative Häufigkeit an, wie oft ein bestimmtes Ereignis nach sehr häufigen Wiederholen unter identischen Umständen eintritt.

1.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Eine Abbildung $\mathbb{P} \colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ nennt man *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

Ka) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall A \subset \Omega$,

Kb) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

Kc) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \ \forall A, B \subset \Omega, \ A \cap B = \emptyset$.

1.2.2 Bemerkung

Die Axiome a)-c) nennt man *Axiome von Kolmogorow* (werden in 2 ebenfalls leicht angepasst).

1.2.3 Satz

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ für beliebiges Ω gelten:

a. $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A),\ \forall A \subset \Omega.$

b. $\mathbb{P}(A) \leq 1.$

c. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

1.2.4 Beweis

(weggelassen)

1.2.5 Bemerkung

Über die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (d.h. der einelementigen Ereignisse), wird das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt.

Betrachte $\mathbb{P}(A)$ für $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset \Omega$. Durch mehrmaliges Anwenden von **K**c) erhält man

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{w_k\}).$$

1.2.6 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Das Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ nennt man auch *Wahrscheinlichkeitsraum* (auch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$).