

Stochastik

Inhalt: Live-Transkription
Datum: SS 2024
Autor: Prof. Dr. Peter Pickl

Inhaltsverzeichnis

I	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	2
I.1	Ergebnisraum, Ereignisraum	2
I.2	Das Wahrscheinlichkeitsmaß	2
I.3	Kombinatorik	4
II	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume	5

In der Stochastik geht es um die Modellierung von Experimenten, deren Ausgang vom Zufall abhängt.

I Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

I.1 Ergebnisraum, Ereignisraum

I.1.1 Definition (Grundmenge)

Die Menge Ω , welche die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes beschreibt, nennen wir *Grundmenge* oder *Ergebnismenge*.

I.1.2 Definition (Ereignismenge)

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Menge aller Teilmengen Ω , nennen wir *Ereignismenge*.

I.1.3 Beispiel

1. Wir werfen einen Würfel.

- $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$,
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \dots, \{1, 1\}, \dots\}$,

2. Glücksrad: $\Omega = [0, 2\pi[$ beschreibt die möglichen Winkel eines Glücksradspiels. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist klar (keine geeignete Ereignismenge, siehe Kapitel 2).

I.2 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird auf der Ereignismenge definiert. Grund: Für überabzählbare Mengen (Glücksrad z.B.) haben einzelne Ausgänge häufig Wahrscheinlichkeit 0, obwohl global gesehen existiert ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Kapitel 2).

Die Wahrscheinlichkeit quantifiziert die Plausibilität der entsprechenden Ereignisse. Sie gibt die relative Häufigkeit an, wie oft ein bestimmtes Ereignis nach sehr häufigen Wiederholen unter identischen Umständen eintritt.

I.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Eine Abbildung $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

Ka) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$,

Kb) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

Kc) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \forall A, B \subset \Omega, A \cap B = \emptyset$.

I.2.2 Bemerkung

Die Axiome a)-c) nennt man *Axiome von Kolmogorov* (werden in 2 ebenfalls leicht angepasst).

I.2.3 Satz

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebiges Ω gelten:

- a. $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\forall A \subset \Omega$.
- b. $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- c. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

I.2.4 Beweis

(weggelassen)

I.2.5 Bemerkung

Über die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (d.h. der einelementigen Ereignisse), wird das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt.

Betrachte $\mathbb{P}(A)$ für $A = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset \Omega$. Durch mehrmaliges Anwenden von **Kc** erhält man

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\{w_i\}).$$

I.2.6 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Das Paar (Ω, \mathbb{P}) nennt man auch *Wahrscheinlichkeitsraum* (auch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$).

[Pickl 18.04.2024]

I.2.7 Bemerkung

Wie findet man nun das richtige Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. jenes, welches zu meinem Experiment passt?

1. Ausprobieren (siehe unten, "Statistik").
2. Analyse der physikalischen Eigenschaften. Praktikabel, falls Symmetrie in den relevanten physikalischen Eigenschaften herrscht:

I.2.8 Laplace-Annahme (Indifferenzprinzip)

Falls es keinen Grund zur Annahme gibt, dass die verschiedenen Ausgänge des Experiments im Wesentlichen zu unterscheiden sind, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse gleich sind.

I.2.9 Folgerung

Sei Ω ein Ergebnisraum. Unter der Laplace-Annahme gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

I.2.10 Beweis

$$1 \stackrel{\text{K}}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) \stackrel{\text{K}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \stackrel{\text{L}}{=} |\Omega| \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Außerdem:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) \stackrel{\text{K}}{=} \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|}.$$

I.2.11 Beispiel

1. Werfen eines ungezinkten Würfels:

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

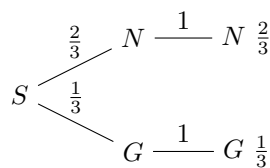
2. Gesamte Augenzahl bei zweimaligen Werfen des Würfels

$$\Omega = \{2, \dots, 12\},$$

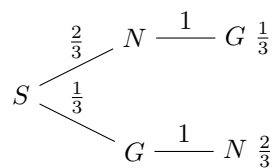
Laplace-Annahme gilt nicht. Die Elemente sind wesentlich verschieden, z.B. 2 hat nur Option (1, 1), 7 hat die Optionen $\{(1, 6), \dots\}$.

3. Ziegenproblem: Wir befinden uns in einer Gameshow, dürfen zwischen drei Toren wählen. Hinter einmal Tor ist ein Gewinn, hinter zweien eine Niete. Der Moderator öffnet eines der nicht-gewählten Tore. Hinter diesen ist eine Niete. Er bietet daraufhin an, das Tor zu wechseln. Ist der Wechsel sinnvoll?

- Problem 1: Spielregeln müssen ergänzt werden. Wie handelt der Moderator? Wir gehen davon aus, dass er oder sie in jedem Fall ein nicht-gewähltes Tor mit Niete öffnet.
- Problem 2: Man ist geneigt, von einer Laplace-Situation auszugehen. Dies ist falsch, da die Tore durch die Wahl und die Reaktion des Moderators zu unterscheiden sind.



Ohne Wechseln



Mit Wechseln

mit Start (S), Gewinn (G) und Niete (N).

I.3 Kombinatorik

Wie bestimmt man in einer Laplace-Situation $|A|$ und $|\Omega|$?

I.3.1 Beispiele

- a. Sei $\Omega = A \times B$, so ist $|\Omega| = |A| \cdot |B|$ Münzwurf, dann Würfel:

$$A = \{K, Z\}, B = \{1, \dots, 6\}.$$

- b. Urne mit N durchnummerierten Kugeln. Wir ziehen davon nacheinander ohne Zurücklegen k Kugeln (Reihenfolge wird berücksichtigt):

$$|\Omega| = N(N-1) \dots (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

- c. Zahlenlotto "6 aus 49", wie b) ohne Rücksicht auf Reihenfolge:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N-k)!} \cdot \frac{1}{k!}.$$

- d. Anzahl der Anagramme von MISSISSIPPI.

$$|\Omega| = \frac{11!}{\underbrace{4!}_I \underbrace{4!}_S \underbrace{2!}_P}.$$

II Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Wir werden das 3. Axiom von Kolmogorov anpassen:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), \text{ falls } A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k.$$

Schwieriger ist die Anpassung des Definitionsbereiches von \mathbb{P} . Warum ist das nötig? Betrachte das Beispiel "Glücksrad".