Stochastik

Dies ist eine Live-Transkription der Vorlesung Stochastik, gehalten von **Prof. Dr. Peter Pickl** im **Sommersemester 2024** an der Uni Tübingen. Dieser Mitschrieb ist fehlerbehaftet (Hinweise an `thomas.hua@student.uni-tuebingen.de` bzw. `https://github.com/thomasxhua/stochastik-pickl-ss24-skript/`).

Inhaltsverzeichnis

I Endliche Wahrscheinlichkeitsräume **2**
- I.1 Ergebnismenge, Ereignismenge . . . 2
- I.2 Wahrscheinlichkeitsmaß . . . 2
- I.3 Kombinatorik . . . 4

II Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume **6**
- II.0 Anpassung des 3. Axioms von Kolmogorov . . . 6
- II.1 Ereignisraum . . . 7
- II.2 Wahrscheinlichkeitsmaß . . . 9
- II.3 Borelsche σ-Algebra . . . 12
- II.4 Eindeutigkeitssatz . . . 14

III Zufallsvariable **18**
- III.1 Zufallsvariable . . . 18

[15.04.2024]

In der Stochastik geht es um die Modellierung von Experimenten, deren Ausgang vom Zufall abhängt.

I Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

I.1 Ergebnismenge, Ereignismenge

I.1.1 Definition (Ergebnismenge)

Die Menge Ω, welche die möglichen Ausgänge eines Zufallexperiementes beschreibt, dennen wir *Grundmenge* oder *Ergebnismenge*.

I.1.2 Definition (Ereignismenge)

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Menge aller Teilmengen Ω, nennen wir *Ereignismenge*.

I.1.3 Beispiel

1) Wir werfen einen Würfel.
    - $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$,
    - $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \ldots, \{1, 1\}, \ldots\}$,
2) Glücksrad: $\Omega = [0, 2\pi[$ beschreibt die möglichen Winkel eines Glückradspiels. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist klar (keine geeignete Ereignismenge, siehe Kapitel 2).

I.2 Wahrscheinlichkeitsmaß

Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird auf der Ereignismenge definiert. Grund: Für überabzählbare Mengen (Glücksrad z.B.) haben einzelne Ausgänge häufig Wahrscheinlichkeit 0, obwohl global gesehen existiert ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Kapitel 2).

Die Wahrscheinlichkeit quantifiziert die Plausibilität der entsprechenden Ereignisse. Sie gibt die relative Häufigkeit an, wie oft ein bestimmtes Ereignis nach sehr häufigen Wiederholen unter identischen Umständen eintritt.

I.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Eine Abbildung $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ nennt man *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

Ka) $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ \forall A \subset \Omega$,

Kb) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

Kc) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),\ \forall A, B \subset \Omega,\ A \cap B = \emptyset$.

I.2.2 Bemerkung

Die Axiome a)-c) nennt man *Axiome von Kolmogorov* (werden in 2 ebenfalls leicht angepasst).

I.2.3 Satz

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ für beliebiges Ω gelten:

a) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A), \ \forall A \subset \Omega$.

b) $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

I.2.4 Beweis

(weggelassen)

I.2.5 Bemerkung

Über die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (d.h. der einelementigen Ereignisse), wird das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt.

Betrachte $\mathbb{P}(A)$ für $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset \Omega$. Durch mehrmaliges Anwenden von **K**c) erhält man

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{w_k\}).$$

I.2.6 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Das Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ nennt man auch *Wahrscheinlichkeitsraum* (auch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$).

———————— [18.04.2024] ————————

I.2.7 Bemerkung

Wie findet man nun das richtige Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. jenes, welches zu meinem Experiment passt?

1) Ausprobieren (siehe unten, "Statistik").

2) Analyse der physikalischen Eigenschaften. Praktikabel, falls Symmetrie in den relevanten physikalischen Eigenschaften herrscht:

I.2.8 Laplace-Annahme (Indifferenzprinzip)

Falls es keinen Grund zur Annahme gibt, dass die verschiedenen Ausgänge des Experiments im Wesentlichen zu unterscheiden sind, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse gleich sind.

I.2.9 Folgerung

Sei Ω ein Ergebnisraum. Unter der Laplace-Annahme gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

I.2.10 Beweis

$$1 \overset{\mathbf{K}}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}) \overset{\mathbf{K}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \overset{\mathbf{L}}{=} |\Omega| \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Außerdem:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) \overset{\mathbf{K}}{=} \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|}.$$

I.2.11 Beispiel

1) Werfen eines ungezinkten Würfels:

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

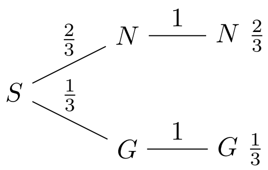
2) Gesamte Augenzahl bei zweimaligen Werfen des Würfels

$$\Omega = \{2, \ldots, 12\},$$

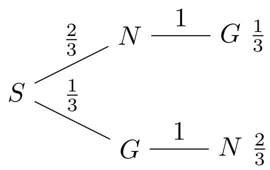
Laplace-Annahme gilt nicht. Die Elemente sind wesentlich verschieden, z.B. 2 hat nur Option $(1,1)$, 7 hat die Optionen $\{(1,6), \ldots\}$.

3) Ziegenproblem: Wir befinden uns in einer Gameshow, dürfen zwischen drei Toren wählen. Hinter einemal Tor ist ein Gewinn, hinter zweien eine Niete. Der Moderator öffnet eines der nicht-gewählten Tore. Hinter diesen ist eine Niete. Er bietet daraufhin an, das Tor zu wechseln. Ist der Wechsel sinnvoll?

   - Problem 1: Spielregeln müssen ergänzt werden. Wie handelt der Moderator? Wir gehen davon aus, dass er oder sie in jedem Fall ein nicht-gewähltes Tor mit Niete öffnet.
   - Problem 2: Man ist geneigt, von einer Laplace-Situation auszugehen. Dies ist falsch, da die Tore durch die Wahl und die Reaktion des Moderators zu unterscheiden sind.



Ohne Wechseln



Mit Wechseln

mit Start (S), Gewinn (G) und Niete (N).

I.3 Kombinatorik

Wie bestimmt man in einer Laplace-Situation $|A|$ und $|\Omega|$?

I.3.1 Beispiele

a) Sei $\Omega = A \times B$, so ist $|\Omega| = |A| \cdot |B|$ Münzwurf, dann Würfel:

$$A = \{\mathrm{K}, \mathrm{Z}\},\ B = \{1, \dots, 6\}.$$

b) Urne mit N durchnummerierten Kugeln. Wir ziehen davon nacheinander ohne Zurücklegen k Kugeln (Reihenfolge wird berücksichtigt):

$$|\Omega| = N(N-1)\dots(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

c) Zahlenlotto "6 aus 49", wie b) ohne Rücksicht auf Reihenfolge:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N-k)!} \cdot \frac{1}{k!}.$$

d) Anzahl der Anagramme von `MISSISSIPPI`.

$$|\Omega| = \frac{11!}{\underbrace{4!}_{\mathtt{I}}\ \underbrace{4!}_{\mathtt{S}}\ \underbrace{2!}_{\mathtt{P}}}.$$

II Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

II.0 Anpassung des 3. Axioms von Kolmogorov

Wir werden das 3. Axiom von Kolmogorov anpassen:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), \text{ falls } A_j \cap A_k = \emptyset, \ \forall j \neq k.$$

Schwieriger ist die anpassung des Definitionsbereiches von $\mathbb{P}$. Warum ist das nötig? Betrachte das Beispiel "Glücksrad".

[22.04.2024]

II.0.1 Lemma

Es gibt kein translationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{P}([0, 2\pi[)$.

II.0.2 Beweis

WA: Es gibt ein solches $\mathbb{P}$.

Wir zerlegen nun $[0, 2\pi[$ in überabzählbar viele abzählbare Teilmengen:

$$a \ b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}.$$

Dies definiert Äquivalenzklassen, diese dienen zur Zerlegung von $[0, 2\pi[$:

- $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \ldots\}$,
- $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \ldots\}$,
- $\{\pi, \pi + \frac{1}{2}, \ldots\}$,
- $\ldots$

Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse einen Representanten $\leftarrow \{0, \sqrt{2}, \pi, \ldots\}$. R ist natürlich überabzählbar. Für jedes $q \in [0, 2\pi[\cap\mathbb{Q}$ definieren wir

$$R_q := \{r + q, \ r \in R\} = R + q.$$

Nach Annahme der Translationsinvarianz ist

$$\mathbb{P}(R_q) = \mathbb{P}(R), \ \forall q \in [0, 2\pi[\cap\mathbb{Q}.$$

Es gilt:

$$[0, 2\pi[\subseteq \bigcup_{q \in]-2\pi, 2\pi[\cap\mathbb{Q}} R_q \subset]-2\pi, 4\pi[.$$

$\Rightarrow$ da $\mathbb{P}([0, 2\pi[) = 1$, gilt, dass

$$\mathbb{P}(\bigcup_{q \in]-2\pi, 2\pi[\cap\mathbb{Q}} R_q) \geq 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in]-2\pi, 2\pi[} \mathbb{P}(R) \geq 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R) \neq 0,$$

aber falls der Inhalt $\mathbb{P}(R) > 0$, folgt, dass das Intervall $]-2\pi, 4\pi[$ unendlichen Inhalt hat. Dieses überdeckt jedoch $[0, 2\pi[$ dreimal. $\lightning$

II.1 Ereignisraum

Wir schränken den Definitionsbereich von $\mathbb{P}$ ein, um solch problematische Mengen zu umgehen.

II.1.1 σ-Algebra

Sei Ω eine Menge. Eine σ-Algebra bzgl. Ω ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ mit:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$,

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

II.1.2 Beispiele

a) $\mathcal{P}(\Omega)$, sowie $\{\emptyset, \Omega\}$ ist jeweils σ-Algebra.

b)
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

II.1.3 Satz

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra bzgl. Ω. Dann gilt:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

b) abzählbare Schritte von Ereignissen sind in $\mathcal{A}$,

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

II.1.4 Beweis

a) $\emptyset = \Omega^C \in \mathcal{A}$,

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right]^C \in \mathcal{A}$,

c) $A \setminus B = A \cap B^C$.

II.1.5 Satz

Sei Ω eine Menge. Der Schnitt beliebiger σ-Algebren ergibt wieder eine σ-Algebra.

II.1.6 Beweis

Seien $\mathcal{A}_i$ für $i \in \mathcal{I}$ σ-Algebren (bzgl. Ω). Z.z. $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra.

a) $\Omega \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$.

b) Sei $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow E^C \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$.

c) Seien $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ($E_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E_n \in A_i, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathcal{I} \\
&\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I} \text{ (da } \mathcal{A}_i \ \sigma\text{-Algebra)} \\
&\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

II.1.7 Bemerkung

Vereinigungen von σ-Algebren ergeben *nicht* notwendigerweise eine σ-Algebra.

II.1.8 Beispiel

$\Omega = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathcal{A}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$,
- $\mathcal{A}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 3\}, \{2\}\}$,
- $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}\} \not\ni \{2\} \cup \{3\}$.

II.1.9 Definition (Erzeugte σ-Algebra)

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ definiert durch

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Alg}, \ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

nennen wir die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.*

II.1.10 Bemerkung

$\sigma(\mathcal{E})$ ist für nichtleere Ω immer wohldefiniert und wegen Satz σ-Algebra.

II.1.11 Korollar

$\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h.

a) $\mathcal{E} \in \sigma(\mathcal{E})$,

b) $\forall \widetilde{\mathcal{A}}$ σ-Algebra it $\mathcal{E} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$, gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$.

II.1.12 Beweis

a) $\mathcal{E}$ ist in allen σ-Algebren enthalten, über die der Schnitt gebildet wird.

b) $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist ein Kandidat für $\mathcal{A}$ in der Definition. Es wird also auch über $\widetilde{\mathcal{A}}$ der Schnitt gebildet $\Rightarrow \widetilde{A} \supset \sigma(\mathcal{E})$.

II.1.13 Beispiel

$\Omega = \{1,2,3\}, \mathcal{E} = \{\{1,2\}\}$. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, enthält $\mathcal{E}$ $\mathcal{A}_1$ vom Beispiel oben ebenso. Weitere Kandidaten:

$$\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}.$$

[25.04.2024]

II.1.14 Defintiion (Borel-σ-Algebra)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Die von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra heißt *Borel-σ-Algebra.* (alternative Definiton später)

II.2 Wahrscheinlichkeitsmaß

II.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra. Eine Abbildung $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

b) $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$,

c) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$, falls $A_n \in \mathcal{A},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ \forall n \neq m$.

II.2.2 Bemerkung

Satz vom Gegenereignis, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ gilt weiterhin.

II.2.3 Definition und Satz (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. Ω Menge, $\mathcal{A}$ zugehörige σ-Algebra, $\mathbb{P}\colon \mathring{A} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Dann ist das auf A *bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß* definiert durch

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

II.2.4 Beweis

(dass dies ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist):

a) $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

b) Zähler ≥ 0, Nenner $> 0 \Rightarrow$ Behauptung.

c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \frac{\mathbb{P}(A \ \cap \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)}{\mathbb{P}(A)} \ (A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{(A_n \cap A)}^{\text{paarweise disjunkt}})}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_A(A_n).
\end{aligned}$$

II.2.5 Definition (Unabhängigkeit)

Zwei Ereignisse A, B heißen (stochastisch) *unabängig* $:\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

.

II.2.6 Bemerkung

A unabhängig von $B \Rightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ (falls $\mathbb{P}(A) \neq 0$).

II.2.7 Beispiel

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$.

a) $A = \{3,4,5,6\},\ B = \{2,4,6\}$ sind unabhängig.

b) $\widetilde{A} = \{4,5,6\}$ und B wie oben sind nicht unabängig.

II.2.8 Definition (Limes von Ereignissen)

Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Wir nehmen an:

- $A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $B_n \supset B_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \\
\lim_{n\to\infty} B_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.
\end{aligned}$$

II.2.9 Korrolar

$\lim_{n\to\infty} A_n$ und $\lim_{n\to\infty} B_n$ sind Ereignisse, falls A_n, B_n Ereignisse sind.

II.2.10 Beweis

Definition der σ-Algebra, bzw. Satz gleich darunter.

II.2.11 Definition ($\limsup$, $\liminf$)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ Dann ist

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &:= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\\ \liminf_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

II.2.12 Korollar

Auch $\limsup$ und $\liminf$ sind Ereignisse (falls $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$).

II.2.13 Satz (σ-Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine abfallende bzw. ansteigende Folge von Ereignissen ($A_n \subset A_{n+1},\ B_n \supset B_{n+1},\ \forall n$). Dann ist

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n)$,

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n)$.

II.2.14 Beweis

Definiere $C_1 := A_1$. $C_2 := A_1 \setminus A_1, \ldots, C_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Es gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

b) $C_n \cap C_m = \emptyset,\ \forall n \neq m$,

c) $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

a)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) &\overset{\text{a)}}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)\\ &\overset{\text{Kc)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k)\\ &\overset{\text{Kc)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} C_k)\\ &\overset{\text{c)}}{=} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

$\square$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) &= 1 - \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n^C) \\ &\overset{\text{Fall a)}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n^C) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n).\end{aligned}$$

[29.04.2024]

II.3 Borelsche σ-Algebra

II.3.1 Erinnerung

$\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die σ-Algebra erzeugt aus allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

II.3.2 Bemerkung

Diese Definition lässt sich auf Grundmengen verallgemeinern, in denen es ein "Konzept" von offenen Teilmengen gibt (topologische Räume, z.B. metrische Räume). Wir werden alternative Definitionen von $\mathcal{B}$ betrachten.

II.3.3 Korollar

a) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra. $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

b) Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Falls $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$ und $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F})$.

II.3.4 Beweis

a)

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{B}\ \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{E}\subset\mathcal{B}} \mathcal{B}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ ist einer der Kandidaten, über die geschnitten wird.

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F}) &\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}), \\ \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E}) &\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

II.3.5 Satz

Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die aus den offenen Intervallen erzeugte σ-Algebra.

II.3.6 Beweis

Z.z.: Jede offene Teilmenge $\mathbb{R}$ liegt in der aus den offenen Intervallen erzeugten σ-Algebra.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ offen. Für jedes $q \in \mathbb{Q} \cap A$ sei

$$r_q = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}\colon\ ]q-\varepsilon,\ q+\varepsilon[\ \subset A\}.$$

Das Intervall $]q-r_q,\ q+r_q[$ ist $\subset A$ $(*)$. (WA: $]q-r_q,\ q+r_q[\ \not\subset A \Rightarrow \exists x \in\ ]q-r_q,\ q+r_q[$ mit $x \notin A$. Wähle $\varepsilon = \frac{r_q+|q-x|}{2} \Rightarrow x \in\ ]q-r_q,\ q+r_q[$, aber $\varepsilon < r_q$ $\lightning$.)

Betrachte $B = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap A}\ ]q-r_q,\ q+r_q[$. Z.z. $A = B$ (da B abzählbare Vereinigung offener Intervalle).

- $B \subset A$, da all die Teilintervalle $]q-r_q,\ q+r_q[\ \subset A$ $(*)$.
- $A \subset B$. Sei $y \in A$. Z.z. $y \in B$. Wegen Offenheit von A $\exists \delta_y$, sodass $]y-\delta_y,\ y+\delta_y[\ \subset A$. Wähle $q_y \in \mathbb{Q}\cap\ ]y-\frac{\delta_y}{2}, y+\frac{\delta_y}{2}[$. $r_{q_y} \geq \frac{\delta_y}{2} \Rightarrow y \in\ ]q_y - r_{q_y},\ q_y + r_{q_y}[$.

II.3.7 Satz

Die Borel-σ-Algebra ist genau die σ-Algebra erzeugt aus den Intervallen $]-\infty,\ a]$ mit $a \in \mathbb{R}$.

II.3.8 Beweis

$\mathcal{E} :=$ Menge der offenen Intervalle, $\mathcal{F} := \{]-\infty,\ a],\ a \in \mathbb{R}\}$.

a) Z.z. $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Sei $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Z.z. $]a,b[\ \in \sigma(\mathcal{F})$.

- 1. Schritt: "$a = -\infty$".

$$]-\infty,\ b[\ = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left]-\infty,\ b-\frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{F}}}_{\in \sigma(\mathcal{F})}.$$

$\forall x \in\ ]-\infty,\ b[$, d.h. $\forall x < b\ \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $x < b - \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]-\infty,\ b-\frac{1}{n}\right]$. $\Rightarrow\ ]-\infty,\ b[\ \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]-\infty,\ b-\frac{1}{n}\right]$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right] \subset\ ]-\infty, b[\ \Rightarrow$ "$\supset$".

- 2. Schritt:

$$a \in \mathbb{R}\colon\ ]a,b[\ = \underbrace{]-\infty,b[}_{\in \sigma(\mathcal{F})\ (\text{1. Schritt})} \setminus \overbrace{]-\infty,a]}^{\in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})}$$

nach Satz ist letzteres in $\sigma(\mathcal{F})$.

b) Z.z. $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $]-\infty,\ a]\ \in \sigma(\mathcal{E})$.

$$]-\infty,a]\ =\ (]a,\ +\infty[)^C = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ ]a,\ n[)^C.$$

II.3.9 Satz

$\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die σ-Algebra erzeugt aus $\{]-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{Q}\}$.

II.3.10 Beweis

Sei $\mathcal{G} = \{]-\infty, a] \colon a \in \mathbb{Q}\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

Z.z. $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{G})$. Sei $]-\infty, a]$ $a \in \mathbb{R}$.

$$]-\infty, a] \;= \underbrace{\bigcap_{q\in\mathbb{Q},\ q\geq a}]-\infty,\ q]}_{\in\, \sigma(\mathcal{G})}.$$

$]-\infty, a] \;\subset\,]-\infty, q], \forall q \geq a \Rightarrow\,]-\infty, a] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q},\ q\geq a}]-\infty, q]$ ($\Rightarrow$ "$\subset$").

"$\supset$": Dazu "$\subset$" für die Komplete. Sei $x \notin]-\infty,\ a] \Rightarrow x > a$. Wähle $q \in]a, x[\cap \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin]-\infty,\ q] \;\Rightarrow$ $x \notin \bigcup_{q\in\mathbb{Q},\ q\geq a}]-\infty, q]$.

[02.05.2024]

II.4 Eindeutigkeitssatz

Ziel ist es zu zeigen, dass unter gewissen Bedingungen das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt ist, falls es auf einem Erzeuger gegeben ist.

Wir benutzen das "Prinzip der guten Mengen".

II.4.1 Satz (Prinzip der guten Mengen)

Falls eine Eingenschaft für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gilt und die Menge, auf der die Eigenschaft gilt eine σ-Algebra ist, so gilt die Eigenschaft auf ganz $\sigma(\mathcal{E})$.

II.4.2 Beweis

Sei $\mathcal{A}$ die Menge, für die die Eigenschaft gilt. Da $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra nach Voraussetzung,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{E}\subset\mathcal{B}} \mathcal{B}.$$

$\mathcal{A}$ ist eines der Kandidaten für $\mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

II.4.3 Beweisstrategie für den Eindeutigkeitssatz

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \colon \sigma(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir möchten zeigen, dass unter gewissen Bedingungen die Menge $\mathcal{G}$ definiert durch

$$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$$

eine σ-Algebra ist.

Nach dem Prinzip der guten Mengen ist dann

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A),\ \forall A \in \sigma(\mathcal{E}).$$

Wir beweisen dies in zwei Schritten:

1) Die Menge $\mathcal{G}$ ist ein Dynkin-System.

2) Unter gewissen Bedingungen ist jedes Dynkin-System eine σ-Algebra.

II.4.4 Definition (Dynkin-System)

Eine Teilmenge $\mathcal{D}$ heißt *Dynkin-System* $:\Leftrightarrow$

a) $\Omega \in \mathcal{D}$,

b) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^C \in \mathcal{D}$,

c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, A_n paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

II.4.5 Satz

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$. $\mathcal{G} := \{A \subset \mathcal{A} \colon \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ ist ein Dynkin-System.

II.4.6 Beweis

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{Q}(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{G}$.

b) Sei $A \in \mathcal{G}$, d.h. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(A^C)$, d.h. $A^C \in \mathcal{G}$.

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ paarweise disjunkt, d.h. $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{Q}(A_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \overset{\mathbf{K}c)}{=} \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n) \overset{\overleftarrow{\mathbf{K}c)}}{=} \mathbb{Q}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

II.4.7 Definition (Schnittstabilität)

Eine Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *schnittstabil* $:\Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{E},\ \forall A, B \in \mathcal{E}$.

II.4.8 Satz

Jedes schnittstabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra.

II.4.9 Beweis

Axioma a),b) sind identisch (σ-Algebra und Dynkin-System). Es bleibt c) zu zeigen. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein schnittstabiles Dynkin-System. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ beliebig. Z.z. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{A}$.

Sei $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ (schnittstabil) $\Rightarrow (A_1 \cap A_2)^C \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ schnittstabil ist, ist

$$\underbrace{(A_1 \cap A_2)^C \cap A_1}_{A_1 \setminus A_2} \in \mathcal{A},\ A_1 \cup A_2 = A_2 \cup (A_1 \setminus A_2) \in \mathcal{A} \text{ (disjunkt)}.$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup ((A_3 \setminus A_1) \setminus A_2) \cup \dots$$

$\square$

II.4.10 Satz

Ein von $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugtes Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ ist bereits schnittstabil, falls $\mathcal{E}$ schnittstabil ist.

II.4.11 Beweis

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ schnittstabil, $E \in \mathcal{E}$ beliebig. Sei

$$\mathcal{A}_E := \{A \in \mathbb{P}(\Omega) \colon E \cap A \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}_E$ ein Dynkin-System ist.

a) $\Omega \in \mathcal{A}_E$: $E \cap \Omega = E \in \mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E})$.

b) Sei $A \in \mathcal{A}_E \Rightarrow E \cap A \in \delta(\mathcal{E})$:

$$A^C \cap E = (A \cup E^C)^C = ((A \cap E) \cup E^C)^C.$$

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_E$ paarweise disjunkt. Z.z. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_E$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \cap E \in \delta(\mathcal{E})$

$$E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap A_n \ (*).$$

$E \cap A_n$ sind paarweise disjunkt, da die A_n paarweise disjunkt $\Rightarrow (*) \in \delta(\mathcal{E}) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_E$.

[06.05.2024]

Sei nun $\mathcal{A}_B := \{A \in \delta(\mathcal{E}) \colon A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}$ für $B \in \delta(\mathcal{E})$.

1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_B$ wegen des vorigen Schrittes.

2) a) $\Omega \in \mathcal{A}_B$, da $\Omega \cap B = B \in \delta(\mathcal{E})$.
   b) Sei $A \in \mathcal{A}_B$, d.h. $A \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \Rightarrow \underbrace{B \setminus (A \cap B)}_{B \cap A^C \in \delta(\mathcal{E})} \in \delta(\mathcal{E})$.

3) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_B$ paarweise disjunkt.

$$\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(A_n \cap B)}_{\ni \delta(\mathcal{E}) \text{ n.V.}} \in \delta(\mathcal{E})$$

$$\overset{\text{P.d.g.M.}}{\Rightarrow} \mathcal{A}_B \supset \delta(\varepsilon) \text{ (außerdem } \mathcal{A}_B \subset \delta(\mathcal{E})\text{), d.h. } \mathcal{A}_B = \delta(\mathcal{E}).$$

$\Rightarrow \forall A, B \in \delta(\mathcal{E})$ gilt $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$.

II.4.12 Korollar

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ schnittstabil $\Rightarrow \delta(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$.

II.4.13 Beweis

- "$\subset$": $\delta(\mathcal{E})$ enthält $\mathcal{E}$ und ist ein Dynkin-System $\overset{\text{P.d.g.M.}}{\Rightarrow} \delta(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$.
- "$\supset$": $\delta(\mathcal{E})$ enthält $\mathcal{E}$. $\delta(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra aufgrund der letzten beiden Sätze $\overset{\text{P.d.g.M.}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$.

II.4.14 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ schinttstabil. Dann ist $\mathbb{P}\colon \sigma(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ eindeutig durch $\mathbb{P}$ eingeschränkt auf $\mathcal{E}$ definiert (falls existent).

II.4.15 Beweis

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q}\colon \sigma(\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaße mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$, $\forall A \in \mathcal{E}$. $\{A \in \sigma(\mathcal{E})\colon \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\} = \mathcal{A}$ enthält $\mathcal{E}$ und ist ein Dynkin-System $\Rightarrow \mathcal{A} \supset \delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

II.4.16 Beispiel

a) Durch $\mathbb{P}(]a, b[) = \frac{b-a}{2\pi}$ wird für unser Glücksradspiel das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der entsprechenden Borel-σ-Algebra eindeutig.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ integrierbar mit
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$
Dann ist durch $\mathbb{P}(]-\infty, a]) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig.

II.4.17 Bemerkung

Für die obigen Beispiele kann die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes mit den genannten Eigenschaften gezeigt werden. (siehe Maßtheorie)

III Zufallsvariable

III.1 Zufallsvariable

Es liegt nahe, die Menge Ω nach z.B. $\mathbb{R}$ abzubilden, um die Ausgänge des Experimentes zu quantifizieren.

III.1.1 Definition (Zufallsvariable im Diskreten)

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \vartheta$ (falls $|\Omega| < \infty$, $(\Omega, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum) nennt man *Zufallsvariable*.

III.1.2 Beispiel

a) Würfel $\Omega = \{\dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{6}\}$, $\vartheta = \{1, 2, \dots, 6\}$. X bildet auf die Augenzahl ab.

b) Glücksspiel: Man gewinnt 3 Euro, falls Augenzahl durch 3 teilbar, ansonsten verliert man 1 Euro:

$$y\colon \Omega \to \{-1, 3\}.$$

III.1.3 Bemerkung

Es ist für jede Zufallsvariable in natürlicher Weise ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf ϑ definiert:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

III.1.4 Definition (Zufallsvariable)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\vartheta, \mathcal{B})$ ein sogennanter Maßraum, d.h. $\mathcal{B}$ ist σ-Algebra bzgl. ϑ. Dann nennt man jede Abbildung $X\colon \Omega \to \vartheta$ mit der Eigenschaft

$$(*)\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}$$

eine *Zufallsvariable*.

III.1.5 Bemerkung

Die Eigenschaft $(*)$ der Abbildung X nennt man $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ *messbar*.

III.1.6 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, ϑ eine Menge mit σ-Algebra $\mathcal{B}$. Dann ist auf B durch

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathcal{A}))$$

ein Wahrscheinclihkeitsmaß definiert. D.h. falls $X\colon \Omega \to \vartheta$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar $\Rightarrow$ $(\vartheta, \mathcal{B}, \mathbb{P} \cdot X^{-1})$ ist Wahrscheinlichkeitsraum.

[13.05.2024]

III.1.7 Satz

X Zufallsvariable $\Rightarrow \mathbb{Q} := \mathbb{P} \cdot X^{-1}$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß.

III.1.8 Erinnerung

$X^{-1} := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\},\ X : \Omega \to \vartheta.$

III.1.9 Proposition

Sei $X : \Omega \to \vartheta$ eine Abbildung. $A, B \subset \vartheta$. Dann gilt:

a) $X^{-1}(\vartheta) = \Omega$,

b) $X^{-1}(A^C) = [X^{-1}(A)]^C$,

c) $X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cup B)$,

d) $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cap B)$,

e) $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = \emptyset$, falls $A \cap B = \emptyset$.

III.1.10 Beweis

a) $\forall \omega \in \Omega$ gilt $X(\omega) \in \vartheta$.

b) $\omega \in X^{-1}(A^C) \Leftrightarrow X(\omega) \in A^C \Leftrightarrow X(\omega) \notin A \Leftrightarrow \omega \notin X^{-1}(A) \Leftrightarrow w \in [X^{-1}(A)]^C$.

c) $\omega \in X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A)$ oder $\omega \in X^{-1}(B) \Leftrightarrow X(\omega) \in A$ oder $X(\omega) \in B \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A \cup B)$. Geht ebenso für beliebige, insbesondere abzählbare Vereinigungen.

d) folgt aus mehrfachem Anwenden von b), und c).

e) folgt aus d), da $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

III.1.11 Beweis des Satzes

a) $\mathbb{Q}(\vartheta) := \mathbb{P}(X^{-1} = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Positivität folgt aus b) für $\mathbb{P}$.

c) $\mathbb{Q}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ für A_j paarweise disjunkt.

$$= \mathbb{P}(X^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(A_j)}_{\text{paarweise disjunkt e)}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_j).$$

III.1.12 Satz

Sei $X : \Omega \to \vartheta$ messbar ($\mathcal{A} \to \mathcal{B}$), dann sind folgenden Mengen σ-Algebren:

a) $X^{-1}(\mathcal{B}) := \{X^{-1}(B) \colon B \in \mathcal{B}\}$,

b) $X_*(\mathcal{A}) := \{B \in \mathcal{B} \colon \exists A \in \mathcal{A} \colon X^{-1}(B) = A\}$.

a) bzgl. Ω, b) bzgl. ϑ.

III.1.13 Beweis

a) a) $\Omega \in X^{-1}(B)$, da $\Omega = X^{-1}(\vartheta)$.

   b) Sei $A \in X^{-1}(B) \Rightarrow \exists B$ mit $X^{-1}(B) = A \Rightarrow X^{-1}(B^C) = A^C \in X^{-1}(\mathcal{B})$.

   c) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{-1}(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists B_n \in \mathcal{B} \text{ mit } A_n = X^{-1}(B_n)\\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in B \text{ und } X^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(B_n)\\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}_{\in \mathcal{B}})\\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in X^{-1}(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

b) ähnlich.

III.1.14 Bemerkung

Die Messbarkeit ging in den Beweis gar nicht ein. Für jede Abbildung $X\colon \Omega \to \vartheta$ gilt, dass für eine σ-Algebra $\mathcal{B}$ bzgl. $X^{-1}(\mathcal{B}$ eine σ-Algebra bzgl. Ω ist.

III.1.15 Korollar

Sei $X\colon \Omega \to \vartheta$ eine Abbildung, $\mathcal{B}$ eine von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra bzgl. ϑ. Dann ist X $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar bereits., wenn $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, $\forall E \in \mathcal{E}$ $(*)$.

III.1.16 Beweis

Wir betrachten $X_*(\mathcal{A})$. Falls $(*)$ gilt, ist $\mathcal{E} \subset X_*(\mathcal{A})$. $X_*(\mathcal{A})$ ist σ-Algebra $\Rightarrow B \subset X_*(\mathcal{A}) \Rightarrow X$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar.

III.1.17 Beispiel

Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $B_{\mathbb{R}}$-$B_{\mathbb{R}}$-messbar. Grund: Da f stetig, sind die Urbilder offener Mengen offen. Die offenen Mengen sind ein möglicher Erzeuger von $B_{\mathbb{R}}$, nach Korollar muss man nur diese untersuchen.

III.1.18 Satz

Seien $\Omega, \vartheta, \Lambda$ Mengen, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ σ-Algebren bzgl. $\Omega, \vartheta, \Lambda$. Sei $X : \Omega \to \vartheta$ $mathcal A$-$\mathcal{B}$-messbar, $Y : \vartheta \to \Lambda$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$ messbar. Dann ist $Z := Y \cdot X : \Omega \to \Lambda$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar.

III.1.19 Beweis

Z.z.: $Z^{-1}(A) \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{C}$.

$$Z^{-1}(A) = \underbrace{X^{-1}(\overbrace{Y^{-1}(A)}^{\in \mathcal{B}, \text{ da } Y \text{ messbar}})}_{\in \mathcal{A}}.$$

III.1.20 Satz

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $X + Y$ ebenfalls $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar.

III.1.21 Beweis

Wegen des Korollars gilt es zu zeigen:

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Betrachte dazu:

$$\underbrace{\bigcup_{b\in\mathbb{Q}} \underbrace{X^{-1}(\overbrace{]-\infty, b[}^{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}})}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{Y^{-1}(\overbrace{]-\infty, a-b[}^{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}})}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}.$$

Wir zeigen nun, dass

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup_{b\in\mathbb{Q}} X^{-1}(]-\infty, b[) \ \cap\ Y^{-1}(]-\infty, a-b).$$

- "$\subset$": Sei $\omega \in (X+Y)^{-1}(]-\infty, a[) \Leftrightarrow (X+Y)(\omega) < a$. Sei $b \in \mathbb{Q}$ mit $b \in]X(\omega), X(\omega)+\varepsilon 2[$. $\Rightarrow X(\omega) < b$ und $Y(\omega) + b < X(\omega) + Y(\omega) + \frac{\varepsilon}{2} < a \Rightarrow Y(\omega) < a - b$.
- "$\supset$": Sei $\omega \in \ldots \Rightarrow \exists b$, sodass $X(\omega) < b$ und $Y(\omega) < a - b \Rightarrow (X+Y)(\omega) < a$.