Verteilung mehrerer Zufallsvariablen

Peter Pickl

Mathematisches Institut, Universität Tübingen

5. Juni 2024

Mehrere Zufallsvariablen

- Gegeben mehrere Zufallsvariablen X_i mit $i \in I$ für eine Indexmenge I.
- Wir möchten die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen behandeln, die sich durch die X_i ausdrücken lassen
- Zum Beispiel $\cap_{i\in\mathbb{N}} X_i \in B_i$, wobei die B_i Elemente der Borel'schen σ-Algebra sind.
- So lange wir nur Verknüpfungen zwischen den Ereignissen zulassen, die nach den Axiomen der σ-Algebra legitim sind, erhalten wir so jeweils ein Ereignis.
- Legitim sind natürlich abzählbare Schnitte und Vereinigung, Differenz- und Komplementbildung.

Verteilungsfunktion

Es seien nun zwei Zufallsvariablen X, Y gegeben (folgende Betrchtungen gehen für mehr als 2 Zufallsvariablen analog).
Wir möchten das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmass für durch X und Y ausdrückbare Ereignisse zusammenfassen.
Dies machen wir wieder mit Hilfe der Verteilungsfunktion

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

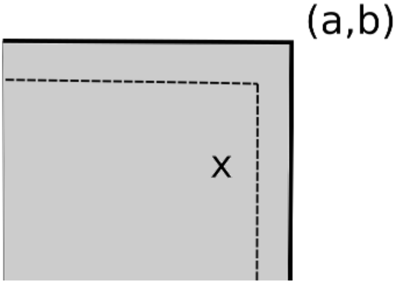
nennt man <u>gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.</u>

Eindeutigkeit des Masses

Satz: Durch $V_{X,Y}$ sind für beliebige Ereignisse $(X,Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ die Wahrscheinlichkeiten eindeutig festgelegt.
Beweis: Wir benutzen den Eindeutigkeitssatz. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass die Mengen $\mathcal{E} := \left\{]-\infty, a] \times]-\infty, b] \text{ für } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ die Borel'sche-σ-Algebra erzeugen. Das Mengensystem $\mathcal{E}$ ist nämlich schnittstabil, dadurch greift der Eindeutigkeitssatz!
Durch $\mathcal{E}$ lassen sich zunächst alle Mengen der Form

- $]-\infty, a] \times]-\infty, b[$
- $]-\infty, a[\times]-\infty, b]$
- und $]-\infty, a[\times]-\infty, b[$

erzeugen. Zum Beispiel
$]-\infty, a[\times]-\infty, b[\; = \; \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a - \frac{1}{n}] \times]-\infty, b - \frac{1}{n}]$


(a,b)
X

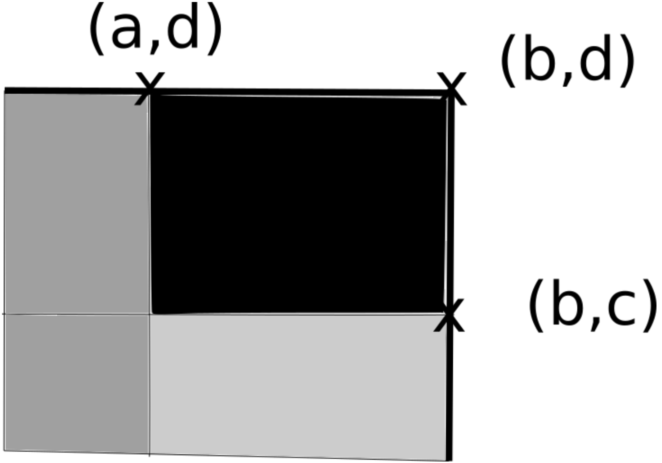
Eindeutigkeit des Masses

Satz: Durch $V_{X,Y}$ sind für beliebige Ereignisse $(X, Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ die Wahrscheinlichkeiten eindeutig festgelegt.
Beweis: Wir benutzen den Eindeutigkeitssatz. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass die Mengen $\mathcal{E} := \left\{]-\infty, a] \times]-\infty, b] \text{ für } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ die Borel'sche-σ-Algebra erzeugen. Das Mengensystem $\mathcal{E}$ ist nämlich schnittstabil, dadurch greift der Eindeutigkeitssatz!
Durch $\mathcal{E}$ lassen sich zunächst alle Mengen der Form

- $]-\infty, a] \times]-\infty, b[$
- $]-\infty, a[\times]-\infty, b]$
- und $]-\infty, a[\times]-\infty, b[$

erzeugen. Zum Beispiel
$]-\infty, a[\times]-\infty, b[\; = \; \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, a - \frac{1}{n}] \times]-\infty, b - \frac{1}{n}]$
Es gilt

$$\begin{aligned}]a, b[\times]c, d[\; &=]-\infty, b[\times]-\infty, d[\\ &\setminus \left( ]-\infty, a] \times]-\infty, d] \cup]-\infty, b] \times]-\infty, c] \right) \end{aligned}$$


(a,d)
(b,d)
(b,c)

Eindeutigkeit des Masses

Satz: Durch $V_{X,Y}$ sind für beliebige Ereignisse $(X, Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ die Wahrscheinlichkeiten eindeutig festgelegt.

Beweis:

Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra enthält also die von den offenen Rechtecken erzeugte σ-Algebra.

ž2Dass sich durch die offenen Rechtecke alls offenen Mengen erzeugen lassen, geht identisch wie der entsprechende Beweis in $\mathbb{R}$

Wähle eine beliebige offene Teilmenge A von $\mathbb{R}^2$. Für jedes $(a, b) \in \mathbb{Q}^c \cap A$ bilde das größtmögliche offene Rechteck, welches (a, b) enthält.

Die Vereinigung all dieser Rechtecke ist dann gleich der Menge A