Stochastik

Inhalt:	Live-Transkription
Datum:	SS 2024
Autor:	Prof. Dr. Peter Pickl

Korrekturhinweise bitte an thomas.hua@student.uni-tuebingen.de.

Inhaltsverzeichnis

[Pickl 15.04.2024]

In der Stochastik geht es um die Modellierung von Experimenten, deren Ausgang vom Zufall abhängt.

I Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

I.1 Ergebnismenge, Ereignismenge

I.1.1 Definition (Ergebnismenge)

Die Menge Ω, welche die möglichen Ausgänge eines Zufallexperiementes beschreibt, dennen wir *Grundmenge* oder *Ergebnismenge.*

I.1.2 Definition (Ereignismenge)

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Menge aller Teilmengen Ω, nennen wir *Ereignismenge.*

I.1.3 Beispiel

1) Wir werfen einen Würfel.
   - $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$,
   - $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \ldots, \{1, 1\}, \ldots\}$,
2) Glücksrad: $\Omega = [0, 2\pi[$ beschreibt die möglichen Winkel eines Glückradspiels. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist klar (keine geeignete Ereignismenge, siehe Kapitel 2).

I.2 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird auf der Ereignismenge definiert. Grund: Für überabzählbare Mengen (Glücksrad z.B.) haben einzelne Ausgänge häufig Wahrscheinlichkeit 0, obwohl global gesehen existiert ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Kapitel 2).

Die Wahrscheinlichkeit quantifiziert die Plausibilität der entsprechenden Ereignisse. Sie gibt die relative Häufigkeit an, wie oft ein bestimmtes Ereignis nach sehr häufigen Wiederholen unter identischen Umständen eintritt.

I.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Eine Abbildung $\mathbb{P} \colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ nennt man *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

Ka) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall A \subset \Omega$,

Kb) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

Kc) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \ \forall A, B \subset \Omega, \ A \cap B = \emptyset$.

I.2.2 Bemerkung

Die Axiome a)-c) nennt man *Axiome von Kolmogorov* (werden in 2 ebenfalls leicht angepasst).

I.2.3 Satz

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ für beliebiges Ω gelten:

a) $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A),\ \forall A \subset \Omega$.

b) $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

I.2.4 Beweis

(weggelassen)

I.2.5 Bemerkung

Über die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (d.h. der einelementigen Ereignisse), wird das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt.

Betrachte $\mathbb{P}(A)$ für $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset \Omega$. Durch mehrmaliges Anwenden von **K**c) erhält man

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{w_k\}).$$

I.2.6 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Das Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ nennt man auch *Wahrscheinlichkeitsraum* (auch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$).

——— `[ Pickl 18.04.2024 ]` ———

I.2.7 Bemerkung

Wie findet man nun das richtige Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. jenes, welches zu meinem Experiment passt?

1) Ausprobieren (siehe unten, “Statistik”).

2) Analyse der physikalischen Eigenschaften. Praktikabel, falls Symmetrie in den relevanten physikalischen Eigenschaften herrscht:

I.2.8 Laplace-Annahme (Indifferenzprinzip)

Falls es keinen Grund zur Annahme gibt, dass die verschiedenen Ausgänge des Experiments im Wesentlichen zu unterscheiden sind, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse gleich sind.

I.2.9 Folgerung

Sei Ω ein Ergebnisraum. Unter der Laplace-Annahme gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

I.2.10 Beweis

$$1 \overset{\mathbf{K}}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}) \overset{\mathbf{K}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \overset{\mathbf{L}}{=} |\Omega| \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Außerdem:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}) \overset{\mathbf{K}}{=} \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|}.$$

I.2.11 Beispiel

1) Werfen eines ungezinkten Würfels:

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

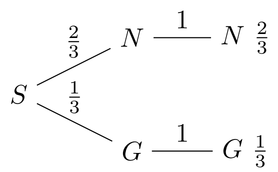
2) Gesamte Augenzahl bei zweimaligen Werfen des Würfels

$$\Omega = \{2, \ldots, 12\},$$

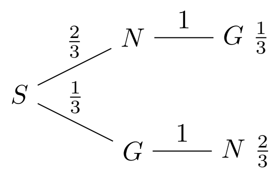
Laplace-Annahme gilt nicht. Die Elemente sind wesentlich verschieden, z.B. 2 hat nur Option $(1,1)$, 7 hat die Optionen $\{(1,6), \ldots\}$.

3) Ziegenproblem: Wir befinden uns in einer Gameshow, dürfen zwischen drei Toren wählen. Hinter einemal Tor ist ein Gewinn, hinter zweien eine Niete. Der Moderator öffnet eines der nicht-gewählten Tore. Hinter diesen ist eine Niete. Er bietet daraufhin an, das Tor zu wechseln. Ist der Wechsel sinnvoll?

   - Problem 1: Spielregeln müssen ergänzt werden. Wie handelt der Moderator? Wir gehen davon aus, dass er oder sie in jedem Fall ein nicht-gewähltes Tor mit Niete öffnet.
   - Problem 2: Man ist geneigt, von einer Laplace-Situation auszugehen. Dies ist falsch, da die Tore durch die Wahl und die Reaktion des Moderators zu unterscheiden sind.



Ohne Wechseln



Mit Wechseln

mit Start (S), Gewinn (G) und Niete (N).

I.3 Kombinatorik

Wie bestimmt man in einer Laplace-Situation $|A|$ und $|\Omega|$?

I.3.1 Beispiele

a) Sei $\Omega = A \times B$, so ist $|\Omega| = |A| \cdot |B|$ Münzwurf, dann Würfel:

$$A = \{\mathrm{K}, \mathrm{Z}\},\ B = \{1, \dots, 6\}.$$

b) Urne mit N durchnummerierten Kugeln. Wir ziehen davon nacheinander ohne Zurücklegen k Kugeln (Reihenfolge wird berücksichtigt):

$$|\Omega| = N(N-1)\dots(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

c) Zahlenlotto "6 aus 49", wie b) ohne Rücksicht auf Reihenfolge:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N-k)!} \cdot \frac{1}{k!}.$$

d) Anzahl der Anagramme von `MISSISSIPPI`.

$$|\Omega| = \frac{11!}{\underbrace{4!}_{\mathtt{I}}\underbrace{4!}_{\mathtt{S}}\underbrace{2!}_{\mathtt{P}}}.$$

II Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

II.0 Anpassung des 3. Axioms von Kolmogorov

Wir werden das 3. Axiom von Kolmogorov anpassen:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), \text{ falls } A_j \cap A_k = \emptyset, \ \forall j \neq k.$$

Schwieriger ist die anpassung des Definitionsbereiches von $\mathbb{P}$. Warum ist das nötig? Betrachte das Beispiel "Glücksrad".

[Pickl 22.04.2024]

II.0.1 Lemma

Es gibt kein translationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{P}([0, 2\pi[)$.

II.0.2 Beweis

WA: Es gibt ein solches $\mathbb{P}$.

Wir zerlegen nun $[0, 2\pi[$ in überabzählbar viele abzählbare Teilmengen:

$$a \ b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}.$$

Dies definiert Äquivalenzklassen, diese dienen zur Zerlegung von $[0, 2\pi[$:

- $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \ldots\}$,
- $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \ldots\}$,
- $\{\pi, \pi + \frac{1}{2}, \ldots\}$,
- $\ldots$

Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse einen Representanten $\leftarrow \ \{0, \sqrt{2}, \pi, \ldots\}$. R ist natürlich überabzählbar. Für jedes $q \in [0, 2\pi[\cap\mathbb{Q}$ definieren wir

$$R_q := \{r + q, \ r \in R\} = R + q.$$

Nach Annahme der Translationsinvarianz ist

$$\mathbb{P}(R_q) = \mathbb{P}(R), \ \forall q \in [0, 2\pi[\cap\mathbb{Q}.$$

Es gilt:

$$[0, 2\pi[\ \subseteq \bigcup_{q\in]-2\pi,2\pi[\cap\mathbb{Q}} R_q \subset \ ]-2\pi, 4\pi[.$$

$\Rightarrow$ da $\mathbb{P}([0, 2\pi[) = 1$, gilt, dass

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\bigcup_{q\in]-2\pi,2\pi[\cap\mathbb{Q}} R_q) \geq 1. \\ &\Rightarrow \sum_{j\in]-2\pi,2\pi[} \mathbb{P}(R) \geq 1 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(R) \neq 0, \end{aligned}$$

aber falls der Inhalt $\mathbb{P}(R) > 0$, folgt, dass das Intervall $]-2\pi, 4\pi[$ unendlichen Inhalt hat. Dieses überdeckt jedoch $[0, 2\pi[$ dreimal. $\lightning$

II.1 Ereignisraum

Wir schränken den Definitionsbereich von $\mathbb{P}$ ein, um solch problematische Mengen zu umgehen.

II.1.1 σ-Algebra

Sei Ω eine Menge. Eine σ-Algebra bzgl. Ω ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ mit:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$,

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

II.1.2 Beispiele

a) $\mathcal{P}(\Omega)$, sowie $\{\emptyset, \Omega\}$ ist jeweils σ-Algebra.

b)
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

II.1.3 Satz

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra bzgl. Ω. Dann gilt:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

b) abzählbare Schritte von Ereignissen sind in $\mathcal{A}$,

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

II.1.4 Beweis

a) $\emptyset = \Omega^C \in \mathcal{A}$,

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right]^C \in \mathcal{A}$,

c) $A \setminus B = A \cap B^C$.

II.1.5 Satz

Sei Ω eine Menge. Der Schnitt beliebiger σ-Algebren ergibt wieder eine σ-Algebra.

II.1.6 Beweis

Seien $\mathcal{A}_i$ für $i \in \mathcal{I}$ σ-Algebren (bzgl. Ω). Z.z. $\mathcal{A} := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra.

a) $\Omega \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$.

b) Sei $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow E^C \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$.

c) Seien $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ($E_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E_n \in A_i,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathcal{I} \\
&\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I} \text{ (da } \mathcal{A}_i\ \sigma\text{-Algebra)} \\
&\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

II.1.7 Bemerkung

Vereinigungen von σ-Algebren ergeben *nicht* notwendigerweise eine σ-Algebra.

II.1.8 Beispiel

$\Omega = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathcal{A}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$,
- $\mathcal{A}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 3\}, \{2\}\}$,
- $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}\} \not\ni \{2\} \cup \{3\}$.

II.1.9 Definition (Erzeugte σ-Algebra)

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ definiert durch

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Alg, } \mathcal{E}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

nennen wir die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.*

II.1.10 Bemerkung

$\sigma(\mathcal{E})$ ist für nichtleere Ω immer wohldefiniert und wegen Satz σ-Algebra.

II.1.11 Korollar

$\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h.

a) $\mathcal{E} \in \sigma(\mathcal{E})$,

b) $\forall \widetilde{\mathcal{A}}$ σ-Algebra it $\mathcal{E} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$, gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$.

II.1.12 Beweis

a) $\mathcal{E}$ ist in allen σ-Algebren enthalten, über die der Schnitt gebildet wird.

b) $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist ein Kandidat für $\mathcal{A}$ in der Definition. Es wird also auch über $\widetilde{\mathcal{A}}$ der Schnitt gebildet $\Rightarrow \widetilde{A} \supset \sigma(\mathcal{E})$.

II.1.13 Beispiel

$\Omega = \{1,2,3\}, \mathcal{E} = \{\{1,2\}\}$. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, enthält $\mathcal{E}$ $\mathcal{A}_1$ vom Beispiel oben ebenso. Weitere Kandidaten:

$$\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}.$$

[Pickl 25.04.2024]

II.1.14 Defintiion (Borel-σ-Algebra)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Die von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra heißt *Borel-σ-Algebra.* (alternative Definiton später)

II.2 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

II.2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra. Eine Abbildung $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* $:\Leftrightarrow$

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

b) $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$,

c) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$, falls $A_n \in \mathcal{A},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ \forall n \neq m$.

II.2.2 Bemerkung

Satz vom Gegenereignis, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ gilt weiterhin.

II.2.3 Definition und Satz (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. Ω Menge, $\mathcal{A}$ zugehörige σ-Algebra, $\mathbb{P}\colon \mathring{A} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Dann ist das auf A *bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß* definiert durch

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

II.2.4 Beweis

(dass dies ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist):

a) $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

b) Zähler ≥ 0, Nenner $> 0 \Rightarrow$ Behauptung.

c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \frac{\mathbb{P}(A \;\cap\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)}{\mathbb{P}(A)} \quad (A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{(A_n \cap A)}^{\text{paarweise disjunkt}})}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_A(A_n).
\end{aligned}$$

II.2.5 Definition (Unabhängigkeit)

Zwei Ereignisse A, B heißen (stochastisch) *unabängig* $:\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

.

II.2.6 Bemerkung

A unabhängig von $B \Rightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ (falls $\mathbb{P}(A) \neq 0$).

II.2.7 Beispiel

$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.

a) $A = \{3,4,5,6\},\ B = \{2,4,6\}$ sind unabhängig.

b) $\widetilde{A} = \{4,5,6\}$ und B wie oben sind nicht unabängig.

II.2.8 Definition (Limes von Ereignissen)

Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Wir nehmen an:

- $A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $B_n \supset B_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \\
\lim_{n\to\infty} B_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.
\end{aligned}$$

II.2.9 Korrolar

$\lim_{n\to\infty} A_n$ und $\lim_{n\to\infty} B_n$ sind Ereignisse, falls A_n, B_n Ereignisse sind.

II.2.10 Beweis

Definition der σ-Algebra, bzw. Satz gleich darunter.

II.2.11 Definition ($\limsup$, $\liminf$)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ Dann ist

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &:= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\\ \liminf_{n\to\infty} A_n &:= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

II.2.12 Korollar

Auch $\limsup$ und $\liminf$ sind Ereignisse (falls $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$).

II.2.13 Satz (σ-Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine abfallende bzw. ansteigende Folge von Ereignissen ($A_n \subset A_{n+1},\ B_n \supset B_{n+1},\ \forall n$). Dann ist

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n)$,

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n)$.

II.2.14 Beweis

Definiere $C_1 := A_1$. $C_2 := A_1 \setminus A_1, \dots, C_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Es gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

b) $C_n \cap C_m = \emptyset,\ \forall n \neq m$,

c) $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

a)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) &\overset{\text{a)}}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)\\ &\overset{\text{Kc)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k)\\ &\overset{\text{Kc)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} C_k)\\ &\overset{\text{c)}}{=} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

$\square$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) &= 1 - \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n^C) \\ &\overset{\text{Fall a)}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n^C) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n).\end{aligned}$$

[Pickl 29.04.2024]

II.3 Die Borelsche σ-Algebra

II.3.1 Erinnerung

$\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die σ-Algebra erzeugt aus allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

II.3.2 Bemerkung

Diese Definition lässt sich auf Grundmengen verallgemeinern, in denen es ein “Konzept” von offenen Teilmengen gibt (topologische Räume, z.B. metrische Räume). Wir werden alternative Definitionen von $\mathcal{B}$ betrachten.

II.3.3 Korollar

a) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra. $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

b) Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Falls $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$ und $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F})$.

II.3.4 Beweis

a)

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{B}\ \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{E}\subset\mathcal{B}} \mathcal{B}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ ist einer der Kandidaten, über die geschnitten wird.

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F}) &\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}), \\ \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E}) &\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

II.3.5 Satz

Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die aus den offenen Intervallen erzeugte σ-Algebra.

II.3.6 Beweis

Z.z.: Jede offene Teilmenge $\mathbb{R}$ liegt in der aus den offenen Intervallen erzeugten σ-Algebra.

Sei $A \subset \mathbb{R}$ offen. Für jedes $q \in \mathbb{Q} \cap A$ sei

$$r_q = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}\colon\ ]q-\varepsilon,\ q+\varepsilon[\ \subset A\}.$$

Das Intervall $]q - r_q,\ q + r_q[$ ist $\subset A$ $(*)$. (WA: $]q - r_q,\ q + r_q[\ \not\subset A \Rightarrow \exists x \in\ ]q - r_q,\ q + r_q[$ mit $x \notin A$. Wähle $\varepsilon = \frac{r_q + |q-x|}{2} \Rightarrow x \in\ ]q - r_q,\ q + r_q[$, aber $\varepsilon < r_q$ $\lightning$.)

Betrachte $B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap A}\ ]q - r_q,\ q + r_q[$. Z.z. $A = B$ (da B abzählbare Vereinigung offener Intervalle).

- $B \subset A$, da all die Teilintervalle $]q - r_q,\ q + r_q[\ \subset A$ $(*)$.
- $A \subset B$. Sei $y \in A$. Z.z. $y \in B$. Wegen Offenheit von A $\exists \delta_y$, sodass $]y - \delta_y,\ y + \delta_y[\ \subset A$. Wähle $q_y \in \mathbb{Q} \cap\ ]y - \frac{\delta_y}{2}, y + \frac{\delta_y}{2}[$. $r_{q_y} \geq \frac{\delta_y}{2} \Rightarrow y \in\ ]q_y - r_{q_y},\ q_y + r_{q_y}[$.

II.3.7 Satz

Die Borel-σ-Algebra ist genau die σ-Algebra erzeugt aus den Intervallen $]-\infty,\ a]$ mit $a \in \mathbb{R}$.

II.3.8 Beweis

$\mathcal{E} :=$ Menge der offenen Intervalle, $\mathcal{F} := \{]-\infty,\ a],\ a \in \mathbb{R}\}$.

a) Z.z. $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$.

   Sei $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Z.z. $]a, b[\ \in \sigma(\mathcal{F})$.

   - 1. Schritt: "$a = -\infty$".

     $$]-\infty,\ b[\ = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left]-\infty,\ b - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{F}}}_{\in \sigma(\mathcal{F})}.$$

     $\forall x \in\ ]-\infty,\ b[$, d.h. $\forall x < b\ \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $x < b - \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]-\infty,\ b - \frac{1}{n}\right]$. $\Rightarrow\ ]-\infty,\ b[\ \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]-\infty,\ b - \frac{1}{n}\right]$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\left]-\infty, b - \frac{1}{n}\right]\ \subset\ ]-\infty, b[\ \Rightarrow$ "$\supset$".
   - 2. Schritt:

     $$a \in \mathbb{R}\colon\ ]a, b[\ = \underbrace{]-\infty, b[}_{\in \sigma(\mathcal{F})\ (\text{1. Schritt})} \setminus \overbrace{]-\infty, a]}^{\in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})}$$

     nach Satz ist letzteres in $\sigma(\mathcal{F})$.

b) Z.z. $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $]-\infty,\ a]\ \in \sigma(\mathcal{E})$.

$$]-\infty, a]\ =\ (]a,\ +\infty[)^C = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\ ]a,\ n[)^C.$$

II.3.9 Satz

$\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ ist die σ-Algebra erzeugt aus $\{]-\infty, a] \text{ mit } a \in \mathbb{Q}\}$.

II.3.10 Beweis

Sei $\mathcal{G} = \{]-\infty, a] \colon a \in \mathbb{Q}\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

Z.z. $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{G})$. Sei $]-\infty, a]$ $a \in \mathbb{R}$.

$$]-\infty, a] \; = \underbrace{\bigcap_{q \in \mathbb{Q},\ q \geq a}]-\infty,\ q]}_{\in \sigma(\mathcal{G})}.$$

$]-\infty, a] \;\subset\;]-\infty, q]$, $\forall q \geq a \Rightarrow\;]-\infty, a] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\ q \geq a}]-\infty, q]$ ($\Rightarrow$ "$\subset$").

"$\supset$": Dazu "$\subset$" für die Komplete. Sei $x \notin]-\infty,\ a] \Rightarrow x > a$. Wähle $q \in]a, x[\, \cap \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin]-\infty,\ q] \;\Rightarrow$ $x \notin \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\ q \geq a}]-\infty, q]$.

[Pickl 02.05.2024]

II.4 Eindeutigkeitssatz

Ziel ist es zu zeigen, dass unter gewissen Bedingungen das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt ist, falls es auf einem Erzeuger gegeben ist.

Wir benutzen das "Prinzip der guten Mengen".

II.5 Satz (Prinzip der guten Mengen)

Falls eine Eingenschaft für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gilt und die Menge, auf der die Eigenschaft gilt eine σ-Algebra ist, so gilt die Eigenschaft auf ganz $\sigma(\mathcal{E})$.

II.6 Beweis

Sei $\mathcal{A}$ die Menge, für die die Eigenschaft gilt. Da $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra nach Voraussetzung,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{E} \subset \mathcal{B}} \mathcal{B}.$$

$\mathcal{A}$ ist eines der Kandidaten für $\mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

II.7 Beweisstrategie für den Eindeutigkeitssatz

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \colon \sigma(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir möchten zeigen, dass unter gewissen Bedingungen die Menge $\mathcal{G}$ definiert durch

$$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$$

eine σ-Algebra ist.

Nach dem Prinzip der guten Mengen ist dann

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A),\ \forall A \in \sigma(\mathcal{E}).$$