

# Bestemmelse av tyngdeakselerasjonen via rulling på skråplan

V. Risinggård<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

## Sammendrag

En enkel måte å måle tyngdeakselerasjonen på er å måle akselerasjonen til et objekt som ruller ned et skråplan. Måleusikkerheten minimeres dersom det rullende objektet er en ring eller en hul sylinder. Ved hjelp av høyhastighetsfilming ble tyngdeakselerasjonen på denne måten målt til å være  $(7,5 \pm 0,3)$  m/s. Det systematiske avviket fra den beste kjente verdien for  $g$  på stedet  $((9,8214675 \pm 0,0000004)$  m/s) ser ut til å være et samspill mellom flere effekter som er utelatt i den teoretiske modellen som ble brukt til å analysere dataene.

## 1. Introduksjon

Galileo Galilei var en viktig forløper for moderne fysikk. I sitt arbeid samlet han store mengder eksperimentelle data som senere var en av Newtons inspirasjonskilder [1]. Galilei sammenfattet sin bevegelselære i boken *Samtale om de to nye vitenskaper* [2]. Et av hovedtemaene i denne boken var rulling på skråplan. Galileis viktigste resultat i dette eksperimentet var at kulen han rullet ned skråplanet hadde en konstant akselerasjon. I denne rapporten snur vi om på Galileis klassiske eksperiment og bruker akselerasjonen til en ring som ruller ned et skråplan til å bestemme tyngdeakselerasjonen.

## 2. Teori

Den kinetiske energien til et objekt som ruller har to ledd, energien til tyngdepunktsbevegelsen og rotasjonsenergien (kap. 9.4, ref. [3]),

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = (1+p)mv^2, \quad (1)$$

der  $v$  er hastigheten til tyngdepunktet,  $I_0 = (2p+1)mr^2$  er treghetsmomentet til objektet og  $\omega$  er vinkelhastigheten. (Her brukte vi rullebetingelsen  $v = \omega r$ .) Siden et objekt som ruller langs et skråplan med helningsvinkel  $\alpha$  har falt en avstand  $h = x \sin \alpha$  i tyndefeltet når den har beveget seg en avstand  $x$  langs planet (se figur 1) gir bevaring av mekanisk energi oss ligningen

$$mgx \sin \alpha = (1+p)mv^2. \quad (2)$$

Hastighetsøkningen til et objekt som ruller en avstand  $x$  langs planet er altså

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{gx \sin \alpha}{1+p}}. \quad (3)$$

Ved å løse differensialligningen kan vi finne hastigheten som funksjon av tiden i stedet for posisjonen. Differensialligningen kan løses ved separasjon,

$$\sqrt{\frac{1+p}{gx \sin \alpha}} dx = dt \Rightarrow x(t) = \frac{g \sin \alpha}{4(1+p)} t^2,$$

der vi satte integrasjonskonstanten til null. Akselerasjonen til tyngdepunktet er dermed (eks. 10.5, ref. [3])

$$a = \frac{g \sin \alpha}{2(1+p)}. \quad (4)$$

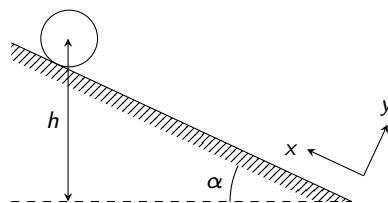
Ved å måle akselerasjonen til et objekt som ruller ned et skråplan kan vi gjøre en enkel måling av tyngdeakselerasjonen,

$$g = \frac{2(1+p)a}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

Her har vi antatt at luftmotstanden og rullefriksjonen begge er neglisjerbare over de relevante hastighets- og tidsintervallene.

Alle målinger av fysiske størrelser er usikre. Usikkerheten kan anslås på grunnlag av f.eks. presisjonen til måleinstrumentet eller ved å regne ut standardfeilen til en måleserie. For å anslå usikkerheten i en avledet størrelse  $f(x, y, \dots)$  kan vi regne ut feilen som propagerer til sluttsvaret ved hjelp av Gauss' feilforplantningslov [4],

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \dots} \quad (6)$$



**Figur 1:** Objekt som ruller på skråplan. Skråplanet har en helningsvinkel  $\alpha$ . Når objektet har beveget seg en avstand  $x$  langs skråplanet vil den ha falt en avstand  $h = x \sin \alpha$  i tyndefeltet.

Ligning (5) inneholder én størrelse som er gitt av oppsettet,  $\alpha$ , én størrelse som måles,  $a$ , og én størrelse vi kan velge gjennom å velge hvilket objekt vi ruller ned planet,  $p$ . Objektet bør velges slik at bidraget fra feilen i  $p$  til feilen i  $g$  minimeres. Fra Gauss' feilforplantningslov framgår det at dette gjøres ved å minimere  $|\partial g / \partial p| = |2a / \sin \alpha| = |g / (1 + p)|$ . Om vi ser på et utvalg mulige objekter, slik som en ring ( $p = 0$ ), et kuleskall ( $p = -1/6$ ), en massiv sylinder ( $p = -1/4$ ) og en massiv kule ( $p = -3/10$ ) ser vi at  $|\partial g / \partial p|$  minimeres av å rulle en ring ned planet.

### 3. Eksperimentell metode

Figur 2 viser en skisse av forsøksoppstillingen som ble brukt. En ring rulles ned skråplanet. Akselerasjonen til ringen måles ved å filme bevegelsen med et høyhastighetskamera, spore ringen i Tracker [5] og gjøre en kvadratisk regresjonstilpasning til den resulterende tids-posisjons-grafen. Usikkerheten i målingen bestemmes ved å gjenta forsøket og beregne en gjennomsnittsakselarasjon og en standardfeil.

Den teoretiske modellen vi bruker til å analysere dataene baserer seg på en antakelse om ren rulling (ingen sluring). Gyldigheten av denne antakelsen kan studeres i filmen av bevegelsen.

### 4. Resultater

Skråplanetets lengde  $c$  og hosliggende katet  $b$  ble målt til hhv.  $(77,00 \pm 0,05)$  cm og  $(73,2 \pm 0,3)$  cm (se figur 2), der usikkerhetene er anslag basert på avlesningsnøyaktigheten. Dette gir en helningsvinkel på  $(18,0 \pm 0,7)^\circ$  der usikkerheten i vinkelen er beregnet ved hjelp av Gauss' feilforplantningslov. Det ble tatt 22 målinger av akselerasjonen til ringen ned planet. Gjennomsnittet av og standardfeilen i disse verdiene gir en akselerasjon på  $(1,17 \pm 0,01)$  m/s<sup>2</sup>. Dette gir en tyngdeakselerasjon på  $(7,5 \pm 0,3)$  m/s<sup>2</sup> der usikkerheten

igjen er beregnet ved bruk av Gauss' feilforplantningslov og vi neglisjerte usikkerheten i treghetsmomentet.

### 5. Diskusjon

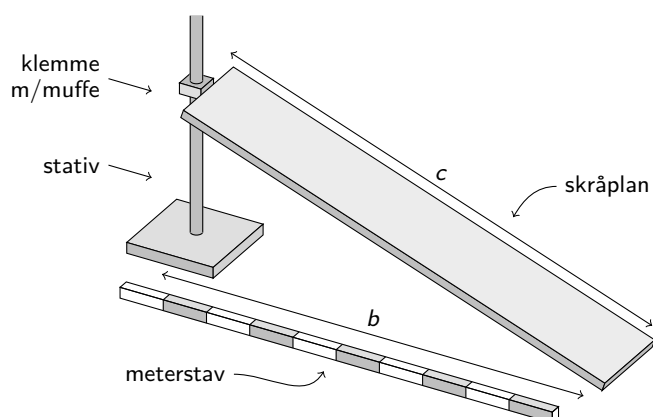
I 1971 målte Kartverket (daværende Statens kartverk) tyngdeakselerasjonen i kjelleren på Gamle Fysikk, NTNU, Trondheim til å være  $(9,8214675 \pm 0,0000004)$  m/s. Den målte verdien for tyngdeakselerasjonen i det aktuelle forsøket avviker betydelig fra denne verdien. Dette er å forvente da målemetoden er relativt primitiv. Den reelle verdien for  $g$  målt av Kartverket ligger imidlertid utenfor usikkerhetsintervallet til den innværende målingen. Dette tyder på systematiske feil i forsøksoppsettet.

Vi baserer målingen av helningsvinkelen på å måle skråplanetets hypotenus og hosliggende katet. Avstander langs skråplanet (hypotenusen) kan måles med en sikkerhet som kun er begrenset av nøyaktigheten i avlesningen av meterstaven. Denne feilen har vi regnet med vil ligge i størrelsesordenen  $\pm 0,5$  mm. Målingen av hosliggende katet vil ha en større usikkerhet fordi vi må regne med en viss usikkerhet i endepunktet til kateten som bestemmes ved å felle ned en normal på underlaget til skråplanet. Vi har derfor regnet med at usikkerheten i kateten kan bli opp til  $\pm 3$  mm. Størrelsen på de systematiske feilene gjør det uaktuelt at målingen av vinkelen står for hele avviket fra den reelle verdien, noe som ville innebåret et avvik i lengdemålingene i størrelsesorden 1,5 cm. En kontroll av horisontalretningen med et vaterpass bekrefter at heller ikke en eventuell helning på underlaget til skråplanet kan stå for avviket.

De mulige systematiske feilkildene som gjenstår er knyttet til forenklinger i den teoretiske modellen vi bruker til å beskrive systemet. I modellen neglisjerer vi sluring, luftmotstand og rulle-motstand og antok at ringen hadde neglisjerbar tykkelse ( $p = 0$ ). I realiteten kan alle disse effektene spille inn på resultatet. Ringens endelige tykkelse kan avskrives med en gang, da en endelig tykkelse ( $p < 0$ ) gir en lavere tyngdeakselerasjon. Inspeksjon av videoklippene viser at eventuelle avvik fra ren rulling (dvs. at  $v = \omega r + \delta v$ ) er for små til å forklare avstanden mellom vår måling og målingen til Kartverket.

Dersom luftmotstanden er betydelig vil ringen etterhvert nå terminalhastigheten. Betydelig luftmotstand innebærer derfor at vi vil se avvik fra en kvadratisk modell. Regresjonsanalysen viser imidlertid ingen tegn på dette.

Dermed gjenstår rulle-motstanden som kandidat til å forklare avviket fra Kartverkets måling av tyngdeakselerasjonen. Perfekt bevaring av mekanisk energi tilsier at hastigheten i bunnen av skråplanet skal være omlag 1,3–1,4 m/s. Den målte hastigheten er omlag 1 m/s. Det er imidlertid vanskelig å se for seg at rulle-motstanden har tapt rundt 40–50 % av den mekaniske energien i systemet. Dette tyder på at avviket i den målte verdien for tyngdeakselerasjonen fra Kartverkets verdi er et resultat av et samspill mellom flere systematiske feil (sluring, luftmotstand og rulle-motstand).



**Figur 2:** Utstyrsoppsett. Skråplan med variabel helningsvinkel konstruert vha. et stativ og et plan av tre. Meterstaven er plassert godt synlig i oppsettet for å gjøre det enkelt å skalere oppsettet i Tracker. Skråplanetets hypotenus  $c$  og hosliggende katet  $b$  er inntegnet.

## 6. Konklusjon

Tyngdeakselerasjonen ble målt til  $(7,5 \pm 0,3) \text{ m/s}^2$  ved å rulle en ring ned et skråplan. Den beste kjente verdien for  $g$  på stedet ligger godt utenfor dette usikkerhetsintervallet. Det systematiske avviket ser ut til å skyldes et samspill mellom flere effekter som er utelatt i den teoretiske modellen for systemet. En detaljert undersøkelse av hver av disse feilkildene er ikke foretatt.

- 
- [1] Weinberg, S.: *To explain the world: The discovery of modern science*. Harper Collins Publishers, 2015.
  - [2] Galilei, G.: *Dialogues concerning two new sciences*. Cosimo, 2010. Oversatt av H. Crew og A. de Salvio (<https://goo.gl/SNXasm>).
  - [3] Young, H. D. og R. A. Freedman: *University Physics*. Pearson Education, 14. utgave, 2016.
  - [4] Taylor, J. R.: *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 2 utgave, 1997.
  - [5] Brown, D.: *Tracker*. <http://physlets.org/tracker/>, (sjekket 15.08.2017).