TD 2 : Résolution de systèmes linéaires

14/05/2020

Ce TD permet d'étudier différentes méthodes de résolution d'un système linéaire via le langage de programmation **MATLAB**®. Pour ce faire, vous devrez compléter les différents fichiers "$TD\_2\_*.m$" en ayant à l'esprit la formulation matricielle des différents problèmes.

N'hésitez pas à commenter votre démarche !

1 Factorisation LU

Soit le système d'équation $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}$$

Soit $\boldsymbol{b}_1 = [17, 45, 140, 234]^T$ et $\boldsymbol{b}_2 = [18, 46, 139, 235]^T$, deux valeurs possible de $\boldsymbol{b}$.

Afin de trouver la solution $\boldsymbol{x}$ au système (en inversant la matrice $\mathbf{A}$), on envisage d'utiliser la factorisation **LU**.

1) Compléter la fonction $LUfact$ du fichier "$LUfact.m$" permettant la factorisation.
2) Afin d'inverser de manière efficace les matrices triangulaires supérieure et inférieure, compléter la fonction $GaussPivot$ du fichier "$GaussPivot.m$".

On a :

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}\,\mathbf{U}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Le système se résout alors en deux étapes :

$$\mathbf{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

Puis

$$\mathbf{U}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

3) Trouver les solutions $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ correspondant au deux systèmes $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$ et $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$. Qu'observez vous ?
4) En utilisant la fonction *cond*, expliquer le phénomène.

2 Une recette de cuisine

On souhaite fabriquer des brioches de la meilleure qualité possible en disposant de quatre facteurs sur lesquels agir :

— x_1 : la vitesse d'incorporation des blancs ($x_1 \in [100; 200]$ g/min) ;
— x_2 : la durée de cuisson ($x_2 \in [40; 50]$ min) ;
— x_3 : la température du four ($x_3 \in [150; 200]$ deg C) ;
— la portion de levure ($x_4 \in [15; 20]$ g/kg) ;

avec $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$.

On modélise la hauteur de la brioche fabriquée y_m par :

$$y_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_1 + p_2\,x_1 + p_3\,x_2 + p_4\,x_3 + p_5\,x_4 + p_6\,x_2\,x_3$$

$\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6]^T$ représente le vecteur des paramètres.

On fabrique $n_{exp} = 160$ brioches en tirant au hasard des valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4 avec une loi uniforme sur le domaine autorisé (probabilité identique de tirer chaque valeurs possibles). Puis on mesure leur hauteur y que l'on peut exprimer par :

$$y(\boldsymbol{x}) = y_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}^*) + b$$

avec b un "bruit" permettant de prendre en compte les erreurs de mesures et de modélisations, tiré au hasard selon une loi Gaussienne de moyenne nulle et de variance 1 cm. $\boldsymbol{p}^*$ représente la valeur vraie du vecteur $\boldsymbol{p}$ que l'on souhaite estimer.

Ici, on ne va pas réaliser n_{exp} brioches afin de pouvoir étudier le modèle. On va plutôt se servir d'une simulation numérique d'expérience. Le fichier "*genedata.m*" permet de simuler la fabrication de ces n_{exp} brioches et contiens donc les valeurs de $\boldsymbol{p}^*$ que l'on va chercher à retrouver par résolution de systèmes d'équations.

Il est donc important de lancer ce script avant de continuer. Il vous fournira le vecteur $\boldsymbol{y}$ simulé ainsi que les vraies valeurs des paramètres $\boldsymbol{p}^*$ (p_v dans le workspace) qu'il faudra comparer aux valeurs trouvées dans la suite.

2.1 Méthode de Jacobi

5) Compléter et décrire la fonctions *JacobiResol* du fichier "*JacobiResol.m*" permettant la résolution d'un système linéaire par la méthode de Jacobi.
6) Écrire le système d'équations à résoudre. Écrire la matrice des conditions expérimentales **F**, tel que l'on puisse écrire ce système sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{F}\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}$$

avec le vecteur $\boldsymbol{y}$ contenant les 160 valeurs de y.

On comprend bien que ne pouvant pas connaître les valeurs du bruit $\boldsymbol{b}$ à l'avance, il faut passer par une méthode d'estimation pour trouver les paramètres $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_6$. Afin de trouver une estimation $\boldsymbol{p}$ du vecteur des paramètres $\boldsymbol{p}^*$, on choisit de minimiser le critère des moindres carrés :

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{p}) &= \parallel \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \parallel^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_{exp}} (y_i - y_{mi})^2 \end{aligned}$$

avec y_{mi} la valeur du modèle pour la i^{eme} simulation et $\boldsymbol{y}_m = \mathbf{F}\,\boldsymbol{p}$ le vecteur les contenant toutes.

Ainsi, on cherche la valeur de $\boldsymbol{p}$ qui <u>minimise</u> $C(\boldsymbol{p})$.

7) Expliquer brièvement le principe de la méthode de moindres carrés.
8) Trouver l'expression matricielle du système linéaire qui dérive des moindres carrés, que l'on mettra sous la forme :

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}'$$

9) Remplir les premières lignes du fichier *'TD_2_2.m'* et commenter le conditionnement de la matrice **A**.
10) Décomposer **A** en $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$ dans le fichier *'TD_2_2.m'*.
11) Compléter le fichier "*TD_2_2.m*" et résoudre le système par la méthodes de Jacobi.

On définit l'erreur d'estimation par :

$$\begin{aligned} e &= \parallel \boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{p} \parallel \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{6} (p_i^* - p_i)^2} \end{aligned}$$

12) Commenter l'erreur d'estimation (à calculer).

2.2 Méthode de Gauss-Seidel

Afin de trouver une meilleure estimation, on décide d'utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système linéaire.

13) Expliquer la différence entre la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de Jacobi.
14) Compléter la fonction $GaussSeidelResol$ du fichier "$GaussSeidelResol.m$" à l'aide de la fonction $GaussPivot$ définie dans l'exercice 1.
15) Compléter le fichier "$TD\_2\_2.m$" et calculer l'erreur d'estimation. Qu'en conclure sur l'utilisation des deux méthodes ainsi que sur les résultats ?