Hanoi Center for Financial and Industrial Mathematics
Trung Tâm Toán Tài Chính và Công Nghiệp Hà Nội

NHẬP MÔN

TOÁN TÀI CHÍNH

QUYỂN 1

GS. Đỗ Đức Thái

GS. Nguyễn Tiến Dũng

Hà Nội – Toulouse, 2011

Bản thảo này: Ngày 19 tháng 1 năm 2011

Chương 1

Giải tích ngẫu nhiên

Theo ngôn ngữ toán học, sự biến động theo thời gian của giá cả (như giá vàng, giá dầu hỏa, giá cổ phiếu của công ty Intel, v.v.), cũng như của các số liệu khác (ví dụ như mức tăng trưởng kinh tế, tỷ lệ thất nghiệp, v.v.) được gọi là các **quá trình ngẫu nhiên** (random process), bởi vì nói chung không ai có thể biết trước được một cách chính xác giá trị của chúng trong tương lai sẽ ra sao. Để nghiên cứu các quá trình ngẫu nhiên này, chúng ta sẽ cần dùng đến một bộ phận của toán học gọi là **giải tích ngẫu nhiên** (stochastic calculus). Giải tích ngẫu nhiên tức là giải tích toán học (các phép tính giới hạn, vi tích phân, v.v.) áp dụn vào các quá trình ngẫu nhiên, dựa trên cơ sở của lý thuyết xác suất thống kê.

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu sơ lược một số kiến thức quan trọng nhất về giải tích ngẫu nhiên, cần thiết cho toán tài chính. Bạn đọc muốn nghiên cứu sâu thêm về giải tích ngẫu nhiên có thể tìm đọc các sách chuyên khảo, ví dụ như quyển sách của Karatzas và Shreve [12] hoặc quyển sách của tác giả Nguyễn Duy Tiến [17].

1.1 Một số mô hình biến động giá chứng khoán

Ở phần này, chúng ta sẽ coi giá S của một cổ phiếu (hay nói một cách tổng quát hơn, của một chứng khoán có giá dương) như là một quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị trong tập hợp các số thực dương, và chúng ta sẽ xét một số mô hình hệ động lực ngẫu nhiên *một chiều* đơn giản mô tả chuyển động của S theo thời gian. Chú ý rằng, do chỉ có 1 chiều, nên các mô hình này tương đối thô: sự tương tác giữa các thành phần của thị trường không đưa được vào mô hình, và mô hình chỉ dựa trên các phương trình bậc 1, thay vì phương trình bậc 2 như trong vật lý. Tuy là các mô hình tương đối thô, nhưng chúng vẫn rất quan trọng trong việc phân tích sự biến động giá của các cổ phiếu.

Trước hết, chúng ta sẽ định nghĩa một cách hình thức toán học thế nào là một quá trình ngẫu nhiên.

1.1.1 Quá trình ngẫu nhiên

Các quá trình biến đổi theo thời gian, ví dụ như giá cổ phiếu, lượng nước mưa trong tháng, số người mắc bệnh cúm, v.v., mà ta không thể dự đoán được trước một cách chính xác, thì được gọi là các **quá trình ngẫu nhiên**. Để mô tả một quá trình ngẫu nhiên theo ngôn ngữ toán học, ta cần các yếu tố sau:

- *Thời gian.* Theo qui ước, có một mốc thời gian ban đầu, là 0. Thời gian t có thể là biến đổi liên tục, $t \in \mathbb{R}_+$, hoặc rời rạc, tức là ta chỉ xét một dãy các mốc thời điểm $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ nào đó. Trong trường hợp rời rạc, để cho đơn giản, ta sẽ giả sử thêm là các bước thời gian là bằng nhau, tứ là $t_i - t_{i-1} = \tau$ là một hằng số không phụ thuộc vào i. Nhiều khi, ta sẽ dùng dãy số nguyên không âm $0, 1, 2, \ldots$ để ký hiệu các mốc thời gian, thay vì dùng các thời điểm $t_0, t_1, t_2, \ldots$

- *Không gian xác suất.* Với mỗi mốc thời gian t, có một không gian Ω_t tất cả các tình huống có thể xảy ra từ thời điểm ban đầu cho đến thời điểm t. Không gian này là không gian xác suất, với một độ đo xác suất P_t đi kèm (tức là xác suất của các tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm t). Nếu s và t là hai mốc thời điểm nào đó với $s \leq t$, thì ta có một phép chiếu tự nhiên

$$\pi_{t,s} : (\Omega_t, P_t) \to (\Omega_s, P_s) \tag{1.1}$$

Khi ω_t là một tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm t, thì $\pi_{s,t}\omega_t$ là tình huống đó nhưng chỉ tính đến thời điểm s, bỏ qua những gì xảy ra sau thời điểm s. Các phép chiếu $\pi_{s,t}$ thỏa mãn các tính chất tự nhiên sau:

a) *Toàn ánh* (surjective), tức là mọi tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm s thì phải có thể tiếp diễn để trở thành tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm t.

b) $\pi_{t,t}$ là ánh xạ đồng nhất trên Ω_t.

c) *Bắc cầu*: $\pi_{r,s} \circ \pi_{s,t} = \pi_{r,t}$ với mọi $r \leq s \leq t$.

d) *Bảo toàn xác suất*, có nghĩa là là nếu $A \in (\Omega_s, P_s)$ là tập đo được (tức là tồn tại xác suất $P_s(A)$), thì ảnh ngược của nó trong (Ω_t, P_t) có cùng xác suất với nó:

$$P_t(\pi_{s,t}^{-1}(A)) = P_s(A). \tag{1.2}$$

Một dãy các không gian xác suất (Ω_t, P_t) với các phép chiếu $\pi_{s,t}$ thỏa mãn các tính chất phía trên sẽ được gọi là một **họ lọc các không gian xác suất** (filtered family of probability spaces).

Các không gian xác suất (Ω_t, P_t) có thể được gộp chung lại thành một không gian xác suất (Ω, P) tất cả các tình huống có thể xảy ra (cho mọi thời gian): mỗi phần tử $\omega \in \Omega$ ứng với một họ các phần tử $\omega_t \in \Omega_t$ thích hợp với nhau, có nghĩa là $\pi_{s,t}\omega_t = \omega_s$ với mọi $s < t$. Ta có thể viết:

$$(\Omega, P) = \lim_{t\to\infty}(\Omega_t, P_t), \tag{1.3}$$

với các phép chiếu tự nhiên

$$\pi_t : (\Omega, P) \to (\Omega_t, P_t), \tag{1.4}$$

cũng thỏa mãn các tính chất toàn ánh, bắc cầu, và bảo toàn xác suất như phía trên.

Nhắc lại rằng (xem Chương 1 của [5]), đi kèm với mỗi một không gian xác suất là một sigma-đại số các tập con *đo được* của nó, tức là các tập con mà định nghĩa được xác suất của nó. Sigma-đại số các tập đo được trên (Ω, P) là

$$\mathcal{F} = \bigcup_t \mathcal{F}_t \tag{1.5}$$

trong đó $\mathcal{F}_t$ là ảnh ngược của sigma-đại số trên (Ω_t, P_t) qua phép chiếu π_t: một phần tử của $\mathcal{F}_t$ là một tập con của Ω có dạng $\pi_t^{-1}(A_t)$ trong đó $A_t \subset \Omega_t$ sao cho tồn tại $P_t(A_t)$, và khi đó ta có

$$P(\pi_t^{-1}(A_t)) = P_t(A_t), \tag{1.6}$$

có nghĩa là các ánh xạ π_t bảo toàn xác suất.

Từ các tính chất trên của họ lọc (Ω_t, P_t), dễ thấy rằng $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ với mọi $s \le t$. Họ $\mathcal{F}_t$ các sigma-đại số con của $\mathcal{F}$ với tính chất này và tính chất $\mathcal{F} = \bigcup_t \mathcal{F}_t$ được gọi là một **lọc** (filtration) của $\mathcal{F}$. Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, trong đó (Ω, P) là một không gian xác suất và $(\mathcal{F}_t)$ là một lọc của sigma-đại số của P, được gọi là một **không gian xác suất có lọc** (filtered probability space).

- *Biến ngẫu nhiên thay đổi theo thời gian.* Nếu ta có một quá trình lọc các không gian xác suất (Ω_t, P_t), và với mỗi mốc thời gian t ta có một biến ngẫu nhiên S_t thực với không gian xác suất tương ứng là (Ω_t, P_t), có nghĩa là một hàm đo được

$$S_t : \Omega_t \to \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

(xem Chương 2 của [5] về các khái niệm cơ bản về biến ngẫu nhiên), thì ta nói rằng ta có một **quá trình ngẫu nhiên** (stochastic process) S trên mô hình xác suất (Ω_t, P_t). Hàm $S_t : S_t : \Omega_t \to \mathbb{R}$ chính là *hàm giá trị của quá trình ngẫu nhiên S tại thời điểm t.*

Ta có thể coi S_t như là biến ngẫu nhiên trên Ω qua các phép chiếu π_t :

$$S_t \circ \pi_t : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Để cho tiện, ta cũng sẽ ký hiệu $S_t \circ \pi_t$ là S_t, khi đó nó là hàm số trên Ω_t và đo được theo sigma-đại số $\mathcal{F}_t$. Từ đó, ta có định nghĩa sau về quá trình ngẫu nhiên, là định nghĩa được dùng trong các tài liệu toán:

Định nghĩa 1.1. *Giả sử ta có một không gian xác suất có lọc* $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, *và một họ các hàm số* $S_t : \Omega \to \mathbb{R}$, *sao cho* S_t *là đo được theo sigma-đại số* $\mathcal{F}_t$ *với mọt* t *(trong tập các mốc thời gian của lọc). Khi đó họ* S_t *được gọi là một* **quá trình ngẫu nhiên** *với mô hình xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ *và* **tương thích** *(compatible) với lọc* $\mathcal{F}_t$.

Trong định nghĩa 1.1, các không gian (Ω_t, P_t) bị bỏ qua. Nhưng để cho tiện, trong quyển sách này, khi xét các quá trình ngẫu nhiên, ta sẽ luôn coi là không gian xác xuất lọc $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ được sinh bởi một họ lọc các không gian xác suất (Ω_t, P_t), và mỗi quá trình ngẫu nhiên S đều được định nghĩa qua một họ các biến ngẫu nhiên $S_t : (\Omega_t, P_t) \to \mathbb{R}$. Các quá trình ngẫu nhiên như vậy tất nhiên đều là các quá trình ngẫu nhiên tương thích với lọc $\mathcal{F}_t$.

Khi ta giả sử rằng tình huống ω xảy ra, thì quá trình ngẫu nhiên S trở thành một hàm số xác định theo biến thời gian: $t \mapsto S_t(\omega)$. Hàm số $S_\omega(t) := S_t(\omega)$ này được gọi là một **đường đi** (sample path) của S, ứng với tình huống ω.

Nếu $s < t$, và ta biết là tình huống ω_s xảy ra cho đến thời điểm s, thì ta biết giá trị $S(s) = S_s(\omega_s)$ của quá trình ngẫu nhiên tại thời điểm s (và các thời điểm trước đó), nhưng chưa đủ thông tin để biết giá trị của S tại thời điểm t. Nói các khác, nếu $t > s$ thì S_t cũng là biến ngẫu nhiên tại thời điểm s, tuy đã biết tình huống nào xảy ra cho đến thời điểm s. Nhưng khi đã biết ω_s, thì không gian xác suất của S_t không còn là không gian (Ω_t, p_t), mà là không gian xác suất có điều kiện

$$(\Omega_t|_{\omega_s} := \{\omega_t \in \Omega_t \mid \pi_{s,t}(\omega_t) = \omega_s\}, P_t|_{\omega_s}) \tag{1.9}$$

với xác suất có điều kiện $P_t|_{\omega_s}$. Trong trường hợp mà $P_s(\omega_s) > 0$ thì xác suất có điều kiện $P_t|_{\omega_s}$ có thể được định nghĩa theo công thức thông thường:

$$P_t|_{\omega_s}(A) = P_t(A|\omega_s) = \frac{P_t(A)}{P_s(\omega_s)} \tag{1.10}$$

với mọi A đo được trong $\Omega_t|_{\omega_s}$. Trong trường hợp mà $P_s(\omega_s) > 0$ thì định nghĩa xác suất có điều kiện phức tạp hơn, phải thông qua các giới hạn; chúng ta sẽ coi rằng các xác suất có điều kiện này tồn tại và thỏa mãn các tính chất thường dùng (xem [5] về xác suất có điều kiện cho biến ngẫu nhiên).

Hoàn toàn tương tự như trên, ta có thể định nghĩa quá trình ngẫu nhiên với giá trị là vector, hoặc tổng quát hơn, quá trình ngẫu nhiên trên một đa tạp hay một không gian metric nào đó.

1.1.2 Mô hình một bước thời gian

Trong mô hình một bước thời gian, ta chỉ quan tâm đến giá cổ phiếu S_T tại một thời điểm T trong tương lai, và ta muốn dự đoán S_T. Vì S_T có tính ngẫu nhiên, nên việc dự đoán S_T không có nghĩa là dự đoán 1 con số duy nhất cho S_T, mà là **dự đoán theo nghĩa xác suất**: Cái mà chúng ta có thể làm là, dựa trên các thông tin có được, xây dựng một không gian xác suất (Ω_T, P_T) các tình huống có thể xảy ra đến thời điểm T, và biểu diễn S_T như là một biến ngẫu nhiên, với mô hình không gian xác suất là (Ω_T, P_T):

$$S_T : (\Omega_T, P_T) \to \mathbb{R}_+ \tag{1.11}$$

Nhắc lại rằng (xem Chương 2 của [5]), mỗi biến ngẫu nhiên $Y : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ trên một mô hình không gian xác suất (Ω, P) cho một **phân bố xác suất** P_Y trên $\mathbb{R}$ theo công thức push-forward:

$$P_Y(A) = P(Y^{-1}(A)) \tag{1.12}$$

cho mọi đoạn thẳng $A \subset \mathbb{R}$, và ta có thể định nghĩa các **đại lượng đặc trưng** của Y, ví dụ như các **moment bậc k**:

$$M_k(Y) = \int_\Omega Y^k dP = \int_{\mathbb{R}} y^k dP_Y(y). \tag{1.13}$$

Tuy rằng Y là ngẫu nhiên, nhưng một khi ta đã biết phân bố xác suất của nó, thì các đại lượng đặc trưng của nó là không ngẫu nhiên, được xác định, và cho ta các thông tin về Y.

Trong các đại lượng đặc trưng, có hai đại lượng quan trọng nhất, là kỳ vọng và phương sai. **Kỳ vọng** $\mathbb{E}(Y)$ của Y là:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y dP_Y(y), \tag{1.14}$$

và **phương sai** $\sigma^2(Y)$ của Y là:

$$\sigma^2(Y) = \int_{\mathbb{R}} (y - \mathbb{E}(Y))^2 dP_Y(y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2. \tag{1.15}$$

Căn bậc hai của phương sai, $\sigma(Y)$, được gọi là **độ lệch chuẩn** của Y. Khi mà phương sai càng nhỏ, thì tức là các giá trị của Y càng gần giá trị kỳ vọng của nó, có nghĩa là độ ngẫu nhiên (bất xác định) của Y càng nhỏ. Bởi vậy phương sai (hay độ lệch chuẩn) chính là một thước đo độ ngẫu nhiên, bất xác định.

Trong trường hợp mà biến ngẫu nhiên là giá cổ phiếu S_T, đại lượng

$$\mu = \frac{\mathbb{E}(S_T) - S_0}{S_0}, \tag{1.16}$$

trong đó S_0 là giá cổ phiếu tại thời điểm 0, chính là **mức lợi nhuận kỳ vọng** của cổ phiếu S cho khoảng thời gian từ 0 đến T, còn

$$\sigma = \frac{\sigma(S_T)}{S_0}, \tag{1.17}$$

là một đại lượng đo **độ bất xác định** của giá cổ phiếu, theo mô hình dự đoán.

Ta có thể coi S như là một quá trình ngẫu nhiên với chỉ có 2 mốc thời gian 0 và T, và không gian xác suất chính là (Ω_T, P_T). Hệ động lực ngẫu nhiên mô tả chuyển động của S sau 1 bước thời gian, từ 0 đến T, có thể được viết dưới dạng phương trình sai phân:

$$\Delta S = \mu S + \sigma S E, \tag{1.18}$$

trong đó:

- $S = S_0$ là giá cổ phiếu tại thời điểm 0,
- $\Delta S = S_T - S_0$ là độ thay đổi giá cổ phiếu từ thời điểm 0 đến thời điểm T,
- μ là mức lợi nhuận kỳ vọng, còn được gọi là hệ số **drift** (độ chuyển dịch) của mô hình,
- σ là hệ số đo độ bất xác định của giá S_T, hay còn gọi là hệ số **volatility** (độ dễ giao động) của mô hình,
- $E = (S_T - \mathbb{E}(S_T))/\sigma S_0$ là **phần ngẫu nhiên đã chuẩn hóa** của mô hình: kỳ vọng của E bằng 0 và độ lệch chuẩn của E bằng 1.

Ví dụ 1.1. Giả sử một công ty công nghệ sinh học nhỏ, đang tập trung nghiên cứu một loại thuốc chống ung thư, có giá cổ phiếu ngày hôm nay là 10\$. Sau giờ đóng cửa thị trường ngày hôm nay, công ty sẽ công bố kết quả nghiên cứu loại thuốc chống ung thư đó. Giả sử ta biết rằng sẽ có một trong hai tình huống xảy ra:

a) Tình huống thuốc có tác dụng, với xác suất xảy ra là 60%, và nếu xảy ra thì giá của phiếu ngày hôm sau sẽ tăng lên thành 16$.
b) Tình huống thuốc không có tác dụng, với xác suất xảy ra là 40%, và nếu xảy ra thì giá của phiếu ngày hôm sau sẽ giảm còn 5$.
Kỳ vọng giá cổ phiếu của ngày hôm sau của công ty bằng $60\% \times 16 + 40\% \times 5 = 11.6$ đô la, phương sai bằng $60\% \times (16 - 11.6)^2 + 40\% \times (5 - 11.6)^2 = 29.04$, và độ lệch chuẩn bằng $\sqrt{29.04} \approx 5.4$. Ta có mô hình chuyển động giá cổ phiếu 1 bước

$$\Delta S = \mu S + \sigma S E, \tag{1.19}$$

với các tham số sau: $S_0 = 10, \mu = (\mathbb{E}(S_1) - S_0)/S_0 = 0.16, \sigma = \sigma(S_1)/S_0 = 0.54$, và E là một biến ngẫu nhiên chỉ nhận hai giá trị, và có kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn bằng 1.

Ví dụ 1.2. Cổ phiếu Coca-Cola (mã chứng khoán: KO) đạt giá 80$ vào đầu năm 1998. Với các công thức ước lượng giá trị thực của cổ phiếu dựa trên lợi nhuận và tăng trưởng, vào thờii điểm đầu năm 1998, có thể ước lượng là giá trị của KO vào thời điểm đầu năm 2003 sẽ không quá 50$/cổ phiếu. (Xem Ví dụ **??**). Tạm coi nó là 50$. Vì yếu tố “con cưng của thị trường” sẽ mất dần đi theo thời gian khi mà công ty Coca-Cola không còn phát triển nhanh được nữa nên ta giả thiết là giá cổ phiếu sẽ đi về giá trị thực sau 5 năm, trong giai đoạn 1998-2003. Khi đó, vào đầu năm 1998, mô hình dự đoán giá KO cho thời điểm đầu năm 2003 của ta sẽ là:

$$\mathrm{KO}_{2003} = 50 + \sigma.\mathrm{KO}_{1998}.E, \tag{1.20}$$

trong đó $\mathrm{KO}_{1998} = 80$, E là một biến ngẫu nhiên nào đó đã chuẩn hóa (kỳ vọng bằng 0, phương sai bằng 1), σ là một số nào đó cần ước lượng. Theo mô hình này thì mức lợi nhuận kỳ vọng cho 5 năm sẽ bằng $(50-80)/80 \approx -38\%$, tức là kỳ vọng là giá cổ phiếu sẽ giảm gần 40% sau 5 năm. Ta sẽ tạm thời bỏ qua việc chọn E và σ ở đây. (Có thể tạm coi là E có phân bố normal chuẩn tắc $N(0,1)$ dựa trên định lý giới hạn trung tâm trong xác suất, và ước lượng σ dựa trên độ giao động lịch sử (*historical volatility*) của KO). Thực tế xảy ra là $\mathrm{KO}_{2003} = 40$, khá gần với dự báo của mô hình.

1.1.3 Mô hình với thời gian rời rạc

Tương tự như là trong mô hình với một bước thời gian, trong các mô hình với thời gian rời rạc (hệ động lực với thời gian rời rạc) cho giá cổ phiếu, với giả sử là giá cổ phiếu luôn luôn dương, ta có thể viết chuyển động của quá trình ngẫu nhiên S theo phương trình sai phân

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \mu_n + \sigma_n E_n, \tag{1.21}$$

trong đó

- S_n là giá cổ phiếu tại thời điểm thứ n trong tập các mốc thời gian ($S_0 > 0$ là giá tại thời điểm ban đầu).
- μ_n là mức lợi nhuận kỳ vọng tại thời điểm thứ $n-1$ cho một bước chuyển động của giá, còn gọi là hệ số **drift** (độ chuyển dịch) của mô hình,
- σ_n là hệ số **volatility** (độ giao động) của mô hình,
- E_n là **phần ngẫu nhiên đã chuẩn hóa** của mô hình: kỳ vọng của E_n bằng 0 và phương sai của E_n bằng 1 (hoặc là đặt bằng τ, trong đó τ là bước thời gian).

Mức lợi nhuận μ_n được xác định tại thời điểm $n-1$ khi đã biết tình huống $\omega_{n-1} \in \Omega_{n-1}$ nào xảy ra, trong đó Ω_{n-1} là ký hiệu không gian tất cả các tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm thứ $n-1$. Bản thân μ_n cũng có thể coi là một quá trình ngẫu nhiên (vì không biết trước được μ_n tại thời điểm 0), nhưng được gọi là một quá trình **dự đoán được** (predictable) vì biết được μ_n tại thời điểm thứ $n-1$, tức là biết trước một bước thời gian. Phân bố xác suất của phần sai số ngẫu nhiên $\sigma_n E_n$ cũng được biết tại thời điểm $n-1$, và do đó σ_n cũng là một quá trình dự đoán được.

Tùy tình huống, mà ta có thể đưa thêm các giả thiết và điều kiện về mô hình. Ví dụ, để đơn giản hóa mô hình, ta có thể giả sử là các sai số là độc lập với nhau và có cùng phân bố xác suất: các biến ngẫu nhiên $\sigma_n E_n$ là một họ các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất. Hoặc ít ra có thể giả sử là các biến ngẫu nhiên E_n là độc lập với nhau và có cùng phân bố xác suất (còn đại lượng volatility σ_n có thể thay đổi theo thời gian). Một giả thiết khác hay được dùng, là μ và σ là các hàm số theo 2 biến n và S: $\mu_n = \mu(n, S_{n-1}), \sigma_n = \sigma(n, S_{n-1})$. Nói cách khác, μ_n và σ_n không phụ thuộc vào toàn bộ tình huống σ_{n-1}, mà chỉ phụ thuộc vào giá S_{n-1} tại thời điểm $n-1$ (nhiều tình huống khác nhau có thể dẫn đến cùng 1 giá tại thời điểm $n-1$).

Ở phía dưới, chúng ta sẽ xét mô hình cây nhị thức, là một trường hợp đơn giản của mô hình thời gian rời rạc. Chính vì đơn giản, dễ tính toán, nên mô hình cây nhị thức này rất quan trọng trong thực tế. (Nhiều chương trình tính giá option trên các thị trường chứng khoán thế giới là dựa trên mô hình cây nhị thức).

1.1.4 Mô hình cây nhị thức

Giống như trước, ta ký hiệu bước thời gian là τ, và gọi thời điểm $n\tau$ là thời điểm thứ n (thời điểm thứ 0 là thời điểm 0, tức là thời điểm ban đầu). Giá của cổ phiếu tại thời điểm thứ n được ký hiệu là $S(n)$ hay S_n. Ta coi S_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) là một quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc, và ta sẽ viết phương trình mô tả chuyển động của nó.

Ta sẽ giả sử là bước thời gian τ nhỏ đến mức, từ thời điểm thứ $n-1$ đến thời điểm thứ n giá cổ phiếu chỉ kịp thay đổi 1 lần, phụ thuộc vào 1 tin xảy ra trong khoảng thời gian đó. Tin ở đây sẽ chỉ là tốt (ký hiệu là g) hoặc xấu (ký hiệu là b), và giá cổ phiếu sẽ thay đổi, phụ thuộc vào tin tốt hay tin xấu, theo công thức sau:

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1}(1+u_n) \text{ nếu tin tốt} \\ S_{n-1}(1+d_n) \text{ nếu tin xấu} \end{cases} . \tag{1.22}$$

Các đại lượng u_n và d_n không nhất thiết phải cố định, mà có thể phụ thuộc vào tình huống đã xảy ra cho đến thời điểm thứ $n-1$ (và được biết vào thời điểm thứ $n-1$ khi tình huống đó được biết). Nói cách khác, chúng là các hàm số trên không gian xác suất (Ω_{n-1}, P_{n-1}) các tình huống có thể xảy ra cho đến thời điểm thứ $n-1$:

$$u_n, d_n : \Omega_{n-1} \to \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Chúng ta sẽ giả sử rằng $S_0 > 0$, và các đại lượng u_n và d_n thỏa mãn các bất đẳng thức

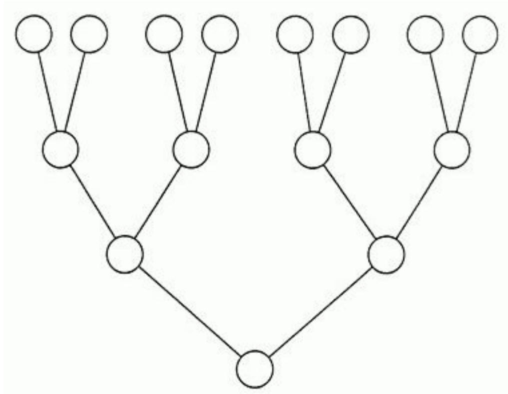
$$u_n > d_n > -1, \tag{1.24}$$

có nghĩa là giá cổ phiếu luôn luôn dương, và giá cổ phiếu khi tin tốt thì cao hơn giá cổ phiếu khi tin xấu.

Không gian xác suất (Ω_n, P_n) các tình huống có thể xảy ra đến thời điểm thứ n là một tập hữu hạn gồm có 2^n phần tử: mỗi phần tử có thể được ký hiệu bởi 1 dãy n chữ cái $\omega_n = (a_1, \ldots, a_n)$, trong đó mỗi chữ cái nhận một trong hai giá trị g (tin tốt) hoặc b (tin xấu), và chữ cái thứ i trong dãy ứng với tin xảy ra từ thời điểm thứ $i-1$ đến thời điểm thứ i. Ta có thể viết:

$$\Omega_n \cong \{g, b\}^n. \tag{1.25}$$

Mô hình được gọi là **cây nhị thức** vì mỗi tình huống ω_{n-1} đến thời điểm $n-1$ được rẽ làm hai nhánh, thành 2 tình huống đến thời điểm n, ký hiệu là (ω_{n-1}, g) và (ω_{n-1}, b). Tại thời điểm 0 ban đầu thì cây chỉ có 1 nhánh, đến thời điểm thứ 1 thì thành 2 nhánh, đến thời điểm thứ 2 thì thành 4 nhánh, v.v.



Hình 1.1: Cây nhị thức

Xác suất rẽ nhánh từ tình huống ω_{n-1} thành tình huống $(\omega_{n-1}, g) \in \Omega_n$ được ký hiệu là $p_n(\omega_{n-1})$, và nó có thể được tính theo công thức xác suất có điều kiện:

$$p_n(\omega_{n-1}) = P((\omega_{n-1}, g)|\omega_{n-1}) = \frac{P_n(\omega_{n-1}, g)}{P_{n-1}(\omega_{n-1})}. \tag{1.26}$$

Ngược lại, khi ta biết các xác suất rẽ nhánh p_n, thì ta cũng có thể tìm lại được phân bố xác suất trên Ω_n theo công thức sau: với mọi $\omega_n = (a_1, \ldots, _n) \in \Omega_n$, ta có

$$P(\omega_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_{i-1})}, \tag{1.27}$$

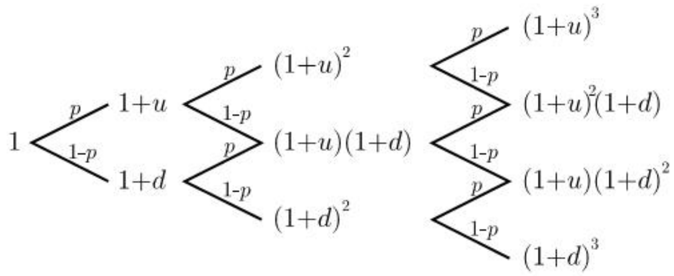
trong đó $\omega_i = (a_1, \ldots, a_i)$, $\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_{i-1})} = p_n(\omega_{i-1})$ nếu $a_i = g$ và $\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_{i-1})} = 1 - p_n(\omega_{i-1})$ nếu $a_i = b$. Chúng ta sẽ giả sử các phân bố xác suất ở đây là không suy biến, có nghĩa là các xác suất rẽ nhánh thỏa mãn bất đẳng thức $0 < p_n < 1$.

Các đại lượng u_n, d_n và p_n có thể được coi như là các quá trình ngẫu nhiên, vì nó không những phụ thuộc vào n, mà còn có thể phụ thuộc vào tình huống xảy ra. Các quá trình ngẫu nhiên này được gọi là **dự đoán được**, vì từ thời điểm thứ $n-1$ đã biết được các giá trị của u_n, d_n và p_n.

Ví dụ 1.3. Một mô hình nhị thức hai bước, tức là với $n \leq 2$:
$S_0 = 100$ (giá thời điểm 0 là 100)
$S_1(g) = 125$ (giá thời điểm 1 là 125 nếu tin tốt)
$S_1(b) = 105$ (giá thời điểm 1 là 105 nếu tin xấu)
$p_1 = 0.5$ (xác suất để tin đầu tiên là tốt bằng 0.5)
$S_2(g, g) = 150$ (giá thời điểm 2 là 150 nếu tin đầu tốt tin sau cũng tốt)
$S_2(g, b) = 115$ (giá thời điểm 2 là 115 nếu tin đầu tốt tin sau xấu)

$p_2(g) = 0.4$ (nếu tin đầu tốt, thì xác suất để tin thứ hai cũng tốt là 0.4)
$S_2(b, g) = 130$ (giá thời điểm 2 là 130 nếu tin đầu xấu tin sau tốt)
$S_2(b, b) = 90$ (giá thời điểm 2 là 115 nếu tin đầu xấu tin sau cũng xấu)
$p_2(b) = 0.7$ (nếu tin đầu xấu, thì xác suất để tin thứ hai tốt là 0.7)
Theo mô hình này, tại thời điểm 0, S_2 là một biến ngẫu nhiên nhận 4 giá trị 150, 115, 130 và 90, với các xác suất tương ứng là: $0.5 \times 0.4 = 0.2, 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.3$, và $(1 - 0.5) \times 0.7 = 0.35, (1 - 0.5) \times (1 - 0.7) = 0.15$. Tại thời điểm 1, thì S_2 vẫn là biến ngẫu nhiên, nhưng nó chỉ còn nhận 2 giá trị, và phụ thuộc vào tính huống xảy ra cho đến thời điểm 1. Ví dụ, nếu tin đầu tiên là tốt, thì khi đó S_2 là biến ngẫu nhiên với hai giá trị 150 và 115, với các xác suất tương ứng là 0.4 và $1 - 0.4 = 0.6$.

Một trường hợp đặc biệt của cây nhị thức hay được dùng đến là khi $u_n = u, d_n = d$ và $p_n = p$ là những hằng số, không phụ thuộc vào n cũng như là vào các tình huống xảy ra. Ta sẽ gọi mô hình cây nhị thức mà trong đó u_n, d_n, p_n là các hằng số là mô hình **cây nhị thức bất biến** (invariant binary tree model), để phân biệt với mô hình cây nhị thức tổng quát. Mô hình cây nhị thức bất biến tất nhiên là tính toán dễ hơn so với mô hình nhị thức tổng quát vì có ít tham số hơn, và bởi vậy hay được dùng, nhưng bù lại nó không được chính xác bằng mô hình tổng quát.



Hình 1.2: Cây nhị thức bất biến 3 bước

Bài tập 1.1. Viết lại phương trình chuyển động (1.22) của mô hình cây nhị thức dưới "dạng chuẩn" $\dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \mu_n + \sigma_n E_n$: tính μ_n, σ_n và tìm phân bố xác suất của E_n từ các biến u_n, d_n và p_n.

Bài tập 1.2. i) Chứng minh rằng, trong mô hình cây nhị thức bất biến, vào thời điểm 0 ban đầu, S_n là một biến ngẫu nhiên nhận $n+1$ giá trị $(1+u)^i(1+d)^{n-i}S_0$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (thay vì có thể nhận đến 2^n giá trị như trong mô hình cây nhị thức tổng quát), và mỗi giá trị $(1+u)^i(1+d)^{n-i}S_0$ có xác suất là $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, trong đó $C_n^i = n!/(i!(n-i)!)$ là

nhị thức Newton. (Phân bố xác suất với các xác suất như vậy được gọi là **phân bố nhị thức**, xem [5]).
ii) Tính kỳ vọng $\mathbb{E}(S_n)$ của giá cổ phiếu sau n bước trong mô hình cây nhị thức bất biến.

1.1.5 Mô hình với thời gian liên tục

Trong toán học, các mô hình với thời gian liên tục có thể được xây dựng như là giới hạn của các mô hình với thời gian rời rạc, khi mà bước thời gian tiến tới 0. Đối với các quá trình ngẫu nhiên mô tả giá cổ phiếu cũng vậy: một quá trình với thời gian liên tục có thể nhận được bằng cách lấy giới hạn một quá trình với thời gian rời rạc, khi mà bước thời gian tiến tới 0. Phương trình mô tả chuyển động của một quá trình ngẫu nhiên trong trường hợp thời gian liên tục sẽ là **phương trình vi phân ngẫu nhiên** (stochastic differential equation). Mô hình với thời gian liên tục đơn giản nhất, 1 chiều, mô tả sự thay đổi của giá cổ phiếu, có dạng sau:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t, \tag{1.28}$$

hay còn viết là

$$dS_t = \mu(t, S_t)S_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dB_t, \tag{1.29}$$

trong đó $\mu(t, S_t)$ là hệ số **drift**, $\sigma(t, S_t)$ là hệ số **volatility**, là các hàm số với hai biến số thực, được cho bởi mô hình, (mỗi khi biết giá trị của t và S_t thì cũng biết giá trị của μ và σ), B_t là một quá trình ngẫu nhiên gọi là **chuyển động Brown** (Brownian motion). Chuyển động Brown B_t này được sinh ra bằng cách lấy giới hạn phần ngẫu nhiên trong mô hình rời rạc, khi khi bước thời gian τ tiến tới 0.

Phương trình trên hiểu nghĩa như sau:

Khi mà thời gian t dịch chuyển đi một đại lượng $\Delta t = t' - t > 0$ rất nhỏ, thì giá cổ phiếu cũng dịch chuyển đi một đại lượng $\Delta S_t = S_{t'} - S_t$, bằng tổng của hai phần, một phần là dự đoán được tại thời điểm t, và một phần là không dự đoán được. Phần dự đoán được xấp xỉ bằng $\mu(t, S_t).S_t.\Delta t$, còn phần không dự đoán được xấp xỉ bằng $\sigma(t, S_t).S_t.(B_{t'} - B_t)$.

Chúng ta sẽ nghĩa chính xác chuyển động Brown, và nghiên cứu phương trình vi phân ngẫu nhiên , trong các phần phía sau của chương này. Các tính chất quan trọng nhất của một chuyển động Brown B_t là:

- Bước chuyển động $B_{t'} - B_t$ từ thời điểm t đến thời điểm $t' > t$ là độc lập theo nghĩa xác suất với mọi điều xảy ra cho đến thời điểm t.

- Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $B_{t'} - B_t$ (tại thời điểm t) là phân bố normal $N(0, t' - t)$ với kỳ vọng bằng 0 và phương sai bằng $t' - t$.

Các tính chất trên của thành phần chuyển động Brown B_t trong phương trình vi phân ngẫu nhiên (1.1.5) có thể được giải thích một cách trực giác như sau:

- Bước chuyển động $B_{t'} - B_t$ từ thời gian t đến thời gian $t' > t$ không phụ thuộc vào bất cứ điều gì xảy ra cho đến thời điểm t, bởi vì những cái gì mà phụ thuộc vào những chuyện xảy ra tại t và các thời điểm trước đó thì coi là "dự đoán được" và có thể chuyển sang phần dự đoán được trong mô hình. Phần "hoàn toàn không dự đoán được" của mô hình là phần không hề phụ thuộc vào những điều xảy ra trước đó.

- Phần không dự đoán được có thể coi là có kỳ vọng bằng 0, bởi vì bản thân kỳ vọng là đại lượng dự đoán được, nếu khác 0 có thể chuyển sang phần dự đoán được của mô hình.

- Phần không dự đoán được trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$ từ t đến t' có thể chia thành tổng của N phần không dự đoán được cho các khoảng thời gian có độ dài $\Delta t/N$ từ $t + (i-1)\Delta t/N$ đến $t + i\Delta t/N$. Như vậy nó là tổng của N biến ngẫu nhiên, mà ta có thể coi là độc lập (do tính hoàn toàn không dự đoán được vừa nêu trên) và có phân bố xác suất tương tự nhau. Theo định lý giới hạn trung tâm (xem Chương 4 của [5]) thì một tổng như vậy, khi N tiến tới vô cùng, phải tiến tới một biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất là phân bố normal. Chính bởi vậy mà phần không dự đoán được $B_{t'} - B_t$ trong mô hình có phân bố normal.

- Để xác định một phân bố xác suất normal, ta chỉ cần biết kỳ vọng và phương sai của nó. Ở đây ta đã biết kỳ vọng bằng 0. Các biến ngẫu nhiên độc lập có phương sai của tổng bằng tổng của các phương sai. Vì tính chất cộng tính của phương sai theo thời gian (khi chia một bước chuyển động ngẫu nhiên $B_{t'} - B_t$ thành nhiều bước nhỏ theo thời gian), nên phương sai của $B_{t'} - B_t$ được đặt bằng đúng $t' - t$, sau khi ta đã chuẩn hóa nó bằng cách đưa hệ số volatility vào mô hình.

1.2 Chuyển động Brown

Chuyển động Brown (Brownian motion) là một lớp các quá trình ngẫu nhiên mang tên nhà thực vật học Robert Brown (1773–1858)[(1)], người đã quan sát chuyển động của các hạt bụi (phấn hoa) trong nước thấy chúng đổi hướng liên tục (mỗi khi va đập phải các phân tử khác thì lại đổi hướng). Nó còn được gọi là *quá trình Wiener*, theo tên nhà toán học Robert Wiener (1894–1964), người có nhiều công trình nghiên cứu về các quá trình ngẫu nhiên và nhiễu[(2)]. Từ năm 1900, ông Louis Bachelier đã đặt cơ sở cho toán tài chính hiện đại bằng việc dùng chuyển động Brown để mô hình hóa các quá trình biến động giá chứng khoán trong luận án tiến sĩ của mình, tuy rằng luận án của ông ta thời đó không được mấy ai quan tâm, và phải đến nửa sau thế kỷ 20 người ta mới thực sự quan tâm đến nó. Chuyển động Brown là một trong những lớp quá trình ngẫu nhiên quan trọng nhất, và phần lớn các chuyển động ngẫu nhiên có tính liên tục trong thực tế có thể được mô hình hóa dựa trên chuyển động Brown và các phép biến đổi giải tích. Ở đây, chúng ta sẽ định nghĩa về mặt toán học thế nào là một chuyển động Brown, và nghiên cứu một số tính chất quan trọng nhất của nó.

1.2.1 Định nghĩa chuyển động Brown

Có thể định nghĩa chuyển động Brown trên các không gian nhiều chiều. Tuy nhiên, trong khuôn khổ quyển sách này, chúng ta sẽ chỉ định nghĩa chuyển động Brown 1 chiều, trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. *Một quá trình ngẫu nhiên B_t với thời gian liên tục (tập các mốc thời gian là $\mathbb{R}_+$) nhận giá trị thực, tương thích với một mô hình xác suất $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, được gọi là một* **quá trình Wiener** *hay* **chuyển động Brown** *chuẩn tắc 1 chiều, nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*
i) Xuất phát điểm là 0: $B_0 = 0$.
ii) B_t là một quá trình liên tục. Có nghĩa là, với hầu hết mọi $\omega \in \Omega$, hàm số $B_\omega(t) := B_t(\omega)$, tức là quĩ đạo của B_t trong tình huống ω, là hàm liên tục theo biến thời gian t.
iii) Với mọi $0 \leq s < t$, biến ngẫu nhiên $B_t - B_s$ (gọi là **bước đi**, *hay* **gia số**, *của quá trình ngẫu nhiên từ s đến t) không phụ thuộc vào tình huống xảy ra cho tới thời điểm s, hay nói cách khác, nó độc lập với sigma-đại số $\mathcal{F}_s$. Có nghĩa là, với mọi $A \in \mathcal{F}_s$ và*

[(1)]Xem: http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Brown_(botanist)

[(2)]Xem: http://en.wikipedia.org/wiki/Norbert_Wiener . Các nhiễu mà được mô hình bởi chuyển động Brown gọi là *nhiễu trắng* (white noise).

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ ta có

$$P(A \cap (B_t - B_s \in [a, b])) = P(A).P(B_t - B_s \in [a, b]). \quad (1.30)$$

iv) Với $t > s \geq 0$ bất kỳ, phân bố xác suất của $B_t - B_s$ (bước đi trong khoảng thời gian từ s đến t của chuyển động) là phân bố normal $N(0, t-s)$ với kỳ vọng bằng 0 và phương sai bằng $t - s$.

Khi nói một quá trình nào đó là chuyển động Brown mà không nói cụ thể thêm, chúng ta sẽ luôn hiểu đó là chuyển động Brown chuẩn tắc 1 chiều.

Trong định nghĩa trên, điều kiện i) là để chuẩn hóa, gọi điểm xuất phát của chuyển động là 0. Điều kiện ii) là tính chất liên tục của chuyển động Brown. Ý nghĩa của điều kiện iii) cũng khá hiển nhiên: những bước chuyển động trong tương lai không hề phụ thuộc vào những gì đã xảy ra trong quá khứ. Điều kiện iv) xuất phát từ ý tưởng sau: bước chuyển động theo thời gian từ s đến t, với độ dài thời gian bằng $t-s$, có thể chia nhỏ thành tổng của N bước chuyển động độc lập, mỗi bước có độ giài thời gian là $(t-s)/N$ (với mọi số tự nhiên N). Khi N tiến đến vô cùng, thì theo định lý giới hạn trung tâm (xem Chương 4 của [5]), tổng của N biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố xác suất sẽ có phân bố xác suất tiến đến một phân bố normal (sau khi chuẩn hóa). Bởi vậy, một cách trực giác, phân bố xác suất của $B_t - B_s$ phải là phân bố normal. Việc đặt phân bố normal đấy bằng $N(0, t-s)$ cũng là để chuẩn hóa.

Từ định nghĩa trên, suy ra ngay được rằng, nếu B_t là một chuyển động Brown và $0 < t_1 < \ldots < t_n$ thì bộ n biến ngẫu nhiên $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ có phân bố xác suất chung là phân bố normal n chiều (xem Chương 3 của [5] về phân bố normal nhiều chiều).

Bài tập 1.3. Chứng minh rằng, nếu $B(t)$ là một chuyển động Brown, thì các quá trình $-B(t)$, $B(t+t_0) - B(t_0)$ (trong đó $t_0 > 0$ là một hằng số), và $aB(t/a^2)$ (trong đó $a \neq 0$ là một hằng số) cũng là các chuyển động Brown.

Bài tập 1.4. Đặt $Z_t = a + \mu t + \sigma B_t$ trong đó a, μ, σ là các hằng số. Tìm phân bố xác suất của các gia số $Z_t - Z_s$, và chứng minh rằng quá trình Z_t cũng là quá trình liên tục và có gia số độc lập, tức là nó thỏa mãn các tính chất iii) và iv) trong định nghĩa chuyển động Brown. (Quá trình Z_t này có thể được gọi là một **chuyển động Brown không chuẩn tắc**, với xuất phát điểm là a, hệ số volatility là σ và hệ số drift là μ).

Bài tập 1.5. Giả sử B_t là một chuyển động Brown, và $a > 0$ là một hằng số. Xây dựng một quá trình ngẫu nhiên W_t sau, gọi là **gương phản** (reflection) của B_t theo a:
- Nếu $B_s(\omega) < a$ với mọi $s < t$, thì $W_s(\omega) = B_t(\omega)$. (Tức là khi chưa đi lên chạm vào đến

a, thì quá trình W_t trùng với B_t).
- Nếu tồn tại $s < t$ sao cho $B_s(\omega) = a$, thì $W_t(\omega) = 2a - B_t(\omega)$. (Kể từ khi bắt đầu chạm vào a, thì W_t là gương phản của B_t qua a).
Chứng minh rằng quá trình W_t xây dựng như trên cũng là một chuyển động Brown.

Bài tập 1.6. Chứng minh công thức **xác suất vượt rào** sau đây của chuyển động Brown:

$$P\{\max_{0\le t\le T} B_t \ge a\} = 2\int_a^\infty \frac{e^{-x^2/2T}}{\sqrt{2\pi T}}dx. \tag{1.31}$$

Hướng dẫn: viết sự kiện $\max_{0\le t\le T} B_t \ge a$ dưới dạng hợp không gian nhau của hai sự kiện $B_T \ge a$ và $W_T > a$, trong đó W_t là gương phản của B_t qua a như trong bài tập trước.

1.2.2 Phân bố xác suất của chuyển động Brown

Giả sử S_t là một quá trình ngẫu nhiên tùy ý, *tương thích* với một mô hình xác suất $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, và gọi $\mathcal{T}$ là tập các mốc thời gian của quá trình này. (Trường hợp $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ là trường hợp thời gian là liên tục, còn trường hợp $\mathcal{T} = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\}$ là trường hợp với thời gian rời rạc; một quá trình ngẫu nhiên S_t với thời gian rời rạc cũng có thể được coi là quá trình với thời gian liên tục bằng cách đặt $S_t = S_{t_n}$ nếu t kẹp giữa hai mốc thời gian rời rạc t_n và $t_{n+1} : t_n \le t < t_{n+1}$). Ta có thể coi quá trình ngẫu nhiên S_t như là một ánh xạ

$$S : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \tag{1.32}$$

từ không gian các tình huống Ω vào không gian $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ các hàm số thực trên $\mathcal{T}$: ảnh của một tình huống ω theo ánh xạ này chính là quĩ đạo $S_\omega(.) = S_.(\omega)$ của S trong tình huống ω. Quá trình ngẫu nhiên S_t cũng sẽ được ký hiệu là S hay $S(t)$, nếu ký hiệu như thế tiện hơn.

Nếu X là một biến ngẫu nhiên (hay một vector ngẫu nhiên n chiều), thì có một phân bố xác suất P_X tương ứng trên $\mathbb{R}$ (hay trên $\mathbb{R}^n$), được định nghĩa bằng push-forward:

$$P_X(A) = P(X \in A) \tag{1.33}$$

trong đó A là đoạn thẳng bất kỳ trên $\mathbb{R}$ (hay một hình hộp bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$). Khi làm các phép tính với các biến ngẫu nhiên hay các vector ngẫu nhiên để ra các con số có ý nghĩa, thì mô hình không gian xác suất ban đầu nói chung không quan trọng, mà cái quan trọng chính là phân bố xác suất của nó trên $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}^n$. Tương tự như vậy, khi tính toán với một quá trình ngẫu nhiên S_t, thì mô hình phân bố xác suất ban đầu $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ không quan trọng trọng bằng phân bố xác suất P_S trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, nhận được từ phân bố xác suất trên Ω qua push-forward của ánh xạ S, và gọi là **phân bố xác suất của quá trình ngẫu nhiên S_t trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$**: Sigma-đại số trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ là **sigma-đại số Borel $\mathcal{B}$**, sinh bởi các tập con có dạng

$$C^A_{t_1,\ldots,t_n} = \{f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}; (f(t_1), \ldots, f(t_n)) \in A\}, \tag{1.34}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$, t_i là các phần tử của $\mathcal{T}$ và $A \subset \mathbb{R}^n$ là một tập Borel. Các tập có dạng như vậy được gọi là các **tập hình trụ** (cylinder). Xác suất theo P_S của tập hình trụ là:

$$P_S(C^A_{t_1,\ldots,t_m}) = P\{(S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}) \in A\}, \tag{1.35}$$

Sigma-đại số Borel $\mathcal{B}$ trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ có một lọc tự nhiên các sigma-đại số con $\mathcal{B}_{\sqcup}$, gọi là **lọc Borel**: với mỗi $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{B}_t$ được sinh bởi các tập hình trụ $C^A_{t_1,\ldots,t_n}$ thỏa mãn điều kiện $t_i \leq t$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Sự tương thích của một quá trình S_t với mô hình xác suất$(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ tương đương với điều kiện sau: $S^*\mathcal{B}_t \subset \mathcal{F}_t$, trong đó $\mathcal{B}_t$ là lọc Borel trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ và $S^*\mathcal{B}_t$ là ảnh ngược của nó trên Ω theo S. Ta có thể lấy luôn $S^*\mathcal{B}_t$ làm lọc cho mô hình không gian xác suất của S trên Ω, nếu lọc trên Ω chưa cố định. Lọc $S^*\mathcal{B}_t$ có tính chất tối ưu sau: mọi lọc khác trên Ω sao cho S là tương thích phải chứa lọc này. Ta sẽ gọi $S^*\mathcal{B}_t$ là **lọc sinh bởi** S trên không gian xác suất Ω.

Chú ý rằng, mọi phân bố xác suất trên $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, với sigma đại số là sigma-đại số Borel sinh bởi các tập hình trụ, đều là phân bố xác suất của một quá trình ngẫu nhiên tương thích S_t nào đó. Thật vậy, ta có thể xây dựng ví dụ như sau: đặt không gian các tình huống Ω bằng chính $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ với phân bố xác suất này, đặt lọc $\mathcal{F}_t$ các sigma-đại số con bằng chính lọc Borel $\mathcal{B}_t$, và đặt $S_t(\omega) = \omega(t)$, tức là khi tình huống ω xảy ra thì quĩ đạo của quá trình ngẫu nhiên S_t chính là hàm số ω. Khẳng định này được gọi là **định lý Kolmogorov** về sự tồn tại của các quá trình ngẫu nhiên với phân bố xác suất cho trước.

Trong trường hợp mà $S_t = B_t$ là một chuyển động Brown, thì theo định nghĩa, với mọi $0 \leq t_0 < t_1 \ldots < t_n \leq t$ và các đoạn thẳng $D_i \in \mathbb{R}$, ta có:

$$P(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in D_i \ \forall\ i = 1, \ldots n) = \prod_{i=1}^{n} P(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in D_i) = \prod_{i=1}^{n} \int_{D_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \tag{1.36}$$

và do đó xác suất của các tập hình trụ trên $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ theo phân bố xác suất của chuyển động Brown là:

$$P_S(C^A_{t_1,\ldots,t_m}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_A e^{-x_1^2/2} e^{-(x_2-x_1)^2/2} \ldots e^{-(x_n-x_{n-1})^2/2} dx_1 \ldots dx_n \tag{1.37}$$

Để chứng tỏ sự tồn tại về mặt toán học của chuyển động Brown, ta có thể xây dựng ví dụ hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tổng quát. Chỉ có điều khác là, là thay vì đặt $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ là không gian tất cả các hàm số thực trên nửa đường thẳng $\mathbb{R}_+$, ta đặt $\Omega = \{\omega \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \omega(0) = 0\}$ là không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}_+$ và có giá trị bằng 0 tại 0, để đảm bảo mọi quĩ đạo đều là liên tục. Các tập hình trụ, và các sigma-đại số, định nghĩa hệt như cũ, chỉ thêm điều kiện là các phần tử đều là các hàm liên tục. Ví dụ mô hình chuyển động Brown này cho thấy, quĩ đạo của một chuyển động Brown có thể là một hàm số liên tục bất kỳ. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy, hầu hết các quĩ đạo của một chuyển động Brown thỏa mãn một số tính chất đặc trưng như: không khả vi tại bất cứ điểm nào, và có biến phân vô hạn.

Ghi chú 1.1. Điều kiện iii) trong định nghĩa của chuyển động Brown hay được thay bằng điều kiện sau:

iii') Với mọi $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, bộ n biến ngẫu nhiên $(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ là một bộ biến ngẫu nhiên độc lập. Nói cách khác, các bước đi của chuyển động Brown là độc lập với nhau.

Một quá trình ngẫu nhiên thỏa mãn điều kiện iii') phía trên thì được gọi là một quá trình có **gia số độc lập** (independent increments).

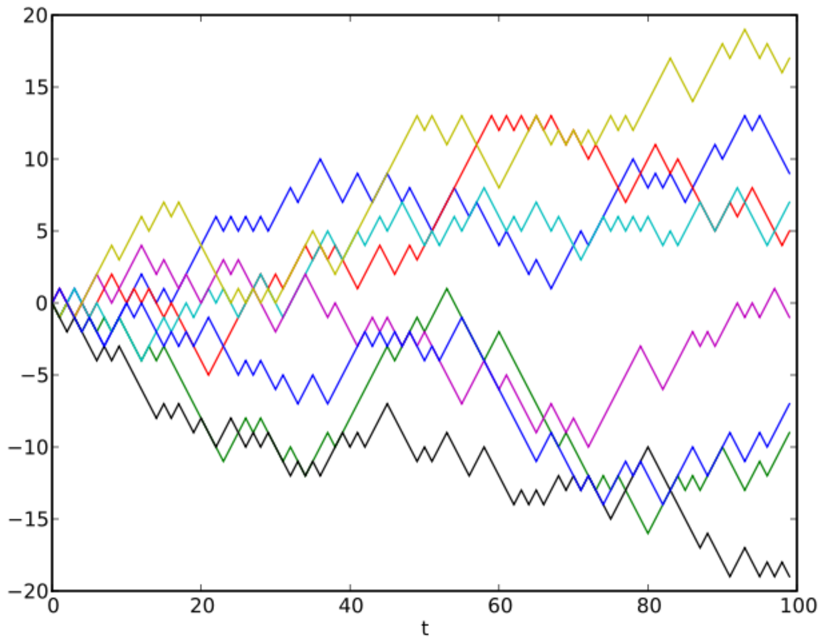
Dễ thấy rằng điều kiện iii') là hệ quả của điều kiện iii). Trong trường hợp mà lọc $\mathcal{F}_t$ trong mô hình xác suất chính là lọc sinh bởi quá trình ngẫu nhiên, thì điều kiện iii') tương đương với điều kiện iii).

1.2.3 Đi dạo ngẫu nhiên

Chuyển động Brown được dùng nhiều trong thực tế, chính là vì nó là giới hạn (liên tục hóa) của các quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc có dạng gọi là *đi dạo ngẫu nhiên*, khi ta cho độ dài thời gian của mỗi bước đi tiến tới 0. Các quan sát của Robert Brown dẫn đến chuyển động mang tên ông cũng chính là quan sát sự đi dạo ngẫu nhiên của các hạt bụi trong nước (tức là thực ra trong các khoảng thời gian rất nhỏ, giữa 2 lần va đập vào các phân tử khác, thì chuyển động của một hạt bụi là có hướng nhất định, chứ không hoàn toàn vô hướng (kỳ vọng của gia số bằng 0) như trong định nghĩa của quá trình Wiener).

Nói một cách cụ thể hơn, xét một quá trình ngẫu nhiên X^τ với thời gian rời rạc, có bước thời gian bằng $\tau > 0$. Giả sử là $X_0 = 0$, các giá số $X_{n\tau} - X_{(n-1)\tau}$ là độc lập với nhau và có cùng phân bố xác suất, là phân bố Bernoulli sau: xác suất để $X_{n\tau} - X_{(n-1)\tau} = a_\tau$ là

50% và xác suất để $X_{n\tau} - X_{(n-1)\tau} = -a_\tau$ cũng là 50%, trong đó a_τ là một hằng số dương có phụ thuộc vào tham số τ mà chúng ta sẽ xác định sau. Một quá trình ngẫu nhiên như vậy được gọi là một quá trình **đi dạo ngẫu nhiên** (random walk) một chiều, với độ dài của bước thời gian bằng τ và độ dài của bước đi dạo bằng a_τ (tức là cứ sau mỗi khoảng thời gian τ thì lại dịch chuyển toàn toàn ngẫu nhiên, hoặc là sang trái hoặc là sang phải, một đoạn có độ dài a_τ). Quá trình đi dạo ngẫu nhiên này là một trường hợp đặc biệt của mô hình cây nhị thức.



Hình 1.3: Một số ví dụ đồ thị đường đi dạo ngẫu nhiên ($\tau = a_\tau = 1$)

Xét quãng đường đi được $X_t^\tau - X_s^\tau$ của một quá trình đi dạo ngẫu nhiên từ một thời điểm $s = M\tau$ đến một thời điểm $t = (M+N)\tau$. Ta có thể viết

$$X_t^\tau - X_s^\tau = \sum_{i=1}^{N} Y_{M+i}^\tau \tag{1.38}$$

trong đó $Y_{M+i}^\tau = X_{(M+i)\tau}^\tau - X_{(M+i-1)\tau}^\tau$ là từng bước đi một. Theo giả thiết, các bươc đi Y_{N+i}^τ là độc lập với nhau và có cùng phân bố xác suất là phân bố Bernoulli, tức là $X_t^\tau - X_s^\tau$ là tổng của N biến ngẫu nhiên cùng phân bố xác suất. Khi N lớn (tức là τ nhỏ, vì ta giả sử s và t cố định, và $t - s = N\tau$), ta có thể sử dụng định lý giới hạn trung tâm để nghiên cứu phân bố xác suất của $X_t^\tau - X_s^\tau$. Trước hết, nhắc lại định lý giới hạn trung tâm (xem Chương 4 của [5]; trường hợp đặc biệt của nó, cho các phân bố Bernoulli, được chứng minh bởi de Moivre và Laplace từ thế kỷ 18):

Định lý 1.1 (Định lý giới hạn trung tâm). *Giả sử $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất với kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn bằng σ hữu hạn. Đặt $Z_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_i}{\sigma\sqrt{N}}$. Khi đó với mọi đoạn thẳng $[a,b] \subset \mathbb{R}$, ta có:*

$$\lim_{N\to\infty} P\left(a \le Z_N \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx. \tag{1.39}$$

Nói cách khác, phân bố xác suất của Z_N tiến tới phân bố normal chuẩn tắc $N(0,1)$ khi N tiến tới vô cùng.

Chú ý rằng, trong định lý giới hạn trung tâm, có đại lượng $\sqrt{N}$ xuất hiện. Để sử dụng định lý giới hạn trung tâm cho $X_t - X_s$, ta sẽ đặt $Y^\tau_{M+n} = Y_n/\sqrt{N/(t-s)} = \sqrt{\tau} Y_n$, hay $Y_n = Y^\tau_{M+n}/\sqrt{t}$. Ta sẽ coi là các biến $Y^\tau_{M+n}/\sqrt{t}$ có cùng phân bố xác suất và phân bố này không phụ thuộc vào τ. Nhắc lại rằng, phân bố xác suất của Y^τ_{M+n} là phân bố Bernoulli, nhận hai giá trị $\pm a_\tau$, với xác suất 50% cho mỗi giá trị. Nói rằng phân bố xác suất của $Y^\tau_{M+n}/\sqrt{t}$ không phụ thuộc vào τ có nghĩa là $a_\tau/\sqrt{t}$ là hằng số không phụ thuộc vào τ. Để cho tiện, ta sẽ đặt

$$a_\tau = \sqrt{t}. \tag{1.40}$$

Khi đó độ lệch chuẩn của $Y^\tau_{M+n}/\sqrt{t}$ đúng bằng 1, và ta có $X^\tau_t - X^\tau_s = \sum_{i=1}^N Y^\tau_{M+i} = \sqrt{t-s} Z_N$. Như vậy, ta được hệ quả sau của định lý giới hạn trung tâm:

Định lý 1.2. *Gọi X^τ_t là quá trình đi dạo ngẫu nhiên 1 chiều với bước thời gian bằng τ và bước dịch chuyển bằng $\sqrt{\tau}$. Giả sử $t > s > 0$ là hai mốc thời gian bất kỳ. Khi đó phân bố xác suất của $X^\tau_t - X^\tau_s$ tiến tới phân bố normal $N(0, \sqrt{t-s})$ khi mà τ tiến tới 0.*

Trong định lý trên, t và s không nhất thiết phải chia hết cho τ (bằng τ nhân với một số nguyên), vì mọi quá trình ngẫu nhiên X_t với thời gian rời rạc đều có thể được coi là quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục, qua một công thức nội suy. Ví dụ, nếu $t_n < t < t_{n+1}$, trong đó t_n và t_{n+1} là hai mốc thời gian liên tiếp của quá trình rời rạc, thì ta có thể đặt $X_t = X_{t_n}$ (coi nó là bất biến trên từng khúc thời gian), hoặc là đặt $X_t = \frac{t_{n+1}-t}{t_{n+1}-t_n} X_{t_n} + \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n} X_{t_{n+1}}$ (để biến nó thành quá trình ngẫu nhiên liên tục tuyến tính từng khúc). Định lý trên đúng với cả hai cách đặt đó.

Định lý trên cho thấy các quá trình đi dạo ngẫu nhiên X^τ_t (với bước thời gian bằng τ và bước dịch chuyển bằng $\sqrt{\tau}$) tiến tới (theo nghĩa phân bố xác suất) chuyển động Brown chuẩn tắc khi τ tiến tới 0, và nó cũng giải thích vì sao ta yêu cầu rằng gia số $B_t - B_s$ của chuyển động Brown phải có phân bố xác suất là phân bố $N(0, \sqrt{t-s})$. Vì là quá trình đi dạo ngẫu nhiên X_t^τ có bước dịch chuyển $\sqrt{\tau}$ tiến tới 0 khi τ tiến tới 0, nên, một cách trực giác, giới hạn của X_t^τ khi τ tiến tới 0 phải là quá trình liên tục (tức là hầu hết mọi đường đi đều là liên tục). Do vậy mà ta có điều kiện liên tục trong định nghĩa của chuyển động Brown.

1.2.4 Một số tính chất của chuyển động Brown

Một trong những tính chất quan trọng nhất của chuyển động Brown là tính chất **martingale**. Để phát biểu tính chất này bằng công thức toán học, ta cần khái niệm **kỳ vọng theo sigma-đại số con**: Nếu X là một biến ngẫu nhiên trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, và $\mathcal{G}$ là một sigma-đại số con của $\mathcal{F}$, thì kỳ vọng của X theo $\mathcal{G}$ (nếu tồn tại), theo định nghĩa, là một biến ngẫu nhiên Y trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, (tức là hàm $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm đo được không những theo $\mathcal{F}$ mà còn đo được theo $\mathcal{G}$) sao cho với mọi tập con $A \subset \Omega$ đo được theo $\mathcal{G}$ (tức là $A \in \mathcal{G}$) ta có

$$\int_A X dP = \int_A Y dP. \tag{1.41}$$

Để hiểu ý nghĩa của đẳng thức (1.41), hình dung là $P(A) > 0$, nhưng A đủ nhỏ sao cho Y là hằng số (hoặc gần như là hằng số) trên A. Chia cả hai vế của đẳng thức cho $P(A)$, ta được

$$\mathbb{E}(X|A) = Y(A), \tag{1.42}$$

trong đó vế trái là kỳ vọng có điều kiện của X trong điều kiện A, và vế phải là giá trị (trung bình) của Y trong (tập) tình huống A. Vì $A \in \mathcal{G}$ là tùy ý, nên ta nói rằng kỳ vọng của X theo $\mathcal{G}$ bằng Y, và ta viết

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y. \tag{1.43}$$

Định lý 1.3. *(Tính chất martingale). Với mọi $0 \leq s \leq t$ ta có*

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s, \tag{1.44}$$

hay còn có thể viết là:

$$\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = 0, \tag{1.45}$$

tức là kỳ vọng (có điều kiện) của mọi bước đi $B_t - B_s$ (dù tình huống xảy ra cho đến thời điểm s) đều bằng 0.

Định lý trên chẳng qua là hệ quả trực tiếp của các điều kiện ii) và iii) trong định nghĩa chuyển động Brown.

Định lý 1.4. *Giả sử B_t là một chuyển động Brown. Khi tồn tại một tập con $\Omega' \subset \Omega$ trong không gian các tình huống, có xác suất bằng 1, sao cho với mọi tình huống $\omega \in \Omega'$ thì quĩ đạo $B_\omega(t) := B_t(\omega)$ thỏa mãn các tính chất sau:*
i) Với mọi $a \in \mathbb{R}$, có vô hạn các thời điểm $t \in \mathbb{R}_+$ sao cho $B_\omega(t) = a$.
ii) Với mọi $\epsilon > 0$, tập hợp các không điểm của B_ω (tức là các điểm t sao cho $B_\omega(t) = 0$) trên đoạn thẳng $[0, \epsilon]$ là một tập vô hạn.
iii) B_ω không đơn điệu theo t trên bất cứ đoạn thẳng nào.
iv) B_ω không khả vi tại bất cứ điểm nào theo t.
Nói cách khác, hầu hết các quĩ đạo của một chuyển động Brown thỏa mãn các tính chất trên.

Chứng minh. i) Ta sẽ giả sử $a > 0$ (các trường hợp khác chứng minh tương tự). Dễ thấy rằng, nếu B_t là chuyển động Brown và $\alpha > 0$ là hằng số, thì $\frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}$ cũng là chuyển động Brown. (Xem bài tập 1.3). Tính chất này gọi là **tính chất scaling** (phóng to thu nhỏ) của chuyện động Brown. Do tính chất scaling nên ta có

$$P(B_t < x | B_s < y) = P(B_{\alpha^2 t} < \alpha x | B_{\alpha^2 s} < \alpha y) \tag{1.46}$$

với mọi hằng số x, y, α, s và t thỏa mãn $\alpha > 0, 0 < s < t$. Trường hợp riêng của đẳng thức trên là

$$P(B_{4^n} < 2^n a | B_{4^{n-1}} < 2^{n-1} a) = P(B_{4^{n+1}} < 2^{n+1} a | B_{4^n} < 2^n a) = c, \tag{1.47}$$

với c là một số nhỏ hơn 1, lớn hơn 0, và không phụ thuộc vào $n \in \mathbb{Z}$. Bởi vậy

$$P(B_{4^n} < 2^n \ \forall\ 0 \leq n \leq N) = P(B_1 < a) \prod_{n=1}^{N} P(B_{4^n} < 2^n a | B_{4^{n-1}} < 2^{n-1} a) = c^N P(B_1 < a) \tag{1.48}$$

tiến tới 0 khi N tiến tới vô cùng, và do vậy $P(B_{4^n} < 2^n a \ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+) = 0$. Có nghĩa là, với hầu hết mọi tình huống ω, tồn tại ít nhất một số nguyên không âm n sao cho $B_\omega(4^n) \geq 2^n a \geq a$. Vì (với hầu hết mọi ω) B_ω là hàm liên tục theo t, có giá trị bằng 0 tại 0 và giá trị lớn hơn hoặc bằng a tại một thời điểm nào đó, nên nó cũng phải nhận a làm giá trị tại thời điểm nào đó (theo định lý giá trị trung gian cho hàm liên tục). Như vậy ta đã chứng minh được rằng, trong hầu hết mọi tình huống ω, thì tồn tại ít nhất 1 thời điểm sao cho giá trị của B_ω tại thời điểm đó bằng a. Tương tự như vậy, ta có thể chứng minh rằng, với mọi $M \in \mathbb{R}_+$, hầu như chắc chắn rằng quĩ đạo của chuyển động

Brown có nhận giá trị bằng a tại một thời điểm lớn hơn M. Vì M là tùy ý, nên từ đó suy ra hầu như chắc chắn rằng quĩ đạo của chuyển động Brown có nhận giá trị bằng a tại vô hạn các thời điểm. Thật vậy, gọi $A_{k,M}$ là tập các tình huống ω thỏa mãn điều kiện: trên đoạn thẳng $[0, M[$ có ít nhất k thời điểm mà giá trị của B_ω bằng a. Vì hầu như chắc chắn rằng trên nửa đường thẳng $[M, \infty[$ có ít nhất 1 thời điểm mà giá trị của B_ω bằng a, nên $P(A_{k+1,\infty}) \geq P(A_{k,M})$ với mọi M. Do đó $P(A_{k+1,\infty}) \geq \lim_{M\to\infty} P(A_{k,M}) = P(A_{k,\infty})$, và theo qui nạp, ta có $P(A_{k,\infty}) \geq P(A_{0,\infty}) = 1$, tức là $P(A_{k,\infty}) = 1$. Vì tập các tình huống ω thỏa mãn điều kiện "có vô số thời điểm mà giá trị của quĩ đạo là a" là tập $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,\infty}$, nên tập này cũng có xác suất bằng 1.

ii) Tương tự như phía trên, do tính chất scaling nên $P(B_{4^{-n}\epsilon} < 2^{-n}\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+) = 0$, do đó hầu như chắc chắn rằng tồn tại $n \in \mathbb{Z}_+$ sao cho $B_{4^{-n}\epsilon} \geq 2^{-n} > 0$. Tương tự như vậy, hầu như chắc chắn rằng tồn tại $m \in \mathbb{Z}_+$ sao cho $B_{4^{-m}\epsilon} \leq -2^{-m} < 0$. Vì (với hầu hết mọi ω) quĩ đạo B_ω là liên tục và nhận cả giá trị âm lẫn giá trị dương trên đoạn thẳng nửa mở $]0, \epsilon]$, nên nó phải có ít nhất một không điểm trên đoạn thẳng $]0, \epsilon]$ này. Vì ϵ là tùy ý, nên từ đó suy ra là hều hết mọi quĩ B_ω đạo phải có vô hạn không điểm trong đoạn $[0, \epsilon]$, cũng bằng lý luận tương tự như là trong chứng minh tính chất i).

iii) Chứng minh hệt như là chứng minh tính chất ii). (Chỉ cần chứng minh cho các đoạn thẳng có điều đầu và điểm cuối là số hữu tỷ là đủ, và tập hợp các đoạn thẳng như vậy là tập đếm được).

iv) Tính không khả vi tại bất cứ điểm nào cũng được chứng minh bằng tính chất scaling của chuyển động Brown và những lý luận tương tự như trong chứng minh các tính chất i) và ii). Chúng ta sẽ bỏ qua chứng minh của tính chất iii) ở đây. (Nó là một tính chất thú vị, nên được đưa vào để tham khảo, chứ chúng ta cũng sẽ không cần dùng đến nó trong quyển sách này). □

1.2.5 Biến phân và biến phân bình phương

Theo định nghĩa, **biến phân** của một hàm số f trên một đoạn thẳng $[a, b]$ là đại lượng

$$V_a^b(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\ ;\ n \in \mathbb{N},\ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}. \qquad (1.49)$$

Nếu đại lượng đó bằng $+\infty$ thì ta nói rằng f có **biến phân vô hạn** trên đoạn $[a, b]$, còn nếu nó nhỏ hơn $+\infty$ thì ta nói rằng f có **biến phân hữu hạn** trên đoạn $[a, b]$. Ví dụ, nếu f là hàm khả vi liên tục, thì nó có biến phân hữu hạn, bằng

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|dt. \tag{1.50}$$

Tổng quát hơn, mọi hàm số f thỏa mãn điều kiện Lipschitz (tức là tồn tại một hằng số K sao cho $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ với mọi x và y sẽ có biến phân hữu hạn: $V_a^b(f) \leq K(b-a)$.

Như ta đã thấy trong mục trước, chuyển động Brown là không khả vi. Hơn nữa, nó còn có biến phân vô hạn:

Định lý 1.5. *Giả sử B_t là một chuyển động Brown. Khi đó hầu hết mọi quĩ đạo B_ω của B_t đều có biến phân vô hạn trên mọi đoạn thẳng $[a, b]$ ($0 \leq a < b$).*

Chứng minh. Nó là hệ quả trực tiếp của định lý 1.6 dưới đây, bởi vì nếu một hàm liên tục có biến phân hữu hạn trên một đoạn thẳng nào đó, thì biến phân bình phương của nó trên đoạn đó bằng 0, trong khi đối với chuyển động Brown, biến phân bình phương là khác 0 trên mọi đoạn thẳng. □

Theo định nghĩa, **biến phân bình phương** (quadratic variation) của một hàm số f trên một đoạn thẳng $[a, b]$ là giới hạn:

$$QV_a^b(f) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^2, \tag{1.51}$$

trong đó $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ là một phân hoạch của đoạn $[a, b]$, và $\delta = \max_i(x_i - x_{i-1})$ là độ mịn (mesh) của phân hoạch, nếu như giới hạn đó tồn tại. (Nếu giới hạn không tồn tại, thì ta có thể thay lim bằng lim sup, nhưng đối với chuyển động Brown, vấn đề này không đặt ra, vì như ta sẽ thấy, giới hạn này tồn tại cho hầu khắp mọi quĩ đạo của chuyển động Brown).

Dễ thấy rằng, nếu hàm số thỏa mãn điều kiện Lipschitz, thì nó có biến phân vình phương bằng 0. Tổng quát hơn, nếu một hàm số là liên tục và có biến phân hữu hạn, thì biến phân bình phương của nó bằng 0. (Khẳng định này dành cho bạn đọc như là một bài tập).

Đối với chuyển động Brown, thì biến phân bình phương là *khác 0 nhưng hữu hạn* trên các đoạn thẳng thời gian. Hơn nữa, nó bằng đúng độ dài của đoạn thẳng:

Định lý 1.6. *Giả sử B_t là một chuyển động Brown. Khi đó hầu hết mọi quĩ đạo B_ω của nó có biến phân bình phương trên đoạn thẳng $[a, b]$ bất kỳ bằng đúng $b - a$:*

$$QV_a^b(B_\omega) = b - a. \tag{1.52}$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định sau đây, hơi yếu hơn Định lý 1.6 một chút, nhưng đủ cho thấy bản chất vấn đề: với hầu hết mọi tình huống ω ta có

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(B_\omega(i/N)-B_\omega((i-1)/N))^2=1. \tag{1.53}$$

Đặt $Y_{N,i}=\dfrac{1}{N}\left(B_\omega(i/N)-B_\omega((i-1)/N)\right)^2$. Khi đó các biến ngẫu nhiên $Y_{N,i}$ đều có phân bố xác suất bằng phân bố xác suất của $(B_1)^2$, tức là phân bố **ki bình phương** χ_1^2 (với 1 bậc tự do – xem chương 4 của [5] về phân bố ki bình phương). Nhắc lại rằng, phân bố χ_1^2 có kỳ vọng bằng 1. Ta cần chứng minh rằng

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_{N,i}=1$$

hầu khắp mọi nơi. Thế nhưng đây chính là luật số lớn (dạng mạnh) áp dụng vào phân bố χ_1^2, vì các biến ngẫu nhiên $Y_{N,1},\ldots,Y_{N,N}$ độc lập với nhau và có cùng phân bố xác suất χ_1^2. (Xem Chương 3 của [5] về dạng mạnh của luật số lớn cách chứng minh của nó – tình huống ở đây hơi khác nhưng chứng minh vẫn thế). Bởi vậy ta được điều phải chứng minh. □

Có định lý ngược lại sau đây của Paul Lévy[(3)], cho thấy vị trí quan trọng của chuyển động Brown trong lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên:

Định lý 1.7 (Lévy)**.** *Mọi quá trình martingale*[(4)] *với thời gian liên tục, thỏa mãn tính chất liên tục (tức là hầu hết mọi quĩ đạo đều liên tục), và có biến phân bình phương hữu hạn, đều là chuyển động Brown sau một phép biến đổi thời gian.*

Có thể xem chứng minh của định lý Lévy này trong Chương 2 của quyển sách [12] của Karatzas và Shreve.

Bài tập 1.7. Thử chứng minh trực tiếp định lý 1.5 mà không cần dùng định lý 1.6

1.2.6 Chuyển động Brown hình học

Giá của cổ phiếu không thể âm (thậm chí ta sẽ coi nó là luôn dương, tuy trong thực tế nó có thể về 0 khi công ty phá sản), nên nó không thể là chuyển động Brown, bởi vì các

---

(3) Paul Lévy (1886–1971) là nhà toán học Pháp nổi tiếng về các công trình về xác suất, xem: http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Pierre_Lévy

(4) Một quá trình S_t được gọi là martingale nếu $\mathbb{E}(|S_t|)<\infty$ với mọi t, và thỏa mãn tính chất martingale $\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_s)=S_s$. Điều kiện $\mathbb{E}(|S_t|)<\infty$ là "hiển nhiên" đối với các quá trình thực tế, được cho thêm vào trong định nghĩa cho chặt chẽ về mặt toán học.

quĩ đạo của chuyển động Brown xuống âm bao nhiêu cũng được. Thế nhưng, nếu ta lấy log của giá cổ phiếu, thì nó có thể âm, và có thể hình dung là chuyển động theo thời gian của log của giá cổ phiếu dưới tác động của các lực ngẫu nhiên ảnh hưởng tức thời trên thị trường tương tự như là chuyển động Brown. Bởi vậy, khái niệm *chuyển động Brown hình học* sau sẽ quan trọng trong việc mô tả sự biến động của giá cổ phiếu:

Định nghĩa 1.3. *Nếu B_t là một chuyển động Brown chuẩn tắc, và a, b, σ là các hằng số ($\sigma > 0$), thì quá trình ngẫu nhiên $\exp(a+bt+\sigma B_t)$ được gọi là một* **chuyển động Brown hình học** *(geometric Brownian motion). Nói cách khác, một quá trình ngẫu nhiên G_t được gọi là một chuyển động Brown hình học khi và chỉ khi $\ln G_t$ là một chuyển động Brown (không nhất thiết chuẩn tắc).*

Một biến ngẫu nhiên X chỉ nhận giá trị dương được gọi là có phân bố xác suất **log-normal** nếu như $\ln X$ có phân bố xác suất normal. Từ định nghĩa trên, ta có ngay hệ quả sau: nếu G_t là một chuyển động Brown hình học, và $t > s$, thì G_t/G_s có phân bố xác suất log-normal.

Chú ý rằng, tuy chuyển động Brown B_t là martingale, nhưng $\exp(B_t)$ không phải là martingale. Thật vậy, ta có

$$\mathbb{E}(\exp(B_t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2/2t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t/2} e^{-(x-t)^2/2t} dx = e^{t/2} \tag{1.54}$$

tăng theo thời gian, chứ không bất biến, và do đó nó không thể là martingale. Tuy nhiên, đẳng thức trên cũng cho thấy $\mathbb{E}(\exp(B_t - t/2)) = 1$ là bất biến theo thời gian. Hơn nữa, ta có:

Định lý 1.8. *(Định lý và định nghĩa). Nếu B_t là chuyển động Brown thì quá trình ngẫu nhiên $\exp(B_t - t/2)$ là martingale. Quá trình ngẫu nhiên $\exp(B_t - t/2)$ này được gọi là* **chuyển động Brown hình học chuẩn tắc**.

Chứng minh. Phía trên ta đã kiểm tra rằng $\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_0) = G_0 = 1$, trong đó $G_t = \exp(B_t - t/2)$ là chuyển động Brown hình học chuẩn tắc. Việc kiểm tra đẳng thức $\mathbb{E}(G_{t+s}|\mathcal{F}_s) = G_s$ với mọi $s \geq 0, t > 0$ hoàn toàn tương tự, dựa trên tính chất của chuyển động Brown B_t. Thật vậy, khi s cố định, thì $G_{t+s}/G_s = \exp(B_{t+s} - B_s - t/2)$ cũng là một chuyển động Brown hình học chuẩn tắc, vì $B_{t+s} - B_s$ cũng là một chuyển động Brown hình học, do đó ta có đẳng thức trên. □

Bài tập 1.8. Giả sử μ là một hằng số tùy ý. Chứng minh rằng quá trình $\exp(\mu B_t - \frac{\mu^2 t}{2})$, trong đó B_t là chuyển động Brown chuẩn tắc, là một quá trình martingale.

1.3 Vi phân của các quá trình ngẫu nhiên

Tương tự như đối với các hàm số, chúng ta cũng muốn làm các phép vi tích phân đối với các quá trình ngẫu nhiên, để có thể tìm lại được các quá trình ngẫu nhiên từ vi phân của nó, qua việc tính tích phân, giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên (theo biến thời gian). Tuy nhiên, do các quá trình ngẫu nhiên nói chung không khả vi theo biến thời gian (chuyển động Brown là một ví dụ tiêu biểu), nên các phép tính vi tích phân của chúng phức tạp hơn về mặt kỹ thuật so với giải tích thông thường.

1.3.1 Vi phân của chuyển động Brown hình học

Để hiểu vi phân ngẫu nhiên, trước hết chúng ta xét một ví dụ cụ thể: vi phân của $\exp(B_t)$, trong đó B_t là một chuyển động Brown chuẩn tắc.

Nhắc lại rằng, nếu $f(t)$ là một hàm khả vi theo t, thì ta có công thức sau:

$$d\exp(f) = \exp(f)df = \exp(f)f'dt, \tag{1.55}$$

trong đó $f' = df/dt$ là đạo hàm của f theo t. Thế nhưng, B_t không khả vi theo t, và khi thay $f(t)$ bằng B_t thì công thức trên không đúng nữa ! Để hiểu tại sao, chúng ta quay trở lại định nghĩa thế nào là vi phân.

Vi phân df của một hàm số (hay ánh xạ) f là một ký hiệu toán học, để chỉ độ thay đổi của f khi các biến của nó thay đổi (ở đây chỉ có 1 biến, là biến thời gian t): khi t thay đổi một đại lượng Δt, thì f thay đổi một đại lượng là $\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t)$, và tỷ lệ thay đổi giữa f và t bằng

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{1.56}$$

Trong trường hợp mà tỷ lệ trên tiến tới mộ số nào đó khi Δt tiến tới 0, thì số đó được gọi là đạo hàm của f theo t, thường ký hiệu là $f'(t)$, và ta viết

$$\frac{df}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \tag{1.57}$$

hay

$$df = f'dt. \tag{1.58}$$

Đẳng thức cuối cùng có nghĩa là khia mà t thay đổi thì f cũng thay đổi, với tốc độc thay đổi bằng f' lần tốc độ thay đổi của t.

Vi phân dB_t cũng là khái niệm để đo độ thay đổi của B_t khi mà t thay đổi. Thế nhưng, vì B_t không khả vi tại bất cứ điểm nào, nên không thể viết dB_t dưới dạng H_tdt (trong đó

H_t là một quá trình ngẫu nhiên). Bởi vậy, cách đơn giản là ta sẽ để nguyên dB_t, và hiểu nó như là một ký hiệu toán học để chỉ một biến động "vô cùng nhỏ" dạng chuyển động Brown. Vì chuyển động Brown là quá trình ngẫu nhiên "đơn giản nhất", quan trọng nhất, được nghiên cứu kỹ nhất, trong các loại quá trình ngẫu nhiên liên tục không khả vi, nên ta sẽ sử dụng dB_t như một vi phân cơ sở tương tự như dt, và tìm cách biểu diễn vi phân của các quá trình ngẫu nhiên khác dưới dạng tổ hợp tuyến tính $H_t dt + F_t dB_t$ của dt và dB_t nếu có thể (trong đó H_t và F_t là hai quá trình ngẫu nhiên). Khi viết

$$dG_t = H_t dt + F_t dB_t \tag{1.59}$$

thì có nghĩa là

$$G(t + \Delta t) - G(t) = H_t.\Delta t + F_t.(B(t + \Delta t) - B(t)) + \epsilon, \tag{1.60}$$

trong đó là đại lượng rất nhỏ so với Δt, có thể bỏ qua: $\epsilon/\Delta t$ tiến tới 0 khi Δt tiến tới 0. Phần $F_t dB_t$ là phần không khả vi (theo nghĩa thông thường) và có kỳ vọng bằng 0 (vì kỳ vọng của $(B(t + \Delta t) - B(t))$ bằng 0) của dG_t, và phần $H_t dt$ là phần khả vi. Tất nhiên, nếu có thể viết $dG_t = H_t dt + F_t dB_t$, thì H_t và F_t được xác định duy nhất theo G_t, vì tổng của một phần khả vi và một phần không khả vi không thể bằng 0 trừ khi cả hai phần bằng 0.

Áp dụng ý tưởng trên vào trường hợp $G_t = \exp(B_t)$. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \exp(B_t)}{\exp(B_t)} = \frac{exp(B(t + \Delta t)) - \exp(B(t))}{\exp(B(t))} &= \exp(B(t + \Delta t) - B(t)) - 1 \\ &= \exp(\Delta B_t) - 1 = \Delta B_t + \frac{(\Delta B_t)^2}{2!} + \frac{(\Delta B_t)^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Nhắc lại rằng, biến phân bình phương của B_t trên một đoạn thời gian Δt bằng chính Δt. Do đó, $(\Delta B_t)^2$ xấp xỉ bằng Δt khi mà Δt nhỏ (trái ngược với trường hợp khả vi: nếu f khả vi thì $(\Delta f)^2$ rất nhỏ so với Δt, có thể bỏ qua). Các đại lượng $(\Delta B_t)^n$ với n từ 3 trở lên rất nhỏ so với Δt, có thể bỏ qua. Bởi vậy ta có

$$\frac{\Delta \exp(B_t)}{\exp(B_t)} = \Delta B_t + \frac{\Delta t}{2} + \epsilon, \tag{1.61}$$

trong đó $\epsilon/\Delta t$ tiến tới 0 khi Δt tiến tới 0 (trong hầu khắp mọi tình huống), từ đó ta suy ra công thức vi phân sau:

$$\frac{d \exp(B_t)}{\exp(B_t)} = dB_t + \frac{dt}{2}, \tag{1.62}$$

hay còn có thể viết là:

$$d \exp(B_t) = \frac{1}{2} \exp(B_t) dt + \exp(B_t) dB_t. \tag{1.63}$$

Một cách hoàn toàn tương tự, dễ dàng kiểm tra rằng

$$d\exp(B_t - \frac{t}{2}) = \exp(B_t - \frac{t}{2})dB_t, \tag{1.64}$$

có nghĩa là vi phân của chuyển động Brown hình học chuẩn tắc bằng chính nó nhân với vi phân của chuyển động Brown chuẩn tắc. Chú ý rằng, trong vế bên phải của đẳng thức trên không có sự tham gia của dt, chỉ có sự tham gia của dB_t là phần có kỳ vọng bằng 0, và điều này cũng giải thích tại sao $\exp(B_t - \frac{t}{2})$ lại là martingale (vi phân của nó luôn có kỳ vọng bằng 0, nên các bước chuyển động cũng đều có kỳ vọng bằng 0).

Bài tập 1.9. Tính vi phân của một chuyển động Brown hình học tùy ý $\exp(a + bt + \sigma B_t)$, trong đó a, b, σ là các hằng số, từ đó suy ra rằng các nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

trong đó μ và σ là các hằng số, chính là các chuyển động Brown hình học.

1.3.2 Bổ đề Itô

Một trong những công thức quan trọng mà chúng ta dùng trong phân tích ở phía trên về vi phân của chuyển động Brown hình học là:

$$(dB_t)^2 = dt, \tag{1.65}$$

Công thức này có thể hiểu là

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{(\Delta B_t)^2 - \Delta t}{\Delta t} = 0, \tag{1.66}$$

và nó ứng với công thức biến phân bình phương của chuyển động Brown. Ngoài công thức $(dB_t)^2 = dt$, còn được viết là $dB_t.dB_t = dt$, chúng ta còn có các công thức sau, tương đối hiển nhiên, cho việc tính vi phân các quá trình ngẫu nhiên:

$$dt.dB_t = dt.dt = 0. \tag{1.67}$$

Các công thức này được hiểu tương tự như trên, tức là các đại lượng $(\Delta t).(\Delta B_t)$ và $(\Delta t)^2$ là rất nhỏ so với Δt (thương của chúng chia cho Δt tiến tới 0 khi Δt tiến tới 0), có thể bỏ qua trong các phép tính toán vi phân.

Các công thức trên là cơ sở của công thức sau, cho phép chúng ta tính vi phân của các quá trình ngẫu nhiên có dạng hàm số $f(t, B_t)$ theo hai biến t và B_t trong đó B_t là chuyển động Brown:

Định lý 1.9. *Nếu $F_t = f(t, B_t)$ trong đó $f(t,x)$ là một hàm khả vi liên tục theo biến t và khả vi liên tục 2 lần theo biến x, thì*

$$dF_t = \frac{\partial f(t,B_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,B_t)}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,B_t)}{\partial x^2}dt. \tag{1.68}$$

Chứng minh của công thức trên hoàn toàn tương tự nhưng chứng minh của công thức vi phân của $\exp(B_t)$. So với trường hợp khả vi, thì thành phần cần thêm vào trong công thức là $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,B_t)}{\partial x^2}dt$, và lý do chính là bởi vì $(dB_t)^2 = dt$. Thật vậy, theo khải triển Taylor-Lagrange, ta có

$$\begin{aligned}\Delta f(t,B_t) &= f(t+\Delta t, B(t+\Delta t)) - f(t,B_t) = \\ &= [f(t+\Delta t, B(t+\Delta t)) - f(t, B(t+\Delta t))] + [f(t,B(t+\Delta t)) - f(t,B_t)] = \\ &= \frac{\partial f(t,B_t+\Delta t)}{\partial t}\Delta t + \epsilon_1 + \frac{\partial f(t,B_t)}{\partial x}\Delta B_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,B_t)}{\partial x^2}(\Delta B_t)^2 + \epsilon_2,\end{aligned}$$

trong đó ϵ_1 và ϵ_2 đều rất nhỏ (có thể bỏ qua) so với Δt, từ đó suy ra công thức trên.

Ví dụ 1.4. Ta có $d(tB_t^3) = (B_t^3 + 3tB_t)dt + 3tB_t^2 dB_t$, bởi vì $\partial(tx^3)/\partial t = x^3, \partial(tx^3)/\partial x = 3x^2$, và $\partial^2(tx^3)/\partial x^2 = 6tx$.

Một cách tổng quát hơn, ta có công thức sau, gọi là **công thức Itô**, hay **bổ đề Itô**:

Định lý 1.10 (Bổ đề Itô)**.** *Giả sử $f(t,x)$ là một hàm số khả vi liên tục theo biến t và khả vi liên tục 2 lần theo biến x, và X_t là một quá trình Itô thỏa mãn $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ trong đó B_t là chuyển động Brown. Khi đó ta có:*

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma_t\frac{\partial f}{\partial x}dB_t \tag{1.69}$$

Trong định lý trên có khái niệm quá trình Itô. Một quá trình ngẫu nhiên X_t được gọi là một **quá trình Itô** nếu nó là quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục, và vi phân của nó có thể viết được dưới dạng (hay nói cách khác, nó thỏa mãn phương trình vi phân dạng):

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \tag{1.70}$$

trong đó μ_t và σ_t là các các quá trình ngẫu nhiên tương thích (hoặc là các hàm số theo t) thỏa mãn điều kiện

$$\mathbb{E}(\int_0^t |\mu_s|^2 ds) < +\infty,\ \mathbb{E}(\int_0^t |\sigma_s|^2 ds) < +\infty \tag{1.71}$$

với mọi $t \geq 0$. Các quá trình ngẫu nhiên tương thích thỏa mãn điều kiện này được gọi là các quá trình ngẫu nhiên **có bình phương khả tích** (tức là có *tích phân bình phương hữu hạn*), hay còn gọi là thuộc lớp H^2.

Chứng minh của định lý 1.10 hoàn toàn tương tự như chứng minh công thức (1.68). Điều kiện bình phương khả tích được dùng để kiểm soát các đại lượng nhỏ khi tính giới hạn để tìm vi phân.

Bài tập 1.10. Chứng minh công thức (1.69) trong trường hợp σ_t và μ_t là các hàm số liên tục (không ngẫu nhiên) theo t.

1.4 Tích phân Itô

Nếu ta biết đạo hàm $f'(t)$ của một hàm số khả vi $f(t)$, thì nói chung ta có thể tìm lại được f từ f' bằng cách lấy tích phân:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds. \tag{1.72}$$

Tương tự như vậy, nếu ta biết vi phân của một quá trình Itô

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \tag{1.73}$$

thì về nguyên tắc, ta cũng phải tìm lại được quá trình ngẫu nhiên X_t từ các quá trình ngẫu nhiên μ_t và σ_t bằng cách lấy tích phân:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s. \tag{1.74}$$

Vấn đề là định nghĩa các tích phân trên sao cho thích hợp. Tích phân $\int_0^t \mu_s ds$ có thể được định nghĩa theo cách cổ điển (theo định nghĩa tích phân Riemann). Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy, việc định nghĩa tích phân $\int_0^t \sigma_s dB_s$ phức tạp hơn, do B_t có biến phân vô hạn. Trong phần này, chúng ta sẽ bàn cách định nghĩa tích phân $\int_0^t \sigma_t dB_t$ theo Kioshi Itô (1915–2008), một trong những cha đẻ của giải tích ngẫu nhiên, và tích phân này được gọi là **tích phân Itô**.

1.4.1 Tích phân Riemann–Stieltjes

Nhắc lại rằng, nếu f và g là hai hàm số trên một đoạn thẳng $[0, t] \subset \mathbb{R}$, thì tích phân

$$\int_0^t f dg, \tag{1.75}$$

được định nghĩa như sau, và gọi là **tích phân Riemann–Stieltjes**: Đặt

$$U_\rho(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_i \in [a_{i-1},a_i]} f(x_i)(g(a_i) - g(a_{i-1})) \tag{1.76}$$

và

$$L_\rho(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_i \in [a_{i-1},a_i]} f(x_i)(g(a_i) - g(a_{i-1})), \tag{1.77}$$

trong đó ρ là một phân hoạch của đoạn thẳng $[0,1]$ cho bởi một dãy các số $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = t$, rồi đặt

$$\int_0^t f dg = \lim_{mesh(\rho)\to 0} L_\rho(f,g) = \lim_{mesh(\rho)\to 0} U_\rho(f,g). \tag{1.78}$$

nếu như các giới hạn đó tồn tại và bằng nhau. (Ở đây $mesh(\rho) = \sup_i(a_i - a_{i-1})$ là ký hiệu độ nhỏ của phân hoạch ρ). Nếu tích phân Riemann–Stieltjes tồn tại, thì mọi tổng có dạng $\sum_{i=1}^n f(x_i)(g(a_i) - g(a_{i-1}))$, trong đó $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ có thể chọn tùy ý, đều tiến tới $\int_0^t f dg$ khi độ nhỏ $mesh(\rho)$ của phân hoạch ρ tiến tới 0, bởi vị tổng đó bị kẹp giữa $U_\rho(f,g)$ và $L_\rho(f,g)$. Trường hợp đặc biệt, khi mà $g(t) = t$, thì định nghĩa trên trùng với định nghĩa tích phân Riemann $\int_0^t f(s)ds$.

Nếu chẳng hạn g là một hàm khả vi liên tục, và f là hàm bị chặn và liên tục từng khúc, thì tích phân Riemann-Stieltjes $\int_0^t f dg$ tồn tại, và ta có công thức chuyển đổi sau:

$$\int_0^t f dg = \int_0^t f g' ds, \tag{1.79}$$

trong đó g' là đạo hàm của g.

Nếu chẳng hạn f và g không phải là hàm số, mà là các quá trình ngẫu nhiên, sao cho f liên tục và g có biến phân phữu hạn, thì ta vẫn có thể định nghĩa được tích phân Riemann–Stieltjes $\int_0^t f dg$ như trên. (Bản thân tích phân cũng sẽ là một quá trình ngẫu nhiên, vì ta định nghĩa nó cho từng tình huống và từng mốc thời gian). Thế nhưng khi mà $g = B_t$ là một chuyển động Brown, thì định nghĩa tích phân Riemann–Stieltjes nói chung không còn áp dụng được nữa, như ví dụ đơn giản sau đây cho thấy.

Ví dụ 1.5. Giả sử ta muốn định nghĩa tích phân $\int_0^t B_s dB_s$, trong đó B_t là một chuyển động Brown. Làm theo phương pháp Riemann–Stieltjes, ta viết

$$U_\rho(B,B) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_i \in [a_{i-1},a_i]} B(t_i)(B(a_i) - B(a_{i-1})), \tag{1.80}$$

$$L_\rho(B,B) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{t_i \in [a_{i-1},a_i]} B(t_i)(B(a_i) - B(a_{i-1})), \tag{1.81}$$

trong đó $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n = t$ là một phân hoạch ρ của đoạn thẳng $[0, t]$, rồi xét hiệu $U_\rho(B, B) - L_\rho(B, B)$. Dễ thấy rằng, với mỗi i ta có

$$\sup_{t_i \in [a_{i-1}, a_i]} B(t_i)(B(a_i) - B(a_{i-1})) - \inf_{t_i \in [a_{i-1}, a_i]} B(t_i)(B(a_i) - B(a_{i-1})) \geq (B(a_i) - B(a_{i-1}))^2, \tag{1.82}$$

bởi vậy

$$U_\rho(B, B) - L_\rho(B, B) \geq \sum_{i=1}^{n} (B(a_i) - B(a_{i-1}))^2. \tag{1.83}$$

Vế phải của bất đẳng thức trên, khi $mesh(\rho)$ tiến tới 0, chính là biến phân bình phương của chuyện động Brown trên đoạn thẳng thời gian $[0, t]$. Thế nhưng, ta biết rằng, biến phân bình phương của chuyển động Brown trên đoạn thẳng $[0, t]$ bằng t, lớn hơn 0. Do đó, $U_\rho(B, B) - L_\rho(B, B)$ không tiến tới 0 khi $mesh(\rho)$ tiến tới 0, và bởi vậy không thể định nghĩa được tích phân $\int_0^t B_s dB_s$ theo kiểu Riemann–Stieltjes, vì $U_\rho(B, B)$ và $L_\rho(B, B)$ không thể có cùng giới hạn khi $mesh(\rho)$ tiến tới 0.

Ví dụ đơn giản trên cho thấy, vì biến phân bình phương của B_t khác 0, nên chúng ta không thể định nghĩa được tích phân $\int_0^t B_s dB_s$ theo kiểu Riemann–Stieltjes. Do đó chúng ta cần một định nghĩa tích phân khác, gọi là tích phân Itô.

1.4.2 Định nghĩa tích phân Itô

Chúng ta sẽ định nghĩa các **tích phân Itô** có dạng

$$\int_0^t \phi_s dB_s, \tag{1.84}$$

trong đó B là một chuyển động Brown chuẩn tắc, và ϕ là một quá trình ngẫu nhiên có bình phương khả tích, tức là $\mathbb{E}\left(\int_0^t |\phi(s)|^2 ds\right) < \infty$ với mọi $t \in \mathbb{R}_+$.

Trước hết, ta sẽ định nghĩa tích phân Itô cho các quá trình sơ cấp. Một quá trình ngẫu nhiên ρ_t được gọi là **sơ cấp** (elementary), hay còn gọi là **đơn giản** (simple), trên đoạn thẳng thời gian $[0, t]$ nếu như tồn tại một phân hoạch cố định $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ của đoạn thẳng $[0, t]$, sao cho trên mỗi đoạn thẳng nửa mở $[a_{i-1}, a_i[$ thì $\rho(s, \omega)$ là hằng số theo thời gian (trong hầu hết mọi tình huống $\omega \in \Omega$), tức là $\rho(s, \omega) = \rho(a_{i-1}, \omega)$ với mọi $a_{i-1} \leq s < a_i$. Việc định nghĩa tích phân Itô cho các quá trình sơ cấp được suy ra trực tiếp từ tính chất cộng tính của tích phân và đẳng thức hiển nhiên cần phải đúng:

$$\int_a^b dB_s = B_b - B_a. \tag{1.85}$$

Nếu ϕ là một quá trình sơ cấp theo phân hoạch $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ của đoạn thẳng $[0, t]$, thì ta có:

$$\int_0^t \phi(s)dB(s) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(s)dB(s) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t_{i-1})dB(s) = \sum_{i=1}^{n} \phi(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

hay viết gọn lại là

$$\int_0^t \phi(s)dB(s) = \sum_{i=1}^{n} \phi(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})). \tag{1.86}$$

Đẳng thức trên chính là định nghĩa tích phân Itô trong trường hợp mà ϕ_s là một quá trình sơ cấp. Dễ thấy rằng, định nghĩa này không phụ thuộc vào phân hoạch đoạn thẳng $[0, t]$ so cho quá trình ngẫu nhiên ϕ là sơ cấp theo phân hoạch đó. Hơn nữa, có thể thấy rằng, khi mà ϕ_s là quá trình sơ cấp, thì tích phân Riemann–Stieltjes cũng có nghĩa, và trùng với tích phân Itô.

Khi mà ϕ là một quá trình ngẫu nhiên tổng quát thỏa mãn các điều kiện đã nêu ở trên, tích phân Itô được định nghĩa bằng cách lấy giới hạn, thông qua một dãy các quá trình sơ cấp hội tụ đến ϕ. Sự tồn tại của dãy này được cho bởi định lý sau:

Định lý 1.11. *Cố định một số $T > 0$ tùy ý. Giả sử ϕ là một quá trình ngẫu nhiên tương thích có bình phương khả tích. Khi đó tồn tại ϕ_n các quá trình ngẫu nhiên ($n \in \mathbb{N}$) tương thích và có bình phương khả tích, và sơ cấp trên đoạn thẳng $[0, T]$, sao cho*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T |\phi_n(t) - \phi(t)|^2 dt\right) = 0. \tag{1.87}$$

Dãy quá trình ngẫu nhiên ϕ_n thỏa mãn điều kiện của định lý trên được gọi là **hội tụ đến** ϕ theo chuẩn $L_2[0, T]$. Theo định nghĩa, chuẩn $L_2[0, T]$ của ϕ là:

$$\|\phi\|_{L_2[0,T]} := \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^T |\phi(t)|^2 dt\right)}. \tag{1.88}$$

Không gian các quá trình ngẫu nhiên tương thích có chuẩn $L_2[0, T]$ hữu hạn là một không gian Hilbert (sau khi ta coi rằng hai quá trình ngẫu nhiên là bằng nhau, nếu chuẩn $L_2[0, T]$ của hiệu của chúng bằng 0). Định lý trên tương tự như định lý mọi hàm số có bình phương khả tích đều có thể được xấp xỉ bằng các hàm số dạng bậc thang một cách chính xác tùy ý theo chuẩn L_2. Ta sẽ bỏ qua chứng minh của nó ở đây.

Khi ta đã tìm được một dãy quá trình ngẫu nhiên ϕ_n sơ cấp trên đoạn $[0, T]$ và hội tụ đến ϕ theo chuẩn $L_2[0, T]$, thì với mọi $t \leq T$ ta có thể định nghĩa **tích phân Itô** bằng giới hạn sau:

$$\int_0^t \phi(s)dB(s) := \lim_{n\to\infty} \int_0^t \phi_n(s)dB(s). \tag{1.89}$$

Giới hạn ở đây cũng được hiểu theo chuẩn $L_2[0,T]$: nếu đặt $F_{n,t} = \int_0^t \phi_n(s)dB(s)$ và $F_t = \int_0^t \phi(s)dB(s)$, thì nói rằng $F_{n,t}$ tiến tới F_t có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T |F_n(t) - F(t)|^2 dt\right) = 0$. Để chứng tỏ rằng định nghĩa trên có nghĩa, ta phải chứng minh là giới hạn ở vế phải của công thức trên tồn tại (tức là dãy các tích phân Itô $F_{n,t} = \int_0^t \phi_n(s)dB(s)$ là một dãy Cauchy theo chuẩn $L_2[0,T]$), và không phụ thuộc vào sự lựa chọn dãy ϕ_n. Các khẳng định này được suy ra từ một đẳng thức gọi là **đẳng cự Itô** (xem định lý 1.12). Chúng ta sẽ bỏ qua chứng minh ở đây.

Trong trường hợp mà quá trình ϕ là *liên tục bên trái* và *bị chặn địa phương* (locally bounded – tức là tập hợp các tình huống sao cho quĩ đạo chạy ra vô cùng trong khoảng thời gian hữu hạn có xác suất bằng 0 – các quá trình ngẫu nhiên mà chúng ta quan tâm đến trong sách này đều bị chặn địa phương), ta có thể xây dựng dãy quá trình sơ cấp ϕ_n trên $[0,T]$ hội tụ đến ϕ theo chuẩn $L_2[0,T]$ như sau: đặt

$$\phi_n(t) = \phi([nt/T]T/n) \tag{1.90}$$

với mọi $t \leq T$, trong đó $[nt/T]$ là ký hiệu phần nguyên của số nt/T, có nghĩa là nếu $kT/n \leq t < (k+1)T/n$ thì $\phi_n(t) = \phi(kT/n)$, hay nói cách khác, giá trị của ϕ_n trên đoạn thẳng $[kT/n, (k+1)T/n[$ là bất biến theo t và bằng giá trị của ϕ tại điểm đầu của đoạn thẳng đó, tức là điểm kT/n. (Chú ý là ta không thể lấy giá trị của ϕ tại điểm cuối hay các điểm khác của đoạn thẳng $[kT/n, (k+1)T/n[$ để làm giá trị của ϕ_n trên đoạn thẳng đó, vì nếu lấy như vậy thì quá trình ϕ_n nói chung sẽ không phải là một quá trình tương thích). Theo cách chọn ϕ_n này, ta được công thức

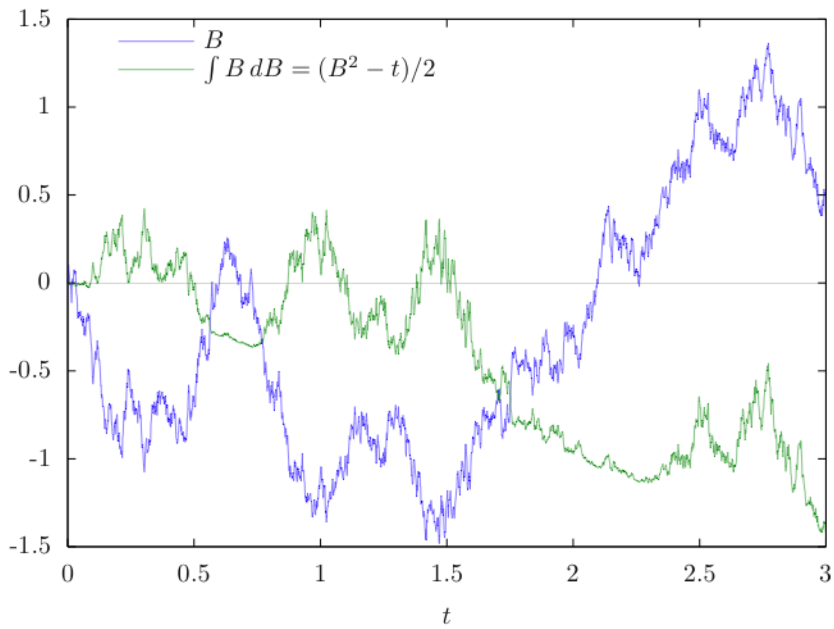
$$\int_0^T \phi_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\frac{kT}{n})(B(\frac{(k+1)T}{n}) - B(\frac{kT}{n})). \tag{1.91}$$

Ví dụ 1.6. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}, \tag{1.92}$$

với mọi t, trong đó B_t là chuyển động Brown. Thật vậy, theo công thức (1.91) ta có

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B(\frac{kT}{n})(B(\frac{(k+1)T}{n}) - B(\frac{kT}{n})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[(B(t))^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(B(\frac{(k+1)T}{n}) - B(\frac{kT}{n}))^2\right].\end{aligned}$$



Hình 1.4: Một quĩ đạo của chuyển động Brown B_t và tích phân Itô $\int_0^t B_s dB_s$

Theo tính chất biến phân bình phương của chuyển động Brown, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(B(\frac{(k+1)T}{n})-B(\frac{kT}{n}))^2=t,$$

từ đó ta được công thức tích phân cần chứng minh. Chú ý rằng, nếu F_t có biến phân bình phương bằng 0 và $F_0=0$, thì ta có $\int_0^t F_s dF_s = F_t^2$ (định nghĩa tích phân một cách tương tự, hoặc theo định nghĩa Riemann–Stieltjes), trong khi đó trong công thức (1.92) có thêm thành phần $t/2$ ở vế phải. Ví dụ đơn giản này cho thấy ảnh hưởng của biến phân bình phương vào giá trị của tích phân Itô.

1.4.3 Một số tính chất cơ bản của tích phân Itô

Tương thích: Tích phân Itô là một quá trình tương thích với lọc sigma-đại số ban đầu.

Tuyến tính: Tương tự như tích phân thông thường, tích phân Itô có tính chất tuyến tính: nếu a và b là hai hằng số thì

$$\int_0^t (a\phi_s + b\psi_s)dB_s = a\int_0^t \phi_s dB_s + b\int_0^t \psi_s dB_s. \tag{1.93}$$

Liên tục: Nếu một quá trình ngẫu nhiên F_t viết được dưới dạng tích phân Itô $F_t = \int_0^t \phi_s dB_s$, thì hầu hết mọi quĩ đạo của F_t là liên tục.

Tích phân Itô là phép tính ngược của vi phân: Tương tự như tích phân thông thường, tích phân Itô thỏa mãn tính chất cơ bản sau, liên hệ giữa phép tính vi phân và phép tính tích phân: nếu $F_t = \int_0^t \phi_s dB_s$, trong đó ϕ_s là một quá trình ngẫu nhiên có tích phân bình phương hữu hạn, thì $dF_t = \phi_t dB_t$, và ngược lại, nếu $dF_t = \phi_t dB_t$, thì $F_t = F_0 + \int_0^t \phi_s dB_s$. Tổng quát hơn, nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX_t = \mu_t d_t + \sigma_t dB_t \tag{1.94}$$

là

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s. \tag{1.95}$$

Ví dụ, nghiệm của phương trình $dX_t = B_t dB_t$ là $X_t = X_0 + \int_0^t B_s dB_s = X_0 + B_t^2/2 - t/2$. Tính ngược lại, theo bổ đề Itô, dễ dàng thấy rằng $d(B_t^2/2 - t/2) = B_t dB_t$.

Đẳng cự Itô: Đẳng cự Itô là một công thức giải tích cho phép đánh giá chuẩn của các quá trình ngẫu nhiên (được dùng chẳng hạn trong việc chứng minh sự hội tụ của một dãy quá trình ngẫu nhiên định nghĩa theo tích phân Itô).

Định lý 1.12 (đẳng cự Itô)**.** *Nếu ϕ là một quá trình ngẫu nhiên có bình phương hữu hạn thì ta có*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t |\phi_s|^2 ds\right) \tag{1.96}$$

với mọi $t \geq 0$.

Việc chứng minh đẳng cự trên là một bài tập dành cho bạn đọc trong trường hợp mà ψ là một quá trình cơ sở. Trường hợp tổng quát suy ra từ trường hợp các quá trình cơ sở bằng phép lấy giới hạn.

Một hệ quả trực tiếp của đẳng cự Itô là: tích phân Itô $F_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ cũng là một quá trình có bình phương khả tích (nếu giả sử là ϕ_s có bình phương khả tích).

Biến phân bình phương: Ta có đẳng thức sau cho biến phân bình phương của tích phân Itô:

$$QV_0^t(F) = \int_0^t |\phi_s|^2 ds \tag{1.97}$$

Tương tự như đẳng cự Itô, chứng minh của công thức trên trong trường hợp mà ϕ_t là một quá trình cơ sở tương đối hiển nhiên và suy ra trực tiếp từ biến phân bình phương của chuyển động Brown.

Tính chất martingale:

Định lý 1.13. *Tích phân Itô $F_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ là một quá trình martingale (địa phương), có nghĩa là*

$$\mathbb{E}\left(F_t|\mathcal{F}_t\right) = F_s \tag{1.98}$$

với mọi $T > t$.

Chứng minh. Trong trường hợp mà ϕ là một quá trình sơ cấp, thì định lý trên khá hiển nhiên, vì $\mathbb{E}(B_{t'} - B_{t''} \mid \mathcal{F}_t) = B_t - B_t = 0$ với mọi $t', t'' > t$. Trường hợp tổng quát suy ra từ trường hợp riêng này bằng cách lấy giới hạn trong định nghĩa tích phân Itô. □

Khẳng định ngược lại cũng đúng, và nó được biết dưới tên gọi **định lý biểu diễn martingale**: Nếu M_t là một quá trình martingale, liên tục, tương thích với lọc sigma-đại số sinh bởi chuyển động Brown B_t, và có bình phương khả tích, thì nó viết được dưới dạng tích phân Itô.

Công thức tích phân từng phần. Trong tích phân $\int \phi_t dB_t$, thành phần B_t được gọi là **integrator** (bội lấy tích phân). Định nghĩa tích phân Itô áp dụng đượng không những chỉ cho integrator là chuyển động Brown, mà còn cho các integrator tổng quát hơn, có dạng *semi-martingale*. Theo định nghĩa, một quá trình ngẫu nhiên X_t được gọi là **semi-martingale** nếu nó viết được dưới dạng tổng của hai thành phần, $X_t = A_t + M_t$, trong đó A_t có biến phân hữu hạn, còn M_t là martingale địa phương (tức là thỏa mãn tính chất martingale (1.98)). Tương tự như trường hợp tích phân Riemann–Stieltjes cổ điển, ta có công thức tích phân từng phần sau: nếu X_t và Y_t là hai semimartingale thì

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_{s-}\, dY_s + \int_0^t Y_{s-}\, dX_s + [X,Y]_t, \tag{1.99}$$

trong đó X_{s-} là ký hiệu giới hạn bên trái, tức là $X_{s-} = \lim_{r\to s-} X_r$, và $[X,Y]_t$ là ký hiệu quá trình **hiệp biến phân bình phương** của X và Y, định nghĩa như sau

$$[X,Y]_t = \lim_{mesh(\rho)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{a_i} - X_{a_{i-1}})(Y_{a_i} - Y_{a_{i-1}}), \tag{1.100}$$

(với giả sử là giới hạn đó tồn tại), trong đó $\rho = \{0 = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n = t\}$ là ký hiệu một phân hoạch của đoạn thẳng $[0,t]$. Sự khác nhau giữa công thức tích phân từng phần cho tích phân Riemann-Stieltjes và công thức tích phân từng phần cho tích phân Itô nằm chính ở thành phần hiệp biến phân bình phương này.

Ví dụ 1.7. Trong trường hợp đặc biệt, khi $Y_t = X_t$ là cùng một quá trình ngẫu nhiên, thì $[X,Y]_t = [X,X]_t$ chính là quá trình biến phân bình phương của X_t, và ta được công thức sau:

$$\int_0^t X_s dX_s = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - [X,X]_t). \tag{1.101}$$

Bài tập 1.11. Tính các tích phân Itô sau:

a) $\int_0^t B_s^2 dB_s$

b) $\int_0^t B_s dB_s^2$

c) $\int_0^t \exp(B_s) d(B_s + s)$

Tài liệu tham khảo

[1] Robert Buchanan, An undergraduate introduction to financial mathematics, World Scientific, 2006

[2] M. Capinski and T. Zastawniak, Mathematics for finance - An introduction to financial engineering, Springer, 2003.

[3] Kiryakos Chourdakis, Financial engineering - a brief introduction using the Matlab system, 2008.

[4] , Davies, Glyn. A History of money from ancient times to the present day, 3rd. ed. Cardiff: University of Wales Press, 2002. 720p.

[5] Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái, Nhập môn hiện đại Xác suất Thống kê, 2010.

[6] R. Elliott and K. Kopp, Mathematics of financial markets, 2nd edition, Springer, 2005.

[7] S. Focardi and F. Fabozzi, The mathematics of financial modeling a nd investment management, Wiley, 2004.

[8] Joel Greenblatt, You Can Be a Stock Market Genius: Uncover the Secret Hiding Places of Stock Market Profits, 1997.

[9] Joel Greenblatt, The little book that beats the market, John Wiley & Sons, 2006.

[10] M. Harrison and P. Waldron, Mathematical economics and finance, 1998.

[11] John Hull, Options, futures, and other derivatives, 5th edition.

[12] I. Karatzas and S. Shreve, Brown motion and stochastic calculus, 2nd ed., 1991.

[13] Dalih Neftci, Principples of financial engineering, 2nd edition, Academic Press, 2008.

[14] Stanley Pliska, Introduction to mathematical finance - discrete time models, 2001.

[15] Martin Pring, Technical analysis explained, 4th ed., 2002.

[16] Sheldon Ross, An introduction to mathematical finance, Cambridge University Press, 1999.

[17] Nguyễn Duy Tiến, Các mô hình xác suất và ứng dung, Phần III: Giải tích ngẫu nhiên, NXB Đại học Quốc gia Hà nội, 2005.

[18] P. Wilmott et al., The mathematics of financial derivatives - A student introduction, 1996.