Trabajo Monográfico

Anthony Enrique Huertas Quispe Cod:20173728
Prof: José Delgado

A lifetime distribution with decreasing failure rate

Suponemos que $T_1, T_2, \ldots, T_N$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con

$$T_i \sim Exp(\beta) \text{ con } t_i \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \beta > 0, \quad \text{i.e,} \quad f_{T_i}(t_i) = \beta e^{-\beta t_i},\ F_{T_i}(t_i) = 1 - e^{-\beta x}. \tag{1}$$

$$N \sim g(p) \text{ con } n \in \mathbb{N}^+ \text{ y } p \in (0,1), \quad \text{i.e,} \quad f_N(n) = p(1-p)^{n-1},\ F_N(n) = 1 - (1-p)^n \tag{2}$$

donde además, T_i es independiente de N.

Sea $T = \text{mín}(T_1, T_2, \ldots, T_N)$. El objetivo es determinar la distribución de T, en particular su función densidad f_T. Para ello seguiremos los siguiente pasos:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, Determinar la densidad condicional $f_{T|N=n}$.

   Solución. Fijemos $n \in \mathbb{N}^+$. Primero determinemos la distribución acumulada $F_{T|N=n}$

$$\begin{aligned} F_{T|N=n}(t) &= P(t \leq \text{mín}\{T_1, \ldots, T_N\} \mid N = n) \\ &\overset{\substack{\text{Principio de} \\ \text{Sustitución}}}{=} P(t \leq \text{mín}\{T_1, \ldots, T_n\} \mid N = n) \\ &\overset{\substack{\text{Independencia} \\ \text{con } N}}{=} P(t \leq \text{mín}\{T_1, \ldots, T_n\}) \\ &\overset{\substack{\text{Distribución} \\ \text{del mínimo}}}{=} 1 - (1 - F_{T_i}(t))^n \end{aligned}$$

   Luego, la densidad condicional $f_{T|N=n}$ vendría dada por

$$\begin{aligned} f_{T|N=n}(t) &= \frac{dF_{T|N=n}(t)}{dt} \\ &= n(1 - F_{T_i}(t))^{n-1} \frac{dF_{T_i}(t)}{dt} \\ &= n(1 - F_{T_i}(t))^{n-1} f_{T_i}(t) \\ &\overset{\text{por (1)}}{=} n\beta e^{-n\beta t} \end{aligned} \tag{3}$$

   Tenemos que $f_{T|N=n}(t) = n\beta e^{-n\beta t}$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. $\square$

2. Determinar el modelo probabilístico conjunto del vector aleatorio (N, T), $f_{N,T}$

   Solución. Fijemos $n \in \mathbb{N}^+$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Se hará uso de la regla del producto,

$$\begin{aligned} f_{N,T}(t, n) &= f_N(n) f_{T|N=n}(t) \\ &\overset{\text{por (2),(3)}}{=} p(1-p)^{n-1} n\beta e^{-n\beta t} \end{aligned} \tag{4}$$

   Tenemos que $f_{N,T}(t, n) = p(1-p)^{n-1} n\beta e^{-n\beta t}$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$ y $t \in \mathbb{R}^+$. $\square$

3. Determinar la función densidad marginal de T, f_T.

Solución. Fijemos $t \in \mathbb{R}^+$ y luego se sumarán las $f_{N,T}(t,n)$ bajo todas las $n \in \mathbb{N}^+$, esto es:

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} n\beta e^{-n\beta t} \\
&= \beta p \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} e^{-n\beta t} \\
&= \beta p \left(e^{-\beta t} e^{\beta t}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} e^{-n\beta t} \\
&= \beta p e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} e^{-(n-1)\beta t} \\
&= \beta p e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} n \left((1-p)e^{-\beta t}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\beta p e^{-\beta t}}{1-(1-p)e^{-\beta t}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right) \left((1-p)e^{-\beta t}\right)^{n-1}}_{\substack{= 1/(1-(1-p)e^{-\beta t}) \\ \text{dado que se trata de la esperanza de una dis. geométrica} \\ \sim g\left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right)}} \\
&= \frac{\beta p e^{-\beta t}}{1-(1-p)e^{-\beta t}} \frac{1}{1-(1-p)e^{-\beta t}} \\
&= \frac{\beta p e^{-\beta t}}{\left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right)^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Por tanto, el modelo probabilístico, función de densidad, de T, viene dado por,

$$
f_T(t) = \frac{\beta p e^{-\beta t}}{\left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right)^2} \qquad (6)
$$

□