PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
Escuela de Posgrado / Maestría en Estadística / Fundamentos de Probabilidad
Anthony Enrique Huertas Quispe

EJERCICIOS RESUELTOS 1.1

Ejercicio 1.1.

Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $A \in \Omega_2$ demuestre las propiedades siguientes:

a) $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$, b) $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} A_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(A_j)$, c) $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} A_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(A_j)$.

Demostración.

a)

$$f^{-1}(A^c) \;=\; \{x\in\Omega_1:\ f(x)\in A^c\} \;=\; \{x\in\Omega_1:\ f(x)\in A\}^c \;=\; \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

b)

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(\bigcup_{j\in J} A_j) \;\Leftrightarrow\; f(x)\in \bigcup_{j\in J} A_j \;&\Leftrightarrow\; \exists j\in J\,/\,f(x)\in A_j \\ &\Leftrightarrow\; \exists j\in J\,/\,x\in f^{-1}(A_j) \\ &\Leftrightarrow\; x\in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(A_j) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(\bigcap_{j\in J} A_j) \;\Leftrightarrow\; f(x)\in \bigcap_{j\in J} A_j \;&\Leftrightarrow\; f(x)\in A_j\ \ \forall j\in J \\ &\Leftrightarrow\; x\in f^{-1}(A_j)\ \ \forall j\in J \\ &\Leftrightarrow\; x\in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.2.

Halle $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y compruebe formalmente. en cada uno de los casos siguientes:

a) $A_n = \left(a,\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right]$, b) $A_n = \left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b\right)$, b) $A_n = \left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right]$

Demostración.

$(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(a,\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right].$

Veamos:

Si $x\in(a,b) \Leftrightarrow x\in\left(a,\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right]$ para $n\geq\dfrac{b-a}{2(b-x)} \Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(a,\, b-\dfrac{b-a}{2n}\right]$

Si $x\in(a,b) \Leftrightarrow x\in\left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b\right)$ para $n\geq\dfrac{b-a}{2(x-a)} \Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\dfrac{b-a}{2n},\, b\right)$

Si $x \in (a,b) \Leftrightarrow x \in \left[a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}\right]$ para $n \geq \max\left\{\frac{b-a}{2(x-a)}, \frac{b-a}{2(b-x)}\right\}$
$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}\right]$. □

Ejercicio 1.3.

Dé un contraejemplo para ilustrar que no es una propiedad que la reunión de σ-álgebras sea una σ-álgebra .

Demostración. Supongamos $\Omega = \{a,b,c\}$ y las siguientes σ-álgebras :

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a,b\}, \{c\}\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a,c\}, \{b\}\}$$

Vemos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c\}, \{b\}\}$ no es un σ-álgebra ya que en particular no es cerrada respecto a reuniones finitas:

$$\{b\}, \{c\} \in \mathcal{F}; \text{ sin embargo } \{b\} \cup \{c\} = \{b,c\} \notin \mathcal{F}.$$

□

Ejercicio 1.4.

Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de Ω y $A_1 \in \mathcal{C}$, $A_2 \in \mathcal{C}, \ldots$, demuestre que:

a) $A_1 \in \sigma(\mathcal{C})$, $A_1 \in \sigma(\mathcal{C}), \ldots$; b) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C})$; c) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C})$.

Demostración.

a) Por definición, $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ entonces $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{C})$.

b) Como $\sigma(\mathcal{C})$ es σ-álgebra entonces, por axiomas, es cerrada respecto a reuniones infinitas enumerables; es decir

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C}).$$

c) Además, por propiedad, es cerrada respecto a intersecciones infinitas enumerables; es decir

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C}).$$

□

Ejercicio 1.5.

Si $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ y $C \in \mathcal{C}$, demuestre que $(A \cap B^c) \cup C \in \sigma(\mathcal{C})$.

Demostración. Por ejercicio 1.4., $A, B, C \in \sigma(\mathcal{C})$ la cual es cerrada respecto a complemento (Axioma), intersecciones y reuniones finitas (Propiedades). Por tanto:

$$(A \cap B^c) \cup C \in \sigma(\mathcal{C}).$$

□

Ejercicio 1.6.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias de subconjuntos de Ω tales que $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$. Demuestre que $(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j^c) \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

Demostración. Primero sabemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y además por definición $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. De la hipótesis del problema y lo observado con anterioridad tenemos que:

$$\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset A \subset \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B});$$

$$\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B \subset \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}).$$

Debido a que $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ es cerrada respecto a complemento y reuniones infinitas numerables, tenemos que:

$$(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^c) \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}).$$

□

Ejercicio 1.7.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos familias de subconjuntos de Ω tales que todo conjunto de $\mathcal{C}_1$ puede ser expresado como uniones enumerables de conjuntos de $\mathcal{C}_2$; es decir, $\forall A \in \mathcal{C}_1 : \exists A_1 \in \mathcal{C}_2, \exists A_2 \in \mathcal{C}_2, \ldots$ tales que $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

a) Demuestre que $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, es decir, que $\forall A \in \mathcal{C}_1 : \; A \in \sigma(\mathcal{C}_2)$.

b) Demuestre que $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

Demostración.

a) Sea $A \in \mathcal{C}_1$. Veamos que $A \in \sigma(\mathcal{C}_2)$ para concluir la prueba:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}_1 \quad &\Rightarrow \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ donde } \forall j \in \mathbb{N} : \; A_j \in \mathcal{C}_2 \\ &\Rightarrow \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ donde } \forall j \in \mathbb{N} : \; A_j \in \sigma(\mathcal{C}_2) \\ &\Rightarrow \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C}_2). \end{aligned}$$

b) Por definición sabemos que: $\forall \mathcal{F}, \; \sigma$-álgebra de $\Omega : \; \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{F}$.
En particular $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}_2)$, entonces $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

□

Ejercicio 1.8.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos familias de subconjuntos de Ω tales que todo conjunto de cualquiera de estas familias puede ser expresado como una unión o intersección enumerable de conjuntos de la otra familia. Demuestre que $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$.

Demostración. Por Ejercicio 1.7, sabemos que si todo conjunto de $\mathcal{C}_1$ es expresado como reunión enumerable de conjuntos de $\mathcal{C}_2$ entonces $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. Veamos que también se cumple si fuese intersección enumerable:

$$A \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \text{ donde } A_j \in \mathcal{C}_2 \; \forall j \in \mathbb{N}$$

Además sabemos que $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ por tanto:

$$\forall j \in \mathbb{N}: \; A_j \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{C}_2)$$

Concluímos que $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. Análogamente al item b) del Ejercicio 1.7, tenemos que $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.
Ahora podemos suponer que si $\mathcal{C}_1$ es unión o intersección enumerable de conjuntos de $\mathcal{C}_2$ tenemos que $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. Por la hipótesis tenemos que además $\mathcal{C}_2$ es unión o intersección enumerable de conjuntos de $\mathcal{C}_1$ por lo que de forma análoga $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$. Como resultado tenemos que:

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \wedge \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2).$$

□

Ejercicio 1.9.

Demuestre que cada una de las familias de intervalos en $\mathbb{R}$: $\mathcal{I}_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R})\}$, $\mathcal{I}_2 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R})\}$, $\mathcal{I}_3 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R})\}$ e $\mathcal{I}_4 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R})\}$ generan la σ-álgebra de Borel: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Use el resultado del ejercicio 1.8 y recuerde que dado un conjunto (de cualquier) tipo este puede expresarse como una reunión (o bien intersección) enumerable de intervalos todos de un mismo tipo y diferente del correspondiente al intervalo dado.

Demostración. Tomemos $\mathcal{I} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R})\}$, por lo que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$. Veamos que se cumplen las siguientes igualdades haciendo uso de la propiedad en Ejercicio 1.8:

- $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_2)$:

$$\underbrace{(a,b)}_{\in \mathcal{I}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(a, b - \frac{b-a}{2n}\right]}_{\in \mathcal{I}_2} \quad \wedge \quad \underbrace{(a,b]}_{\in \mathcal{I}_2} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(a, b + \frac{b-a}{2n}\right)}_{\in \mathcal{I}}$$
$$\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_2)$$

- $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_3)$:

$$\underbrace{(a,b)}_{\in \mathcal{I}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left[a + \frac{b-a}{2n}, b\right)}_{\in \mathcal{I}_3} \quad \wedge \quad \underbrace{[a,b)}_{\in \mathcal{I}_3} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(a - \frac{b-a}{2n}, b\right)}_{\in \mathcal{I}}$$
$$\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_3)$$

- $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_3)$:

$$\underbrace{(a,b)}_{\in \mathcal{I}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left[a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}\right]}_{\in \mathcal{I}_4} \quad \wedge \quad \underbrace{[a,b]}_{\in \mathcal{I}_3} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left(a - \frac{b-a}{2n}, b + \frac{b-a}{2n}\right)}_{\in \mathcal{I}}$$
$$\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}_4)$$

- $\sigma(\mathcal{I}_2) = \sigma(\mathcal{I}_1)$:

$$\underbrace{(-\infty, b]}_{\in \mathcal{I}_1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(-j, b]}_{\in \sigma(\mathcal{I}_2)} \Rightarrow \sigma(\mathcal{I}_1) \subset \sigma(\mathcal{I}_2).$$

Ahora usemos las familias $\mathcal{I}_2$ y $\sigma(\mathcal{I}_1)$.

$$\underbrace{(a, b]}_{\in \mathcal{I}_2} = \underbrace{(-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c}_{\in \sigma(\mathcal{I}_1)} \Rightarrow \sigma(\mathcal{I}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{I}_1)) = \sigma(\mathcal{I}_1).$$
$$\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{I}_1) = \sigma(\mathcal{I}_2).$$

De lo obtenido tenemos que $\sigma(\mathcal{I}_1) = \sigma(\mathcal{I}_2) = \sigma(\mathcal{I}_3) = \sigma(\mathcal{I}_4) = \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

□

Ejercicio 1.10.

Dadas las familias de intervalos del ejercicio 1.9, considérese los conjuntos:
$A_1 \in \mathcal{I}_1$, $A_2 \in \mathcal{I}_2$, $A_3 \in \mathcal{I}_3$ y $A_4 \in \mathcal{I}_4$. Demuestre que

$$A_1^c \cup (A_2 \cap A_3^c) \cap A_4^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demostración. Sabemos que $A_j \in \mathcal{I}_j \subset \sigma(\mathcal{I}_j) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para $j = 1, 2, 3, 4$, la cual es cerrada respecto a intersecciones y complementos, por lo que

$$A_1^c \cup (A_2 \cap A_3^c) \cap A_4^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

□

Ejercicio 1.11.

Para cualquier secuencia de conjuntos de $\Omega, A_1, A_2, \ldots$, se definen su límite superior e inferior como siguen: i) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, ii) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.
Además, si el límite inferior y supierior coinciden, es decir, si $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$, se define el límite de la secuencia mediante $\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

a) Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

b) Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

c) Si $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

d) Si $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

e) Si cada uno de estos conjuntos pertenecen a una σ-álgebra , también pertenecen a esta los límites inferior y superior.

Demostración.

a) Fijemos n, sabemos por orden de conjuntos que $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$. Ahora veamos lo siguiente usando las hipótesis:

$$A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \ldots \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}/k \geq n : A_n \subset A_k \quad \Rightarrow \quad A_n \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Por tanto, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

b) Fijemos n, sabemos por orden de conjuntos que $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Ahora veamos lo siguiente:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Por tanto, $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

c) Fijemos n, sabemos por orden de conjuntos que $A_n \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Ahora veamos lo siguiente:

$$A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset \ldots \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq n : A_k \subset A_n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$$

Por tanto $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$. Concluímos que:

$$\limsup_{n\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

d) Fijemos n, sabemos por orden de conjuntos que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Ahora veamos lo siguiente:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Por tanto, $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

e) Sea $\mathcal{F}$ un σ-álgebra tal que $\Omega, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Veamos lo siguiente:

$$\underbrace{B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}}_{\substack{\mathcal{F}\ es\ cerrada\ respecto \\ a\ reuniones\ enumerables.}} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}}_{\substack{\mathcal{F}\ es\ cerrada\ respecto\ a \\ intersecciones\ enumerables.}} \qquad \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}.$$

$$\underbrace{C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}}_{\substack{\mathcal{F}\, es\, cerrada\, respecto\, a\\ intersecciones\, enumerables.}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}}_{\substack{\mathcal{F}\, es\, cerrada\, respecto\\ a\, reuniones\, enumerables.}} \quad \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}.$$

□

Ejercicio 1.12.

Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω. Si todo conjunto de $\mathcal{C}$ satisface cierta propiedad y la familia $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos que satisfacen esta propiedad es una σ-álgebra ; demuestre que todos los eventos de la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ satisfacen la propiedad.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{C}$ satisface cierta propiedad, llamémosla propiedad P. Además, tenemos que

$$\mathcal{F} = \{\text{Todos los conjuntos que satisfacen } P\} \Rightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{F}.$$

Por hipótesis, $\mathcal{F}$ es σ-álgebra , entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$. Concluímos que $\sigma(\mathcal{C})$ satisface la propiedad P. □

Ejercicio 1.13.

Sea $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω tal que $\forall A \in \mathcal{C} : g(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si además, la familia $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : g(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ es una σ-álgebra de Ω; demuestre que

$$A \in \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow g(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demostración. Bastaría comprobar que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$, ya que si $A \in \sigma(\mathcal{C})$ luego $A \in \mathcal{F}$ y, por definición, $g(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Veamos entonces,

$$\forall B \in \mathcal{C} : g(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall B \in \mathcal{C} : B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{F}.$$

Dado que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ y se concluye la prueba. □

Ejercicio 1.14.

Sean $\mathcal{F}$, una σ-álgebra de Ω, y $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, tal que $\forall A \in \mathcal{C} : g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, demuestre que

$$A \in \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Sugerencia. Demuestre que $\mathcal{G} = \left\{A \subset \mathbb{R} : g^{-1}(A) \in \mathcal{F}\right\}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}$.

Demostración. Primero veamos que la familia $\mathcal{G} = \left\{A \subset \mathbb{R} : g^{-1}(A) \in \mathcal{F}\right\}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}$, haciéndole valer sus tres axiomas:

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{G}$:
$$g^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{G}.$$

2. $\forall A \in \mathcal{G} : A^c \in \mathcal{G}$:

$$A \in \mathcal{G} \Rightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Rightarrow (g^{-1}(A))^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (g^{-1}(A^c)) \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}.$$

   La segunda implicancia se debe a que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra , mientras que la tercera implicancia es resultado del Ejercicio 1.1.a.

3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G} : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G} \quad &\Rightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N} : g^{-1}(A_j) \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} g^{-1}(A_j) \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \quad g^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

   La segunda implicancia se debe a que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra , mientras que la tercera implicancia es resultado del Ejercicio 1.1.b.

Habiéndose determinado que $\mathcal{G}$ es σ-álgebra solo basta con probar que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$, ya que si $A \in \sigma(\mathcal{C})$ luego $A \in \mathcal{G}$ y, por definición, $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Veamos,

$$\forall A \in \mathcal{C} : g^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{C} : A \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{G}.$$

Dado que $\mathcal{G}$ es σ-álgebra entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$ y se concluye la prueba. □

Ejercicio 1.15.

Sean una función $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de Ω_2. Demuestre que $f^{-1}(\mathcal{F})$ es una σ-álgebra de Ω_1.

Demostración. Veamos que $f^{-1}(\mathcal{F})$ cumpla los axiomas para una σ-álgebra :

1. $\Omega_1 \in f^{-1}(\mathcal{F})$:

$$\Omega_2 \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2) \in f^{-1}(\mathcal{F})$$

2. $\forall A \in f^{-1}(\mathcal{F}) : A^c \in f^{-1}(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} A \in f^{-1}(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \exists B \in \mathcal{F} / \, A = f^{-1}(B) \quad &\Rightarrow \quad A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \\ &\Rightarrow \quad A^c \in f^{-1}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

   La segunda implicancia usa el resultado del Ejercicio 1.1.a. La tercera implicancia se da debido a que $B^c \in \mathcal{F}$.

3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in f^{-1}(\mathcal{F}) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in f^{-1}(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \ldots \in f^{-1}(\mathcal{F}) \quad &\Rightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N} : \exists B_j \in \mathcal{F} / \, A_j = f^{-1}(B_j) \\ &\Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) \\ &\Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in f^{-1}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

   La segunda implicancia usa el resultado de Ejercicio 1.1.b. La tercera implicancia se da debido a que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{F}$.

Concluimos que $f^{-1}(\mathcal{F})$ es una σ-álgebra dado que cumple los tres axiomas. □

Ejercicio 1.16

Sean una función $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $\mathcal{C}$ una familia de conjuntos de Ω_2. Demuestre que

$$\sigma(\{f^{-1}(A):\ A \in \mathcal{C}\}) = \{f^{-1}(A):\ A \in \sigma(\mathcal{C})\}.$$

Use el resultado del Ejercicio 1.15.

Demostración. Denotemos

$$\begin{array}{rcl} \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) & = & \sigma(\{f^{-1}(A):\ A \in \mathcal{C}\}); \\ f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) & = & \{f^{-1}(A):\ A \in \sigma(\mathcal{C})\}. \end{array}$$

Basta con demostrar las siguientes inclusiones:

1. $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$:
   Veamos lo siguiente:

   $$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

   Dado que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es una σ-álgebra , como resultado del Ejercicio 1.15, entonces

   $$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

2. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$:
   Definamos el siguiente conjunto:

   $$S = \{B \in \sigma(\mathcal{C}):\ f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$$

   Solo bastaría comprobar que $S = \sigma(\mathcal{C})$.
   Por definición, $S \subset \sigma(\mathcal{C})$. Veamos que $\sigma(\mathcal{C}) \subset S$, demostrando las siguientes condiciones que concluyen la prueba:

   - $C \subset S$:

     $$\text{Si } A \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A \in \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \in S$$

   - S es σ-álgebra :
     Veamos que se cumplan los axiomas de una σ-álgebra
     - $\Omega_2 \in S$:

       $$\begin{array}{l} \Omega_2 \in \sigma(\mathcal{C}), \\ f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 \in S.$$

     - $\forall B \in S:\ B^c \in S$:

       $$\begin{array}{l} B \in \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} B^c \in \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{array} \quad \Rightarrow B^c \in S.$$

     - $\forall B_1, B_2, \ldots \in S : \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in S$:

       $$\forall j \in \mathbb{N}: \quad \begin{array}{l} B_j \in \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(B_j) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{array}$$

       $$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in S.$$

     Por tanto S es σ-álgebra

$\square$