

Determinación de la Temperatura en una Barra Metálica.

Anthony Enrique Huertas Quispe*
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima, Perú

5 de diciembre de 2015

Resumen

En este informe, con el fin de determinarse soluciones experimentales con respecto a las ecuaciones de calor, se han hecho uso de programas computacionales en base a dos métodos: Método de diferencias recíprocas (Método Explícito) y el Método de Crank-Nicolson (Método Implícito).

1. Introducción.

En lo que respecta a Ecuaciones Diferenciales parciales, existe una diversidad de métodos capaces de resolverlas; aquí es donde hacemos referencia a aquellos métodos que usan fórmulas de diferencias finitas en su proceso.

Para lograr comprender dichos procesos, haremos principalmente referencia a definiciones que básicamente conocemos para funciones de una variable, pero que luego serán usadas para varias variables, las cuales son:

$$\text{Serie de Taylor} \quad : \quad F(x+h) \approx F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x)$$

Primera derivada

$$-Puntos \text{ hacia adelante} \quad : \quad F'(x) = \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] + O(h)$$

Primera derivada

$$-Puntos \text{ hacia atrás} \quad : \quad F'(x) = \frac{1}{h}[F(x) - F(x-h)] + O(h)$$

Primera derivada

$$-Centrada \quad : \quad F'(x) = \frac{1}{2h}[F(x+h) - F(x-h)] + O(h^2)$$

Segunda derivada

$$-Centrada \quad : \quad F''(x) = \frac{1}{h^2}[F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)] + O(h^2)$$

En base a estas definiciones, y su forma análoga en varias variables, analizaremos la ecuación diferencial parcial *parabólica* del calor o difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

sujeta a

$$\begin{aligned} \text{Condiciones de contorno:} \quad & u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_f, \quad t > 0 \\ \text{Condiciones iniciales:} \quad & u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

*Matemático.

Los métodos que usan diferencias finitas, y nos permitan resolver ecuaciones de este tipo, nos pide escoger un entero $m > 0$, un tamaño de peso k y (x_i, t_j) tales que $x_i = ih$, ($h = 1/m$), para $i = 0, 1, \dots, m$ y $t = jk$ para $j = 0, 1, \dots$, para posteriormente usar una serie de Taylor tanto en t como en x y formar los siguientes cocientes de diferencias

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \mu_j), \quad \text{para algún } \mu_j \in (t_j, t_{j+1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \quad \text{para algún } \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Luego la ecuación en (1), tomaría su forma siguiente en el proceso de los métodos:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (2)$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, t_j)$.

2. Planteo del Problema.

[1] Una maquina industrial trabaja internamente con gases en altas temperaturas; con la finalidad de otorgarle calor suficiente a ciertas sustancias. Para el transporte de ellas, se usan *barras metálicas* de longitud L que van de interior a exterior de la máquina, estas a su vez, por defecto, reciben calor por el medio en el que se encuentran.

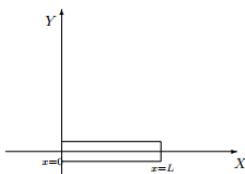


Figura 1: *
Barra de longitud L

La medida estándar de una barra es $L = 1m$ y además la temperatura que mantendría la barra no sería uniforme en su longitud dado que los gases en un espacio inmerso de gases, estos no distribuyen calor uniformemente.

Estudios demuestran que la distribución de la temperatura en la barra vendría dada por $f(x) = \sin(\pi x)$ y para que sea posible el traslado de la barra metálica luego de su salida del campo de gases, se mantienen a $0^\circ C$ sus extremos todo el tiempo y se mantienen aisladas sus superficies apenas salgan del interior de la máquina. Supongamos que el calor en la barra se distribuye uniformemente solo en sus secciones transversales.

El problema se basa en determinarse la temperatura en cada sección transversal de la barra y en cada tiempo requerido.

3. Formulación Matemática del Problema.

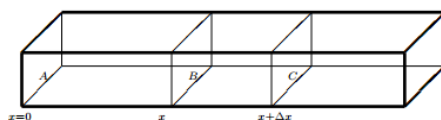


Figura 2: Secciones transversales de la barra.

Supongamos una sección transversal cuadrangular; la sección A en la posición $x = 0$, respectiva a un extremo de la barra; la sección B en la posición x y la sección C en la posición $x + \Delta x$. Definamos la temperatura en x y en un tiempo t como $T(x, t)$, por ende la temperatura en un tiempo t para A vendría dada como $T(0, t)$, para B como $T(x, t)$ y para C como $T(x + \Delta x, t)$. Ahora nos regiremos a ciertas leyes físicas correspondientes a transferencias del calor.

[Primera Ley]: Se necesita $ms\Delta T$ de calor para elevar una cantidad ΔT la temperatura de un objeto, donde m es la masa del objeto y s el calor específico del material.

[Segunda Ley]: La cantidad de calor que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo es proporcional a la tasa de cambio de la temperatura con respecto a la distancia perpendicular al área.

$$Q = -KA\Delta t \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} Q &= \text{Cantidad de calor que fluye a la derecha.} \\ \Delta t &= \text{Cantidad de tiempo durante el cual ocurre el flujo.} \\ K &= \text{Constante de proporcionalidad llamada conductividad térmica del material.} \end{aligned}$$

Por tanto, basándonos en la *Segunda Ley*, la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha

$$\text{en la sección B es : } -KA\Delta t \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_x$$

$$\text{en la sección C es : } -KA\Delta t \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x+\Delta x}.$$

Luego la cantidad de calor acumulada entre B y C , haciendo uso de la *Primera Ley* y de lo obtenido anteriormente, es

$$KA\Delta t \left[\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_x \right] = ms\Delta T$$

Dado que $m = \rho A\Delta x$, (ρ = densidad del material), entonces tendríamos que:

$$\begin{aligned} KA\Delta t \left[\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_x \right] &= \rho A\Delta x s\Delta T \\ K\Delta t \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_x \right]}{\Delta x} &= \rho s\Delta T. \end{aligned} \quad (4)$$

Si trabajamos con variaciones cercanas a cero, entonces obtenemos la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \quad (5)$$

donde $\kappa = \frac{K}{\rho s}$ es el *coeficiente de difusividad del material*.

Si la superficie de la barra no estuviese aislada, entonces (5) se reformularía como

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) - c(T - T_0) \quad (6)$$

donde c sería una constante y T_0 la temperatura del ambiente.

Sea el coeficiente de difusividad del material $\kappa = 1$. Como en este problema las superficies de la barras se mantienen aisladas, entonces la ecuación del calor para cualquiera de ellas se modelaría como en (5), con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, u(1, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin \pi x, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

4. Solución del Problema.

Luego de haberse formulado la ecuación de calor correspondiente al problema a tratarse, veamos como funcionan los métodos de Diferencias Finitas y Crank-Nicolson con el uso de programas computacionales.

En este caso se han elaborados los programas en *PYTHON versión 2.7*.

Antes que analicemos el resultado que nos proporcionan los métodos, tengamos en cuenta que la solución analítica a este problema vendría dado por:

$$u(x, t) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x) \quad (8)$$

El proposito de los métodos es para darlas uso cuando no sea sencillo la obtención de una solución analítica.

Nota:

- Se visualizará solo la última tabla de la iteración, para $t=0.05$ y $t=0.5$, y posteriormente las gráficas correspondientes para cada método para análisis correspondiente.
- Las gráficas indicarán lo siguiente:
 - a) Las de color *rojo* representarán las soluciones analíticas, indicando los valores de la temperatura, en 10^2 , y como van a ir disminuyendo con el tiempo y de acuerdo a la posición ubicada en la barra.
 - b) Las de color *azul* representarán las soluciones numéricas, e indicando de igual forma los valores de la temperatura pero de manera experimental.

4.1. Método de Diferencias Progresivas.

[2] Determinada ya la ecuación del calor, por (5):

$$\frac{T(x_i, t_j + h) - T(x_i, t_j)}{k} + O(k) = \alpha^2 \frac{T(x_i + h, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_i - h, t_j)}{h^2} + O(h^2). \quad (9)$$

El método se realiza reemplazando $T(x_i, t_j)$ por $w_{i,j}$ e ignorando los errores $O(k)$ y $O(h^2)$, resultando:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} \quad (10)$$

El error local de truncamiento para esta ecuación de diferencias es

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \quad (11)$$

donde $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ y $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Ahora de (9), obtenemos lo siguiente:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \quad (12)$$

De las condiciones iniciales deducimos que $w_{i,0} = f(x)$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, dado que $T(x, 0) = f(x)$ para todo $0 \leq x \leq 1$.

Consiguientemente, usando [11] se podrá determinar $w_{i,1}$ para todo $i \in \{0, \dots, m-1\}$, y sucesivamente los demás $w_{i,j}$ para todo $j \in \{1, N\}$.

Este método denominado como *método explícito* es convergente siempre que $0 < r \leq \frac{1}{2}$ donde $r = \frac{k}{h^2}$ ($k = T/N$, T : tiempo máximo, $h = L/m$).

En base a este método obtenemos las siguientes tablas:

METODO DE DIFERENCIAS PROGRESIVAS
k=0.001
h=0.1
r=0.1

t= 0.05

xi	w(i,50.000000)	u(xi,0.050000)	u(xi,t)-w(i,0.050000)
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.18896281009779659	0.18865426483947736	0.00030854525831922053
0.2	0.35942862376190621	0.35884173580491324	0.00058688795699296525
0.3	0.4947110594457233	0.493903277472376	0.00080778197334729906
0.4	0.58156772977636217	0.58061812511435973	0.00094960466200244564
0.5	0.61149649869585332	0.61049802526579722	0.00099847343005610156
0.6	0.58156772977636217	0.58061812511435973	0.00094960466200244564
0.7	0.4947110594457233	0.493903277472376	0.00080778197334729906
0.8	0.35942862376190621	0.3588417358049133	0.00058688795699290974
0.9	0.18896281009779659	0.18865426483947742	0.00030854525831916502
1.0	0.0	0	0

Figura 3: MDP, r=0,1.

METODO DE DIFERENCIAS PROGRESIVAS
k=0.01
h=0.1
r=1

t= 0.5

xi	w(i,50.000000)	u(xi,0.500000)	u(xi,t)-w(i,0.500000)
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-46117.691189877369	0.0022224141785126745	46117.693412291548
0.2	94690.87789225654	0.0042272829727624398	94690.873664973566
0.3	-145272.36269754887	0.0058183558564258589	145272.36851590473
0.4	192910.77382144349	0.0068398875299933238	192910.76698155596
0.5	-228635.23053737514	0.007191883355826368	228635.23772925849
0.6	241979.09056789754	0.0068398875299933238	241979.08372801001
0.7	-224666.56696207932	0.0058183558564258589	224666.57278043518
0.8	174085.08215434221	0.0042272829727624407	174085.07792705923
0.9	-95186.00793237568	0.0022224141785126754	95186.010154789852
1.0	0.0	0	0

Figura 4: MDP, r=1.

En la tablas se corroborará lo que se había informado teóricamente, para $0 < r \leq \frac{1}{2}$, [Figura 3] la solución numérica converge a la solución analítica, a diferencia que si $\frac{1}{2} < r$, [Figura 4] donde la solución numérica diverge.

Veamos entonces las gráficas correspondientes.

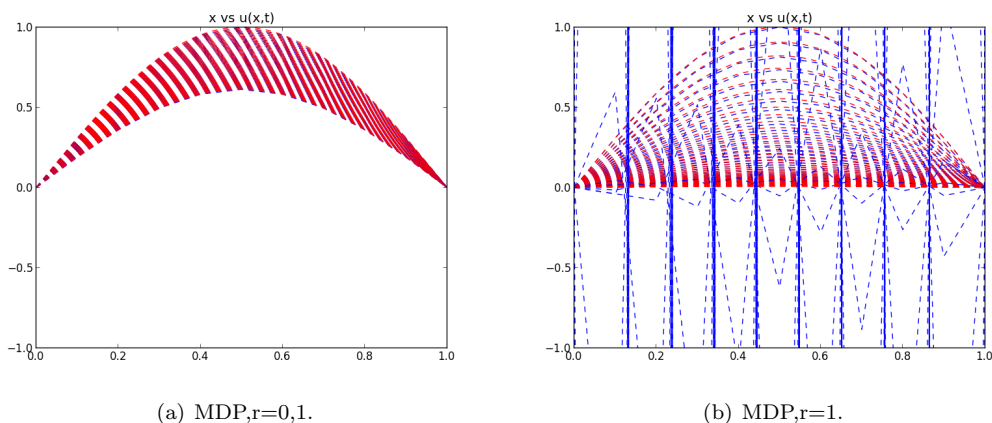


Figura 5: Metodos de Diferencias Progresivas.

En efecto, se logra observar la convergencia de las soluciones en la gráfica correspondiente a $r = 0,1$ y la divergencia de las soluciones para $r = 1$.

4.2. Método de Crank-Nicolson.

[3] Este método numerico aproxima la derivada con respecto al tiempo mediante la Primera Derivada-Centrada, y la derivada con respecto a x por la media de las diferencias centrales en los niveles de tiempo t_j, t_{j+1} . Es decir, la ecuación modelada en (5), vendría determinada como:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} = \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} \right) \quad (13)$$

El método se realiza desarrollando lo anterior, para obtener:

$$-rw_{i-1,j+1} + (2 + 2r)w_{i,j+1} - rw_{i+1,j+1} = rw_{i-1,j} + (2 - 2r)w_{i,j} + rw_{i+1,j} \quad (14)$$

donde $r = \frac{k}{h^2}$.

Se resuelve esta ecuación formándose N ecuaciones con N incógnitas. Este método denominado como *método implícito* es convergente para cualquier r .

Analicemos lo que ocurre usando los mismos casos del método anterior pero ahora aplicado a este método.

Obtenemos las siguientes tablas:

Metodo de Crank-Nicolson

k=0.001, h=0,1
r=0.1

xi	w(i,0.050000)	u(xi,t)	u(xi,t)-w(i,0.050000)
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.18941824908170107	0.18865426483947736	0.00076398424222370864
0.2	0.36029492018874049	0.35884173580491324	0.001453184383827244
0.3	0.49590341418538708	0.493903277472376	0.0020001367130110803
0.4	0.58296942683931363	0.58061812511435973	0.0023513017249539025
0.5	0.61297033020737279	0.61049802526579722	0.002472304941575576
0.6	0.58296942683931363	0.58061812511435973	0.0023513017249539025
0.7	0.49590341418538791	0.493903277472376	0.002000136713011913
0.8	0.36029492018874143	0.3588417358049133	0.0014531843838281322
0.9	0.18941824908170157	0.18865426483947742	0.00076398424222415273
1.0	0	0	

Figura 6: MDP, r=0,1.

Metodo de Crank-Nicolson

k=0.01, h=0,1
r=1

xi	w(i,0.500000)	u(xi,t)	u(xi,t)-w(i,0.500000)
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0023051233677887873	0.0022224141785126745	8.2709189276112833e-05
0.2	0.004384605199599512	0.0042272829727624398	0.00015732222683707223
0.3	0.0060348913251326705	0.0058183558564258589	0.00021653546870681155
0.4	0.0070944402402015267	0.0068398875299933238	0.00025455271020820291
0.5	0.0074595359146877637	0.007191883355826368	0.0002676525588613957
0.6	0.0070944402402015258	0.0068398875299933238	0.00025455271020820205
0.7	0.0060348913251326679	0.0058183558564258589	0.00021653546870680895
0.8	0.0043846051995995103	0.0042272829727624407	0.00015732222683706963
0.9	0.0023051233677887865	0.0022224141785126754	8.2709189276111098e-05
1.0	0	0	

Figura 7: MDP, r=1.

En la tablas se corroborará la convergencia sin importar si $\frac{1}{2} < r$.

Veamos entonces las gráficas correspondientes:

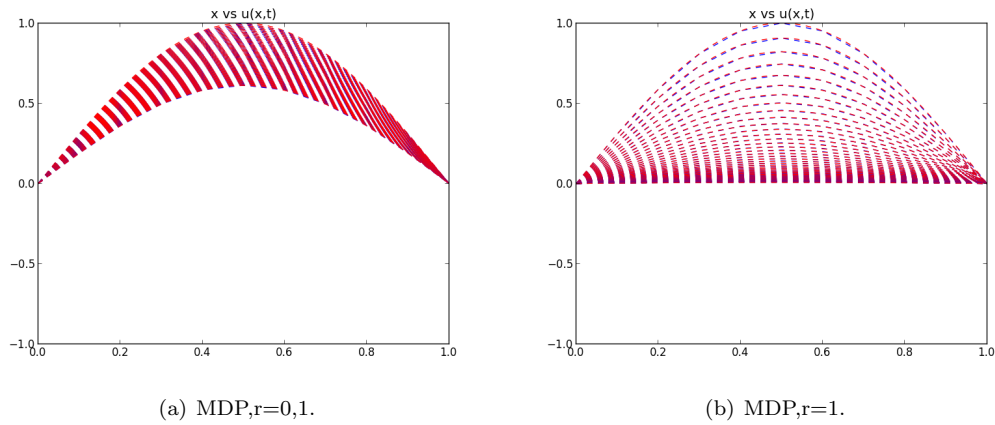


Figura 8: Metodos de Crank-Nicolson.

En efecto, se logra observar la convergencia de las soluciones en la gráficas correspondientes a $r = 0,1$ y $r = 1$.

5. Conclusiones.

- Se logró comprobar que el método de Crank-Nicolson puede resolver la ecuación modelada del problema propuesto. Además se logró corroborar teóricamente la divergencia de la solución cuando $0 < r \leq \frac{1}{2}$ para el Método de Diferencias Progresivas.
- Se demostró la eficiencia del programa utilizado y elaborado en *PYTHON versión 2,7*.

Referencias

- [1] Sixto Romero, Francisco J., Isabel M., *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Servicio de Publicaciones, Universidad de Huelva. España , 2001.
- [2] R. Burden, J. Douglas, *Análisis Numérico*, S.A. Ediciones Paraninfo, 2002.
- [3] R. Leveque, *Finite Differences methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, SIAM, 2007.