ÜBER DIE BEZIEHUNG DER KLASSENZAHLEN QUADRATISCHER KÖRPER ZUEINANDER

ARNOLD SCHOLZ

Über die ungeraden Klassenzahlfaktoren quadratischer Zahlkörper weiß man noch sehr wenig. Es scheint auch so, als ob aus einer Verwandtschaft von Körpern , die sich am deutlichsten in ihrer Diskriminante ausdrückt, kaum eine Beziehung für ihre Klassengruppen hergeleitet werden kann. Man könnte z.B. meinen, wenn man die Klassengruppe zweier Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$ kennt, müsse man schon irgendwelche Aussagen über den im Kompositum $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}\,)$ enthaltenen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{ab}\,)$ machen können, die sich nicht bloß auf die Anzahl der Geschlechter beziehen. Wenn man aber die Klassenzahltabellen vergleicht, so wird man kaum irgendwo einen Zusammenhang für die ungeraden Klassenzahlfaktoren dreier abhängiger quadratischer Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{c}\,)$; $abc = e^2$ finden. Und von der Klassengruppe des Produktkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}\,)$ weiß man auch, daß sich die 'ungerade' Klassengruppe dieses Körpers aus denen der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{b}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{c}\,)$ direkt zusammensetzt.[1] Danach sieht es eher so aus, als ob die ungeraden Klassengruppen der drei quadratischen Körper nichts miteinander zu tun haben. Man darf wohl *Vermutungen* von folgender Art aussprechen:

Besteht überhaupt für die Teilbarkeit der Klassenzahl quadratischer Körper durch eine ungerade Primzahl p eine bestimmte Dichte, so bestimmen sich für die Tripel abhängiger quadratischer Körper die Dichten für Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit multiplikativ aus den Einzeldichten.

Dabei sind die Körper nach der absoluten Diskriminante bezw. dem Diskriminantenprodukt geordnet gedacht.

Oder noch schärfer: Hält man *einen* Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}\,)$ fest, so bekommt man eine Gruppierung der übrigen quadratischen Körper zu Paaren $\mathbb{Q}(\sqrt{\partial}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta\partial}\,)$. Dann wird man i. allg. auch keine Beziehung zwischen ihren ungeraden Klassengruppen finden.

Einen Fall gibt es jedoch, wo man eine Beziehung feststellen kann. Nehmen wir als den einen der drei Körper stets den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ und vergleichen die Klassengruppen der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{\partial}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3\partial}\,)$, so besteht für die Dreierfaktoren dieser beiden Klassengruppen folgende Beziehung:

Satz 1. *Hat von den beiden Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{\partial}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3\partial}\,)$ die Klassengruppe des imaginären Körpers r Basisklassen und die des reellen Körpers s Basisklassen von Dreierpotenzordnung (also $3^r - 1$ bezw. $3^s - 1$ Idealklassen der Ordnung 3), so gilt:*

$$s \ \leq r \ \leq s + 1.$$

Hat z.B. der imaginäre Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta}\,)$ eine durch 3 nicht teilbare Klassenzahl, so auch der reelle Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3\Delta}\,)$. Hat $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta}\,)$ eine in bezug auf 3 zyklische Klassengruppe ($r = 1$), so $\mathbb{Q}(\sqrt{3\Delta}\,)$ entweder auch ($s = 1$), oder seine Klassenzahl ist überhaupt

[1] Vgl. die Darstellung bei F. Pollaczek auf S. 534–535 der Abhandlung "Über die Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper", Math. Zeitschr. **30** (1929), die auch für $l = 2$ gültig ist.

nicht durch 3 teilbar ($s = 0$) usf. Welche der beiden Diskriminanten die durch 3 teilbare ist, spielt dabei keine Rolle. Ob $s = r$ oder $s = r - 1$, entscheidet sich auf andere Weise.

Wir schreiten jetzt zum Beweis mit den zuletzt gewählten Bezeichnungen, setzen außerdem $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta}\,) = K$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3\Delta}\,) = C$. Aus der direkten Anwendung der Klassenkörpertheorie auf kubische Zahlkörper[2] wissen wir, daß gerade r voneinander unabhängige[3] kubische (nicht-galoissche) Zahlkörper mit der Diskriminante $-\Delta$ existieren, die, mit $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta}\,)$ komponiert, absolute Klassenkörper über $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta}\,)$ sind. Diese r Körper werden erzeugt durch Zahlen der Gestalt

$$\begin{aligned}\theta_\rho &= \sqrt[3]{a_\rho + b_\rho\sqrt{3\Delta}} + \sqrt[3]{a_\rho - b_\rho\sqrt{3\Delta}} \\ &= \theta'_\rho + \theta''_\rho \;=\; \sqrt[3]{\alpha'_\rho} + \sqrt[3]{\alpha''_\rho} \qquad\qquad (\rho = 1, \dots, r).\end{aligned}$$

$K(\theta_\rho)$ ist also Klassenkörper, und, wenn man noch $\sqrt{-3}$ adjungiert, ist auch $CK(\theta_\rho) = CK(\theta'_\rho)$ Klassenkörper über $K(\sqrt{-3}\,) = CK$. θ_ρ kann man hier durch θ'_ρ ersetzen; denn da $\alpha'_\rho \cdot \alpha''_\rho$ dritte Potenz einer Zahl ist (nämlich der Zahl $\frac{p}{3}$, wenn θ_ρ der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ genügt), so erhält man denselben zyklischen Körper über CK durch Adjunktion von $\sqrt[3]{\alpha'_\rho}$, $\sqrt[3]{\alpha''_\rho}$ oder $\sqrt[3]{\alpha'_\rho} + \sqrt[3]{\alpha''_\rho}$. Aus der Klassenkörpereigenschaft von $CK(\theta'_\rho)$ folgt dann, daß α'_ρ in CK eine singuläre Primärzahl für den Exponenten 3 sein muß, d.h. eine dritte Idealpotenz, außerdem kubischer Rest mod $3^{3/2}$, und dies ist auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß $CK(\theta'_\rho)$ absoluter Klassenkörper ist.[4] Nun ist aber α'_ρ eine Zahl aus C. Also muß sie auch in C schon Idealkubus sein, wenn sie in CK Idealkubus ist; denn CK ist nur vom Grade 2 über C.

Jeder Idealgruppe in K vom Index 3 entspricht also ein Idealkubus α'_ρ in C, dessen Kubikwurzel den zugehörigen Klassenkörper auf CK aufsetzt. Dabei müssen $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r$ in bezug auf dritte Zahlpotenzen aus CK, oder, was wieder aus Gradgründen auf dasselbe hinausläuft, aus C voneinander unabhängig sein, also $\prod {\alpha'_\rho}^{a_\rho} = \gamma^3$ (γ in C) dann und nur dann, wenn alle $a_\rho \equiv 0 \bmod 3$; denn ihre Kubikwurzeln erzeugen ja über CK r voneinander unabhängige kubische Körper .

Bezeichnet nun in einem beliebigen Zahlkörper

Z die Zahlgruppe aller Idealkuben, Z_3 die der Zahlkuben,
J die Idealklassengruppe, J_3 die der Idealklassenkuben,
E die Einheitengruppe, E_3 die der Einheitenkuben

und $[A : B]$ allgemein die Ordnung der Faktorgruppe A/B, so gilt:

$$[Z : Z_3] \;=\; [J : J_3] \cdot [E : E_3].$$

In unserem Körper C ist also $[Z : Z_3] = 3^{s+1}$. Andererseits $\geq 3^r$, da ja die $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r$ ein unabhängiges Teil-Repräsentantensystem für die Faktorgruppe Z/Z_3 bilden. Also hat man:

$$r \leq s + 1.$$

---

[2]Vgl. H. Hasse: Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 565–582; §4.

[3]Körper heißen voneinander unabhängig, wenn sich bei ihrer Komposition die Gradzahlen multiplizieren.

[4]Siehe etwa Ph. Furtwängler: Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. **63** (1907), S. 1–37.

Jetzt wendet man dieselbe Überlegung auf C und K mit vertauschten Rollen an, wobei zu beachten ist, daß die in C noch zyklische Einheitengruppe bei K fortfällt, weswegen in K einfach $[Z : Z_3] = 3^r$. Andererseits $\geq 3^s$, weil der Idealklassenreichtum von C sich entsprechend auf K auswirkt, wie oben der von K auf C. Also hat man hier:

$$s \leq r.$$

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen. Wir brauchten dabei von der entscheidenden Eigenschaft der singulären Primärzahl in CK nur die Teileigenschaft des Idealkubus heranziehen, um obige Abschätzungen zu gewinnen. Wollen wir nun noch näher wissen, wann $r = s$, wann $r = s + 1$ ist, müssen wir noch die andere Teileigenschaft der "Primärzahl" (kubischer Rest mod $3^{3/2}$) heranziehen. Für diese ist der Spielraum von vornherein schon sehr eng durch die Relation $s \leq r \leq s + 1$. Stellt man nämlich die unabhängigen Idealkuben aus K und C zu einem System

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r;\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s,\ \varepsilon$$

zusammen, wobei ε die Fundamentaleinheit aus C bedeute, so finden ja (bei passender Basiswahl) schon alle bis auf eine der $r + s + 1$ Größen Verwendung zur Bildung der absoluten Klassenkörper von C und K. Entweder sind die $\rho_1, \ldots, \rho_r$ alle primär ($r = s$), oder die $\sigma_1, \ldots, \sigma_s, \varepsilon$ ($r = s + 1$). Die bei C oder K übrigbleibende Größe τ ist in CK nicht primär: Einmal ist sie auch in CK von den übrigen Größen unabhängig in bezug auf Zahlkuben; denn nach dem oben erwähnten Satz (Anm. 1) setzen sich die Dreier-Idealklassen aus K und C direkt zusammen; es kann daher keine "kubische Relation" zwischen den $r + s + 1$ Größen bestehen. $CK(\sqrt[3]{\tau})$ ist daher kein absoluter Klassenkörper mehr, sondern Klassenkörper mit einem Führer $\mathfrak{f} \neq 1$; da aber τ Idealkubus ist, gilt $1 \neq \mathfrak{f} \mid 3^{3/2}$ und damit $\tau \not\equiv \gamma^3 \bmod 3^{3/2}$, nach Anm. 4.

Wenn man nun auf die Suche nach einer solchen Größe τ geht, um damit zu entscheiden, ob $r = s$ oder $r = s + 1$, braucht man nicht erst in CK die kubische Restprobe mod $3^{3/2}$ anzustellen, sondern es genügt diese Probe in C oder K, in dem Körper, dem die Größe schon angehört. (Bei dem einen der beiden Körper, in dem die Zahl 3 noch kein Idealquadrat ist, kommt das darauf hinaus, den kubischen Restcharakter mod 9 zu untersuchen.) Es enthält nämlich in CK geradeso wie in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ die Restklassengruppe mod $3^{3/2}$ keine Reste der Ordnung 9, was klar ist in dem Falle, daß 3 in C oder K (welcher Körper gerade der mit der nicht durch 3 teilbaren Diskriminante ist) in Primideale ersten Grades zerfällt, und im andern Fall, daß 3 nicht zerfällt, durch Rechnung leicht nachgeprüft werden kann. Daher kann eine Zahl, die in einem Unterkörper von CK noch nicht kubischer Rest (mod $3^{3/2}$) ist, es auch in CK nicht werden.

Das erleichtert natürlich die Untersuchung, daß man nur Rechnungen in quadratischen Körpern auszuführen braucht. Kennt man z.B. nur die Grundeinheit aus C und findet, daß sie nicht kubischer Rest ist, so weiß man schon, daß $r = s$ ist. Ist sie kubischer Rest, so können zwar noch beide Fälle eintreten, es ist aber dann sicher die Klassenzahl von K durch 3 teilbar ($r > 0$); denn ist etwa $s = 0$, so kann die Nichtprimärzahl τ hier nur unter den $\rho_1, \ldots, \rho_r$ vorkommen. – Im allgemeinen Fall kann man s bestimmen, wenn man die Idealgruppe (Repräsentanten!) von K kennt; umgekehrt r, wenn man in C außer der Idealgruppe die Grundeinheit kennt.

Eingegangen 6. Mai 1931.