Задачи по анализу

Договорённость. Пусть f — непрерывная (в более широком контексте — интегрируемая и ограниченная) на отрезке $[0,1]$ функция. Введём обозначения

$$c = c(f) = \int_0^1 f(x)dx; \qquad c' = c'(f) = \int_0^1 |f(x)|dx;$$

$$d = d(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)^2 dx; \qquad e = e(f) = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)^3 dx;$$

$$\varepsilon = \varepsilon(f) = \int_0^1 e^{f(x)}dx - 1; \qquad \varepsilon' = \varepsilon'(f) = \int_0^1 e^{-f(x)}dx - 1;$$

$$A^+ = A^+(0) = f^{-1}([0,+\infty)); \qquad A^- = A^-(0) = f^{-1}((-\infty,0));$$

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^+(f) = \int_{A^+} e^{f(x)}\mu(dx) - |A^+|; \qquad \varepsilon^- = \varepsilon^-(f) = \int_{A^-} e^{f(x)}\mu(dx) - |A^-|.$$

Задача 1. Докажите неравенство:

$$\left(\int_0^1 e^{f(x)}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 e^{-f(x)}dx\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x)-c)^2 dx,$$

где функция f непрерывна, а $c = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Утверждение 1. *Пусть n нечётно. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Кроме того, при $x \geqslant 0$ неравенство справедливо для любого n.

Доказательство. Согласно теореме Тейлора, на каждом интервале (α,β), содержащем точку 0, мы имеем разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\xi \in (\alpha,\beta)$ зависит от x. Заметим, что последний член неотрицателен при $n = 2k+1$ или $x \geqslant 0$, из чего и следует доказываемое неравенство. ∎

Решение задачи 1. Так как обе части неравенства инвариантны относительно вертикального сдвига функции f на константу, мы можем без ограничения общности предположить, что $c = 0$. Тогда требуется показать, что $(\varepsilon+1)(\varepsilon'+1) \geqslant 1 + d$. В силу утверждения 1, мы имеем оценки

$$e^{f(x)} \geqslant 1 + f(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{6}f(x)^3,$$

$$e^{-f(x)} \geqslant 1 - f(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 - \frac{1}{6}f(x)^3$$

при всех $x \in [0,1]$. Теперь, интегрируя эти неравенства и складывая их, мы получаем

$$(\varepsilon + 1) + (\varepsilon' + 1) \geqslant (1 + c + d + e) + (1 - c + d - e),$$

$$\varepsilon + \varepsilon' \geqslant 2d.$$

Наконец,

$$(\varepsilon + 1)(\varepsilon' + 1) = \varepsilon\varepsilon' + \varepsilon + \varepsilon' + 1 \geqslant 1 + 2d \geqslant 1 + d,$$

что и требовалось доказать. ■

Задача 2. Пусть f — непрерывная функция и

$$\left(\int\limits_0^1 e^{f(x)} dx\right) \cdot e^{-c} = 1 + \varepsilon,$$

где $c = \int_0^1 f(x)\, dx$. Докажите, что $\varepsilon > 0$, и что найдётся число A, не зависящее от f, такое что

$$\int\limits_0^1 |f(x) - c|\, dx \leqslant A\sqrt{\varepsilon}.$$

Утверждение 2. *Пусть f интегрируема на множестве A. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_A e^{f(x)} \mu(dx) \geqslant |A| \cdot \exp\left(\frac{\int\limits_A f(x)\, \mu(dx)}{|A|}\right).$$

Доказательство. Обозначим $c = \frac{\int\limits_A f(x)\, \mu(dx)}{|A|}$. В силу утверждения 1 имеем оценку

$$e^{f(x)-c} \geqslant 1 + (f(x) - c)$$

при всех $x \in A$, а значит

$$e^{-c} \int\limits_A e^{f(x)} \mu(dx) = \int\limits_A e^{f(x)-c} \mu(dx) \geqslant \int\limits_A (1 + f(x) - c)\, \mu(dx) = \int\limits_A 1\, \mu(dx) + \int\limits_A (f(x) - c)\, \mu(dx) = |A|.$$

Домножая на e^c, получаем

$$\int\limits_A e^{f(x)} \mu(dx) \geqslant |A| \cdot e^c.$$

■

Решение задачи 2. Так как задача инвариантна относительно вертикальных сдвигов функции f, мы можем положить $c = 0$ без ограничения общности. Интегрируя неравенство $e^{f(x)} \geqslant 1 + f(x)$, мы заключаем, что $\varepsilon \geqslant 0$. Нужно доказать, что $c' \leqslant A\sqrt{\varepsilon}$ для некоторой фиксированной константы A. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, такую, что $c(f) = 0$. Если $c' = 0$, то $f \equiv 0$, и $\varepsilon = 0$. Поэтому допустим, что $c' > 0$. Далее, поскольку $c = 0$,

$$\int\limits_{A^+} f(x)\, \mu(dx) = \int\limits_{A^-} (-f(x))\, \mu(dx) = \frac{c'}{2} > 0,$$

а тогда $|A^+| > 0$. Рассмотрим следующую кусочно-постоянную функцию:

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, \ 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \beta, \ a < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Здесь $a = |A^+| > 0$, $\alpha = \frac{c'}{2a}$ и $\beta = \frac{-c'}{2(1-a)}$. Нетрудно видеть, что $c(g) = 0$ и $c'(g) = c'(f) = c'$. Теперь, применяя утверждение 2 к функции f на множестве A^+, мы имеем

$$\int\limits_{A^+} e^{f(x)}\mu(dx) \geqslant |A^+| \cdot \exp\left(\frac{\int\limits_{A^+} f(x)\ \mu(dx)}{|A^+|}\right) = a \cdot e^{\frac{c'}{2a}} = \int\limits_0^a e^{g(x)}\ dx. \tag{1}$$

Аналогично, применяя утверждение 2 на множестве A^-, мы выводим

$$\int\limits_{A^-} e^{f(x)}\mu(dx) \geqslant |A^-| \cdot \exp\left(\frac{\int\limits_{A^-} f(x)\ \mu(dx)}{|A^-|}\right) = (1-a) \cdot e^{\frac{-c'}{2(1-a)}} = \int\limits_a^1 e^{g(x)}\ dx. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем, что $\varepsilon(f) \geqslant \varepsilon(g)$. Наконец,

$$\varepsilon(f) \geqslant \varepsilon(g) = ae^{\frac{c'}{2a}} + (1-a)e^{\frac{-c'}{2(1-a)}} - 1 \geqslant a\left(1 + \frac{c'}{2a} + \frac{(c')^2}{8a^2}\right) + (1-a)\left(1 - \frac{c'}{2(1-a)}\right) - 1 = \frac{(c')^2}{8a} \geqslant \frac{(c')^2}{8},$$

а значит

$$c'(f) \leqslant 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\varepsilon(f)},$$

что и требовалось доказать. ■

Задача 3. Пусть H — непрерывная функция из отрезка $[0,1]$ в множество вещественных симметричных матриц 2×2 с неотрицательными собственными числами. Докажите, что

$$\left(\det \int\limits_0^1 H(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \int\limits_0^1 \sqrt{\det H(x)}\ dx.$$

Утверждение 3. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ всюду дважды дифференцируема. Рассмотрим точку $a \in E$ и вектор $v \in \mathbb{R}^n$. Для $t \in \mathbb{R}$ опрелелим функции $x = x(t) = a + tv$ и $\varphi(t) = f(x(t))$. Утверждается, что*

$$\varphi''(t) = v \cdot H_f \cdot v = (v_1, v_2, \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как известно, дифференциал композиции функций есть композиция дифференциалов, а значит матрица Якоби функции φ есть произведение матриц Якоби функций x и f, то есть

$$\varphi'(t) = (v_1, v_2, \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Теперь, дифференцируя предыдущее равенство и применяя его в правой части для композиции функций x и $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, мы получаем

$$\varphi''(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x(t)) \right)' = \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = v \cdot H_f \cdot v.$$

■

Определение 1. Мы называем функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *выпуклой вверх*, если подграфик

$$\Gamma_f^- = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ y \leqslant f(x)\}$$

— выпуклое множество.

Замечание 1. Если $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi''(t) \leqslant 0$, то φ выпукла вверх.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\varphi((1-t)a + tb) \geqslant (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$ при всех $a < b$ и $t \in [0,1]$. Пусть аффинная функция g такова, что $g(a) = \varphi(a)$ и $g(b) = \varphi(b)$. Обозначим $h = \varphi - g$. Очевидно, что $h'' = \varphi'' - g'' = \varphi'' \leqslant 0$, а значит h' невозрастает. При этом, по теореме Ролля найдётся точка $\xi \in (a, b)$, в которой $h' = 0$. Тогда, во-первых, h неубывает на $[a, \xi]$, а значит $h \geqslant 0$ на $[a, \xi]$. Во-вторых, h невозрастает на $[\xi, b]$, а значит $h \geqslant 0$ на $[\xi, b]$. Учитывая, что $h((1-t)a + tb) = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$, утверждение доказано. ■

Утверждение 4. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда если Гессиан H_f всюду нестрого отрицательно определён, то есть $v \cdot H_f \cdot v \leqslant 0$ для всех $v \neq 0$, то функция f является выпуклой вверх.*

Доказательство. Рассмотрим пару точек $a, b \in \mathbb{R}^n$. Наша цель — доказать, что

$$f((1-t)a + tb) \geqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

для всех $t \in [0,1]$. По утверждению 3 вторая производная функции $\varphi(t) := f((1-t)a + tb)$ неположительна. Тогда по предыдущему замечанию φ выпукла вверх, из чего и следует требуемое неравенство. ■

Утверждение 5. *Пусть p, q положительны и $p \leqslant q$. Тогда*

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

для любой интегрируемой по Риману функции f.

Доказательство. Достаточно совершить предельный переход в обобщённом неравенстве для средних степенных для сумм Римана при $n \to \infty$:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Решение задачи 3. Нетрудно видеть по определению, что что собственные числа 2×2 матрицы A вычисляются по следующей формуле:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}}{2},$$

при этом если A симметрична, то дискриминант $\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A$ неотрицателен. В таком случае очевидно, что если собственные числа неотрицательны, то $\sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A} \leqslant \operatorname{tr} A$, а значит $\det A \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $d \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $d(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1 x_3 - x_2^2$. Посчитаем Гессиан этого отображения:

$$H_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что H_d нестрого отрицательно определён, ведь $(x, y, z) \cdot H_d \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2y^2 \leqslant 0$. Тогда функция d выпукла вверх. Её подграфик, как выпуклое множество, содержит выпуклые комбинации своих точек, и поэтому при всех n справедливо неравенство Йенсена

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d\left(H_1\left(\frac{k}{n}\right), H_2\left(\frac{k}{n}\right), H_4\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant d\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(H_1\left(\frac{k}{n}\right), H_2\left(\frac{k}{n}\right), H_4\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right),$$

или, заменяя $d(H_1(x), H_2(x), H_4(x))$ на $\det H(x)$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \det H\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \det\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Совершая предельный переход в последнем неравенстве при $n \to \infty$, мы получаем, что

$$\int_0^1 \det H(x)\, dx \leqslant \det \int_0^1 H(x)\, dx.$$

Наконец, применяя утверждение 5, мы заключаем, что

$$\int_0^1 \sqrt{\det H(x)}\, dx \leqslant \left(\int_0^1 \det H(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\det \int_0^1 H(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

что и требовалось доказать. ■