Задачи

Коммутативная алгебра, 2025

(3, 2) **1.** Пусть x — нильпотент в кольце A. Покажите, что $1 + x$ обратим. Выведите отсюда, что сумма нильпотента и обратимого элемента обратима. ***(3** кг., годно в теч. **2** дней)*

(5, 3) **2.** Допустим, что в кольце A всякий идеал $\mathfrak{a} \not\subset \mathcal{N}$ содержит *идемпотент,* т.е. такой элемент $e \in A$, что $e^2 = e \neq 0$. Докажите, что в кольце A нильрадикал $\mathcal{N}$ совпадает с радикалом Джекобсона $\mathcal{R}$. ***(5** кг., годно в теч. **3** дней)*

(5, 3) **3.** Пусть в кольце A всякий элемент x удовлетворяет уравнению $x^n = x$ для некоторого $n > 1$ (число n зависит от x). Покажите, что любой простой идеал в A максимален. ***(5** кг., годно в теч. **3** дней)*

(5, 4) **4.** Пусть A — ненулевое кольцо. Покажите, что множество всех простых идеалов в A содержит хотя бы один минимальный (по включению) элемент. ***(5** кг., годно в теч. **4** дней)*

(5, 4) **5.** Пусть A — кольцо, $\mathcal{N}$ — его нильрадикал. Докажите, что следующие условия равносильны:
- A имеет ровно один простой идеал;
- Любой элемент A либо обратим, либо нильпотентен;
- $A/\mathcal{N}$ есть поле. ***(5** кг., годно в теч. **4** дней)*

(7, 6) **6.** Покажите, что в локальном кольце нет идемпотентов, кроме 0 и 1. ***(7** кг., годно в теч. **6** дней)*

(7, 7) **7.** Кольцо A называется *булевым,* если $x^2 = x$ для всех $x \in A$. Покажите, что справедливы следующие утверждения:
- $2x = 0$ для всех $x \in A$;
- Любой простой идеал $\mathfrak{p} \leqslant A$ максимален, и $A/\mathfrak{p}$ — поле из двух элементов.

***(7** кг., годно в теч. **7** дней)*

(7, 9) **8.** Пусть A — некоторое кольцо, X — множество всех его простых идеалов. Для каждого подмножества $E \subset A$ обозначим через $V(E)$ множество всех простых идеалов, содержащих E. Докажите следующее:
- Если $\mathfrak{a}$ — идеал, порождённый E, то $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$;
- $V(0) = X$, $V(1) = \varnothing$;
- Для всякого семейства $\{E_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, имеем $V(\cup_{i \in \mathcal{I}} E_i) = \cap_{i \in \mathcal{I}} V(E_i)$;
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, для всех идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqslant A$.

Таким образом, семейство $\{V(E) \mid E \subset A\}$ удовлетворяет аксиомам замкнутых множеств, и определяет в X так называемую *топологию Зарисского.* Топологическое пространство X называется *простым спектром* кольца A и обозначается $\mathrm{Spec}(A)$.

***(7** кг., годно в теч. **9** дней)*

(11, 12) **9.** Обозначим через Σ множество всех идеалов в A, полностью состоящих из делителей нуля. Покажите, что в Σ есть хотя бы один максимальный элемент. Покажите, что всякий максимальный элемент в Σ прост. ***(11** кг., годно в теч. **12** дней)*