

# Материал курса

Коммутативная алгебра, 2025

## Содержание

<b>1. Кольца и идеалы</b>	<b>2</b>
1.1. Основные понятия	2
1.2. Нильрадикал и радикал Джекобсона	4
1.3. Операции над идеалами	6
1.4. Аннуляторы	8
1.5. Расширение и сужение	10
<b>2. Модули</b>	<b>11</b>
2.1. Основные понятия	11
2.2. Подмодули и фактормодули	11
2.3. Операции с подмодулями	12
2.4. Прямая сумма и прямое произведение	13

# 1. Кольца и идеалы

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.1.** (коммутативное кольцо): Кортеж  $(A, +, \cdot, 0, 1)$  называется *коммутативным кольцом*, (или просто *кольцом*) если

$$+, \cdot : A \times A \rightarrow A, \quad 0, 1 : \{\emptyset\} \rightarrow A \quad (0, 1 \in A),$$

а также выполняются следующие свойства:

(1)  $(A, +, 0)$  — абелева группа;

(то есть операция сложения  $+$  коммутативна и ассоциативна,  $0$  есть её нейтральный элемент, а также каждый элемент  $x \in A$  имеет единственный противоположный  $-x \in A$ )

(2)  $(A, \cdot, 1)$  — коммутативная полугруппа;

(то есть умножение  $\cdot$  коммутативно и ассоциативно,  $1$  есть её нейтральный элемент)

(3)  $\forall x, y, z \in A : x(y + z) = xy + xz$  (свойство *дистрибутивности*)

Категорию всех коммутативных колец мы будем обозначать  $\text{Ring}$ .

**Замечание 1.1.2.** Может статься, что  $0 = 1$  в кольце  $A$ . Тогда имеем  $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$  и  $A = \{0\} =: 0$ .

**Определение 1.1.3.** (гомоморфизм колец): Отображение  $f : A \rightarrow B$  между кольцами  $A$  и  $B$  называется *гомоморфизмом*, если оно является гомоморфизмом абелевых групп по сложению и полугрупп по умножению, то есть

$$(1) \quad f(x +_A y) = f(x) +_B f(y), \quad f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y);$$

$$(2) \quad f(0_A) = 0_B, \quad f(1_A) = 1_B.$$

**Определение 1.1.4.** (подкольца и идеалы):

(1) Подмножество  $S \subset A$  называется *подкольцом*, если  $(S, +, \cdot, 0, 1)$  есть кольцо.

(2) Подмножество  $\mathfrak{a} \subset A$  называется *идеалом*, если  $\mathfrak{a} \leq A$ , а также  $A\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ ;

(3) Для любого  $x \in A$ , множество  $x\mathfrak{a} = \{xy \mid y \in \mathfrak{a}\}$  образует идеал, который обозначается  $(x)$ .  
Идеалы вида  $(x)$  называются *главными*.

**Определение 1.1.5.** (факторкольцо): Пусть  $\mathfrak{a} \leq A$ . Тогда имеем  $(A/\mathfrak{a}, +, \cdot, 0 + \mathfrak{a}, 1 + \mathfrak{a}) \in \text{Ring}$ , где

$$(x + \mathfrak{a}) +_{\mathfrak{a}} (y + \mathfrak{a}) = (x + y) + \mathfrak{a}, \quad (x + \mathfrak{a}) \cdot (y + \mathfrak{a}) = xy + \mathfrak{a}.$$

(Пусть  $\mathfrak{a}$  — идеал в кольце  $A$ . Тогда абелева группа  $A/\mathfrak{a}$  однозначно снабжается умножением, индуцированным с умножения в кольце  $A$ , что превращает её в кольцо, называемое *факторкольцом*  $A/\mathfrak{a}$ )

Отображение  $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ ,  $\varphi(x) = x + \mathfrak{a}$ , называется *канонической проекцией*.

**Утверждение 1.1.6.** Существует биекция

$$\tilde{\varphi} : \{\mathfrak{b} \leq A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}\} \leftrightarrow \{\bar{\mathfrak{b}} \leq A/\mathfrak{a}\},$$

сохраняющая включение.

| Доказательство: Упражнение. ■

**Определение 1.1.7.** (делители нуля, нильпотенты, единицы):

- (1) Пусть  $x \in A$ . Если найдётся  $y \neq 0$ , что  $xy = 0$ , то  $x$  называется *делителем нуля*. ( $x \mid 0$ )
- (2) Кольцо  $A \neq 0$ , не имеющее ненулевых делителей нуля, называется *областью целостности*.
- (3) Элемент  $x \in A$  называется *нильпотентом*, если  $x^n = 0$  для некоторого  $n \geq 1$ . Всякий нильпотент является делителем нуля, но не всегда наоборот.
- (4) Пусть  $x \in A$ . Если для некоторого  $y \in A$  выполняется  $xy = 1$ , то  $x$  называется *обратимым* ( $x \mid 1$ ). Обратимые элементы кольца  $A$  образуют абелеву группу по умножению.
- (5) Ненулевое кольцо  $A$ , в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *полем*.

**Упражнение 1.1.8.** Докажите следующие простые свойства кольца:

- (1)  $x \cdot 0 = 0$ ;
- (2)  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C \text{ homo} \implies (g \circ f) : A \rightarrow C \text{ homo}$ ;  
(композиция гомоморфизмов — гомоморфизм)
- (3)  $f : A \rightarrow B$  — инъекция  $\iff \ker f = 0$ ;
- (4)  $x \mid 0 \implies x \nmid 1$ . (всякий делитель нуля необратим)

**Утверждение 1.1.9.** Пусть  $A$  — ненулевое кольцо. Следующие условия равносильны:

- (1)  $A$  — поле;
- (2)  $\mathfrak{a} \leq A \implies \mathfrak{a} = 0 = \{0\} \vee \mathfrak{a} = (1) = A$ ; (в  $A$  нет идеалов, кроме  $0 = \{0\}$  и  $(1)$ )
- (3)  $\forall B \neq 0, \forall f : A \rightarrow B : f$  — ин. (всякий гомоморфизм из  $A$  в ненулевое кольцо инъективен)

*Доказательство:*

- (1)  $\implies$  (2): Если  $\mathfrak{a} \leq A$  и  $\mathfrak{a} \neq 0$ , то  $\mathfrak{a}$  содержит некий обратимый элемент  $x \in A$ . Тогда  $1 = xy \in \mathfrak{a}$  для некоторого  $y$ , а значит  $\forall z \in A : z = z \cdot 1 \in \mathfrak{a}$ , и  $\mathfrak{a} = (1)$ .
- (2)  $\implies$  (3): Если  $B \neq 0$ , то для гомоморфизма  $f : A \rightarrow B$  имеем  $f(1) = 1$ , а значит  $\ker f \neq A$ . Следовательно,  $\ker f = 0$ , и  $f$  инъективен.
- (3)  $\implies$  (1): Пусть  $x \in A, x \neq 0$ . Рассмотрим каноническую проекцию  $\varphi : A \rightarrow A/(x)$ . Так как  $\varphi(0) = \varphi(x) = (x)$ , мы заключаем, что  $\varphi$  не инъективен. Тогда  $A/(x) = 0$ , а значит  $(x) = A$ , и  $1 = xy$  для некоторого  $y \in A$ . ■

**Определение 1.1.10.** (простые и максимальные идеалы):

- (1) Идеал  $\mathfrak{p} \subset A$  называется *простым*, если  $\mathfrak{p} \neq A$  и включение  $xy \in \mathfrak{p}$  влечёт  $x \in \mathfrak{p}$  либо  $y \in \mathfrak{p}$ .
- (2) Идеал  $\mathfrak{m} \subset A$  называется *максимальным*, если  $\mathfrak{m} \neq A$  и не существует идеала  $\mathfrak{b}$ , такого что  $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq A$ .

**Утверждение 1.1.11.** Пусть  $A$  — кольцо.

- (1) Идеал  $\mathfrak{p} \subset A$  простой  $\iff A/\mathfrak{p}$  — область целостности;
- (2) Идеал  $\mathfrak{m} \subset A$  максимальный  $\iff A/\mathfrak{m}$  — поле.

| Доказательство: Упражнение. ■

**Следствие 1.1.12.** Всякий максимальный идеал прост.

**Теорема 1.1.13.** В каждом кольце  $A \neq 0$  есть максимальный идеал.

*Доказательство:* Для доказательства сформулируем лемму Цорна:

**Предложение 1.1.14.** (Лемма Цорна): Пусть  $(P, \leq)$  — непустое частично упорядоченное множество. Тогда если каждое линейно упорядоченное подмножество в  $P$  имеет мажоранту, то в  $P$  существует по крайней мере один максимальный элемент.

Это утверждение мы оставим без доказательства, отметив только, что оно эквивалентно аксиоме выбора.

Далее, рассмотрим множество  $\Sigma$  всех собственных идеалов в  $A$ , частично упорядоченное по включению. Это множество непусто, так как содержит нулевой идеал  $0$ .

Теперь пусть  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  — некое линейно упорядоченное подмножество  $\Sigma$ . Рассмотрим объединение

$$\mathfrak{b} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha.$$

Очевидно, что  $\mathfrak{b}$  — идеал (упражнение), и кроме того  $1 \notin \mathfrak{b}$ , так как  $1 \notin a_\alpha$  при всех  $\alpha \in \mathcal{J}$ .

Следовательно,  $\mathfrak{b} \in \Sigma$ , а значит  $\mathfrak{b}$  является мажорантой множества  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ .

Наконец, по лемме Цорна мы заключаем, что множество  $\Sigma$  имеет максимальный элемент  $\mathfrak{m}$ , то есть максимальный идеал в кольце  $A$ . ■

**Следствие 1.1.15.** *Каждый собственный идеал  $\mathfrak{a} < A$  содержится в некотором максимальном идеале, и всякий необратимый элемент содержится в некотором максимальном идеале.*

| *Доказательство:* Достаточно рассмотреть кольцо  $A/\mathfrak{a}$  и применить предыдущую теорему. ■

**Определение 1.1.16.** Кольцо  $A$ , имеющее всего один максимальный идеал, называется *локальным*. Если множество максимальных идеалов кольца  $A$  конечно, то кольцо  $A$  называется *полулокальным*.

**Утверждение 1.1.17.** *Пусть  $A$  — некоторое кольцо.*

- (1) *Если  $\mathfrak{a}$  — такой собственный идеал, что всякий элемент  $x \in A \setminus \mathfrak{a}$  обратим, то кольцо  $A$  локально, и  $\mathfrak{a}$  — его максимальный идеал.*
- (2) *Если  $\mathfrak{m}$  — максимальный идеал в  $A$ , и всякий элемент  $1 + x \in 1 + \mathfrak{m}$  обратим, то  $A$  является локальным.*

*Доказательство:*

- (1) Пусть  $\mathfrak{m}$  — некий максимальный идеал. Тогда если  $x \in \mathfrak{m}$ , то  $x$  необратим и следовательно  $x \in \mathfrak{a}$ . Тогда  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$ , а значит  $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ , так как идеал  $\mathfrak{m}$  максимальный. Итого, все максимальные идеалы в  $A$  совпадают с  $\mathfrak{a}$ , ч.т.д.
- (2) Допустим, что  $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ . Так как  $\mathfrak{m}$  максимален, идеал, порождённый  $\mathfrak{m}$  и  $x$ , совпадает со всем кольцом  $A$ . Поэтому найдутся такие элементы  $y \in A, t \in \mathfrak{m}$ , что  $xy + t = 1$ . Следовательно,  $xy = 1 - t \in 1 + \mathfrak{m}$ , а значит  $xy$  обратим. Тогда  $x$  обратим. Остаётся только воспользоваться утверждением (1).

## 1.2. Нильрадикал и радикал Джекобсона

**Утверждение 1.2.1.** *Множество  $\mathfrak{N}$  всех нильпотентов кольца  $A$  является идеалом. В кольце  $A/\mathfrak{N}$  нет ненулевых нильпотентов.*

*Доказательство:* Очевидно, что если  $x \in \mathfrak{N}$ , то  $ax \in \mathfrak{N}$  для любого  $a \in A$ . Теперь рассмотрим два элемента  $x, y \in \mathfrak{N}$ , причём  $x^n = 0$  и  $y^m = 0$ . Тогда выражение  $(x + y)^{n+m}$  по теореме Ньютона раскрывается следующим образом:

$$(x + y)^{n+m} = \sum_{i+j=n+m} a_{ij} x^i y^j.$$

При этом для каждой пары  $(i, j)$ , либо  $i \geq n$ , либо  $j \geq m$ . Следовательно, каждое слагаемое  $a_{ij} x^i y^j$  равно нулю, а значит  $(x + y)^{n+m} = 0$ , и  $x + y \in \mathfrak{N}$ .

Далее, рассмотрим элемент  $x + \mathfrak{N} \in A/\mathfrak{N}$  и допустим, что  $(x + \mathfrak{N})^n = \mathfrak{N}$ . Это означает, что  $x^n \in \mathfrak{N}$ , и для некоторого  $k \in \mathbb{N}$

$$x^{nk} = (x^n)^k = 0 \Rightarrow x \in \mathfrak{N} \Rightarrow x + \mathfrak{N} = \mathfrak{N}.$$

**Определение 1.2.2.** Идеал  $\mathfrak{N}$  называется *нильрадикалом* кольца  $A$ .

**Теорема 1.2.3.** Нильрадикал кольца  $A$  совпадает с пересечением всех его простых идеалов.

*Доказательство:* Пусть  $P$  — пересечение всех простых идеалов кольца  $A$ .

Во-первых, очевидно, что всякий нильпотент лежит во всяком простом идеале (упражнение), так что  $\mathfrak{N} \subset P$ .

Обратно, пусть элемент  $f \in A$  не является нильрадикалом. Нам нужно показать, что он не содержится в каком-либо простом идеале. Рассмотрим множество  $\Sigma$  всех идеалов  $\mathfrak{a}$  со свойством

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n \notin \mathfrak{a}.$$

Множество  $\Sigma$  непусто, поскольку  $0 \in \Sigma$ . Рассуждение из [теоремы 1.2.3](#) показывает применимость леммы Цорна ко множеству  $\Sigma$ , в результате чего получаем максимальный элемент  $\mathfrak{p} \in \Sigma$ . Покажем, что  $\mathfrak{p}$  — простой идеал.

Пусть  $x, y \notin \mathfrak{p}$ . Тогда идеалы  $\mathfrak{p} + (x)$  и  $\mathfrak{p} + (y)$  строго содержат  $\mathfrak{p}$ , и следовательно, не принадлежат  $\Sigma$ . Иначе говоря, имеем

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \quad f^n \in \mathfrak{p} + (y),$$

для некоторых  $m, n \in \mathbb{N}$ . отсюда следует, что

$$f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy) \Rightarrow \mathfrak{p} + (xy) \notin \Sigma \Rightarrow xy \notin \mathfrak{p}.$$

Тем самым, мы построили простой идеал, не содержащий  $f$ , и потому  $f \notin P$ .

**Определение 1.2.4.** Пересечение  $\mathfrak{R}$  всех максимальных идеалов кольца  $A$  называется *радикалом Джекобсона*.

**Утверждение 1.2.5.**  $x \in \mathfrak{R} \iff 1 - xy$  обратим в кольце  $A$  для всех  $y \in A$ .

*Доказательство:*

$\Rightarrow$ : Допустим, что элемент  $1 - xy$  необратим. Тогда, по [следствию 1.1.15](#), этот элемент содержится в некотором максимальном идеале  $\mathfrak{m}$ . Но  $x \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{m}$ , а значит  $1 = (1 - xy) + y \cdot x \in \mathfrak{m}$ , противоречие.

$\Leftarrow$ : Предположим, что  $x \notin \mathfrak{m}$  для некоторого максимального идеала  $\mathfrak{m}$ . Тогда имеем  $A = \mathfrak{m} + (x)$ , а потому  $1 = u + xy$  для некоторых  $u \in \mathfrak{m}$  и  $y \in A$ . Следовательно,  $1 - xy = u \in \mathfrak{m}$ , что невозможно, так как  $1 - xy$  обратим.

### 1.3. Операции над идеалами

#### Определение 1.3.1.

- (1) Пусть  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  — идеалы в кольце  $A$ . Тогда  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  — идеал, состоящий из сумм  $x + y$ , где  $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$ . Это наименьший идеал, содержащий  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$ . Он называется *суммой*  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$ .
- (2) Также, для любого семейства идеалов  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , можно определить сумму  $\sum_{\alpha \in J} \mathfrak{a}_\alpha$  как идеал всевозможных *конечных* сумм элементов из  $\mathfrak{a}_\alpha$ ;
- (3) *Пересечение* любого семейства идеалов является идеалом. Таким образом, идеалы кольца  $A$  образуют полную структуру по включению;
- (4) Возникает определение *идеала, порождённого множеством*: если  $S \subset A$ , то  $\langle S \rangle$  определяется как пересечение всех идеалов, содержащих  $S$ .
- (5) *Произведением* двух идеалов  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$  называется идеал, порождённый всевозможными произведениями  $xy$ , где  $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$ :

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle \{xy \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b} \right\}.$$

**Замечание 1.3.2.** Все три операции коммутативны и ассоциативны (упражнение). Кроме того, справедлив дистрибутивный закон:

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$$

**Определение 1.3.3.** Если  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ , то идеалы  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$  называются *взаимно простыми*.

**Замечание 1.3.4.** В кольце  $\mathbb{Z}$ , идеалы  $(n)$  и  $(m)$  взаимно просты тогда и только тогда, когда числа  $n$  и  $m$  взаимно просты.

| *Доказательство:* Упражнение. ■

**Упражнение 1.3.5.** Правда ли, что всякий простой идеал  $\mathfrak{p}$  взаимно прост с любым другим идеалом  $\mathfrak{a}$ , таким, что  $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ ?

**Определение 1.3.6.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — некоторые кольца. Их *прямым произведением*

$$A = \prod_{k=1}^n A_k$$

называется множество  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  с поточечными операциями. Проекции  $p_k : A \rightarrow A_k$  являются гомоморфизмами колец.

**Теорема 1.3.7.** Пусть  $A$  — кольцо,  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$  — его идеалы. Определим гомоморфизм

$$\varphi : A \rightarrow \prod_{k=1}^n (A/\mathfrak{a}_k)$$

формулой  $\varphi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$ . Тогда:

- (1) Если идеалы  $\mathfrak{a}_i$  и  $\mathfrak{a}_j$  взаимно просты при  $i \neq j$ , то  $\prod \mathfrak{a}_k = \bigcap \mathfrak{a}_k$ ;
- (2) Гомоморфизм  $\varphi$  сюръективен  $\iff \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$  взаимно просты при  $i \neq j$ ;
- (3) Гомоморфизм  $\varphi$  инъективен  $\iff \bigcap \mathfrak{a}_k = (0)$ .

| *Доказательство:*

(1) Первый пункт доказывается индукцией по  $n$ :

- **База:**  $n = 2$ . Имеем такие идеалы  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leq A$ , что  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ . Очевидно,  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ . Обратно, имеем

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (1) \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

- Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ . Пусть  $n \geq 3$ , и для идеалов  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{n-1}$  результат верен. Положим

$$\mathfrak{b} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \mathfrak{a}_k.$$

Так как  $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$ , имеем  $x_k + y_k = 1$  для некоторых  $x_k \in \mathfrak{a}_k, y_k \in \mathfrak{a}_n$ . Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n-1} x_k = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - y_k) \in 1 + \mathfrak{a}_n.$$

Тогда  $\mathfrak{a}_n + \mathfrak{b} = (1)$ , а значит

$$\prod_{k=1}^n \mathfrak{a}_k = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{k=1}^n \mathfrak{a}_k.$$

- (2)  $\Rightarrow$ : Покажем, что  $\mathfrak{a}_1$  и  $\mathfrak{a}_2$  взаимно просты. Поскольку  $\varphi$  сюръективно, найдётся такой элемент  $x \in A$ , что

$$\varphi(x) = (1 + \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots, \mathfrak{a}_n).$$

Тогда имеем  $x \in 1 + \mathfrak{a}_1$  и  $x \in \mathfrak{a}_2$ , откуда  $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = (1)$ .

$\Leftarrow$ : Достаточно показать, что для некоторого  $x \in A$  выполняется

$$\varphi(x) = (1 + \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots, \mathfrak{a}_n).$$

Так как  $\mathfrak{a}_1$  и  $\mathfrak{a}_k$  взаимно просты при  $k \geq 2$ , найдутся элементы  $u_k \in \mathfrak{a}_1$  и  $v_k \in \mathfrak{a}_k$  со свойством  $1 = u_k + v_k$ . Тогда положим  $x = \prod v_i$ . Имеем

$$x = \prod (1 - u_k) \in 1 + \mathfrak{a}_1 \quad \text{и} \quad x \in \mathfrak{a}_k \Rightarrow \varphi(x) = (1 + \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n).$$

- (3) Очевидно, поскольку  $\bigcap \mathfrak{a}_k = \ker \varphi$ ,

что и требовалось. ■

### **Утверждение 1.3.8.**

- (1) Пусть  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$  — простые идеалы,  $\mathfrak{a}$  — идеал, содержащийся в  $\bigcup_{k=1}^n \mathfrak{p}_k$ . Тогда  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_k$  для некоторого  $k$ .
- (2) Пусть  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$  — некоторые идеалы,  $\mathfrak{p}$  — простой идеал, содержащий  $\bigcap_{k=1}^n \mathfrak{a}_k$ . Тогда  $\mathfrak{p}$  содержит некоторый  $\mathfrak{a}_k$ . Если  $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_k$ , то  $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_k$  для некоторого  $k$ .

*Доказательство:*

- (1) Проведём доказательство индукцией по  $n$  в следующей форме:

$$(\forall k : \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_k) \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{p}_k.$$

- База:  $n = 1$ . Очевидно.
- Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ . Тогда для каждого  $k$  существует такой элемент  $x_k \in \mathfrak{a}$ , что  $x_k \notin \mathfrak{p}_i$  при каждом  $i \neq k$ . Если для некоторого  $k$  ещё  $x_k \notin \mathfrak{p}_k$ , то всё доказано. В противном случае рассмотрим элемент

$$y = \sum_{k=1}^n x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n.$$

Имеем  $y \in \mathfrak{a}$ . При всех  $k$ , так как  $x_k \in \mathfrak{p}_k$ , имеем  $y \notin \mathfrak{p}_k$ . Следовательно,  $x \notin \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{p}_k$ .

- (2) Предположим, что  $\mathfrak{a}_k \not\subset \mathfrak{p}$  при всех  $k$ . Тогда найдутся элементы  $x_k \in \mathfrak{a}_k, x_k \notin \mathfrak{p}$ . Заметим, что  $\prod x_k \in \prod \mathfrak{a}_k \subset \bigcap \mathfrak{a}_k$ . При этом  $\prod x_k \notin \mathfrak{p}$  (поскольку  $\mathfrak{p}$  прост). Следовательно, имеем  $\bigcap \mathfrak{a}_k \not\subset \mathfrak{p}$ , противоречие. Наконец, если  $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_k$ , то  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_k$ , а значит  $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_k$  для некоторого  $k$ .

■

## 1.4. Аннуляторы

**Определение 1.4.1.** Пусть  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  — идеалы в кольце  $A$ . Тогда их *частным* называется множество

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\},$$

которое само является идеалом (упражнение). В частности, частное  $(0 : \mathfrak{b})$  называется *аннулятором* идеала  $\mathfrak{b}$  и обозначается  $\text{Ann}(\mathfrak{b})$ . Множество всех делителей нуля в кольце  $A$  можно представить как

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \text{Ann}((x)).$$

Если  $\mathfrak{b} = (x)$  — главный идеал, то мы будем писать  $(\mathfrak{a} : x)$  вместо  $(\mathfrak{a} : (x))$ .

**Пример 1.4.2.** Пусть  $A = \mathbb{Z}, \mathfrak{a} = (m), \mathfrak{b} = (n)$ . Тогда  $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (q)$ , где  $q = m / \gcd(m, n)$ , где  $\gcd(m, n)$  — наибольший общий делитель  $m$  и  $n$ .

*Доказательство:* Пусть

$$n = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \quad m = \prod_i p_i^{\beta_i}.$$

Условие  $x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$  равносильно  $x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \iff xn \in \mathfrak{a} \iff xn : m$ . Если положить

$$x = \prod_i p_i^{\chi_i},$$

то последнее условие означает, что  $\chi_i + \alpha_i \geq \beta_i$ . Порождающий элемент  $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$  — это минимальное число  $x$ , обладающее этим свойством. Тогда это число  $x$  содержит  $p_i$  в минимальных степенях  $\chi_i = \max(0, \beta_i - \alpha_i)$ , то есть

$$x = \prod_i p_i^{\max(0, \beta_i - \alpha_i)} = \prod_i p_i^{\beta_i - \min(\alpha_i, \beta_i)} = m / \gcd(m, n).$$

■

**Упражнение 1.4.3.** Покажите, что в кольце  $A$

- (1)  $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ ;
- (2)  $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ ;
- (3)  $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$ ;
- (4)  $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$ .

**Определение 1.4.4.** Пусть  $\mathfrak{a} \leq A$  — произвольный идеал. Его *радикалом* называется множество

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Имеем  $r(\mathfrak{a}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}})$ , так что  $r(\mathfrak{a})$  — идеал в кольце  $A$ .



**Упражнение 1.4.5.** Пусть  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  — идеалы в кольце  $A$ . Тогда

- (1)  $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$ ;
- (2)  $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ ;
- (3)  $r\left(\bigcup_{\alpha} \mathfrak{a}_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} r(\mathfrak{a}_{\alpha})$ ;
- (4)  $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$ ;
- (5)  $r(\mathfrak{a}) = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$ ;
- (6) Если  $\mathfrak{p}$  простой, то  $r(\mathfrak{p}^n) = r(\mathfrak{p})$

**Упражнение 1.4.6.** Пусть  $f : A \rightarrow B$  — сюръективный гомоморфизм колец. Покажите, что идеал  $\mathfrak{b} \leq B$  прост тогда и только тогда, когда прост  $f^{-1}(\mathfrak{b}) \leq A$ .

**Утверждение 1.4.7.** Пусть  $A$  — кольцо,  $\mathfrak{a} \leq A$ . Тогда радикал  $r(\mathfrak{a})$  совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих  $\mathfrak{a}$ .

$$r(\mathfrak{a}) = \bigcap \{\mathfrak{p} \leq A \mid \mathfrak{p} \text{ простой, } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}.$$

*Доказательство:* Применим теорему 1.2.3 к  $A/\mathfrak{a}$ . Имеем

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{a}) &= \varphi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}) = \varphi^{-1}\left(\bigcap \{\mathfrak{p} \leq A/\mathfrak{a} \mid \mathfrak{p} \text{ прост в } A/\mathfrak{a}\}\right) = \bigcap \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ прост}\} = \\ &= \bigcap \{\mathfrak{p} \leq A \mid \mathfrak{p} \text{ прост и } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}\}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

**Утверждение 1.4.8.**

$$D = \{x \in A \mid \exists y \neq 0, xy = 0\} = \bigcup_{x \neq 0} r(\text{Ann}(x)).$$

*Доказательство:* Очевидно, что если  $x^n \in D$ , то  $x \in D$ , поэтому  $D = r(D)$ . Тогда мы имеем

$$D = r(D) = r\left(\bigcup_{x \neq 0} \text{Ann}(x)\right) = \bigcup_{x \neq 0} r(\text{Ann}(x)),$$

что и требовалось доказать. ■

**Пример 1.4.9.** Пусть  $A = \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{a} = (m)$ . Разложим  $m$  на простые множители:

$$m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

Для каждого  $i$  имеем  $r((p_i)) = (p_i)$  (упражнение). Тогда

$$r(\mathfrak{a}) = r\left(\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right)\right) = r\left(\prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i})\right) = \bigcap_{i=1}^k r((p_i)^{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^k (p_i).$$

**Утверждение 1.4.10.** Если радикалы  $r(\mathfrak{a}), r(\mathfrak{b})$  идеалов  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  в кольце  $A$  взаимно просты, то  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$  взаимно просты.

*Доказательство:* Имеем

$$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r(1) = (1) \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1),$$

что и требовалось. ■

## 1.5. Расширение и сужение

**Определение 1.5.1.** Пусть  $f : A \rightarrow B$  — некий гомоморфизм колец. Если  $\mathfrak{a} \leq A$  — идеал, то множество  $f(\mathfrak{a})$ , вообще говоря, не обязано быть идеалом в  $B$  (приведите соответствующий пример).

Расширением  $\mathfrak{a}^e$  идеала  $\mathfrak{a}$  называется идеал  $\langle f(\mathfrak{a}) \rangle = Bf(\mathfrak{a}) \leq B$ , порождённый образом  $f(\mathfrak{a})$ . Допускается представление

$$\mathfrak{a}^e = \left\{ \sum_i y_i f(x_i) \mid x_i \in A, y_i \in B \right\}$$

Пусть теперь  $\mathfrak{b} \leq B$  — некоторый идеал в  $B$ . Тогда  $f^{-1}(\mathfrak{b})$  — идеал в  $A$ , который называется сужением  $\mathfrak{b}$  и обозначается  $\mathfrak{b}^c$ .

**Замечание 1.5.2.** Если  $\mathfrak{b}$  прост, то  $\mathfrak{b}^c$  тоже прост. Если  $\mathfrak{a}$  прост, то  $\mathfrak{a}^e$  не обязательно прост (например,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $\mathfrak{a} = (2)$ ).

**Утверждение 1.5.3.** Пусть  $f : A \rightarrow B$  — гомоморфизм,  $\mathfrak{a} \leq A$ ,  $\mathfrak{b} \leq B$ . Тогда

- (1)  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$ ,  $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$ ;
- (2)  $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$ ,  $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$ ;
- (3) Если  $C$  — множество идеалов в  $A$ , которые являются сужениями, а  $E$  — множество всех идеалов в  $B$ , которые являются расширениями, то

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}, \quad E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\},$$

и  $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$  — биективное отображение  $C$  на  $E$ , обратное к которому —  $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$ .

*Доказательство:* Пункт (1) тривиален:

$$\mathfrak{a} \subset f^{-1}(f(\mathfrak{a})) \subset f^{-1}(Bf(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}^{ec}, \quad \mathfrak{b}^{ce} = Bf(f^{-1}(\mathfrak{b})) \subset B\mathfrak{b} = \mathfrak{b}.$$

Пункт (2) остаётся читателю как упражнение.

Если  $\mathfrak{a} \in C$ , то  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$ . Наоборот, если  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$ , то  $\mathfrak{a}$  — сужение  $\mathfrak{a}^e$ .

Рассуждение относительно  $E$  аналогично. ■

**Упражнение 1.5.4.** Пусть  $f : A \rightarrow B$ ,  $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \leq A$ ,  $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \leq B$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c &\supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e &\subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c &= \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c &\supset \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e &\subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e), & (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c &\subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c), \\ r(\mathfrak{a})^e &\subset r(\mathfrak{a}^e), & r(\mathfrak{b})^c &= r(\mathfrak{b}^c). \end{aligned}$$

## 2. Модули

### 2.1. Основные понятия

**Определение 2.1.1.** Пусть  $A$  — некоторое кольцо.  $A$ -модулем называется абелева группа  $(M, +, 0)$  вместе с линейным действием  $A$  на  $M$ ,

$$\begin{aligned}\mu : A \times M &\longrightarrow M, \\ (\alpha, x) &\mapsto \mu(\alpha, x) =: \alpha x,\end{aligned}$$

причём выполняются следующие аксиомы:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad 1x = x.$$

Категория всех  $A$ -модулей обозначается  $A - \text{Mod}$

**Замечание 2.1.2.** Есть равносильное определение  $A$ -модуля: абелева группа  $M$  вместе с гомоморфизмом колец  $\mu : A \rightarrow \text{End}(M)$ , где  $\text{End}(M)$  — кольцо эндоморфизмов  $M$  как абелевой группы (упражнение).

**Пример 2.1.3.** Понятие модуля обобщает несколько хорошо известных понятий:

- (1) Любой идеал  $\mathfrak{a} \leq A$  является  $A$ -модулем, в частности  $A$  есть  $A$ -модуль;
- (2) Если  $A$  есть поле  $F$ , то  $A$ -модуль есть векторное пространство над полем  $F$ ;
- (3)  $\mathbb{Z}$ -модули это абелевы группы ( $nx = x + x + \dots + x$ ).

**Определение 2.1.4.** Пусть  $M, N$  — некоторые  $A$ -модули. Отображение  $f : M \rightarrow N$  называется гомоморфизмом  $A$ -модулей, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для всех  $x, y \in M$  и  $\alpha, \beta \in A$ .

Множество  $\text{Hom}(M, N)$  всех гомоморфизмов  $A$ -модулей  $M$  в  $N$  можно наделять структурой  $A$ -модуля, определив

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

для всех  $x \in M$ .

**Замечание 2.1.5.** Для любого  $A$ -модуля  $M$ , имеется естественный изоморфизм  $\text{Hom}(A, M) \cong M$ : каждый гомоморфизм  $f : A \rightarrow M$  однозначно задаётся элементом  $f(1)$ , который можно выбрать произвольно.

### 2.2. Подмодули и фактормодули

**Определение 2.2.1.** Пусть  $M$  — некоторый  $A$ -модуль. Подгруппа  $M' \leq M$  называется подмодулем, если  $AM' \subset M'$ . Тогда на факторгруппу  $M/M'$  переносится структура  $A$ -модуля, если определить умножение формулой

$$\alpha(x + M') = \alpha x + M',$$

а модуль  $M/M'$  называется фактормодулем  $M$  по  $M'$ .

**Определение 2.2.2.** Пусть  $f : M \rightarrow N$  — гомоморфизм модулей. Его *ядром* называется подмодуль

$$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}.$$

Его *коядром* называется фактормодуль

$$\operatorname{coker} f = N/f(M)$$

**Замечание 2.2.3.** Пусть  $M'$  — подмодуль  $M$ , и  $M' \leq \ker f$ . Тогда можно определить гомоморфизм  $\bar{f} : M/M' \rightarrow N$  следующим образом:

$$\bar{f}(x + M') = f(x).$$

Очевидно, что если  $x + M' = y + M'$ , то  $x - y \in M'$  и  $f(x) = f(y) + f(x - y) = f(y)$ , так что определение  $\bar{f}$  корректно. Полагая, в частности,  $M' = \ker f$ , получаем *первую теорему о гомоморфизме*:

$$M/(\ker f) \cong f(M).$$

## 2.3. Операции с подмодулями

Большинство операций над идеалами обобщается на модули.

**Определение 2.3.1.** Пусть  $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  — семейство подмодулей модуля  $M$ .

Тогда пересечение  $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} M_i$  — подмодуль в  $M$ .

Аналогично с идеалами, возникает понятие *подмодуля, порождённого множеством*: если  $S \subset M$ , то

$$\langle S \rangle = \bigcap \{M' \leq M \mid S \subset M'\}.$$

Суммой  $\sum_{i \in \mathcal{I}} M_i$  называется подмодуль, порождённый всеми  $M_i$ :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} M_i = \left\langle \bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \right\rangle.$$

**Теорема 2.3.2.** (вторая теорема о гомоморфизме): Пусть  $M_1, M_2 \leq M$ . Тогда

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

*Доказательство:* Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$M_2 \rightarrow M_1 + M_2 \rightarrow \frac{M_1 + M_2}{M_1}.$$

Она сюръективна, так как  $f^{-1}(x_1 + x_2 + M_1) \ni x_2$  (упражнение). Ядро этой композиции —  $M_1 + M_2$ , потому что

$$f(x_2) = 0 \iff x_2 + M_1 = M_1 \iff x_2 \in M_1.$$

Отсюда по первой теореме о гомоморфизме получаем требуемое. ■

**Теорема 2.3.3.** (третья теорема о гомоморфизме): Пусть  $L \leq N \leq M$ . Тогда

$$\frac{M/L}{N/L} \cong M/N.$$

**Доказательство:** Определим отображение  $\theta : M/L \rightarrow M/N$  формулой  $\theta(x + L) = x + N$ . Это определение корректно (упражнение). Его ядро —  $N/L$ . Следовательно, по первой теореме о гомоморфизме получаем требуемое. ■

**Определение 2.3.4.** Определить произведение двух подмодулей в общем случае невозможно, но можно умножить  $A$ -модуль  $M$  на идеал  $\mathfrak{a} \leq A$ :

$$\mathfrak{a}M = \langle \{\alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M\} \rangle.$$

**Определение 2.3.5.** Для двух подмодулей  $N, P \leq M$ , частное  $(N : P)$  определяется как

$$(N : P) = \{a \in A \mid aP \subset N\}.$$

Частное  $(N : P)$  — идеал в  $A$ . В частности,  $(0 : P)$  называется аннулятором  $P$  и обозначается  $\text{Ann}(P)$ .  $A$ -модуль  $M$  называется *строгим*, если  $\text{Ann}(M) = 0$ .

**Упражнение 2.3.6.**

- (1)  $\text{Ann}(M + N) = \text{Ann}(M) \cap \text{Ann}(N)$ ;
- (2)  $(N : P) = \text{Ann}((N + P)/N)$ .

**Определение 2.3.7.** Пусть  $x \in M$ . Тогда  $Ax = \{\alpha x \mid \alpha \in A\}$  — подмодуль  $M$ . Если  $M = \sum_{i \in \mathcal{I}} Ax_i$ , семейство  $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  называется *системой образующих* или *порождающим множеством*.  $A$ -модуль  $M$  называется *конечно порождённым*, если у него существует конечная система образующих.

## 2.4. Прямая сумма и прямое произведение

**Определение 2.4.1.** Пусть  $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  — семейство  $A$ -модулей. Его *прямой суммой* называется множество всех *конечных кортежей* из элементов  $M_i$ :

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \mid f(i) \in M_i, |\text{supp } f| < \infty \right\},$$

где  $\text{supp } f = \{i \in \mathcal{I} \mid f(i) \neq 0\}$  называется *носителем* функции  $f$ .

Если отбросить условие конечного носителя, получится определение *прямого произведения* семейства  $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ :

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \mid f(i) \in M_i \right\}.$$