

Программа курса

Коммутативная алгебра, 2025

1. Определение коммутативного кольца и гомоморфизма колец. Подкольца и идеалы. Факторкольцо по идеалу.
2. Делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы. Равносильные условия того, что кольцо является полем.
3. Простые и максимальные идеалы. Эквивалентные переформулировки. Каждое ненулевое кольцо содержит максимальный идеал.
4. Локальные и полулокальные кольца. Достаточные условия локальности.
5. Определение нильрадикала \mathcal{N} и доказательство того, что \mathcal{N} есть идеал.
6. Нильрадикал кольца есть пересечение всех его простых идеалов.
7. Определение радикала Джекобсона и его критерий.
8. Операции над идеалами и их базовые свойства. Взаимно простые идеалы. Примеры.
9. Прямое произведение колец. Теорема о прямом произведении факторколец по данным идеалам.
10. Идеал, содержащийся в объединении простых идеалов, содержится в одном из них. Простой идеал, содержащий пересечение идеалов, содержит один из них.
11. Частные идеалов. Аннуляторы. Радикал идеала. Свойства и характеристика радикала.
12. Расширение и сужение идеала. Свойства (различные включения, сохранение простоты).
13. Определение модуля, гомоморфизма модулей, подмодуля и фактормодуля. Первая, вторая и третья теоремы о гомоморфизме.
14. Операции с модулями (домножение на идеал, прямая сумма, прямое произведение).
15. Системы образующих. Свободные и конечно порождённые модули. Характеризация конечно порождённых модулей.
16. Теорема о том, что каждый эндоморфизм с образом в aM является корнем некоторого полинома с коэффициентами из a . Первое следствие.
17. Лемма Накаямы и следствие из неё.
18. Точные последовательности. Частные случаи. Критерий точности через Hom -множества.
19. Аддитивные функции. Функция размерности аддитивна. Свойство аддитивной функции на длинных точных последовательностях.
20. Билинейные отображение. Универсальное свойство тензорного произведения. Лемма о существовании и единственности тензорного произведения.
21. Замечания о тензорных произведениях (конечная порождённость, зависимость от контекста).
22. Естественные изоморфизмы тензорных произведений.
23. $\text{Hom}(M \otimes N, P) \cong \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$. Свойство точности тензорного произведения.
24. Функторы и плоские модули. Пример плоского и неплоского модуля.
25. Нётеровы модули. Лемма об эквивалентности определений.
26. Всякий подмодуль и фактормодуль нётерова модуля — нётеровы.
27. Обратное свойство: нётеровость подмодуля и фактормодуля влечёт нётеровость исходного модуля.
28. Конечная прямая сумма нётеровых модулей. Нётеровы кольца. Конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом — нётеров.
29. Теорема Гильберта о базисе. Следствия.
30. Теорема Гильберта о базе.