Задачи

Коммутативная алгебра, 2025

(можно приходить за подсказками, они будут даваться щедро)

(3, 2) **1.** Пусть x — нильпотент в кольце A. Покажите, что $1 + x$ обратим. Выведите отсюда, что сумма нильпотента и обратимого элемента обратима. ***(3** кг., годно в теч. **2** дней)*

(5, 3) **2.** Допустим, что в кольце A всякий идеал $\mathfrak{a} \not\subset \mathcal{N}$ содержит *идемпотент,* т.е. такой элемент $e \in A$, что $e^2 = e \neq 0$. Докажите, что в кольце A нильрадикал $\mathcal{N}$ совпадает с радикалом Джекобсона $\mathcal{R}$. ***(5** кг., годно в теч. **3** дней)*

(5, 3) **3.** Пусть в кольце A всякий элемент x удовлетворяет уравнению $x^n = x$ для некоторого $n > 1$ (число n зависит от x). Покажите, что любой простой идеал в A максимален. ***(5** кг., годно в теч. **3** дней)*

(5, 4) **4.** Пусть A — ненулевое кольцо. Покажите, что множество всех простых идеалов в A содержит хотя бы один минимальный (по включению) элемент. Покажите, что всякий простой идеал содержит минимальный простой идеал. ***(5** кг., годно в теч. **4** дней)*

(5, 4) **5.** Пусть A — кольцо, $\mathcal{N}$ — его нильрадикал. Докажите, что следующие условия равносильны:

- A имеет ровно один простой идеал;
- Любой элемент A либо обратим, либо нильпотентен;
- $A/\mathcal{N}$ есть поле. ***(5** кг., годно в теч. **4** дней)*

(3, 5) **6.** Придумайте пример такого кольца A и множества $E \subset A$, что $x, y \in E \Longrightarrow xy \in E$, но при этом $A \setminus E$ — не простой идеал. ***(3** кг., годно в теч. **5** дней)*

(7, 6) **7.** Покажите, что в локальном кольце нет идемпотентов, кроме 0 и 1. ***(7** кг., годно в теч. **6** дней)*

(7, 7) **8.** Кольцо A называется *булевым,* если $x^2 = x$ для всех $x \in A$. Покажите, что справедливы следующие утверждения:

- $2x = 0$ для всех $x \in A$;
- Любой простой идеал $\mathfrak{p} \leqslant A$ максимален, и $A/\mathfrak{p}$ — поле из двух элементов.

***(7** кг., годно в теч. **7** дней)*

(7, 9) **9.** Пусть A — некоторое кольцо, X — множество всех его простых идеалов. Для каждого подмножества $E \subset A$ обозначим через $V(E)$ множество всех простых идеалов, содержащих E. Докажите следующее:

- Если $\mathfrak{a}$ — идеал, порождённый E, то $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$;
- $V(0) = X$, $V(1) = \varnothing$;
- Для всякого семейства $\{E_i\}_{i \in \mathcal{J}}$, имеем $V(\cup_{i \in \mathcal{J}} E_i) = \cap_{i \in \mathcal{J}} V(E_i)$;
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, для всех идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqslant A$.

Таким образом, семейство $\{V(E) \mid E \subset A\}$ удовлетворяет аксиомам замкнутых множеств, и определяет в X так называемую *топологию Зарисского.* Топологическое пространство X называется *простым спектром* кольца A и обозначается $\operatorname{Spec}(A)$.

***(7** кг., годно в теч. **9** дней)*

(11, 12) **10.** Обозначим через Σ множество всех идеалов в A, полностью состоящих из делителей нуля. Покажите, что в Σ есть хотя бы один максимальный элемент. Покажите, что всякий максимальный элемент в Σ прост. ***(11** кг., годно в теч. **12** дней)*

(3, 12) **11.** Пусть $0 \to M \overset{f}{\to} N \overset{g}{\to} L \to 0$ — точная последовательность. Докажите, что если M и L конечно порождены, то N также конечно порождено. ***(3** кг., годно в теч. **12** дней)*

(5, 13) **12.** Пусть A — локальное кольцо. Докажите, что A^2 **не** изоморфно A^1, как A-модуль.

> Подсказка: рассмотрите изоморфизм $\varphi : A^2 \to A^1$ и $x_1 = \varphi(1, 0), x_2 = \varphi(0, 1)$. Покажите, что x_1, x_2 лежат в максимальном идеале A.

***(5** кг., годно в теч. **13** дней)*

(7, 13) **13.** Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a}$ — такой конечно порождённый (как A-модуль) идеал в A, что $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$. Докажите, что идеал $\mathfrak{a}$ порождён единственным идемпотентом.

***(7** кг., годно в теч. **13** дней)*

(7, 14) **14.** Пусть дана следующая коммутативная диаграмма, в которой обе строки точны:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Докажите, что если α_1, α_3 — изоморфизмы, то α_2 — тоже изоморфизм.

***(7** кг., годно в теч. **14** дней)*

(3, 15) **15.** Докажите, что $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, если m, n взаимно просты.

***(3** кг., годно в теч. **15** дней)*

(5, 15) **16.** Покажите, что если M, N — плоские A-модули, то $M \otimes N$ — тоже плоский.

***(5** кг., годно в теч. **15** дней)*

(7, 16) **17.** Пусть M — конечно порождённый A-модуль, $\varphi : M \to A^n$ — сюръективный гомоморфизм. Докажите, что $\ker \varphi$ конечно порождён. ***(7** кг., годно в теч. **16** дней)*

(11, 17) **18.** Пусть A — нётерово кольцо. Докажите, что для всякого идеала $\mathfrak{a} \leqslant A$, семейство $P(\mathfrak{a})$, состоящее из всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, имеет не более чем конечное число минимальных (по включению) элементов.

> Подсказка: Допустите противное и рассмотрите семейство всех идеалов $\mathfrak{a} \leqslant A$, для которых данное утверждение не выполняется.

***(11** кг., годно в теч. **17** дней)*

(11, 17) **19.** При помощи леммы Цорна докажите следующую версию *аксиомы выбора:* для каждого сюръективного отображения $f : X \to Y$ существует его *правое обратное,* то есть такое $g : Y \to X$, что $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$. ***(11** кг., годно в теч. **17** дней)*

(9, 17) **20.** Приведите пример кольца A и его подкольца B, таких, что A нётерово, а B — нет.

> Подсказка: Рассмотрите поле $\mathbb{R}$ и кольцо многочленов $\mathbb{R}[x, y]$. В этом кольце найдите не-нётерово подкольцо.

***(9** кг., годно в теч. **17** дней)*