Материал курса

Коммутативная алгебра, 2025

Содержание

1. Кольца и идеалы

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. (коммутативное кольцо): Кортеж $(A, +, \cdot, 0, 1)$ называется *коммутативным кольцом,* (или просто *кольцом*) если

$$+, \cdot : A \times A \to A, \quad 0, 1 : \{\varnothing\} \to A \quad (0, 1 \in A),$$

а также выполняются следующие свойства:

(1) $(A, +, 0)$ — абелева группа;
(то есть операция сложения $+$ коммутативна и ассоциативна, 0 есть её нейтральный элемент, а также каждый элемент $x \in A$ имеет единственный противоположный $-x \in A$)

(2) $(A, \cdot, 1)$ — коммутативная полугруппа;
(то есть умножение $\cdot$ коммутативно и ассоциативно, 1 есть её нейтральный элемент)

(3) $\forall x, y, z \in A: \ x(y + z) = xy + xz$ (свойство *дистрибутивности*)

Категорию всех коммутативных колец мы будем обозначать Ring.

Замечание 1.1.2. Может статься, что $0 = 1$ в кольце A. Тогда имеем $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ и $A = \{0\} =: 0$.

Определение 1.1.3. (гомоморфизм колец): Отображение $f : A \to B$ между кольцами A и B называется *гомоморфизмом,* если оно является гоморфизмом абелевых групп по сложению и полугрупп по умножению, то есть

(1) $f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$, $f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$;

(2) $f(0_A) = 0_B$, $f(1_A) = 1_B$.

Определение 1.1.4. (подкольца и идеалы):

(1) Подмножество $S \subset A$ называется *подкольцом,* если $(S, +, \cdot, 0, 1)$ есть кольцо.

(2) Подмножество $\mathfrak{a} \subset A$ называется *идеалом,* если $\mathfrak{a} \underset{\mathrm{Ab}}{\leqslant} A$, а также $A\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$;

(3) Для любого $x \in A$, множество $xA = \{xy \mid y \in A\}$ образует идеал, который обозначается (x). Идеалы вида (x) называются *главными.*

Определение 1.1.5. (факторкольцо): Пусть $\mathfrak{a} \leqslant A$. Тогда имеем $(A/\mathfrak{a}, +, \cdot, 0 + \mathfrak{a}, 1 + \mathfrak{a}) \in \mathrm{Ring}$, где

$$(x + \mathfrak{a}) +_{\mathfrak{a}} (y + \mathfrak{a}) = (x + y) + \mathfrak{a}, \quad (x + \mathfrak{a}) \cdot (y + \mathfrak{a}) = xy + \mathfrak{a}.$$

(Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. Тогда абелева группа $A/\mathfrak{a}$ однозначно снабжается умножением, индуцированным с умножения в кольце A, что превращает её в кольцо, называемое *факторкольцом* $A/\mathfrak{a}$)
Отображение $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$, $\varphi(x) = x + \mathfrak{a}$, называется *канонической проекцией.*

Утверждение 1.1.6. *Существует биекция*

$$\tilde{\varphi} : \{\mathfrak{b} \leqslant A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}\} \leftrightarrow \left\{\overline{\mathfrak{b}} \leqslant A/\mathfrak{a}\right\},$$

сохраняющая включение.

Доказательство: Упражнение. ■

Определение 1.1.7. (делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы):

(1) Пусть $x \in A$. Если найдётся $y \neq 0$, что $xy = 0$, то x называется *делителем нуля.* $(x \mid 0)$
(2) Кольцо $A \neq 0$, не имеющее ненулевых делителей нуля, называется *областью целостности.*
(3) Элемент $x \in A$ называется *нильпотентом,* если $x^n = 0$ для некоторого $n \geqslant 1$. Всякий нильпотент является делителем нуля, но не всегда наоборот.
(4) Пусть $x \in A$. Если для некоторого $y \in A$ выполняется $xy = 1$, то x называется *обратимым* $(x \mid 1)$. Обратимые элементы кольца A образуют абелеву группу по умножению.
(5) Ненулевое кольцо A, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *полем.*

Упражнение 1.1.8. Докажите следующие простые свойства кольца:

(1) $x \cdot 0 = 0$;
(2) $f : A \to B,\ g : B \to C$ homo $\Longrightarrow (f \circ g) : A \to C$ homo;
(композиция гомоморфизмов — гомоморфизм)
(3) $f : A \to B$ — инъекция $\Longleftrightarrow \ker f = 0$;
(4) $x \mid 0 \Longrightarrow x \nmid 1$. (всякий делитель нуля необратим)

Утверждение 1.1.9. *Пусть A — ненулевое кольцо. Следующие условия равносильны:*

(1) A — поле;
(2) $\mathfrak{a} \leqslant A \Longrightarrow \mathfrak{a} = 0 = \{0\} \vee \mathfrak{a} = (1) = A$; *(В A нет идеалов, кроме $0 = \{0\}$ и (1))*
(3) $\forall B \neq 0, \forall f : A \to B :\ \ f$ — ин. *(всякий гомоморфизм из A в ненулевое кольцо инъективен)*

> *Доказательство:*
> *(1) $\Longrightarrow$ (2):* Если $\mathfrak{a} \leqslant A$ и $\mathfrak{a} \neq 0$, то $\mathfrak{a}$ содержит некий обратимый элемент $x \in A$. Тогда $1 = xy \in A$ для некоторого y, а значит $\forall z \in A :\ z = z \cdot 1 \in \mathfrak{a}$, и $\mathfrak{a} = (1)$.
> *(2) $\Longrightarrow$ (3):* Если $B \neq 0$, то для гомоморфизма $f : A \to B$ имеем $f(1) = 1$, а значит $\ker f \neq A$. Следовательно, $\ker f = 0$, и f инъективно.
> *(3) $\Longrightarrow$ (1):* Пусть $x \in A, x \neq 0$. Рассмотрим каноническую проекцию $\varphi : A \to A/(x)$. Так как $\varphi(0) = \varphi(x) = (x)$, мы заключаем, что φ не инъективно. Тогда $A/(x) = 0$, а значит $(x) = A$, и $1 = xy$ для некоторого $y \in A$. ■

Определение 1.1.10. (простые и максимальные идеалы):

(1) Идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым,* если $\mathfrak{p} \neq A$ и включение $xy \in \mathfrak{p}$ влечёт $x \in \mathfrak{a}$ либо $y \in \mathfrak{p}$.
(2) Идеал $\mathfrak{m} \subset A$ называется *максимальным,* если $\mathfrak{m} \neq A$ и не существует идеала $\mathfrak{b}$, такого что $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq A$.

Утверждение 1.1.11. *Пусть A — кольцо.*

(1) Идеал $\mathfrak{p} \subset A$ простой $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{p}$ — область целостности;
(2) Идеал $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{m}$ — поле.

> *Доказательство:* Упражнение. ■

Следствие 1.1.12. *Всякий максимальный идеал прост.*

Теорема 1.1.13. *В каждом кольце $A \neq 0$ есть максимальный идеал.*

> *Доказательство:* Для доказательства сформулируем *лемму Цорна:*
>
> **Предложение 1.1.14.** (Лемма Цорна): *Пусть $(P, \leqslant)$ — непустое частично упорядоченное множество. Тогда если каждое линейно упорядоченное подмножество в P имеет мажоранту, то в P существует по крайней мере один максимальный элемент.*
>
> Это утверждение мы оставим без доказательства, отметив только, что оно эквивалентно *аксиоме выбора.*

Далее, рассмотрим множество Σ всех собственных идеалов в A, частично упорядоченное по включению. Это множество непусто, так как содержит нулевой идеал 0.
Теперь пусть $\{\mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ — некое линейно упорядоченное подмножество Σ. Рассмотрим объединение

$$\mathfrak{b} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathfrak{a}_\alpha.$$

Очевидно, что $\mathfrak{b}$ — идеал (упражнение), и кроме того $1 \notin \mathfrak{b}$, так как $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathcal{J}$.
Следовательно, $\mathfrak{b} \in \Sigma$, а значит $\mathfrak{b}$ является мажорантой множества $\{\mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$.
Наконец, по лемме Цорна мы заключаем, что множество Σ имеет максимальный элемент $\mathfrak{m}$, то есть максимальный идеал в кольце A. ■

Следствие 1.1.15. *Каждый собственный идеал $\mathfrak{a} < A$ содержится в некотором максимальном идеале, и всякий необратимый элемент содержится в некотором максимальном идеале.*

Доказательство: Достаточно рассмотреть кольцо $A/\mathfrak{a}$ и применить предыдущую теорему. ■

Определение 1.1.16. Кольцо A, имеющее всего один максимальный идеал, называется *локальным.* Если множество максимальных идеалов кольца A конечно, то кольцо A называется *полулокальным.*

Утверждение 1.1.17. *Пусть A — некоторое кольцо.*
(1) Если $\mathfrak{a}$ — такой собственный идеал, что всякий элемент $x \in A \setminus \mathfrak{a}$ обратим, то кольцо A локально, и $\mathfrak{a}$ — его максимальный идеал.
(2) Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, и всякий элемент $1 + x \in 1 + \mathfrak{m}$ обратим, то A является локальным.

Доказательство:
(1) Пусть $\mathfrak{m}$ — некий максимальный идеал. Тогда если $x \in \mathfrak{m}$, то x необратим и следовательно $x \in \mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$, а значит $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$, так как идеал $\mathfrak{m}$ максимальный. Итого, все максимальные идеалы в A совпадают с $\mathfrak{a}$, ч.т.д.
(2) Допустим, что $x \in A \setminus \mathfrak{m}$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, идеал, порождённый $\mathfrak{m}$ и x, совпадает со всем кольцом A. Поэтому найдутся такие элементы $y \in A, t \in \mathfrak{m}$, что $xy + t = 1$. Следовательно, $xy = 1 - t \in 1 + m$, а значит xy обратим. Тогда x обратим. Остаётся только воспользоваться утверждением (1).

■

1.2. Нильрадикал и радикал Джекобсона

Утверждение 1.2.1. *Множество $\mathcal{N}$ всех нильпотентов кольца A является идеалом. В кольце $A/\mathcal{N}$ нет ненулевых нильпотентов.*

Доказательство: Очевидно, что если $x \in \mathcal{N}$, то $yx \in \mathcal{N}$ для любого $y \in A$. Теперь рассмотрим два элемента $x, y \in \mathcal{N}$, причём $x^n = 0$ и $y^m = 0$. Тогда выражение $(x + y)^{m+n}$ по теореме Ньютона раскрывается следующим образом:

$$(x + y)^{n+m} = \sum_{i+j=n+m} a_{ij} x^i y^j.$$

При этом для каждой пары (i, j), либо $i \geqslant n$, либо $j \geqslant m$. Следовательно, каждое слагаемое $a_{ij} x^i y^j$ равно нулю, а значит $(x + y)^{n+m} = 0$, и $x + y \in \mathcal{N}$.
Далее, рассмотрим элемент $x + \mathcal{N} \in A/\mathcal{N}$ и допустим, что $(x + \mathcal{N})^n = \mathcal{N}$. Это означает, что $x^n \in \mathcal{N}$, и для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$x^{nk} = (x^n)^k = 0 \Longrightarrow x \in \mathcal{N} \Longrightarrow x + \mathcal{N} = \mathcal{N}.$$

■

Определение 1.2.2. Идеал $\mathcal{N}$ называется *нильрадикалом* кольца A.

Теорема 1.2.3. *Нильрадикал кольца A совпадает с пересечением всех его простых идеалов.*

Доказательство: Пусть P — пересечение всех простых идеалов кольца A.
Во-первых, очевидно, что всякий нильпотент лежит во всяком простом идеале (упражнение), так что $\mathcal{N} \subset P$.
Обратно, пусть элемент $f \in A$ не является нильрадикалом. Нам нужно показать, что он не содержится в каком-либо простом идеале. Рассмотрим множество Σ всех идеалов $\mathfrak{a}$ со свойством

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ f^n \notin \mathfrak{a}.$$

Множество Σ непусто, поскольку $0 \in \Sigma$. Рассуждение из теоремы 1.2.3 показывает применимость леммы Цорна ко множеству Σ, в результате чего получаем максимальный элемент $\mathfrak{p} \in \Sigma$. Покажем, что $\mathfrak{p}$ — простой идеал.
Пусть $x, y \notin \mathfrak{p}$. Тогда идеалы $\mathfrak{p} + (x)$ и $\mathfrak{p} + (y)$ строго содержат $\mathfrak{p}$, и следовательно, не принадлежат Σ. Иначе говоря, имеем

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \qquad f^n \in \mathfrak{p} + (y),$$

для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. отсюда следует, что

$$f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy) \Longrightarrow p + (xy) \notin \Sigma \Longrightarrow xy \notin \mathfrak{p}.$$

Тем самым, мы построили простой идеал, не содержащий f, и потому $f \notin P$. ■

Определение 1.2.4. Пересечение $\mathcal{R}$ всех максимальных идеалов кольца A называется *радикалом Джекобсона.*

Лемма 1.2.5. $x \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow 1 - xy$ *обратим в кольце A для всех $y \in A$.*

Доказательство:
$\Longrightarrow$: Допустим, что элемент $1 - xy$ необратим. Тогда, по следствию 1.1.15, этот элемент содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{m}$. Но $x \in \mathcal{R} \subset \mathfrak{m}$, а значит

$$1 = (1 - xy) + y \cdot x \in \mathfrak{m},$$

противоречие.
$\Longleftarrow$: Предположим, что $x \notin \mathfrak{m}$ для некоторого максимального идеала $\mathfrak{m}$. Тогда имеем $A = \mathfrak{m} + (x)$, а потому $1 = u + xy$ для некоторых $u \in \mathfrak{m}$ и $y \in A$. Следовательно, $1 - xy = u \in \mathfrak{m}$, что невозможно, так как $1 - xy$ обратим. ■

1.3. Операции над идеалами

Определение 1.3.1.

(1) Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Тогда $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — идеал, состоящий из сумм $x + y$, где $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$. Это наименьший идеал, содержащий $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Он называется *суммой* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

(2) Также, для любого семейсва идеалов $\{\mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$, можно определить сумму $\sum\limits_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathfrak{a}_\alpha$ как идеал всевозможных *конечных* сумм элементов из $\mathfrak{a}_\alpha$;

(3) *Пересечение* любого семейства идеалов является идеалом. Таким образом, идеалы кольца A образуют полную структуру по включению;

(4) Возникает определение *идеала, порождённого множеством:* если $S \subset A$, то $\langle S \rangle$ определяется как пересечение всех идеалов, содержащих S.

(5) *Произведением* двух идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ называется идеал, порождённый всевозможными произведениями xy, где $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle \{xy \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,\middle|\, x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b} \right\}.$$

Замечание 1.3.2. Все три операции коммутативны и ассоциативны (упражнение). Кроме того, справедлив дистрибутивный закон:

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$$

Определение 1.3.3. Если $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$, то идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ называются *взаимно простыми.*

Замечание 1.3.4. В кольце $\mathbb{Z}$, идеалы (n) и (m) взаимно просты тогда и только тогда, когда числа n и m взаимно просты.

Доказательство: Упражнение. ■

Упражнение 1.3.5. Правда ли, что всякий простой идеал $\mathfrak{p}$ взаимно прост с любым другим идеалом $\mathfrak{a}$, таким, что $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$?

Определение 1.3.6. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые кольца. Их *прямым произведением*

$$A = \prod_{k=1}^{n} A_k$$

называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ с поточечными операциями. Проекции $p_k : A \to A_k$ являются гомоморфизмами колец.

Теорема 1.3.7. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — его идеалы. Определим гомоморфизм*

$$\varphi : A \to \prod_{k=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_k)$$

формулой $\varphi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2, \ldots, x + \mathfrak{a}_n)$. Тогда:

(1) Если идеалы $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{a}_j$ взаимно просты при $i \neq j$, то $\prod a_k = \bigcap a_k$;

(2) Гомоморфизм φ сюръективен $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ взаимно просты при $i \neq j$;

(3) Гомоморфизм φ инъективен $\Longleftrightarrow \bigcap \mathfrak{a}_k = (0)$.

Доказательство:

(1) Первый пункт доказывается индукцией по n:
- <u>База:</u> $n = 2$. Имеем такие идеалы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqslant A$, что $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. Очевидно, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Обратно, имеем

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=(1)\cdot(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subset\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

- Переход: $n-1\to n$. Пусть $n\geqslant 3$, и для идеалов $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_{n-1}$ результат верен. Положим

$$\mathfrak{b}=\bigcap_{k=1}^{n-1}\mathfrak{a}_k.$$

Так как $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_n=(1)$, имеем $x_k+y_k=1$ для некоторых $x_k\in\mathfrak{a}_k, y_k\in\mathfrak{a}_n$. Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n-1}x_i=\prod_{k=1}^{n-1}(1-y_k)\in 1+\mathfrak{a}_n.$$

Тогда $\mathfrak{a}_n+\mathfrak{b}=(1)$, а значит

$$\prod_{k=1}^{n}\mathfrak{a}_k=\mathfrak{b}a_n=b\cap\mathfrak{a}_n=\bigcap_{k=1}^{n}\mathfrak{a}_n.$$

(2) $\Longrightarrow$: Покажем, что $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ взаимно просты. Поскольку φ сюръективно, найдётся такой элемент $x\in A$, что

$$\varphi(x)=(1+\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3,\ldots,\mathfrak{a}_n).$$

Тогда имеем $x\in 1+\mathfrak{a}_1$ и $x\in\mathfrak{a}_2$, откуда $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2=(1)$.
$\Longleftarrow$: Достаточно показать, что для некоторого $x\in A$ выполняется

$$\varphi(x)=(1+\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3,\ldots,\mathfrak{a}_n).$$

Так как $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_k$ взаимно просты при $k\geqslant 2$, найдутся элементы $u_k\in\mathfrak{a}_1$ и $v_k\in\mathfrak{a}_k$ со свойством $1=u_k+v_k$. Тогда положим $x=\prod v_i$. Имеем

$$x=\prod(1-u_k)\in 1+\mathfrak{a}_1\quad\text{и}\quad x\in\mathfrak{a}_k\Longrightarrow\varphi(x)=(1+\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_n).$$

(3) Очевидно, поскольку $\bigcap\mathfrak{a}_k=\ker\varphi$,

что и требовалось. ■

Утверждение 1.3.8.

(1) Пусть $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots,\mathfrak{p}_n$ — простые идеалы, $\mathfrak{a}$ — идеал, содержащийся в $\bigcup_{k=1}^n\mathfrak{p}_k$. Тогда $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_k$ для некоторого k.

(2) Пусть $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_n$ — некоторые идеалы, $\mathfrak{p}$ — простой идеал, содержащий $\bigcap_{k=1}^n\mathfrak{a}_k$. Тогда $\mathfrak{p}$ содержит некоторый $\mathfrak{a}_k$. Если $\mathfrak{p}=\bigcap\mathfrak{a}_k$, то $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_k$ для некоторого k.

Доказательство:

(1) Проведём доказательство индукцией по n в следующей форме:

$$(\forall k:\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}_k)\Longrightarrow\mathfrak{a}\not\subset\bigcup_{k=1}^{n}\mathfrak{p}_k.$$

- База: $n=1$. Очевидно.
- Переход: $n-1\to n$. Тогда для каждого k существует такой элемент $x_k\in\mathfrak{a}$, что $x_k\notin\mathfrak{p}_i$ при каждом $i\neq k$. Если для некоторого k ещё $x_k\notin\mathfrak{p}_k$, то всё доказано. В противном случае рассмотрим элемент

$$y=\sum_{k=1}^{n}x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1}\ldots x_n.$$

Имеем $y\in\mathfrak{a}$. При всех k, так как $x_k\in\mathfrak{p}_k$, имеем $y\notin\mathfrak{p}_k$. Следовательно, $x\notin\bigcup_{k=1}^n\mathfrak{p}_k$.

(2) Предположим, что $\mathfrak{a}_k \not\subset \mathfrak{p}$ при всех k. Тогда найдутся элементы $x_k \in \mathfrak{a}_k$, $x_k \notin \mathfrak{p}$. Заметим, что $\prod x_k \in \prod \mathfrak{a}_k \subset \bigcap \mathfrak{a}_k$. При этом $\prod x_k \notin \mathfrak{p}$ (поскольку $\mathfrak{p}$ прост). Следовательно, имеем $\bigcap \mathfrak{a}_k \not\subset \mathfrak{p}$, противоречие. Наконец, если $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_k$, то $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_k$, а значит $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_k$ для некоторого k.

■

1.4. Аннуляторы

Определение 1.4.1. Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Тогда их *частным* называется множество

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \,|\, x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\},$$

которое само является идеалом (упражнение). В частности, частное $(0 : \mathfrak{b})$ называется *аннулятором* идеала $\mathfrak{b}$ и обозначается $\operatorname{Ann}(\mathfrak{b})$. Множество всех делителей нуля в кольце A можно представить как

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \operatorname{Ann}((x)).$$

Если $\mathfrak{b} = (x)$ — главный идеал, то мы будем писать $(\mathfrak{a} : x)$ вместо $(\mathfrak{a} : (x))$.

Пример 1.4.2. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$, $\mathfrak{b} = (n)$. Тогда $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (q)$, где $q = m/\gcd(m,n)$, где $\gcd(m,n)$ — наибольший общий делитель m и n.

Доказательство: Пусть

$$n = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \quad m = \prod_i p_i^{\beta_i}.$$

Условие $x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ равносильно $x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \Longleftrightarrow xn \in \mathfrak{a} \Longleftrightarrow xn \,\vdots\, m$. Если положить

$$x = \prod_i p_i^{\chi_i},$$

то последнее условие означает, что $\chi_i + \alpha_i \geqslant \beta_i$. Порождающий элемент $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ — это минимальное число x, обладающее этим свойством. Тогда это число x содержит p_i в минимальных степенях $\chi_i = \max(0, \beta_i - \alpha_i)$, то есть

$$x = \prod_i p_i^{\max(0,\beta_i-\alpha_i)} = \prod_i p_i^{\beta_i - \min(\alpha_i,\beta_i)} = m/\gcd(m,n).$$

■

Упражнение 1.4.3. Покажите, что в кольце A

(1) $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$;
(2) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$;
(3) $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$;
(4) $\left(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i\right) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

Определение 1.4.4. Пусть $\mathfrak{a} \leqslant A$ — произвольный идеал. Его *радикалом* называется множество

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Имеем $r(\mathfrak{a}) = \varphi^{-1}\left(\mathcal{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$, так что $r(\mathfrak{a})$ — идеал в кольце A.

Упражнение 1.4.5. Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — идеалы в кольце A. Тогда
(1) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$;
(2) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$;
(3) $r\left(\bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha\right) = \bigcup_\alpha r(\mathfrak{a}_\alpha)$;
(4) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$;
(5) $r(\mathfrak{a}) = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$;
(6) Если $\mathfrak{p}$ простой, то $r(\mathfrak{p}^n) = r(\mathfrak{p})$

Упражнение 1.4.6. Пусть $f : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм колец. Покажите, что идеал $\mathfrak{b} \leqslant B$ прост тогда и только тогда, когда прост $f^{-1}(\mathfrak{b}) \leqslant A$.

Утверждение 1.4.7. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a} \leqslant A$. Тогда радикал $r(\mathfrak{a})$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.*

$$r(\mathfrak{a}) = \bigcap \{\mathfrak{p} \leqslant A \mid \mathfrak{p} \text{ простой}, \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}.$$

Доказательство: Применим теорему 1.2.3 к $A/\mathfrak{a}$. Имеем

$$r(\mathfrak{a}) = \varphi^{-1}\left(\mathcal{N}_{A/\mathfrak{a}}\right) = \varphi^{-1}\left(\bigcap \{\mathfrak{p} \leqslant A/\mathfrak{a} \mid \mathfrak{p} \text{ прост в } A/\mathfrak{a}\}\right) = \bigcap \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ прост}\} =$$
$$= \bigcap \{\mathfrak{p} \leqslant A \mid \mathfrak{p} \text{ прост и } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}\},$$

что и требовалось. ■

Утверждение 1.4.8.

$$D = \{x \in A \mid \exists y \neq 0,\ xy = 0\} = \bigcup_{x \neq 0} r(\mathrm{Ann}\ (x)).$$

Доказательство: Очевидно, что если $x^n \in D$, то $x \in D$, поэтому $D = r(D)$. Тогда мы имеем

$$D = r(D) = r\left(\bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}(x)\right) = \bigcup_{x \neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)),$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 1.4.9. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$. Разложим m на простые множители:

$$m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

Для каждого i имеем $r((p_i)) = (p_i)$ (упражнение). Тогда

$$r(\mathfrak{a}) = r\left(\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right)\right) = r\left(\prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i})\right) = \bigcap_{i=1}^k r\left((p_i)^{\alpha_i}\right) = \bigcap_{i=1}^k (p_i).$$

Утверждение 1.4.10. *Если радикалы $r(\mathfrak{a}), r(\mathfrak{b})$ идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ в кольце A взаимно просты, то $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ взаимно просты.*

Доказательство: Имеем

$$r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r(1) = (1) \Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1),$$

что и требовалось. ■

1.5. Расширение и сужение

Определение 1.5.1. Пусть $f : A \to B$ — некий гомоморфизм колец. Если $\mathfrak{a} \leqslant A$ — идеал, то множество $f(\mathfrak{a})$, вообще говоря, не обязано быть идеалом в B (приведите соответствующий пример).
Расширением $\mathfrak{a}^e$ идеала $\mathfrak{a}$ называется идеал $\langle f(\mathfrak{a})\rangle = Bf(\mathfrak{a}) \leqslant B$, порождённый образом $f(\mathfrak{a})$. Допускается представление

$$\mathfrak{a}^e = \left\{ \sum_i y_i f(x_i) \,\middle|\, x_i \in A, y_i \in B \right\}$$

Пусть теперь $\mathfrak{b} \leqslant B$ — некоторый идеал в B. Тогда $f^{-1}(\mathfrak{b})$ — идеал в A, который называется *сужением* $\mathfrak{b}$ и обозначается $\mathfrak{b}^c$.

Замечание 1.5.2. Если $\mathfrak{b}$ прост, то $\mathfrak{b}^c$ тоже прост. Если $\mathfrak{a}$ прост, то $\mathfrak{a}^e$ не обязательно прост (например, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\mathfrak{a} = (2)$).

Утверждение 1.5.3. *Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм, $\mathfrak{a} \leqslant A$, $\mathfrak{b} \leqslant B$. Тогда*
(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}, \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$;
(2) $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}, \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$;
(3) Если C — множество идеалов в A, которые являются сужениями, а E — множество всех идеалов в B, которые являются расширениями, то

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}, \qquad E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\},$$

и $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ — биективное отображение C на E, обратное к которому — $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$.

Доказательство: Пункт (1) тривиален:

$$\mathfrak{a} \subset f^{-1}(f(\mathfrak{a})) \subset f^{-1}(Bf(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}^{ec}, \quad \mathfrak{b}^{ce} = Bf\big(f^{-1}(\mathfrak{b})\big) \subset B\mathfrak{b} = \mathfrak{b}.$$

Пункт (2) остаётся читателю как упражнение.
Если $\mathfrak{a} \in C$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$. Наоборот, если $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$, то $\mathfrak{a}$ — сужение $\mathfrak{a}^e$.
Рассуждение относительно E аналогично. ■

Упражнение 1.5.4. Пусть $f : A \to B$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \leqslant A$, $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \leqslant B$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c &\supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e &\subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c &= \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c &\supset \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e &\subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e), & (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c &\subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c),\\
r(\mathfrak{a})^e &\subset r(\mathfrak{a}^e), & r(\mathfrak{b})^c &= r(\mathfrak{b}^c).
\end{aligned}$$

2. Модули

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. Пусть A — некоторое кольцо. A-*модулем* называется абелева группа $(M, +, 0)$ вместе с *линейным действием* A на M,

$$\begin{gathered}\mu : A \times M \longrightarrow M,\\ (\alpha, x) \mapsto \mu(\alpha, x) =: \alpha x,\end{gathered}$$

причём выполняются следующие аксиомы:

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \qquad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \qquad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \qquad 1x = x.$$

Категория всех A-модулей обозначается $A - \mathrm{Mod}$

Замечание 2.1.2. Есть равносильное определение A-модуля: абелева группа M вместе с гомоморфизмом колец $\mu : A \to \mathrm{End}(M)$, где $\mathrm{End}(M)$ — кольцо эндоморфизмов M как абелевой группы (упражнение).

Пример 2.1.3. Понятие модуля обобщает несколько хорошо известных понятий:
(1) Любой идеал $\mathfrak{a} \leqslant A$ является A-модулем, в частности A есть A-модуль;
(2) Если A есть поле F, то A-модуль есть векторное пространство над полем F;
(3) $\mathbb{Z}$-модули это абелевы группы ($nx = x + x + \ldots + x$).

Определение 2.1.4. Пусть M, N — некоторые A-модули. Отображение $f : M \to N$ называется *гомоморфизмом A-модулей,* если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для всех $x, y \in M$ и $\alpha, \beta \in A$.
Множество $\mathrm{Hom}(M, N)$ всех гомоморфизмов A-модулей M в N можно наделить структурой A-модуля, определив

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

для всех $x \in M$.

Замечание 2.1.5. Для любого A-модуля M, имеется естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}(A, M) \cong M$: каждый гомоморфизм $f : A \to M$ однозначно задаётся элементом $f(1)$, который можно выбрать произвольно.

2.2. Подмодули и фактормодули

Определение 2.2.1. Пусть M — некоторый A-модуль. Подгруппа $M' \leqslant M$ называется *подмодулем,* если $AM' \subset M'$. Тогда на факторгруппу M/M' переносится структура A-модуля, если определить умножение формулой

$$\alpha(x + M') = \alpha x + M',$$

а модуль M/M' называется *фактормодулем* M по M'.

Определение 2.2.2. Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм модулей. Его *ядром* называется под модуль

$$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}.$$

Его *коядром* называется фактормодуль

$$\operatorname{coker} f = N/f(M)$$

Замечание 2.2.3. Пусть M' — подмодуль M, и $M' \leqslant \ker f$. Тогда можно определить гомоморфизм $\overline{f} : M/M' \longrightarrow N$ следующим образом:

$$\overline{f}(x + M') = f(x).$$

Очевидно, что если $x + M' = y + M'$, то $x - y \in M'$ и $f(x) = f(y) + f(x - y) = f(y)$, так что определение $\overline{f}$ корректно. Полагая, в частности, $M' = \ker f$, получаем *первую теорему о гомоморфизме:*

$$M/(\ker f) \cong f(M).$$

2.3. Операции с подмодулями

Большинство операций над идеалами обобщается на модули.

Определение 2.3.1. Пусть $\{M_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ — семейство подмодулей модуля M.
Тогда пересечение $\bigcap_{i\in\mathcal{J}} M_i$ — подмодуль в M.
Аналогично с идеалами, возникает понятие *подмодуля, порождённого множеством:* если $S \subset M$, то

$$\langle S\rangle = \bigcap \{M' \leqslant M \mid S \subset M'\}.$$

Суммой $\sum_{i\in\mathcal{J}} M_i$ называется подмодуль, порождённый всеми M_i:

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} M_i = \left\langle \bigcup_{i\in\mathcal{J}} M_i \right\rangle.$$

Теорема 2.3.2. (вторая теорема о гомоморфизме): *Пусть $M_1, M_2 \leqslant M$. Тогда*

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

Доказательство: Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$M_2 \to M_1 + M_2 \to \frac{M_1 + M_2}{M_1}.$$

Она сюръективна, так как $f^{-1}(x_1 + x_2 + M_1) \ni x_2$ (упражнение). Ядро этой композиции — $M_1 + M_2$, потому что

$$f(x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_2 + M_1 = M_1 \Longleftrightarrow x_2 \in M_1.$$

Отсюда по первой теореме о гомоморфизме получаем требуемое. ■

Теорема 2.3.3. (третья теорема о гомоморфизме): *Пусть $L \leqslant N \leqslant M$. Тогда*

$$\frac{M/L}{N/L} \cong M/N.$$

Доказательство: Определим отображение $\theta : M/L \longrightarrow M/N$ формулой $\theta(x + L) = x + N$. Это определение корректно (упражнение). Его ядро — N/L. Следовательно, по первой теореме о гомоморфизме получаем требуемое. ∎

Определение 2.3.4. Определить произведение двух подмодулей в общем случае невозможно, но можно умножить A-модуль M на идеал $\mathfrak{a} \leqslant A$:

$$\mathfrak{a}M = \langle \{\alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M\} \rangle.$$

Определение 2.3.5. Для двух подмодулей $N, P \leqslant M$, *частное* $(N : P)$ определяется как

$$(N : P) = \{\alpha \in A \mid \alpha P \subset N\}.$$

Частное $(N : P)$ — идеал в A. В частности, $(0 : P)$ называется аннулятором P и обозначается $\operatorname{Ann}(P)$. A-модуль M называется *строгим,* если $\operatorname{Ann}(M) = 0$.

Упражнение 2.3.6.
(1) $\operatorname{Ann}(M + N) = \operatorname{Ann}(M) \cap \operatorname{Ann}(N)$;
(2) $(N : P) = \operatorname{Ann}((N + P)/N)$.

Определение 2.3.7. Пусть $x \in M$. Тогда $Ax = \{\alpha x \mid \alpha \in A\}$ — подмодуль M. Если $M = \sum_{i \in \mathcal{I}} Ax_i$, семейство $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ называется *системой образующих* или *порождающим множеством.* A-модуль M называется *конечно порождённым,* если у него существует конечная система образующих.

2.4. Прямая сумма и прямое произведение

Определение 2.4.1. Пусть $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ — семейство A-модулей. Его *прямой суммой* называется множество всех *конечных кортежей* из элементов M_i:

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \;\middle|\; f(i) \in M_i,\ |\operatorname{supp} f| < \infty \right\},$$

где $\operatorname{supp} f = \{i \in \mathcal{I} \mid f(i) \neq 0\}$ называется *носителем* функции f.
Если отбросить условие конечного носителя, получится определение *прямого произведения* семейства $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$:

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i \;\middle|\; f(i) \in M_i \right\}.$$

2.5. Конечно порождённые модули

Определение 2.5.1. Если A-модуль M изоморфен $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$, где $M_i \cong A$, то модуль M называется *свободным.* Иногда используется обозначение $M = A^{\mathcal{I}}$.
Всякий конечно порождённый свободный модуль изоморфен $A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$ и обозначается A^n. A^0 по определению есть нулевой модуль $\{0\}$.

Лемма 2.5.2. *A-модуль M конечно порождён тогда и только тогда, когда $M \cong A^n/N$, где $n > 0$ и $N \leqslant A^n$.*

Доказательство:
$\Longrightarrow$: Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порождают M. Определим $\varphi : A^n \to M$ формулой

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Отображение φ сюръективно по определению системы образующих. Следовательно, по первой теореме о гомоморфизме имеем $M \cong A^n/(\ker \varphi)$.

$\Longleftarrow$: Существует сюръективный гомоморфизм A-модулей $\varphi : A^n \to M$. Положим $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, 1 на i-м месте. Тогда $\{e_i\}$ порождают A^n, а значит $\varphi(e_i)$ порождают M (упражнение). ■

Теорема 2.5.3. *Пусть M — конечно порождённый A-модуль, $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в A, а $\varphi : M \to M$ — такой эндоморфизм, что $\varphi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Тогда найдутся такие элементы $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathfrak{a}$, что*

$$\varphi^n + \beta_1\varphi^{n-1} + ... + \beta_{n-1}\varphi + \beta_n = 0 \in \operatorname{End}(M).$$

Доказательство: Пусть $x_1, ..., x_n$ — система образующих в M. Тогда $\varphi(x_i) \in \mathfrak{a}M$ для всех i, и

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j, \qquad \alpha_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \big(\delta_{ij}\varphi - \alpha_{ij}\big)(x_j) = \varphi(x_i) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j = 0,$$

где $\delta_{ij} = (i == j)\ ?\ 1 : 0$. Рассмотрим присоединённую матрицу S к $T = \big(\delta_{ij}\varphi - \alpha_{ij}\big)$. Тогда

$$S \cdot T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\det T)(x_i) = 0 \Longrightarrow \det T = 0 \in \operatorname{End}(M).$$

При этом $\det T$ раскладывается в комбинацию вида

$$\varphi^n + \beta_1\varphi^{n-1} + ... + \beta_{n-1}\varphi + \beta_n,$$

из чего и следует наше утверждение. ■

Следствие 2.5.4. *Пусть M — конечно порождённый A-модуль, $\mathfrak{a} \leqslant A$ — такой идеал, что $\mathfrak{a}M = M$. Тогда существует элемент $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, для которого $\alpha M = 0$.*

Доказательство: Рассмотрим эндоморфизм $\varphi : M \to M,\ \ \varphi(x) = x$. Имеем

$$\psi = \varphi^n + \beta_1\varphi^{n-1} + ... + \beta_n = 0 \in \operatorname{End}(M).$$

Теперь возьмём $\alpha = 1 + \beta_1 + ... + \beta_n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. Для любого $x \in M$ имеем

$$\alpha x = x + \beta_1 x + ... + \beta_n x = \psi(x) = 0,$$

что и требовалось. ■

Следствие 2.5.5. (лемма Накаямы): *Пусть M — конечно порождённый A-модуль, $\mathfrak{a} \leqslant A$ — идеал, содержащийся в радикале Джекобсона $\mathcal{R}$ кольца A. Тогда если $\mathfrak{a}M = M$, то $M = 0$.*

Доказательство 1: В силу предыдущего следствия, $\alpha M = 0$ для некоторого $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathcal{R}}$. По лемме 1.2.5, из этого следует, что α обратим в A. Поэтому $M = \alpha^{-1}\alpha M = 0$. ■

Доказательство 2: Допустим, что $M \neq 0$. Пусть $u_1, ..., u_n$ — некоторая минимальная система образующих. Тогда $u_n \in \mathfrak{a}M$, а значит имеет место равенство

$$u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n, \qquad \alpha_j \in \mathfrak{a}.$$

Отсюда получаем

$$(1 - \alpha_n)u_n = a_1 u_1 + ... + a_{n-1}u_{n-1}.$$

Поскольку $\alpha_n \in \mathcal{R}$, из леммы 1.2.5 следует, что $1 - \alpha_n$ обратимо в A. Следовательно, u_n выражается через остальные $u_1, ..., u_{n-1}$, что противоречит минимальности системы $\{u_i\}$. ■

Следствие 2.5.6. *Пусть M — конечно порождённый A-модуль, N — некоторый подмодуль M, и $\mathfrak{a} \subset \mathcal{R}$ — идеал. Тогда*

$$M = \mathfrak{a}M + N \Longrightarrow M = N.$$

Доказательство: Если $M = \mathfrak{a}M + N$, то тогда $M/N = \mathfrak{a}(M/N)$:

$$\begin{aligned} M/N = \{x + N \mid x \in M\} = \{(\alpha x' + n) + N \mid \alpha \in \mathfrak{a}, x' \in M, n \in N\} = \\ = \{\alpha x' + N \mid \alpha \in \mathfrak{a}, x' \in M\} = \mathfrak{a}(M/N). \end{aligned}$$

Тогда можно применить лемму Накаямы и получить $M/N = 0$, из чего следует $M = N$. ■

2.6. Точные последовательности

Определение 2.6.1. Рассмотрим некорорую последовательность A-модулей и гомоморфизмов:

$$\sigma : \quad \ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots \tag{1}$$

Последовательность σ называется *точной* в члене M_i, если $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$. Она называется *точной,* если она точна во всех членах.

Замечание 2.6.2. Рассмотрим следующие частные случаи:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \text{ точна} \Longleftrightarrow f \text{ инъективен;} \tag{2}$$

$$N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \text{ точна} \Longleftrightarrow g \text{ сюръективен;} \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \text{ точна} \Longleftrightarrow f \text{ ин., } g \text{ сюр., } N/f(M) \overset{g}{\cong} L. \tag{4}$$

Всё это дело остаётся как упражнение для читателя.

Определение 2.6.3. В последнем случае (2), последовательность называется *короткой точной последовательностью.* Любую *длинную точную последовательность* (1) можно разбить на короткие следующим образом: положим $N_i = \operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$. Тогда для всех i имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} N_{i+1} \longrightarrow 0.$$

Утверждение 2.6.4.

(1) Пусть

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \tag{5}$$

— последовательность A-модулей и гомоморфизмов. Она точна тогда и только тогда, когда для всех A-модулей K точна последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(L, K) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}(N, K) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}(M, K). \tag{6}$$

(2) Последовательность

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{g} L' \tag{7}$$

точна тогда и только тогда, когда для всех A-модулей K' точна последовательность

$$\operatorname{Hom}(K', M') \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}(K', N') \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}(K', L') \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Доказательство:

(1) Отображения $\overline{f}, \overline{g}$ определяются формулами

$$\overline{f}(\varphi) = f \circ \varphi, \qquad \overline{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Допустим, что (5) точна. Сначала покажем, что $\ker \overline{g} = 0$. Действительно, по точности (5), g — сюръекция. Тогда если $\overline{g}(\varphi) = g \circ \varphi = 0$, то для всех $l \in L$ $\varphi(l) = \varphi(g(n)) = 0$, откуда $\varphi = 0$. Далее, мы покажем, что $\ker \overline{f} = \operatorname{im} \overline{g}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi \in \ker \overline{f}, \qquad \varphi : N \to K.$$

Нужно построить такой гомоморфизм $\psi : L \to K$, что $\varphi = g \circ \psi$.
Пусть $l \in L$. Тогда так как g — сюръекция, найдётся элемент $n \in N$ со свойством $l = g(n)$.
Определим $\psi(l) = \varphi(g^{-1}(l))$. Чтобы показать, что это определение корректно, допустим, что $g(n_1) = l = g(n_2)$. Тогда $n_1 - n_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$. Следовательно,

$$\varphi(n_1 - n_2) = \varphi(f(m)) = 0 \Longrightarrow \varphi(n_1) = \varphi(n_2).$$

Наконец, имеем $\psi(g(n)) = \varphi(g^{-1}(g(n))) = \varphi(n)$, что доказывает $\varphi \in \operatorname{im} \overline{g}$.
Обратно, пусть $\varphi \in \operatorname{im} \overline{g}$. Тогда существует такой гомоморфизм $\psi : L \to K$, что $\varphi = g \circ \psi$.
Следовательно,

$$\overline{f}(\varphi) = f \circ \varphi = f \circ (g \circ \psi) = (f \circ g) \circ \psi = 0 \circ \psi = 0,$$

и тогда $\varphi \in \ker \overline{f}$.

Обратная стрелка и пункт (2) доказываются аналогично (упражнение). ■

Определение 2.6.5. Пусть C — некоторый класс A-модулей, а $\lambda : C \longrightarrow \mathbb{Z}$ — некоторая функция. Тогда функция λ называется *аддитивной*, если для любой короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

где $0, M, N, L \in C$, имеем

$$\lambda(M) - \lambda(N) + \lambda(L) = 0.$$

Упражнение 2.6.6. Докажите, что $\lambda(0) = 0$ для всех аддитивных функций λ.

Пример 2.6.7. Пусть A — поле F, а C — класс всех конечномерных F-векторных пространств V. Тогда соответствие $V \mapsto \dim V$ — аддитивная функция на C.

Доказательство: Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \longrightarrow 0,$$

где $V_i = F^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда имеем $V_2 / f(V_1) \cong V_3$, откуда $n_2 - n_1 = n_3$, и функция $\dim$ аддитивна. ■

Утверждение 2.6.8. *Пусть C — некоторый класс A-модулей, λ — аддитивная функция на C.*

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

— точная последовательность A-модулей, в которой все модули и ядра всех гомоморфизмов принадлежат C. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$

Доказательство: Разобьём нашу последовательность на короткие отрезки

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0 \qquad (N_0 = N_{n+1} = 0).$$

Тогда $\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i+1})$. Теперь построим альтернативную сумму:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\lambda(N_i) + \lambda(N_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(N_i) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \lambda(N_i) =$$
$$= \lambda(N_0) \pm \lambda(N_{n+1}) = 0,$$

что и требовалось. ■

2.7. Тензорное произведение модулей

Определение 2.7.1. Пусть M, N, P — три A-модуля. Отображение $f : M \times N \to P$ называется *билинейным,* если отображения

$$f_m : n \mapsto f(m, n) \quad \text{и} \quad f_n : m \mapsto f(m, n)$$

линейны для всех $m \in M, n \in N$.

Лемма 2.7.2. *Пусть M, N — некоторые A-модули. Тогда существует пара (T, g), состоящая из A-модуля T и билинейного отображения $g : M \times N \to T$, со следующим свойством:*

> *для любого A-модуля P и билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственное линейное отображение $f' : T \to P$, такое, что $f = g \circ f'$.*

Если (T, g) и (T', g') — две пары, удовлетворяющие этому универсальному свойству, то существует единственный изоморфизм $j : T \to T'$, для которого $g \circ j = g'$.

Доказательство:

(1) *Единственность.* Заменив (P, f) на (T', g'), мы получим единственное отображение $j : T \to T'$, для которого $g' = g \circ j$. Поменяв местами T и T', получим отображение $j' : T' \to T$ со свойством $g = g' \circ j'$. Тогда имеем $g = g \circ (j \circ j')$ и $g' = g' \circ (j' \circ j)$, откуда по универсальному свойству $j \circ j' = \mathrm{id}$ и $j' \circ j = \mathrm{id}$.

(2) *Существование.* Через C обозначим свободный модуль, порождённый элементами $M \times N$, $C = A^{M \times N}$. Элементы этого модуля — формальные линейные комбинации вида

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y_i), \quad \text{где} \quad \alpha_i \in A,\ x_i \in M,\ y_i \in N.$$

Заметим, что эти линейные комбинации **не** упрощаются до элементов модуля $M \times N$. Теперь пусть D — подмодуль C, порождённый всеми элементами вида

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),$$
$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),$$
$$(\alpha x, y) - \alpha \cdot (x, y),$$
$$(x, \alpha y) - \alpha \cdot (x, y).$$

Положим $T = C/D$. Для каждого базисного элемента (x, y) из C обозначим через $x \otimes y$ его образ $\pi((x, y))$. Модуль T порождён элементами вида $x \otimes y$, так как $\pi : C \to C/D$ сюръективно. Кроме того, ясно, что

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \qquad x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y',$$
$$(\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y) = \alpha (x \otimes y).$$

Иными словами, отображение $g = (\otimes) : M \times N \to T$ билинейно.
Теперь, любое отображение $f : M \times N \to P$ продолжается по линейности до гомоморфизма $\overline{f} : C \to P$. Если отображение f билинейно, то оно обращается в нуль на образующих D, так что $\ker f \subset D$. Следовательно, определение

$$f' : T \to P, \qquad f'(x \otimes y) = f(x, y)$$

не зависит от выбора представителя $x \otimes y$, и мы имеем $f = g \circ f'$.

Этим доказательство завершено. ■

Определение 2.7.3. Построенный выше модуль T называется *тензорным произведением* модулей M и N, и обозначается $M \otimes_A N$ или просто $M \otimes N$.

Замечание 2.7.4.
(1) Если заданы системы образующих $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ и $\{y_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ модулей M и N, то элементы $x_i \otimes y_j$ порождают $M \otimes N$ (упражнение). В частности, если M и N конечно порождены, то то же верно и для $M \otimes N$.
(2) Натура элемента $x \otimes y$ зависит от контекста тензорного произведения, элементом которого он является. Если $x \in M' \leqslant M$ и $y \in N' \leqslant N$, может случиться, что $x \otimes y \in M \otimes N$ равен нулю, а $x \otimes y \in M' \otimes N'$ отличен от нуля.
В качестве примера возьмём $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и пусть $M' = 2\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$, $N' = N$. Рассмотрим ненулевой элемент $1 \in N$ и произведение $2 \otimes 1$. Оно равно нулю в $M \otimes N$, так как $2 \otimes x = 1 \otimes 2 = 1 \otimes 0 = 0$. Но в $M' \otimes N'$ оно не равно нулю.

Однако верен следующий результат:

Следствие 2.7.5. *Пусть $x_i \in M$, $y_i \in N$ — такие элементы, что $\sum x_i \otimes y_i = 0$ в $M \otimes N$. Тогда существуют такие конечно порождённые подмодули $M_0 \leqslant M$ и $N_0 \leqslant N$, что*

$$\sum (x_i \otimes y_i) = 0 \in M_0 \otimes N_0.$$

Доказательство: Допустим, что $\sum (x_i \otimes y_i) = 0 \in M \otimes N$. В обозначениях доказательства леммы 2.7.2, имеем $\sum (x_i, y_i) \in D$, так что $\sum (x_i, y_i)$ есть конечная линейная комбинация некоторых образующих подмодуля $D \leqslant C$. Через $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ обозначим все первые и вторые координаты элементов из $M \times N$, участвующих в упомянутых образующих. Наконец, определим

$$M_0 = \langle \{x_i\} \cup \{x_j\} \rangle, \qquad N_0 = \langle \{y_i\} \cup \{y_j\} \rangle.$$

Тогда $\sum (x_i \otimes y_i) = 0 \in M_0 \otimes N_0$. ■

Замечание 2.7.6. Конструкция тензорного произведения не является необходимой для понимания его смысла. Достаточно иметь в виду универсальное свойство.

Лемма 2.7.7. *Пусть M, N, P — некоторые A-модули. Тогда существуют однозначно определённые изоморфизмы*
(1) $M \otimes N \longleftrightarrow N \otimes M$;
(2) $(M \otimes N) \otimes P \longleftrightarrow M \otimes (N \otimes P) \longleftrightarrow M \otimes N \otimes P$;
(3) $(M \oplus N) \otimes P \longleftrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$;
(4) $A \otimes M \longleftrightarrow M$.

Доказательство: Проведём построение первого гомоморфизма, а остальные оставим в качестве упражнения читателю.
Рассмотрим естественные изоморфизмы $\varphi : M \times N \longleftrightarrow N \times M : \varphi^{-1}$. Пусть

$$g_1 : M \times N \longrightarrow M \otimes N, \qquad g_2 : N \times M \longrightarrow N \otimes M.$$

Тогда по универсальному свойству тензорного произведения имеем такие гомоморфизмы

$$f : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M, \qquad h : N \otimes M \longrightarrow M \otimes N,$$

что $g_1 \circ f = \varphi \circ g_2$ и $g_2 \circ h = \varphi^{-1} \circ g_1$. Следовательно, имеем

$$g_1 \circ f \circ h = \varphi \circ g_2 \circ h = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ g_1 = g_1,$$

и, аналогично, $g_2 \circ h \circ f = g_2$. По универсальному свойству, из этого следуют равенства $f \circ h = \mathrm{id}$ и $h \circ f = \mathrm{id}$. ■

2.8. Точность тензорного произведения

Замечание 2.8.1. Пусть $f : M \times N \longrightarrow P$ билинейно. Тогда f индуцирует линейное отображение $M \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)$. Наоборот, всякое отображение $\varphi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)$ задаёт билинейное отображение: $(x, y) \mapsto \varphi(x)(y)$. Поэтому множество S всех билинейных отображений $M \times N \to P$ находится в естественном соответствии с $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$. По универсальному свойству тензорного произведения, имеем

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)). \tag{9}$$

При надобности, нетрудно проверить, что это естественное соответствие является изоморфизмом (упражнение).

Лемма 2.8.2. *Пусть дана точная последовательность A-модулей и гомоморфизмов*

$$\sigma : \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0, \tag{10}$$

и K — произвольный A-модуль. Тогда последовательность

$$\sigma \otimes K : \quad M \otimes K \xrightarrow{f \otimes 1} N \otimes K \xrightarrow{g \otimes 1} L \otimes K \longrightarrow 0$$

(где 1 — тождественный гомоморфизм) точна.

Доказательство: Пусть P — любой A-модуль. Из точности σ следует точность последовательности $\mathrm{Hom}(\sigma, \mathrm{Hom}(K, P))$ в силу утверждения 2.6.4. Далее, в силу (9), точна последовательность $\mathrm{Hom}(\sigma \otimes K, P)$, откуда, ещё раз воспользовавшись утверждением 2.6.4, мы выводим точность $\sigma \otimes K$. ■

Замечание 2.8.3. В общем случае последовательность $M \otimes K \to N \otimes K \to L \otimes K$, полученная из точной последовательности $M \to N \to K$, может утратить точность.

Пример 2.8.4. Положим $A = \mathbb{Z}$ и рассмотрим точную последовательность $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, где $f(n) = 2n$. Умножив эту последовательность тензорно на $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, мы получим последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes K \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes K, \tag{11}$$

где $f \otimes 1 = 0$, поскольку $(f \otimes 1)(m \otimes n) = 2m \otimes n = m \otimes 2n = m \otimes 0 = 0$. Следовательно, последовательность (11) **не** точна.

Определение 2.8.5. Отображение $T_K : M \mapsto M \otimes K$ переводит гомоморфизмы $f : M_1 \to M_2$ в $f \otimes 1$. В таком случае отображение T_K называется *функтором* в *категории* A-Mod. Функтор F называется *точным,* если он переводит точные последовательности в точные. Как показывает предыдущий пример, функтор T_K не всегда точен. Если T_K точен, то A-модуль K называется *плоским.*

3. Нётеровы кольца и модули

3.1. Основные понятия

Определение 3.1.1. Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Тогда модуль M называется *нётеровым* (в честь немецкого математика Эмми Нётер), если он удовлетворяет одному из следующих трёх условий:

(1) Всякий подмодуль в M конечно порождён;

(2) Всякая возрастающая последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots$$

подмодулей в M стабилизируется начиная с некоторого места, т.е. $M_i = M_{i+1}$ для всех $i \geqslant k$;

(3) Всякое непустое множество S подмодулей в M содержит максимальный элемент (т.е. такой подмодуль M_0, что из $N \in S$ и $N \supset M_0$ следует $N = M_0$).

Лемма 3.1.2. *Три предыдущих условия эквивалентны.*

Доказательство:
(1) $\Longrightarrow$ (2): Рассмотрим последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots$$

Пусть N — объединение всех подмодулей в последовательности $\{M_i\}$. Тогда N — подмодуль в M (упражнение), который порождается системой $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Каждая образующая x_i лежит в некотором M_j. Следовательно, имеем

$$x_1, \ldots, x_m \in M_k,$$

для некоторого достаточно большого индекса k. Тогда

$$\langle x_1, \ldots, x_m \rangle \subset M_k \subset N = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \Longrightarrow N = M_k \Longrightarrow \forall i \geqslant 0,\ \ M_{k+i} = M_k.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): Пусть $N_0 \in S$. Если N_0 не максимален, то N_0 строго содержится в некотором подмодуле $N_1 \in S$. Если N_1 не максимален, то N_1 содержится в некотором N_2. По индукции, получаем последовательность

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots$$

которая не стабилизируется, что противоречит (2).
(3) $\Longrightarrow$ (1): Пусть $N \leqslant M$ — подмодуль, $a_1 \in N$. Если $N \neq \langle a_0 \rangle$, то существует элемент $a_2 \in N$, не лежащий в $\langle a_1 \rangle$. Продолжая по индукции, получаем возрастающую последовательность

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subset \ldots$$

Множество этих подмодулей содержит максимальный элемент, скажем, $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, и этот элемент, очевидно, должен быть равен N, что и завершает доказательство. ■

Лемма 3.1.3. *Пусть M — нётеров A-модуль. Тогда всякий подмодуль $N \leqslant M$ и всякий фактормодуль M/N также нётеровы.*

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 3.1.4. *Предположим, что M — A-модуль, $N \leqslant M$ — подмодуль. Тогда если N и M/N нётеровы, то и сам модуль M нётеров.*

Доказательство: Каждому подмодулю $L \leqslant M$ поставим в соответствие пару

$$\varphi(L) = (L \cap N, (L + N)/N).$$

Мы покажем, что если $E \leqslant F \leqslant M$ и $\varphi(E) = \varphi(F)$, то $E = F$. Для этого возьмём $x \in F$. В силу равенства $\varphi(E) = \varphi(F)$ имеем $(E + N)/N = (F + N)/N$. Тогда существуют такие элементы $u, v \in N$ и $y \in E$, что $y + u = x + v$. Тогда

$$x - y = u - v \in F \cap N = E \cap N.$$

Так как $x = y + u - v$, то отсюда получаем $x \in E$, и наше утверждение доказано.
Теперь рассмотрим возрастающую последовательность

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots \tag{1}$$

Тогда связанные с ними пары образуют возрастающую последовательность подмодулей в N и M/N соответственно, и эти последовательности должны стабилизироваться начиная с некоторого места. Тогда (1) также стабилизируется. ■

Замечание 3.1.5. Две предыдущих леммы могут быть суммированы в следующем утверждении: В точной последовательности

$$0 \to M \to N \to L \to 0$$

модуль N нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы M и L.

Следствие 3.1.6. *Конечная прямая сумма нётеровых модулей нётерова.*

Доказательство: Упражнение. ■

Определение 3.1.7. Кольцо A называется *нётеровым,* если оно нётерово как A-модуль. Это означает, что всякий идеал $\mathfrak{a} \leqslant A$ конечно порождён.

Утверждение 3.1.8. *Пусть A — нётерово кольцо и M — конечно порождённый A-модуль. Тогда M нётеров.*

Доказательство: Пусть $x_1, \dots, x_n$ — система образующих в M. Рассмотрим стандартный гомоморфизм

$$f : A^n \to M, \qquad f(a_1, \dots, a_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Этот гомоморфизм сюръективен. Тогда имеем $M \cong A^n/(\ker f)$, и в силу предыдущих утверждений M нётеров. ■

Утверждение 3.1.9. *Пусть A — нётерово и $f : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм колец. Тогда B нётерово.*

Доказательство: Пусть $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность идеалов в B, и пусть $\mathfrak{a}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}_i)$. Тогда $\mathfrak{a}_i$ образуют возрастающую цепочку идеалов в A, которая должна стабилизироваться. Тогда НСНМ $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}_i) = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}_{i+1})$, и тогда $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_{i+1}$ НСНМ. ■

3.2. Теорема Гильберта о базисе

Теорема 3.2.1. (Гильберта и базисе): *Пусть A — нётерово кольцо. Тогда кольцо полиномов $A[X]$ также нётерово.*

Доказательство: Пусть $\mathcal{A}$ — идеал в $A[X]$. Через $\mathfrak{a}_i$ обозначим множество таких $\alpha \in A$, что некоторый полином

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{i-1} X^{i-1} + \alpha X^i$$

лежит в $\mathcal{A}$. Тогда ясно, что $\mathfrak{a}_i$ — идеал в A (упражнение). Кроме того, имеем

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$$

Последовательность $\{\mathfrak{a}_i\}$ стабилизируется, скажем, на $\mathfrak{a}_k$:

$$\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k+1} = \ldots$$

По нётеровости кольца A, рассмотрим системы образующих идеалов $\mathfrak{a}_i$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &\subset \left\langle \alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0n_0} \right\rangle, \\ \mathfrak{a}_1 &\subset \left\langle \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n_1} \right\rangle, \\ &\vdots \\ \mathfrak{a}_k &\subset \left\langle \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kn_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Для каждого $i = 0, \ldots, k$ и $j = 1, \ldots, n_i$ пусть f_{ij} — полином из $\mathcal{A}$ степени i, со старшим коэффициентом α_{ij}. Он существует, поскольку $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}_i$ и $\alpha_{ij} \neq 0$. Мы покажем, что множество $\{f_{ij}\}$ есть система образующих идеала $\mathcal{A}$.
Пусть $f \in \mathcal{U}$. Проведём индукцию по степени $d = \deg f$:

- База: $d = 0$. Имеем $f = \alpha \in \mathcal{A}$, а значит $\alpha \in \mathfrak{a}_0$. Тогда

$$f = \alpha = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_j \alpha_{0j} = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_j f_{0j} \in \langle \{f_{ij}\} \rangle.$$

- Переход: $(d' < d) \to d$. Положим $m = \min(d, k)$. Заметим, что старшие коэффициенты полиномов

$$X^{d-m} f_{m1},\ \ldots,\ X^{d-m} f_{mn_m}$$

порождают $\mathfrak{a}_d$, так как $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{a}_m$. Следовательно, старший коэффициент $\alpha \in \mathfrak{a}_d$ полинома f раскладывается в линейную комбинацию $\{\alpha_{kj}\}$, им мы имеем

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j \alpha_{kj}, \qquad \deg\left(f - \beta_1 X^{d-k} f_{k1} - \ldots - \beta_{n_k} X^{d-k} f_{kn_k}\right) = \deg g < d.$$

По индукционному предположению многочлен g уже лежит в $\langle \{f_{ij}\} \rangle$, а значит, и тогда f тоже порождается $\{f_{ij}\}$.

Таким образом, $\{f_{ij}\}$ — система образующих $\mathcal{A}$, и, следовательно, идеал $\mathcal{A}$ конечно порождён. ■

Следствие 3.2.2. *Пусть A нётерово. Тогда кольцо $A[X_1, \ldots, X_m]$ многочленов на m переменных также нётерово.*

Доказательство: Проводится доказательство по индукции с учётом того факта, что $A[X_1, \ldots, X_m] = (A[X_1, \ldots, X_{m-1}])[X_m]$. ■

Замечание 3.2.3. Кроме теоремы о базисе, существует также менее известная *теорема Гильберта о базе:*

Теорема 3.2.4. (Гильберта о базе): *Всё что кринж, то база.*

Доказательство: Упражнение. ■

Следствие 3.2.5. *Гомологическая алгебра — база.*