

Материал курса

Функциональный анализ, 2025

Содержание

1. Теоремы Бэра о категориях	- 2 -
2. Мера и интеграл	- 3 -
2.1. Пространства с мерой	- 3 -
2.2. Интеграл по мере	- 4 -
2.3. Свойства интеграла	- 4 -
3. Топологические векторные пространства	- 5 -
3.1. Основные понятия	- 5 -
3.2. Топологические свойства	- 6 -
3.3. Линейные операторы	- 8 -

1. Теоремы Бэра о категориях

Определение 1.1. (плотность): Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в X , если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным*, если $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, иначе говоря, если замыкание множества A не содержит ни одного открытого подмножества X .

Упражнение 1.2. Покажите, что если A нигде не плотно в X , то его дополнение $A^C = X - A$ всюду плотно в X . Верно ли обратное?

Определение 1.3. (категории Бэра): Подмножество $A \subset X$ является *множеством I категории*, если A представимо как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad S_n \text{ нигде не плотны в } X.$$

Множества II категории состоят из всех подмножеств X , не относящихся к I категории.

Определение 1.4. (локальная компактность): Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность V_x такую, что $\overline{V_x}$ компактно.

Утверждение 1.5. Пусть X локально компактно и хаусдорфово. Тогда каждое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит замыкание \overline{V} некоторого непустого относительно компактного открытого множества V .

Доказательство: Рассмотрим открытое множество U и точку $x \in U$. По локальной компактности точка x имеет относительно компактную окрестность V_x . Рассмотрим множество $W = U \cap V_x$. Теперь для каждой точки $y \in \overline{V_x} \cap W^C$ рассмотрим множества A_y и B_y такие, что $y \in A_y, x \in B_y, A_y \cap B_y = \emptyset$. Множество $\overline{V_x} \cap W^C$ компактно, а значит мы имеем

$$\overline{V_x} \cap W^C \subset A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \dots \cup A_{y_n}.$$

Наконец, положим $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \dots \cap B_{y_n}$. Множество V непусто, так как оно содержит точку x . Так как V не пересекается с $\bigcup_{k=1}^n A_{y_k} \supset W^C \cap \overline{V_x}$ и $V \subset \overline{V_x}$, мы видим, что $\overline{V} \subset W \subset U$. Кроме того, \overline{V} компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V_x}$. ■

Определение 1.6. (полнота): Метрическое пространство (M, d) называется *полным*, если каждая *фундаментальная последовательность*, т.е. такая последовательность $x_n \in M$, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

имеет некий предел $x_\infty \in M$.

Теорема 1.7. (Первая теорема Бэра о категориях): Пусть X — либо

- (a) полное метрическое пространство, либо
- (b) локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение счётного семейства открытых всюду плотных множеств также всюду плотно.

Доказательство: Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — семейство открытых всюду плотных множеств. Мы будем индуктивно строить последовательность открытых множеств B_n таким образом, чтобы выполнялось свойство

$$\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}.$$

1. В качестве B_1 возьмём произвольное открытое непустое подмножество X .

2. Пусть множество B_{n-1} уже построено. Тогда в случае (а) можно рассмотреть некий шар B_n с радиусом не более $1/n$, такой что $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$, так как множество $U_n \cap B_{n-1}$ открыто. В случае (б) утверждение 1.5 позволяет выбрать множество B_n таким образом, что $\overline{B_n}$ компактно и $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$.

Теперь рассмотрим множество

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}.$$

В случае (а) центры x_n указанных шаров образуют фундаментальную последовательность, так как $d(x_n, x_m) < 1/n$ всякий раз когда $m \geq n$. Следовательно, множество K содержит предел этой последовательности и потому непусто.

В случае (б) множество K является пересечением вложенной последовательности компактных множеств и потому непусто. В обоих случаях мы получили, что множество

$$K \subset B_1 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

непусто. Так как B_1 было выбрано произвольно, мы показали, что пересечение семейства $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ всюду плотно. ■

2. Мера и интеграл

2.1. Пространства с мерой

Определение 2.1.1. (пространство с мерой): Пара (S, \mathfrak{B}) , где $\mathfrak{B} \subset 2^S$, называется σ -алгеброй подмножеств S , если выполнены следующие условия:

- (1) Всё множество S лежит в \mathfrak{B} ;
- (2) Если $B \in \mathfrak{B}$, то дополнение $B^C = S - B$ также является элементом \mathfrak{B} ;
- (3) Если $B_n \in \mathfrak{B}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ также лежит в \mathfrak{B} . (σ -аддитивность)

Упражнение 2.1.2. Докажите, что и всякое счётное пересечение элементов σ -алгебры (S, \mathfrak{B}) лежит в \mathfrak{B} .

Определение 2.1.3. (мера): Пусть (S, \mathfrak{B}) — некая σ -алгебра. Тогда функция $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ называется σ -аддитивной мерой, если выполнены следующие условия:

- (1) $m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$, для каждой счётной системы попарно непересекающихся множеств $B_n \in \mathfrak{B}$; (σ -аддитивность)
- (2) Множество S можно представить в виде счётного объединения множеств $B_n \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_n) < \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$. (σ -финитность)

Значение $m(B)$ называется m -мерой множества B , а множества $B \in \mathfrak{B}$ называются \mathfrak{B} -измеримыми.

Определение 2.1.4. (измеримые функции): Вещественная функция $x : S \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на множестве S , называется *измеримой*, если прообраз всякого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ представляет из себя измеримое подмножество S , т.е. $x^{-1}(U) \in \mathfrak{B}$.

Определение 2.1.5. (почти всюду): Свойство P , относящееся к точкам множества S , выполняется m -почти всюду на S , если множество точек, в которых оно не выполняется, имеет m -меру нуль.

2.2. Интеграл по мере

Определение 2.2.1. (простая функция): Вещественная функция $x : S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *простой*, если существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$, такой, что на каждом из множеств B_j функция x принимает постоянное значение, и $x(s) = 0$ при $s \notin \bigcup_{j=1}^n B_j$.

Такая функция x называется *m -интегрируемой* на множестве S , если

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \cdot m(B_j) < \infty, \quad (1)$$

где x_j есть постоянное значение x на множестве B_j . Величина (1) называется *интегралом* функции x и обозначается

$$\int_S x(s) m(ds) \quad \text{или} \quad \int_S x(s).$$

Определение 2.2.2. (интеграл по мере): Произвольная вещественная функция x , определённая m -почти всюду на S , называется *m -интегрируемой*, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ простых m -интегрируемых функций, сходящаяся m -п.в. к x , и при этом

$$\int_S |x_n(s) - x_m(s)| m(ds) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Так как пространство \mathbb{R} полно, существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S x_n(s) m(ds),$$

не зависящий от выбора аппроксимирующей последовательности $\{x_n\}$. Этот предел называется *интегралом функции x* .

Упражнение 2.2.3. Докажите, что если поменять значения интегрируемой функции x на множестве меры нуль, то интеграл не изменится.

2.3. Свойства интеграла

(1) Если x, y — интегрируемые функции, то линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) также представляет собой интегрируемую функцию, и

$$\int_S (\alpha x + \beta y)(s) m(ds) = \alpha \int_S x(s) m(ds) + \beta \int_S y(s) m(ds).$$

(2) Функция x интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|x|$ (упражнение).

(3) Если функция x интегрируема и $x(s) \geq 0$ почти всюду на S , то $\int_S x(s) m(ds) \geq 0$.

(4) Если функция x интегрируема, то для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ мы полагаем

$$\int_B x(s) m(ds) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S x(s) \cdot \chi_B(s) m(ds),$$

где χ_B — характеристическая функция множества B . В таком случае, функция $X : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая как $X(B) = \int_B x(s) m(ds)$ является σ -аддитивной.

- (5) Определённая выше функция X является *абсолютно непрерывной* относительно меры m , т.е. выполняется сходимость $X(B) \xrightarrow{m(B) \rightarrow 0} 0$ равномерно по $B \in \mathfrak{B}$. (упражнение)

3. Топологические векторные пространства

3.1. Основные понятия

Определение 3.1.1. (ТВП): Пусть X — векторное пространство над полем \mathbb{R} , и пусть τ — топология на множестве X . Тогда X называется *топологическим векторным пространством*, если

- (1) каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством;
- (2) операции $(+): X \times X \rightarrow X$ и $(\cdot): \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ непрерывны относительно топологии τ .

В таком случае τ называется *векторной топологией*.

Определение 3.1.2. Пусть X — топологическое векторное пространство. Подмножество $C \subset X$ называется

- (1) *выпуклым*, если $tC + (1-t)C \subset C$ при всех $t \in [0, 1]$;
- (2) *уравновешенным*, если $\alpha C \subset C$ при всех $|\alpha| \leq 1$;
- (3) *поглощающим*, если $X = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha C$.
- (4) *ограниченным*, если для любой окрестности нуля V найдётся число $s > 0$, такое что $C \subset tV$ при $t \geq s$.

Замечание 3.1.3. Условие (2) означает, что

- (1) для любой окрестности U точки $x_1 + x_2 \in X$, существуют окрестности V_1 и V_2 точек x_1 и x_2 , такие, что

$$V_1 + V_2 \subset U.$$

- (2) Для любой окрестности U точки $\alpha x \in X$, существуют окрестности $V_\alpha \subset \mathbb{R}$ и $V_x \subset X$, такие, что

$$V_\alpha \cdot V_x = \{\beta y \mid \beta \in V_\alpha, y \in V_x\} \subset U.$$

Утверждение 3.1.4. Отображения $T_a = \lambda x. x + a$ и $M_\alpha = \lambda x. \alpha x$ являются гомеоморфизмами.

| Доказательство: Упражнение. ■

Замечание 3.1.5. По утверждению 3.1.4, векторная топология *инвариантна относительно сдвигов*: множество U открыто тогда и только тогда, когда открыты все сдвиги $a + U$, где $a \in X$. Таким образом, топология определяется любой своей локальной базой. Термин *локальная база* всегда будет означать *локальную базу в нуле*.

Определение 3.1.6. (типы ТВП): Топологическое пространство X называется

- (1) *локально выпуклым*, если в нём есть локальная база, состоящая из выпуклых множеств;
- (2) *локально ограниченным*, если существует ограниченная окрестность нуля;
- (3) *локально компактным*, если существует относительно компактная окрестность нуля;
- (4) *метризуемым*, если его топология совметима с некоторой метрикой;
- (5) *пространством Фреше*, если топология на X порождается некоторой полной *инвариантной* метрикой d (в том смысле, что $d(x + z, y + z) = d(x, y)$);
- (6) *нормируемым*, если его топология порождается некоторой нормой;
- (7) *пространством Банаха*, если X нормируемо и его норма индуцирует полную метрику.

3.2. Топологические свойства

Определение 3.2.1. (аксиомы отделимости): Пусть X — топологическое пространство. Выделяют 5 основных аксиом отделимости:

- (1) \mathbb{T}_0 : для любых отличных точек $x, y \in X$, одна из них имеет окрестность, не содержащую другую;
- (2) \mathbb{T}_1 : для любых двух точек $x \neq y$, каждая содержит окрестность, не содержащую другую;
- (3) \mathbb{T}_2 : Каждые две отличные точки X имеют непересекающиеся окрестности;
- (4) \mathbb{T}_3 : Каждая точка $x \in X$ и замкнутое множество $E \not\ni x$ имеют непересекающиеся окрестности;
- (5) \mathbb{T}_4 : Каждая пара непересекающихся замкнутых множеств имеет непересекающиеся окрестности.

Утверждение 3.2.2. Каждая окрестность нуля U в ТВП X допускает симметричную окрестность нуля W (в том смысле, что $-W = W$), такую, что $W + W \subset U$.

Доказательство: По непрерывности сложения имеем окрестности V_1, V_2 со свойством $V_1 + V_2 \subset U$. Теперь, полагая

$$W = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

имеем искомую окрестность нуля. ■

Теорема 3.2.3. Пусть X — ТВП, $K, E \subset X$, причём K компактно, E замкнуто, и $K \cap E = \emptyset$. Тогда существует такая окрестность нуля V , что

$$(K + V) \cap (E + V) = \emptyset.$$

(заметим, что множества $K + V$ и $E + V$ открыты)

Доказательство: Заметим, что по предыдущему утверждению для любой окрестности U найдётся симметричная окрестность V таким образом, что

$$V + V + V + V \subset U.$$

Теперь предположим, что множество K непусто, $x \in K$. Так как E замкнуто, имеем окрестность нуля V_x такую, что

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset E^C - x \implies (x + V_x + V_x + V_x) \cap E = \emptyset.$$

Следовательно,

$$(x + V_x + V_x) \cap (E + V_x) = (x + V_x + V_x) \cap (E - V_x) = \emptyset.$$

Так как множество K компактно, найдётся конечное число точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, таких что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$$

Положим $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Имеем

$$\begin{aligned} K + V &\subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k} + V) \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k} + V_{x_k}) \subset (E + V)^C \\ &\implies (K + V) \cap (E + V) = \emptyset, \end{aligned}$$

и доказательство завершено. ■

Следствие 3.2.4. Всякое ТВП X удовлетворяет аксиомам \mathbb{T}_0 - \mathbb{T}_3 отделимости (упражнение).

Следствие 3.2.5. Если \mathcal{B} — локальная база ТВП X , то Теорема 3.2.3, применённая ко множествам $\{0\}$ и $U \in \mathcal{B}$, влечёт существование некоторой другой окрестности $V \in \mathcal{B}$, такой, что $\overline{V} \subset U$.

Следующее техническое утверждение содержит некоторые свойства операторов замыкания и внутренности:

Лемма 3.2.6. Пусть X — топологическое векторное пространство.

- (a) Для всякого $A \subset X$, имеем $\overline{A} = \bigcap_{0 \in V} (A + V)$, где V пробегает все окрестности нуля;
- (b) Если $A, B \subset X$, то $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha \overline{A} = \overline{\alpha A}$;
- (c) Если $Y \leq X$, то $\overline{Y} \leq X$; (замыкание подпространства есть подпространство)
- (d) Если $C \subset X$ выпукло, то множества \overline{C} и C° также выпуклы;
- (e) Если $B \subset X$ уравновешено, то \overline{B} также уравновешено. Если к тому же $0 \in B^\circ$, то B° уравновешено;
- (f) Если $E \subset X$ ограничено, то \overline{E} ограничено.

Доказательство:

- (a) $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ для любой окрестности нуля V . Это эквивалентно условию $x \in A - V$ для всех V , что равносильно $x \in \bigcap_{0 \in V} (A + V)$, так как $(-V) - \text{окр. нуля} \iff V - \text{окр. нуля}$.
- (b) По непрерывности операции сложения, имеем $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$ при $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$. Равенство $\alpha \overline{A} = \overline{\alpha A}$ остаётся как упражнение.
- (c) Достаточно воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\alpha \overline{Y} + \beta \overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

а значит \overline{Y} — подпространство X .

- (d) Пусть $C \subset X$ выпукло. Выпуклость \overline{C} — упражнение. Теперь, так как $C^\circ \subset C$ и C выпукло, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset tC + (1 - t)C \subset C$$

при $0 \leq t \leq 1$. Оба слагаемых слева являются открытыми множествами, а значит их сумма тоже открыта. Так как внутренность C есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в C , имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ,$$

и C° выпукло.

- (e) Пусть $B \subset X$ уравновешено. Уравновешенность \overline{B} — упражнение. Если $0 \in B^\circ$, то имеем $0 \cdot B^\circ \subset B^\circ$. В то же время, при $0 < |\alpha| \leq 1$ имеем

$$\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

так как λx . αx — гомеоморфизм. Но αB° открыто, а значит $\alpha B^\circ \subset B^\circ$.

- (f) Пусть $E \subset X$ ограничено и пусть V — произвольная окрестность нуля. По следствию 3.2.5 имеем такую окрестность нуля W , что $\overline{W} \subset V$. Далее, при достаточно больших t имеем

$$E \subset tW \implies \overline{E} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV,$$

и доказательство завершено. ■

Лемма 3.2.7. Пусть X — ТВП. Тогда:

- (a) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;
- (b) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

Доказательство:

- (а) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X . Так как операция умножения непрерывна, найдутся такое число $\delta > 0$ и такая окрестность нуля W , что $\alpha W \subset U$ при $|\alpha| < \delta$. Рассмотрим окрестность $V := \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha W$. Очевидно, что $V \subset U$ и что V уравновешено.
- (б) Пусть U — выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим множество $A = U \cap (-U)$. Как пересечение выпуклых множеств, A выпукло. Кроме того, A симметрично. Теперь, если $|t| \leq 1$, мы имеем

$$tA = |t| A \subset |t| A + (1 - |t|)A \subset A,$$

то есть множество A уравновешено,

что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.2.8. Каждое ТВП X имеет уравновешенную локальную базу. Если же X локально выпукло, оно имеет выпуклую уравновешенную локальную базу.

Теорема 3.2.9. Пусть X — топологическое векторное пространство, а V — окрестность нуля.

- (а) Если $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V;$$

- (б) Каждое компактное подмножество $K \subset X$ ограничено;
 (с) Если окрестность V ограничена и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то семейство

$$\{\delta_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$$

является локальной базой пространства X .

Доказательство:

- (а) Фиксируем точку $x \in X$. Так как отображение $\lambda \alpha \cdot \alpha x$ непрерывно, множество $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x \in V\}$ — окрестность нуля в \mathbb{R} . Оно содержит $1/r_n$, НСНМ. Тогда для некоторого n имеем

$$(1/r_n) \cdot x \in V \implies x \in r_n V.$$

- (б) Пусть $W \subset V$ — уравновешенная окрестность нуля. Согласно (а), имеем

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW.$$

Поскольку K компактно, найдётся такой конечный набор $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, что

$$K \subset n_1 W \cup n_2 W \cup \dots \cup n_k W = n_k W.$$

Отсюда следует, что $K \subset tW \subset tV$ при $t \geq n_k$.

- (с) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X . Поскольку V ограничена, то $V \subset tU$ при $t \geq s$, для некоторого $s > 0$. Тогда $(1/t)V \subset U$ при больших t , а значит $\delta_n V \subset U$, НСНМ.

■

3.3. Линейные операторы

Определение 3.3.1. Напомним, что отображение $\Lambda : X \rightarrow Y$ называется *линейным*, если

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y.$$

Линейное отображение пространства в его поле скаляров называется *линейным функционалом*.

Упражнение 3.3.2. Пусть $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейно. Тогда

- (a) $\Lambda 0 = 0$;
- (b) Если A — подпространство X (или выпуклое, или уравновешенное множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda(A)$.
- (c) Если B — подпространство Y (или выпуклое/уравновешенное/поглощающее множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda^{-1}(B)$.
- (d) В частности, множество $\ker \Lambda = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ является подпространством X и называется ядром Λ .

Теорема 3.3.3. Пусть $\Lambda : X \rightarrow Y$ — линейный оператор между двумя ТВП. Тогда если Λ непрерывно в нуле, то Λ непрерывно на всём X , причём более того, равномерно непрерывно: для каждой окрестности W нуля в Y , найдётся окрестность V нуля в X , так что

$$y - x \in V \implies \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Доказательство: Пусть W — окрестность нуля в Y . Тогда по непрерывности в нуле, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset W$. Тогда $y - x \in V$ влечёт $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \in W$. Наконец, при всех $x \in X$, оператор Λ отображает окрестность $x + V$ в окрестность $\Lambda x + W$, так что Λ непрерывно в точке x . ■