Материал курса

Функциональный анализ, 2025

Содержание

1. Теоремы Бэра о категориях

Определение 1.1. (плотность): Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным,* если $\left(\overline{A}\right)^\circ = \varnothing$, иначе говоря, если замыкание множества A не содержит ни одного открытого подмножества X.

Упражнение 1.2. Покажите, что если A нигде не плотно в X, то его дополнение $A^C = X - A$ всюду плотно в X. Верно ли обратное?

Определение 1.3. (категории Бэра): Подмножество $A \subset X$ *является множеством I категории,* если A представимо как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad S_n \text{ нигде не плотны в } X.$$

Множества II категории состоят из всех подмножеств X, не относящихся к I категории.

Определение 1.4. (локальная компактность): Топологическое пространство X называется *локально компактным,* если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность V_x такую, что $\overline{V_x}$ компактно.

Утверждение 1.5. *Пусть X локально компактно и хаусдорфово. Тогда каждое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит замыкание $\overline{V}$ некоторого непустого относительно компактного открытого множества V.*

> *Доказательство:* Рассмотрим открытое множество U и точку $x \in U$. По локальной компактности точка x имеет относительно компактную окрестность V_x. Рассмотрим множество $W = U \cap V_x$. Теперь для каждой точки $y \in \overline{V_x} \cap W^C$ рассмотрим множества A_y и B_y такие, что $y \in A_y$, $x \in B_y$, $A_y \cap B_y = \varnothing$. Множество $\overline{V_x} \cap W^C$ компактно, а значит мы имеем
>
> $$\overline{V_x} \cap W^C \subset A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \ldots \cup A_{y_n}.$$
>
> Наконец, положим $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \ldots \cap B_{y_n}$. Множество V непусто, так как оно содержит точку x. Так как V не пересекается с $\bigcup_{k=1}^n A_{y_k} \supset W^C \cap \overline{V_x}$ и $V \subset \overline{V_x}$, мы видим, что $\overline{V} \subset W \subset U$. Кроме того, $\overline{V}$ компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V_x}$. ■

Определение 1.6. (полнота): Метрическое пространство (M, d) называется *полным,* если каждая *фундаментальная последовательность,* т.е. такая последовательность $x_n \in M$, что

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

имеет некий предел $x_\infty \in M$.

Теорема 1.7. (Первая теорема Бэра о категориях): *Пусть X — либо*

(a) полное метрическое пространство, либо

(b) локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение счётного семейства открытых всюду плотных множеств также всюду плотно.

> *Доказательство:* Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — семейство открытых всюду плотных множеств. Мы будем индуктивно строить последовательность открытых множеств B_n таким образом, чтобы выполнялось свойство
>
> $$\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}.$$
>
> 1. В качестве B_1 возьмём произвольное открытое непустое подмножество X.

2. Пусть множество B_{n-1} уже построено. Тогда в случае (a) можно рассмотреть некий шар B_n с радиусом не более $1/n$, такой что $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$, так как множество $U_n \cap B_{n-1}$ открыто.
   В случае (b) утверждение 1.5 позволяет выбрать множество B_n таким образом, что $\overline{B_n}$ компактно и $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$.

Теперь рассмотрим множество

$$K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}.$$

В случае (a) центры x_n указанных шаров образуют фундаментальную последовательность, так как $d(x_n, x_m) < 1/n$ всякий раз когда $m \geq n$. Следовательно, множество K содержит предел этой последовательности и потому непусто.
В случае (b) множество K является пересечением вложенной последовательности компактных множеств и потому непусто. В обоих случаях мы получили, что множество

$$K \subset B_1 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

непусто. Так как B_1 было выбрано произвольно, мы показали, что пересечение семейства $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ всюду плотно. ■

2. Мера и интеграл

2.1. Пространства с мерой

Определение 2.1.1. (пространство с мерой): Пара $(S, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B} \subset 2^S$, называется σ-алгеброй подмножеств S, если выполнены следующие условия:
(1) Всё множество S лежит в $\mathfrak{B}$;
(2) Если $B \in \mathfrak{B}$, то дополнение $B^C = S - B$ также является элементом $\mathfrak{B}$;
(3) Если $B_n \in \mathfrak{B}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ также лежит в $\mathfrak{B}$. (σ-аддитивность)

Упражнение 2.1.2. Докажите, что и всякое счётное пересечение элементов σ-алгебры $(S, \mathfrak{B})$ лежит в $\mathfrak{B}$.

Определение 2.1.3. (мера): Пусть $(S, \mathfrak{B})$ — некая σ-алгебра. Тогда функция $m : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_0^+$ называется *σ-аддитивной мерой*, если выполнены следующие условия:
(1) $m\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$, для каждой счётной системы попарно непересекающихся множеств $B_n \in \mathfrak{B}$; (σ-аддитивность)
(2) Множество S можно представить в виде счётного объединения множеств $B_n \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_n) < \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$. (σ-финитность)

Значение $m(B)$ называется m-мерой множества B, а множества $B \in \mathfrak{B}$ называются $\mathfrak{B}$-измеримыми.

Определение 2.1.4. (измеримые функции): Вещественная функция $x : S \to \mathbb{R}$, определённая на множестве S, называется *измеримой,* если прообраз всякого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ представляет из себя измеримое подмножество S, т.е. $x^{-1}(U) \in \mathfrak{B}$.

Определение 2.1.5. (почти всюду): Свойство P, относящееся к точкам множества S, выполняется *m-почти всюду* на S, если множество точек, в которых оно не выполняется, имеет m-меру нуль.

2.2. Интеграл по мере

Определение 2.2.1. (простая функция): Вещественная функция $x : S \to \mathbb{R}$ называется *простой,* если существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $B_1, ..., B_n \in \mathfrak{B}$, такой, что на каждом из множеств B_j функция x принимает постоянное значение, и $x(s) = 0$ при $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} B_j$.

Такая функция x называется *m-интегрируемой* на множестве S, если

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot m(B_j) < \infty, \tag{1}$$

где x_j есть постоянное значение x на множестве B_j. Величина (1) называется *интешралом* функции x и обозначается

$$\int_S x(s)\, m(ds) \quad \text{или} \quad \int_S x(s).$$

Определение 2.2.2. (интеграл по мере): Произвольная вещественная функция x, определённая m-почти всюду на S, называется
m-интегрируемой, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых m-интегрируемых функций, сходящаяся m-п.в. к x, и при этом

$$\int_S |x_n(s) - x_m(s)|\, m(ds) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Так как пространство $\mathbb{R}$ полно, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_S x_n(s)\, m(ds),$$

не зависящий от выбора аппроксимирующей последовательности $\{x_n\}$. Этот предел называется интегралом функции x.

Упражнение 2.2.3. Докажите, что если поменять значения интегрируемой функции x на множестве меры нуль, то интеграл не изменится.

2.3. Свойства интеграла

(1) Если x, y — интегрируемые функции, то линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) также представляет собой интегрируемую функцию, и

$$\int_S (\alpha x + \beta y)(s)\, m(ds) = \alpha \int_S x(s)\, m(ds) + \beta \int_S y(s)\, m(ds).$$

(2) Функция x интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|x|$ (упражнение).

(3) Если функция x интегрируема и $x(s) \geq 0$ почти всюду на S, то $\int_S x(s)\, m(ds) \geq 0$.

(4) Если функция x интегрируема, то для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ мы полагаем

$$\int_B x(s)\, m(ds) \overset{\text{def}}{=} \int_S x(s) \cdot \chi_B(s)\, m(ds),$$

где χ_B — характеристическая функция множества B. В таком случае, функция $X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$, определённая как $X(B) = \int_B x(s)\, m(ds)$ является σ-аддитивной.

(5) Определённая выше функция X является *абсолютно непрерывной* относительно меры m, т.е. выполняется сходимость $X(B) \xrightarrow[m(B)\to 0]{} 0$ равномерно по $B \in \mathfrak{B}$. (упражнение)

3. Топологические векторные пространства

3.1. Основные понятия

Определение 3.1.1. (ТВП): Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, и пусть τ — топология на множестве X. Тогда X называется *топологическим векторным пространством,* если

(1) каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством;
(2) операции $(+) : X \times X \to X$ и $(\cdot) : \mathbb{R} \times X \to X$ непрерывны относительно топологии τ.

В таком случае τ называется *векторной топологией.*

Определение 3.1.2. Пусть X — топологическое векторное пространство. Пожмножество $C \subset X$ называется

(1) *выпуклым,* если $tC + (1-t)C \subset C$ при всех $t \in [0,1]$;
(2) *уравновешенным,* если $\alpha C \subset C$ при всех $|\alpha| \leq 1$;
(3) *поглощающим,* если $X = \cup_{\alpha \geq 0} \alpha C$.
(4) *ограниченным,* если для любой окрестности нуля V найдётся число $s > 0$, такое что $C \subset tV$ при $t \geq s$.

Замечание 3.1.3. Условие (2) означает, что

(1) для любой окрестности U точки $x_1 + x_2 \in X$, существуют окрестности V_1 и V_2 точек x_1 и x_2, такие, что
$$V_1 + V_2 \subset U.$$
(2) Для любой окрестности U точки $\alpha x \in X$, существуют открестности $V_\alpha \subset \mathbb{R}$ и $V_x \subset X$, такие, что
$$V_\alpha \cdot V_x = \{\beta y \mid \beta \in V_\alpha, y \in V_x\} \subset U.$$

Утверждение 3.1.4. *Отображения* $T_a = \lambda x.\, x + a$ *и* $M_\alpha = \lambda x.\, \alpha x$ *являются гомеоморфизмами.*

Доказательство: Упражнение. ■

Замечание 3.1.5. По утверждению 3.1.4, векторная топология *инвариантна относительно сдвигов:* множество U открыто тогда и только тогда, когда открыты все сдвиги $a + U$, где $a \in X$. Таким образом, топология определяется любой своей локальной базой. Термин *локальная база* всегда будет означать *локальную базу в нуле.*

Определение 3.1.6. (типы ТВП): Топологическое пространство X называется

(1) *локально выпуклым,* если в нём есть локальная база, состоящая из выпуклых множеств;
(2) *локально ограниченным,* если существует ограниченная окрестность нуля;
(3) *локально компактным,* если существует относительно компактная окрестность нуля;
(4) *метризуемым,* если его топология совметима с некоторой метрикой;
(5) *пространством Фреше,* если топология на X порождается некоторой полной *инвариантной* метрикой d (в том смысле, что $d(x+z, y+z) = d(x,y)$);
(6) *нормируемым,* если его топология порождается некоторой нормой;
(7) *пространством Банаха,* если X нормируемо и его норма индуцирует полную метрику.

3.2. Топологические свойства

Определение 3.2.1. (аксиомы отделимости): Пусть X — топологическое пространство. Выделяют 5 основных *аксиом отделимости:*

(1) $\mathbb{T}_0$: для любых отличных точек $x, y \in X$, одна из них имеет окрестность, не содержащую другую;
(2) $\mathbb{T}_1$: для любых двух точек $x \neq y$, каждая содержит окрестность, не содержащую другую;
(3) $\mathbb{T}_2$: Каждые две отличные точки X имеют непересекающиеся окрестности;
(4) $\mathbb{T}_3$: Каждые точка $x \in X$ и замкнутое множество $E \not\ni x$ имеют непересекающиеся окрестности;
(5) $\mathbb{T}_4$: Каждая пара непересекающихся замкнутых множеств имеет непересекающиеся окрестности.

Утверждение 3.2.2. *Каждая окрестность нуля U в ТВП X допускает* симметричную *окрестность нуля W (в том смысле, что $-W = W$), такую, что $W + W \subset U$.*

Доказательство: По непрерывности сложения имеем окрестности V_1, V_2 со свойством $V_1 + V_2 \subset U$. Теперь, полагая

$$W = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

имеем искомую оеркстность нуля. ■

Теорема 3.2.3. *Пусть X — ТВП, $K, E \subset X$, причём K компактно, E замкнуто, и $K \cap E = \varnothing$. Тогда существует такая окрестность нуля V, что*

$$(K + V) \cap (E + V) = \varnothing.$$

(заметим, что множества $K + V$ и $E + V$ открыты)

Доказательство: Заметим, что по предыдущему утверждению для любой окрестности U найдётся симметричная окрестность V таким образом, что

$$V + V + V + V \subset U.$$

Теперь предположим, что множество K непусто, $x \in K$. Так как E замкнуто, имеем окрестность нуля V_x такую, что

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset E^C - x \Longrightarrow (x + V_x + V_x + V_x) \cap E = \varnothing.$$

Следовательно,

$$(x + V_x + V_x) \cap (E + V_x) = (x + V_x + V_x) \cap (E - V_x) = \varnothing.$$

Так как множество K компактно, найдётся конечное число точек $x_1, x_2, ..., x_n \in K$, таких что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k}\right)$$

Положим $V := V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$. Имеем

$$K + V \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V_{x_k}\right) \subset (E + V)^C$$
$$\Longrightarrow (K + V) \cap (E + V) = \varnothing,$$

и доказательство завершено. ■

Следствие 3.2.4. *Всякое ТВП X удовлетворяет аксиомам $\mathbb{T}_0$-$\mathbb{T}_3$ отделимости (упражнение).*

Следствие 3.2.5. *Если $\mathcal{B}$ — локальная база ТВП X, то Теорема 3.2.3, применённая ко множествам $\{0\}$ и $U \in \mathcal{B}$, влечёт существование некой другой окрестности $V \in \mathcal{B}$, такой, что $\overline{V} \subset U$.*

Следующее техническое утверждение содержит некоторые свойства операторов замыкания и внутренности:

Лемма 3.2.6. *Пусть X — топологическое векторное пространство.*
(a) Для всякого $A \subset X$, имеем $\overline{A} = \bigcap\limits_{0 \in V} (A + V)$, где V пробегает все окрестности нуля;
(b) Если $A, B \subset X$, то $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$;
(c) Если $Y \leqslant X$, то $\overline{Y} \leqslant X$; (замыкание подпространства есть подпространство)
(d) Если $C \subset X$ выпукло, то множества $\overline{C}$ и C° также выпуклы;
(e) Если $B \subset X$ уравновешено, то $\overline{B}$ также уравновешено. Если к тому же $0 \in B^\circ$, то B° уравновешено;
(f) Если $E \subset X$ ограничено, то $\overline{E}$ ограничено.

Доказательство:
(a) $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля V. Это эквивалентно условию $x \in A - V$ для всех V, что равносильно $x \in \bigcap_{0 \in V}(A + V)$, так как $(-V)$ — окр. нуля $\Longleftrightarrow V$ — окр. нуля.
(b) По непрерывности операции сложения, имеем $(x_n + y_n) \to x + y$ при $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Равенство $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$ остаётся как упражнение.
(c) Достаточно воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

а значит $\overline{Y}$ — подпространство X.
(d) Пусть $C \subset X$ выпукло. Выпуклость $\overline{C}$ — упражнение. Теперь, так как $C^\circ \subset C$ и C выпукло, имеем

$$tC^\circ + (1-t)C^\circ \subset tC + (1-t)C \subset C$$

при $0 \le t \le 1$. Оба слагаемых слева являются открытыми множествами, я значит их сумма тоже открыта. Так как внутренность C есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в C, имеем

$$tC^\circ + (1-t)C^\circ \subset C^\circ,$$

и C° выпукло.
(e) Пусть $B \subset X$ уравновешено. Уравновешенность $\overline{B}$ — упражнение. Если $0 \in B^\circ$, то имеем $0 \cdot B^\circ \subset B^\circ$. В то же время, при $0 < |\alpha| \le 1$ имеем

$$\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

так как $\lambda x.\ \alpha x$ — гомеоморфизм. Но αB° открыто, а значит $\alpha B^\circ \subset B^\circ$.
(f) Пусть $E \subset X$ ограничено и пусть V — произвольная окрестность нуля. По следствию 3.2.5 имеем такую окрестность нуля W, что $\overline{W} \subset V$. Далее, при достаточно больших t имеем

$$E \subset tW \Longrightarrow \overline{E} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV,$$

и доказательство завершено. ∎

Лемма 3.2.7. *Пусть X — ТВП. Тогда:*
(a) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;
(b) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

Доказательство:

(a) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Так как операция умножения непрерывна, найдутся такое число $\delta > 0$ и такая окрестность нуля W, что $\alpha W \subset U$ при $|\alpha| < \delta$. Рассмотрим окрестность $V := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha W$. Очевидно, что $V \subset U$ и что V уравновешено.

(b) Пусть U — выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим множество $A = U \cap (-U)$. Как пересечение выпуклых множеств, A выпукло. Кроме того, A симметрично. Теперь, если $|t| \leq 1$, мы имеем

$$tA = |t|\ A \subset |t|\ A + (1 - |t|)A \subset A,$$

то есть множество A уравновешено,

что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.2.8. *Каждое ТВП X имеет уравновешенную локальную базу. Если же X локально выпукло, оно имеет выпуклую уравновешенную локальную базу.*

Теорема 3.2.9. *Пусть X — топологическое векторное пространство, а V — окрестность нуля.*

(a) Если $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V;$$

(b) Каждое компактное подмножество $K \subset X$ ограничено;

(c) Если окрестность V ограничена и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то семейство

$$\{\delta_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$$

является локальной базой пространства X.

Доказательство:

(a) Фиксируем точку $x \in X$. Так как Отображение $\lambda\alpha.\ \alpha x$ непренывно, множество $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x \in V\}$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Оно содержит $1/r_n$, НСНМ. Тогда для некоторого n имеем

$$(1/r_n) \cdot x \in V \Longrightarrow x \in r_n V.$$

(b) Пусть $W \subset V$ — уравновешенная окрестность нуля. Согласно (a), имеем

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW.$$

Поскольку K компактно, найдётся такой конечный набор $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, что

$$K \subset n_1 W \cup n_2 \cup \ldots \cup n_k W = n_k W.$$

Отсюда следует, что $K \subset tW \subset tV$ при $t \geq n_k$.

(c) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Поскольку V ограничена, то $V \subset tU$ при $t \geq s$, для некоторого $s > 0$. Тогда $(1/t)V \subset U$ при больших t, а значит $\delta_n V \subset U$, НСНМ.

■

3.3. Линейные операторы

Определение 3.3.1. Напомним, что отображение $\Lambda : X \to Y$ называется *линейным,* если

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y.$$

Линейное отображение пространства в его поле скаляров называется *линейным функционалом.*

Упражнение 3.3.2. Пусть $\Lambda : X \to Y$ линейно. Тогда
(a) $\Lambda 0 = 0$;
(b) Если A — подпространство X (или выпуклое, или уравновешенное множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda(A)$.
(c) Если B — подпространство Y (или выпуклое/уравновешенное/поглощающее множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda^{-1}(B)$.
(d) В частности, множество $\ker \Lambda = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ является подпространством X и называется *ядром* Λ.

Теорема 3.3.3. *Пусть $\Lambda : X \to Y$ — линейный оператор между двумя ТВП. Тогда если Λ непрерывно в нуле, то Λ непрерывно на всём X, причём более того,* равномерно непрерывно: *для каждой окрестности W нуля в Y, найдётся окрестность V нуля в X, так что*

$$y - x \in V \Longrightarrow \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Доказательство: Пусть W — окрестность нуля в Y. Тогда по непрерывности в нуле, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset W$. Тогда $y - x \in V$ влечёт $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \subset W$. Наконец, при всех $x \in X$, оператор Λ отображает окрестность $x + V$ в окрестность $\Lambda x + W$, так что Λ непрерывно в точке x. ■

Теорема 3.3.4. *Пусть Λ — линейный функционал на ТВП X. Допустим также, что $\Lambda x \neq 0$ для некоторого $x \in X$. Тогда СУР:*
(a) Λ непрерывен;
(b) ядро $\ker \Lambda$ замкнуто в X;
(c) ядро $\ker \Lambda$ не плотно в X;
(d) функционал Λ ограничен в некоторой окрестности нуля V.

Доказательство:
$(a) \Longrightarrow (b)$: Рассмотрим последовательность $x_n \in \ker \Lambda$, сходящуюся к точке $x \in X$. В силу непрерывности, имеем

$$\Lambda x = \Lambda\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

откуда мы заключаем, что $x \in \ker \Lambda$.

$(b) \Longrightarrow (c)$: По условию $\ker \Lambda \neq X$, так что замкнутое множество $\ker \Lambda$ не пересекается с непустым открытым множеством $X \setminus \ker \Lambda$, откуда следует, что $\ker \Lambda$ не плотно в X.

$(c) \Longrightarrow (d)$: Условие (c) равносильно тому, что множество $X \setminus \ker \Lambda$ имеет непустую внутренность. По теореме 3.2.7 имеем такую уравновешенную окрестность нуля V и такую точку $x \in X$, что

$$(x + V) \cap \ker \Lambda = \varnothing. \tag{2}$$

Тогда образ $\Lambda(V)$ — уравновешенное подмножество $\mathbb{R}$. Следовательно, либо $\Lambda(V)$ ограничено, либо $\Lambda(V) = \mathbb{R}$ (упражнение). В первом случае всё доказано. Во втором, найдётся такой элемент $y \in V$, что $\Lambda y = -\Lambda x$. Тогда имеем $x + y \in (x + V) \cap \ker \Lambda$, что невозможно в силу (2).

$(d) \Longrightarrow (a)$: Пусть для некоторой окрестности V и числа $M > 0$ справедливо $|\Lambda x| < M$ при $x \in V$. Тогда для любого $r > 0$, положив $W = (r/M)V$, имеем $|\Lambda x| < r$ для всех $x \in W$. Следовательно, функционал Λ непрерывен в нуле, а значит непрерывен. ■

3.4. Конечномерные пространства

Пример 3.4.1. Самый простой пример n-мерного пространства — $\mathbb{R}^n$, с нормой

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Можно также рассмотреть другие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Нетрудно проверить, что все они индуцируют одну и ту же топологию. Кроме того, всякое n-мерное пространство над $\mathbb{R}$ естественно изоморфно $\mathbb{R}^n$. Мы докажем, что естественная топология на $\mathbb{R}^n$ — это единственная вукторная топология, возможная в произвольном вещественном n-мерном ТВП.

Определение 3.4.2. Система множеств $\mathcal{B}$ называется *центрированной*, если для всякого конечного набора $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$, его пересечение непусто:

$$\bigcap_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing.$$

Упражнение 3.4.3. Покажите, что пересечение всякой центрированной системы компактов непусто.

Лемма 3.4.4. *Пусть X — ТВП, а Y — локально-компактное (в индуцированной топологии) подпространство X. Тогда множество Y замкнуто в X.*

> *Доказательство:* Существует такое компактное множество $K \subset Y$, что $0 \in K^\circ$ в топологии Y. Следовательно, найдётся такая окрестность U нуля в X, что $U \cap Y \subset K$. Выберем симметричную окрестность $V \subset X$ таким образом, чтобы $\overline{V} + \overline{V} \subset U$.
> Далее, мы покажем, что $\overline{Y} = Y$. Рассмотрим $x \in \overline{Y}$. Пусть $\mathcal{B}$ содержит все окрестности нуля в X, которые включены в V. Каждому $W \in \mathcal{B}$ сопоставим множество
>
> $$E_W = Y \cap \left(x + \overline{W}\right).$$
>
> Так как $x \in \overline{Y}$, каждое из множеств E_W непусто. Рассмотрим множество $W \in \mathcal{B}$ и фиксируем точку $y_0 \in E_W$. Для любой точки $y \in E_W$, имеем
>
> $$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{W} + \left(-\overline{W}\right) \subset \overline{V} + \overline{V} \subset U.$$
>
> Кроме того, $E_W \subset Y$. Следовательно, $E_W \subset Y \cap U \subset K$, а значит E_W компактно как замкнутое подмножество компакта K. Наконец, конечное пересечение множеств из $\mathcal{B}$ остаётся в $\mathcal{B}$. Другими словами, $\{E_W \mid W \in \mathcal{B}\}$ — центрированная система компактных множеств, а значит существует точка $z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W$.
> С одной стороны, $z \in Y$. Однако в то же время $z \in x + \overline{W}$ для всех $W \in \mathcal{B}$, а значит $z = x$, так как пространство X хаусдорфово. Значит, $x \in Y$. ■

Теорема 3.4.5. *Пусть X — ТВП, Y — его подпространство и $\dim Y = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда*
(a) Каждый изоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на Y является гомеоморфизмом;
(b) Y замкнуто.

> *Доказательство:* Мы будем проводить индукцию по n.

- База: $n = 1$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R} \to Y$ — изоморфизм векторных пространств. Возьмём $u = \Lambda 1$. Тогда по линейности $\Lambda\alpha = \alpha u$, и из непрерывности домножения на скаляр следует, что Λ непрерывно. Заметим, что Λ^{-1} — линейный функционал $Y \to \mathbb{R}$ с ядром $\{0\}$, а значит по теореме 3.3.4 отображение Λ^{-1} также непрерывно. Наконец, заметим, что $Y \cong \mathbb{R}$ локально компактно, и по лемме 3.4.4 Y замкнуто.
- Переход: $n - 1 \to n$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R}^n \to Y$ — изоморфизм. Определим $u_k = \Lambda e_k$, где $\{e_1, ..., e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

  $$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n,$$

  и по непрерывности операции $(\cdot)$ на Y мы заключаем, что Λ непрерывно. Теперь, для каждого $y \in Y$ имеем

  $$y = \Lambda(\Lambda^{-1} y) = \gamma_1(y) u_1 + ... + \gamma_n(y) u_n.$$

  Ядро каждого из функционалов γ_k является $(n-1)$-мерным подпространством Y, и по предположению индукции $\ker \gamma_k$ замкнуто. Тогда по теореме 3.3.4 каждый функционал γ_k непрерывен, а значит

  $$\Lambda^{-1}(y) = (\gamma_1(y), \gamma_2(y), ..., \gamma_n(y))$$

  также непрерывно, что доказывает (a). Наконец, поскольку $Y \cong \mathbb{R}^n$ локально компактно, по лемме 3.4.4 мы видим, что (b) также справедливо.

■

Теорема 3.4.6. *Пусть X — локально компактное ТВП. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: Пусть V — окрестность нуля в X, и $\overline{V}$ компактно. Окрестность V ограничена (упражнение), а значит по теореме 3.2.9 множества $\{2^{-n} V\}_{n \in \mathbb{N}}$ образуют локальную базу X. Так как $\overline{V}$ компактно, найдётся такой конечный набор $x_1, x_2, ..., x_m \in X$, что

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2} V\right) \cup ... \cup \left(x_m + \frac{1}{2} V\right).$$

Пусть Y — подпространство X, порождённое векторами $x_1, ..., x_m$. Тогда $\dim Y \leq m$. По теореме 3.4.5 множество Y замкнуто в X.
Поскольку $V \subset Y + \frac{1}{2} V$ и $\alpha Y = Y$ для любого скаляра α, имеем

$$\frac{1}{2} V \subset \frac{1}{2} Y + \frac{1}{4} V = Y + \frac{1}{4} V,$$

откуда

$$V \subset Y + \frac{1}{2} V \subset Y + Y + \frac{1}{4} V = Y + \frac{1}{4} V.$$

Продолжая этот принцип, мы видим, что

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n} V).$$

Так как $\{2^{-n} V\}$ — локальная база, из утверждения (a) леммы 3.2.6 следует, что $V \subset \overline{Y}$. Однако $\overline{Y} = Y$, а значит $V \subset Y$. Тогда $kV \subset kY = Y$ при всех $k \in \mathbb{N}$, и, согласно утверждению (a) теоремы 3.2.9, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kV = Y$. Следовательно, $\dim X \leq m$. ■

Теорема 3.4.7. *Пусть X — локально ограниченное ТВП, обладающее свойством Гейне-Бореля. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: По условию в X существует ограниченная окрестность нуля V. По лемме 3.2.6, $\overline{V}$ также ограничено. По свойству Гейне-Бореля $\overline{V}$ компактно. Следовательно, пространство X локально компактно и потому конечномерно. ■

3.5. Метризуемость

Замечание 3.5.1. Пусть X — ТВП, топология которого совместима с некоторой метрикой d. Тогда в X нетрудно построить счётную локальную базу: $V_n = B_{1/n}(0)$. Поэтому метризуемость влечёт существование счётной базы. Оказывается, что для ТВП справедливо и обратное:

Теорема 3.5.2. *Пусть X — ТВП, и в X есть счётная локальная база $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда существует такая метрика d на X, что*
(a) d совместима с топологией пространства X;
(b) открытые шары с центром в точке 0 уравновешены;
(c) d инвариантна (т.е. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ для всех $x, y, z \in X$).

Доказательство: По лемме 3.2.7 и утверждению 3.2.2 можно считать, что все окрестности V_n уравновешены, и

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел r, представимых в виде конечной суммы

$$r = \sum_{k=1}^{n(r)} \frac{c_k(r)}{2^k},$$

где «двоичный разряд» $c_k(r)$ равен 0 или 1, и $n(r) \in \mathbb{N}$. Таким образом, $0 \le r < 1$ для всех $r \in D$.
Далее, положим $A(r) = X$ для $r \ge 1$, а для $r \in D$ определим

$$A(r) = \sum_{k=1}^{n(r)} c_k(r) V_k.$$

Для всякого $x \in X$ положим

$$f(x) = \inf\{r \mid x \in A(r)\} \quad \text{и} \quad d(x,y) = f(x-y).$$

Нам нужно доказать три свойства метрики:
1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. Имеем

$$\begin{aligned} & d(x,y) = 0 \\ & \Longleftrightarrow f(x-y) = 0 \\ & \Longleftrightarrow x - y \in A(r) \text{ для сколь угодно малых } r \\ & \Longleftrightarrow x - y \in V_n \text{ для сколь угодно больших } n \\ & \Longleftrightarrow x - y = 0 \\ & \Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2. $d(x,y) = d(y,x)$. Заметим, что все множества V_n, а значит и $A(r)$, симметричны. Отсюда и следует симметричность метрики (упражнение).
3. $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Для доказательства неравенства треугольника мы докажем по индукции следующее утверждение:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall r, s \in D : n(r) \leq N \wedge n(s) \leq N \wedge r + s < 1, \quad A(r) + A(s) \subset A(r+s).$$

- База: $N = 1$. В таком случае $A(0) + A(1/2) = A(1/2)$.
- Переход: $N - 1 \to N$. Рассмотрим r, s как в условии. Положим

  $$r = r' + \frac{c_N(r)}{2^N}, \quad s = s' + \frac{c_N(s)}{2^N}.$$

  Мы сразу же имеем

  $$A(r) + A(s) = A(r') + A(s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N \subset A(r' + s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N.$$

  Рассмотрим три случая:
  1) $c_N(r) = c_N(s) = 0$. Тогда всё очевидно.
  2) $c_N(r) = 1, c_N(s) = 0$ (не умаляя общности). Тогда $r + s = r' + s' + 2^{-N}$, и мы имеем

     $$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s),$$

     и утверждение доказано.
  3) $c_N(r) = c_N(s) = 1$. Тогда

     $$A(r' + s') + V_N + V_N \subset A(r' + s') + V_{N-1} = A(r' + s') + A(2^{-N+1}) \subset$$
     $$\subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s).$$

Заметим, что, так как каждое из множеств $A(r)$ содержит 0, при $r < s$ выполнено включение

$$A(r) \subset A(r) + A(s - r) \subset A(s).$$

Иными словами, смейство множеств $\{A(r)\}$ линейно упорядочено по включению. Мы утверждаем, что для всех $x, y \in X$,

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y). \tag{3}$$

Если $f(x) + f(y) \geq 1$, то неравенство очевидно. В противном случае, фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдутся такие $r, s \in D$, что

$$f(x) \leq r, \quad f(y) \leq s, \quad r + s \leq f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in A(r)$, $y \in A(s)$, и потому

$$x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r + s)$$
$$\Longrightarrow f(x + y) \leq r + s \leq f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Так как ε взято произвольно, мы убеждаемся в справедливости (3), и неравенство треугольника доказано.

Теперь, по построению d — инвариантрая метрика. Открытые шары с центром в нуле являются открытыми множествами:

$$B^d_\varepsilon(0) = \{x \in X \mid f(x) < \varepsilon\} = \bigcup_{r < \varepsilon} A(r)$$

(упражнение). Если $\varepsilon < 1/2^n$, то $B^d_\varepsilon(0) \subset V_n$. Следовательно, $\{B^d_\varepsilon(0)\}$ — локальная база топологии на X, а значит метрика d совместима с топологией. Так как все $A(r)$ уравновешены (упражнение), то такими же являются и $B^d_\varepsilon(0)$. Теорема доказана. ■