Материал курса

Функциональный анализ, 2025

Содержание

1. Теоремы Бэра о категориях

Определение 1.1. (плотность): Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным,* если $\left(\overline{A}\right)^{\circ} = \varnothing$, иначе говоря, если замыкание множества A не содержит ни одного открытого подмножества X.

Упражнение 1.2. Покажите, что если A нигде не плотно в X, то его дополнение $A^C = X - A$ всюду плотно в X. Верно ли обратное?

Определение 1.3. (категории Бэра): Подмножество $A \subset X$ *является множеством I категории,* если A представимо как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad S_n \text{ нигде не плотны в } X.$$

Множества II категории состоят из всех подмножеств X, не относящихся к I категории.

Определение 1.4. (локальная компактность): Топологическое пространство X называется *локально компактным,* если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность V_x такую, что $\overline{V_x}$ компактно.

Утверждение 1.5. *Пусть X локально компактно и хаусдорфово. Тогда каждое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит замыкание $\overline{V}$ некоторого непустого относительно компактного открытого множества V.*

> *Доказательство:* Рассмотрим открытое множество U и точку $x \in U$. По локальной компактности точка x имеет относительно компактную окрестность V_x. Рассмотрим множество $W = U \cap V_x$. Теперь для каждой точки $y \in \overline{V_x} \cap W^C$ рассмотрим множества A_y и B_y такие, что $y \in A_y$, $x \in B_y$, $A_y \cap B_y = \varnothing$. Множество $\overline{V_x} \cap W^C$ компактно, а значит мы имеем
>
> $$\overline{V_x} \cap W^C \subset A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \ldots \cup A_{y_n}.$$
>
> Наконец, положим $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \ldots \cap B_{y_n}$. Множество V непусто, так как оно содержит точку x. Так как V не пересекается с $\bigcup_{k=1}^{n} A_{y_k} \supset W^C \cap \overline{V_x}$ и $V \subset \overline{V_x}$, мы видим, что $\overline{V} \subset W \subset U$. Кроме того, $\overline{V}$ компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V_x}$. ∎

Определение 1.6. (полнота): Метрическое пространство (M, d) называется *полным,* если каждая *фундаментальная последовательность,* т.е. такая последовательность $x_n \in M$, что

$$d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0,$$

имеет некий предел $x_\infty \in M$.

Теорема 1.7. (Первая теорема Бэра о категориях): *Пусть X — либо*
(a) полное метрическое пространство, либо
(b) локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение счётного семейства открытых всюду плотных множеств также всюду плотно.

> *Доказательство:* Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — семейство открытых всюду плотных множеств. Мы будем индуктивно строить последовательность открытых множеств B_n таким образом, чтобы выполнялось свойство
>
> $$\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}.$$
>
> 1. В качестве B_1 возьмём произвольное открытое непустое подмножество X.

2. Пусть множество B_{n-1} уже построено. Тогда в случае (a) можно рассмотреть некий шар B_n с радиусом не более $1/n$, такой что $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$, так как множество $U_n \cap B_{n-1}$ открыто. В случае (b) утверждение 1.5 позволяет выбрать множество B_n таким образом, что $\overline{B_n}$ компактно и $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$.

Теперь рассмотрим множество

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}.$$

В случае (a) центры x_n указанных шаров образуют фундаментальную последовательность, так как $d(x_n, x_m) < 1/n$ всякий раз когда $m \geqslant n$. Следовательно, множество K содержит предел этой последовательности и потому непусто.
В случае (b) множество K является пересечением вложенной последовательности компактных множеств и потому непусто. В обоих случаях мы получили, что множество

$$K \subset B_1 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

непусто. Так как B_1 было выбрано произвольно, мы показали, что пересечение семейства $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ всюду плотно. ■

2. Топологические векторные пространства

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. (ТВП): Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, и пусть τ — топология на множестве X. Тогда X называется *топологическим векторным пространством,* если
(1) каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством;
(2) операции $(+) : X \times X \to X$ и $(\cdot) : \mathbb{R} \times X \to X$ непрерывны относительно топологии τ.

В таком случае τ называется *векторной топологией.*

Определение 2.1.2. Пусть X — топологическое векторное пространство. Пожмножество $C \subset X$ называется
(1) *выпуклым,* если $tC + (1-t)C \subset C$ при всех $t \in [0,1]$;
(2) *уравновешенным,* если $\alpha C \subset C$ при всех $|\alpha| \leqslant 1$;
(3) *поглощающим,* если $X = \cup_{\alpha > 0} \alpha C$.
(4) *ограниченным,* если для любой окрестности нуля V найдётся число $s > 0$, такое что $C \subset tV$ при $t \geqslant s$.

Замечание 2.1.3. Условие (2) означает, что
(1) для любой окрестности U точки $x_1 + x_2 \in X$, существуют окрестности V_1 и V_2 точек x_1 и x_2, такие, что

$$V_1 + V_2 \subset U.$$

(2) Для любой окрестности U точки $\alpha x \in X$, существуют открестности $V_\alpha \subset \mathbb{R}$ и $V_x \subset X$, такие, что

$$V_\alpha \cdot V_x = \{\beta y \mid \beta \in V_\alpha, y \in V_x\} \subset U.$$

Утверждение 2.1.4. *Отображения $T_a = \lambda x.\, x + a$ и $M_\alpha = \lambda x.\, \alpha x$ являются гомеоморфизмами.*

Доказательство: Упражнение. ■

Замечание 2.1.5. По утверждению 2.1.4, векторная топология *инвариантна относительно сдвигов:* множество U открыто тогда и только тогда, когда открыты все сдвиги $a + U$, где $a \in X$. Таким образом, топология определяется любой своей локальной базой. Термин *локальная база* всегда будет означать *локальную базу в нуле.*

Определение 2.1.6. (типы ТВП): Топологическое пространство X называется
(1) *локально выпуклым,* если в нём есть локальная база, состоящая из выпуклых множеств;
(2) *локально ограниченным,* если существует ограниченная окрестность нуля;
(3) *локально компактным,* если существует относительно компактная окрестность нуля;
(4) *метризуемым,* если его топология совметима с некоторой метрикой;
(5) *пространством Фреше,* если топология на X порождается некоторой полной *инвариантной* метрикой d (в том смысле, что $d(x+z, y+z) = d(x, y)$);
(6) *нормируемым,* если его топология порождается некоторой нормой;
(7) *пространством Банаха,* если X нормируемо и его норма индуцирует полную метрику.

2.2. Топологические свойства

Определение 2.2.1. (аксиомы отделимости): Пусть X — топологическое пространство. Выделяют 5 основных *аксиом отделимости:*
(1) $\mathbb{T}_0$: для любых отличных точек $x, y \in X$, одна из них имеет окрестность, не содержащую другую;
(2) $\mathbb{T}_1$: для любых двух точек $x \neq y$, каждая содержит окрестность, не содержащую другую;
(3) $\mathbb{T}_2$: Каждые две отличные точки X имеют непересекающиеся окрестности;
(4) $\mathbb{T}_3$: Каждые точка $x \in X$ и замкнутое множество $E \not\ni x$ имеют непересекающиеся окрестности;
(5) $\mathbb{T}_4$: Каждая пара непересекающихся замкнутых множеств имеет непересекающиеся окрестности.

Утверждение 2.2.2. *Каждая окрестность нуля U в ТВП X допускает* симметричную *окрестность нуля W (в том смысле, что $-W = W$), такую, что $W + W \subset U$.*

Доказательство: По непрерывности сложения имеем окрестности V_1, V_2 со свойством $V_1 + V_2 \subset U$. Теперь, полагая

$$W = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

имеем искомую оеркстность нуля. ■

Теорема 2.2.3. *Пусть X — ТВП, $K, E \subset X$, причём K компактно, E замкнуто, и $K \cap E = \varnothing$. Тогда существует такая окрестность нуля V, что*

$$(K + V) \cap (E + V) = \varnothing.$$

(заметим, что множества $K + V$ и $E + V$ открыты)

Доказательство: Заметим, что по предыдущему утверждению для любой окрестности U найдётся симметричная окрестность V таким образом, что

$$V + V + V + V \subset U.$$

Теперь предположим, что множество K непусто, $x \in K$. Так как E замкнуто, имеем окрестность нуля V_x такую, что

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset E^C - x \Longrightarrow (x + V_x + V_x + V_x) \cap E = \varnothing.$$

Следовательно,

$$(x + V_x + V_x) \cap (E + V_x) = (x + V_x + V_x) \cap (E - V_x) = \varnothing.$$

Так как множество K компактно, найдётся конечное число точек $x_1, x_2, ..., x_n \in K$, таких что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k}\right)$$

Положим $V := V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$. Имеем

$$K + V \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V_{x_k}\right) \subset (E + V)^C$$
$$\Longrightarrow (K + V) \cap (E + V) = \varnothing,$$

и доказательство завершено. ■

Следствие 2.2.4. *Всякое ТВП X удовлетворяет аксиомам $\mathbb{T}_0$-$\mathbb{T}_3$ отделимости (упражнение).*

Следствие 2.2.5. *Если $\mathcal{B}$ — локальная база ТВП X, то Теорема 2.2.3, применённая ко множествам $\{0\}$ и $U \in \mathcal{B}$, влечёт существование некой другой окрестности $V \in \mathcal{B}$, такой, что $\overline{V} \subset U$.*

Следующее техническое утверждение содержит некоторые свойства операторов замыкания и внутренности:

Лемма 2.2.6. *Пусть X — топологическое векторное пространство.*
(a) Для всякого $A \subset X$, имеем $\overline{A} = \bigcap\limits_{0 \in V} (A + V)$, где V пробегает все окрестности нуля;
(b) Если $A, B \subset X$, то $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$;
(c) Если $Y \leqslant X$, то $\overline{Y} \leqslant X$; *(замыкание подпространства есть подпространство)*
(d) Если $C \subset X$ выпукло, то множества $\overline{C}$ и C° также выпуклы;
(e) Если $B \subset X$ уравновешено, то $\overline{B}$ также уравновешено. Если к тому же $0 \in B^\circ$, то B° уравновешено;
(f) Если $E \subset X$ ограничено, то $\overline{E}$ ограничено.

Доказательство:
(a) $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля V. Это эквивалентно условию $x \in A - V$ для всех V, что равносильно $x \in \bigcap_{0 \in V} (A + V)$, так как $(-V)$ — окр. нуля $\Longleftrightarrow$ V — окр. нуля.
(b) По непрерывности операции сложения, имеем $(x_n + y_n) \to x + y$ при $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Равенство $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$ остаётся как упражнение.
(c) Достаточно воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

а значит $\overline{Y}$ — подпространство X.
(d) Пусть $C \subset X$ выпукло. Выпуклость $\overline{C}$ — упражнение. Теперь, так как $C^\circ \subset C$ и C выпукло, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset tC + (1 - t)C \subset C$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Оба слагаемых слева являются открытыми множествами, я значит их сумма тоже открыта. Так как внутренность C есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в C, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ,$$

и C° выпукло.

(e) Пусть $B \subset X$ уравновешено. Уравновешенность $\overline{B}$ — упражнение. Если $0 \in B^\circ$, то имеем $0 \cdot B^\circ \subset B^\circ$. В то же время, при $0 < |\alpha| \leqslant 1$ имеем

$$\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

так как $\lambda x.\ \alpha x$ — гомеоморфизм. Но αB° открыто, а значит $\alpha B^\circ \subset B^\circ$.

(f) Пусть $E \subset X$ ограничено и пусть V — произвольная окрестность нуля. По следствию 2.2.5 имеем такую окрестность нуля W, что $\overline{W} \subset V$. Далее, при достаточно больших t имеем

$$E \subset tW \Longrightarrow \overline{E} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV,$$

и доказательство завершено. ■

Лемма 2.2.7. *Пусть X — ТВП. Тогда:*

(a) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;

(b) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

Доказательство:

(a) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Так как операция умножения непрерывна, найдутся такое число $\delta > 0$ и такая окрестность нуля W, что $\alpha W \subset U$ при $|\alpha| < \delta$. Рассмотрим окрестность $V := \bigcup\limits_{|\alpha|<\delta} \alpha W$. Очевидно, что $V \subset U$ и что V уравновешено.

(b) Пусть U — выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим множество $A = U \cap (-U)$. Как пересечение выпуклых множеств, A выпукло. Кроме того, A симметрично. Теперь, если $|t| \leqslant 1$, мы имеем

$$tA = |t|\ A \subset |t|\ A + (1 - |t|)A \subset A,$$

то есть множество A уравновешено,

что и требовалось доказать. ■

Следствие 2.2.8. *Каждое ТВП X имеет уравновешенную локальную базу. Если же X локально выпукло, оно имеет выпуклую уравновешенную локальную базу.*

Теорема 2.2.9. *Пусть X — топологическое векторное пространство, а V — окрестность нуля.*

(a) Если $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V;$$

(b) Каждое компактное подмножество $K \subset X$ ограничено;

(c) Если окрестность V ограничена и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то семейство

$$\{\delta_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$$

является локальной базой пространства X.

Доказательство:

(a) Фиксируем точку $x \in X$. Так как Отображение $\lambda\alpha.\ \alpha x$ непренывно, множество $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x \in V\}$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Оно содержит $1/r_n$, НСНМ. Тогда для некоторого n имеем

$$(1/r_n) \cdot x \in V \Longrightarrow x \in r_n V.$$

(b) Пусть $W \subset V$ — уравновешенная окрестность нуля. Согласно (a), имеем

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW.$$

Поскольку K компактно, найдётся такой конечный набор $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, что

$$K \subset n_1 W \cup n_2 \cup \ldots \cup n_k W = n_k W.$$

Отсюда следует, что $K \subset tW \subset tV$ при $t \geqslant n_k$.

(c) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Поскольку V ограничена, то $V \subset tU$ при $t \geqslant s$, для некоторого $s > 0$. Тогда $(1/t)V \subset U$ при больших t, а значит $\delta_n V \subset U$, НСНМ.

■

2.3. Линейные операторы

Определение 2.3.1. Напомним, что отображение $\Lambda : X \to Y$ называется *линейным,* если

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y.$$

Линейное отображение пространства в его поле скаляров называется *линейным функционалом.*

Упражнение 2.3.2. Пусть $\Lambda : X \to Y$ линейно. Тогда

(a) $\Lambda 0 = 0$;

(b) Если A — подпространство X (или выпуклое, или уравновешенное множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda(A)$.

(c) Если B — подпространство Y (или выпуклое/уравновешенное/поглощающее множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda^{-1}(B)$.

(d) В частности, множество $\ker \Lambda = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ является подпространством X и называется *ядром* Λ.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\Lambda : X \to Y$ — линейный оператор между двумя ТВП. Тогда если Λ непрерывно в нуле, то Λ непрерывно на всём X, причём более того,* ***равномерно непрерывно:*** *для каждой окрестности W нуля в Y, найдётся окрестность V нуля в X, так что*

$$y - x \in V \Longrightarrow \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Доказательство: Пусть W — окрестность нуля в Y. Тогда по непрерывности в нуле, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset W$. Тогда $y - x \in V$ влечёт $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \subset W$. Наконец, при всех $x \in X$, оператор Λ отображает окрестность $x + V$ в окрестность $\Lambda x + W$, так что Λ непрерывно в точке x. ■

Теорема 2.3.4. *Пусть Λ — линейный функционал на ТВП X. Допустим также, что $\Lambda x \neq 0$ для некоторого $x \in X$. Тогда СУР:*

(a) Λ непрерывен;

(b) ядро $\ker \Lambda$ замкнуто в X;

(c) ядро $\ker \Lambda$ не плотно в X;

(d) функционал Λ ограничен в некоторой окрестности нуля V.

Доказательство:

$(a) \Longrightarrow (b)$: Рассмотрим последовательность $x_n \in \ker \Lambda$, сходящуюся к точке $x \in X$. В силу непрерывности, имеем

$$\Lambda x = \Lambda\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

откуда мы заключаем, что $x \in \ker \Lambda$.

$(b) \Longrightarrow (c)$: По условию $\ker \Lambda \neq X$, так что замкнутое множество $\ker \Lambda$ не пересекается с непустым открытым множеством $X \setminus \ker \Lambda$, откуда следует, что $\ker \Lambda$ не плотно в X.

$(c) \implies (d)$: Условие (c) равносильно тому, что множество $X \setminus \ker \Lambda$ имеет непустую внутренность. По теореме 2.2.7 имеем такую уравновешенную окрестность нуля V и такую точку $x \in X$, что

$$(x + V) \cap \ker \Lambda = \varnothing. \tag{1}$$

Тогда образ $\Lambda(V)$ — уравновешенное подмножество $\mathbb{R}$. Следовательно, либо $\Lambda(V)$ ограничено, либо $\Lambda(V) = \mathbb{R}$ (упражнение). В первом случае всё доказано. Во втором, найдётся такой элемент $y \in V$, что $\Lambda y = -\Lambda x$. Тогда имеем $x + y \in (x + V) \cap \ker \Lambda$, что невозможно в силу (1).

$(d) \implies (a)$: Пусть для некоторой окрестности V и числа $M > 0$ справедливо $|\Lambda x| < M$ при $x \in V$. Тогда для любого $r > 0$, положив $W = (r/M)V$, имеем $|\Lambda x| < r$ для всех $x \in W$. Следовательно, функционал Λ непрерывен в нуле, а значит непрерывен. ■

2.4. Конечномерные пространства

Пример 2.4.1. Самый простой пример n-мерного пространства — $\mathbb{R}^n$, с нормой

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Можно также рассмотреть другие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Нетрудно проверить, что все они индуцируют одну и ту же топологию. Кроме того, всякое n-мерное пространство над $\mathbb{R}$ естественно изоморфно $\mathbb{R}^n$. Мы докажем, что естественная топология на $\mathbb{R}^n$ — это единственная векторная топология, возможная в произвольном вещественном n-мерном ТВП.

Определение 2.4.2. Система множеств $\mathcal{B}$ называется *центрированной,* если для всякого конечного набора $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, его пересечение непусто:

$$\bigcap_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing.$$

Упражнение 2.4.3. Покажите, что пересечение всякой центрированной системы компактов непусто.

Лемма 2.4.4. *Пусть X — ТВП, а Y — локально-компактное (в индуцированной топологии) подпространство X. Тогда множество Y замкнуто в X.*

Доказательство: Существует такое компактное множество $K \subset Y$, что $0 \in K^\circ$ в топологии Y. Следовательно, найдётся такая окрестность U нуля в X, что $U \cap Y \subset K$. Выберем симметричную окрестность $V \subset X$ таким образом, чтобы $\overline{V} + \overline{V} \subset U$.
Далее, мы покажем, что $\overline{Y} = Y$. Рассмотрим $x \in \overline{Y}$. Пусть $\mathcal{B}$ содержит все окрестности нуля в X, которые включены в V. Каждому $W \in \mathcal{B}$ сопоставим множество

$$E_W = Y \cap \left(x + \overline{W}\right).$$

Так как $x \in \overline{Y}$, каждое из множеств E_W непусто. Рассмотрим множество $W \in \mathcal{B}$ и фиксируем точку $y_0 \in E_W$. Для любой точки $y \in E_W$, имеем

$$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{W} + \left(-\overline{W}\right) \subset \overline{V} + \overline{V} \subset U.$$

Кроме того, $E_W \subset Y$. Следовательно, $E_W \subset Y \cap U \subset K$, а значит E_W компактно как замкнутое подмножество компакта K. Наконец, конечное пересечение множеств из $\mathcal{B}$ остаётся в $\mathcal{B}$. Другими словами, $\{E_W \mid W \in \mathcal{B}\}$ — центрированная система компактных множеств, а значит существует точка $z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W$.
С одной стороны, $z \in Y$. Однако в то же время $z \in x + \overline{W}$ для всех $W \in \mathcal{B}$, а значит $z = x$, так как пространство X хаусдорфово. Значит, $x \in Y$. ∎

Теорема 2.4.5. *Пусть X — ТВП, Y — его подпространство и $\dim Y = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда*
(a) Каждый изоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на Y является гомеоморфизмом;
(b) Y замкнуто.

Доказательство: Мы будем проводить индукцию по n.

- База: $n = 1$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R} \to Y$ — изоморфизм векторных пространств. Возьмём $u = \Lambda 1$. Тогда по линейности $\Lambda\alpha = \alpha u$, и из непрерывности домножения на скаляр следует, что Λ непрерывно. Заметим, что Λ^{-1} — линейный функционал $Y \to \mathbb{R}$ с ядром $\{0\}$, а значит по теореме 2.3.4 отображение Λ^{-1} также непрерывно. Наконец, заметим, что $Y \cong \mathbb{R}$ локально компактно, и по лемме 2.4.4 Y замкнуто.
- Переход: $n - 1 \to n$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R}^n \to Y$ — изоморфизм. Определим $u_k = \Lambda e_k$, где $\{e_1, ..., e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

  $$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n,$$

  и по непрерывности операции $(\cdot)$ на Y мы заключаем, что Λ непрерывно. Теперь, для каждого $y \in Y$ имеем

  $$y = \Lambda(\Lambda^{-1} y) = \gamma_1(y) u_1 + ... + \gamma_n(y) u_n.$$

  Ядро каждого из функционалов γ_k является $(n-1)$-мерным подпространством Y, и по предположению индукции $\ker \gamma_k$ замкнуто. Тогда по теореме 2.3.4 каждый функционал γ_k непрерывен, а значит

  $$\Lambda^{-1}(y) = (\gamma_1(y), \gamma_2(y), ..., \gamma_n(y))$$

  также непрерывно, что доказывает (a). Наконец, поскольку $Y \cong \mathbb{R}^n$ локально компактно, по лемме 2.4.4 мы видим, что (b) также справедливо.

∎

Замечание 2.4.6. Таким образом, всякое n-мерное ТВП X гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.4.7. *Пусть X — локально компактное ТВП. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: Пусть V — окрестность нуля в X, и $\overline{V}$ компактно. Окрестность V ограничена (упражнение), а значит по теореме 2.2.9 множества $\{2^{-n} V\}_{n \in \mathbb{N}}$ образуют локальную базу X. Так как $\overline{V}$ компактно, найдётся такой конечный набор $x_1, x_2, ..., x_m \in X$, что

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2} V\right) \cup ... \cup \left(x_m + \frac{1}{2} V\right).$$

Пусть Y — подпространство X, порождённое векторами $x_1, ..., x_m$. Тогда $\dim Y \leqslant m$. По теореме 2.4.5 множество Y замкнуто в X.
Поскольку $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ и $\alpha Y = Y$ для любого скаляра α, имеем

$$\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V,$$

откуда

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Продолжая этот принцип, мы видим, что

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Так как $\{2^{-n}V\}$ — локальная база, из утверждения (a) леммы 2.2.6 следует, что $V \subset \overline{Y}$. Однако $\overline{Y} = Y$, а значит $V \subset Y$. Тогда $kV \subset kY = Y$ при всех $k \in \mathbb{N}$, и, согласно утверждению (a) теоремы 2.2.9, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kV = Y$. Следовательно, $\dim X \leqslant m$. ■

Теорема 2.4.8. *Пусть X — локально ограниченное ТВП, обладающее свойством Гейне-Бореля. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: По условию в X существует ограниченная окрестность нуля V. По лемме 2.2.6, $\overline{V}$ также ограничено. По свойству Гейне-Бореля $\overline{V}$ компактно. Следовательно, пространство X локально компактно и потому конечномерно. ■

Пример 2.4.9. Рассмотрим пространство $F = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid x_n = 0 \text{ НСНМ} \right\}$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|.$$

Очевидно, что это ТВП над полем $\mathbb{R}$. В нём есть *счётный базис*

$$\{e_k \mid k \in \mathbb{N}, e_k = \lambda n.\ \underline{\text{if}}\ n = k\ \underline{\text{then}}\ 1\ \underline{\text{else}}\ 0\}.$$

Следовательно, F *не* локально компактно.

2.5. Метризуемость

Замечание 2.5.1. Пусть X — ТВП, топология которого совместима с некоторой метрикой d. Тогда в X нетрудно построить счётную локальную базу: $V_n = B_{1/n}(0)$. Поэтому метризуемость влечёт существование счётной базы. Оказывается, что для ТВП справедливо и обратное:

Теорема 2.5.2. *Пусть X — ТВП, и в X есть счётная локальная база $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда существует такая метрика d на X, что*
(a) d совместима с топологией пространства X;
(b) открытые шары с центром в точке 0 уравновешены;
(c) d инвариантна (т.е. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ для всех $x, y, z \in X$).

Доказательство: По лемме 2.2.7 и утверждению 2.2.2 можно считать, что все окрестности V_n уравновешены, и

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел r, представимых в виде конечной суммы

$$r = \sum_{k=1}^{n(r)} \frac{c_k(r)}{2^k},$$

где «двоичный разряд» $c_k(r)$ равен 0 или 1, и $n(r) \in \mathbb{N}$. Таким образом, $0 \leqslant r < 1$ для всех $r \in D$.

Далее, положим $A(r) = X$ для $r \geqslant 1$, а для $r \in D$ определим

$$A(r) = \sum_{k=1}^{n(r)} c_k(r) V_k.$$

Для всякого $x \in X$ положим

$$f(x) = \inf \{r \mid x \in A(r)\} \quad \text{и} \quad d(x, y) = f(x - y).$$

Нам нужно доказать три свойства метрики:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. Имеем

$$\begin{aligned} & d(x, y) = 0 \\ & \Longleftrightarrow f(x - y) = 0 \\ & \Longleftrightarrow x - y \in A(r) \text{ для сколь угодно малых } r \\ & \Longleftrightarrow x - y \in V_n \text{ для сколь угодно больших } n \\ & \Longleftrightarrow x - y = 0 \\ & \Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2. $d(x, y) = d(y, x)$. Заметим, что все множества V_n, а значит и $A(r)$, симметричны. Отсюда и следует симметричность метрики (упражнение).
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Для доказательства неравенства треугольника мы докажем по индукции следующее утверждение:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall r, s \in D : n(r) \leqslant N \wedge n(s) \leqslant N \wedge r + s < 1, \quad A(r) + A(s) \subset A(r + s).$$

- <u>База:</u> $N = 1$. В таком случае $A(0) + A(1/2) = A(1/2)$.
- <u>Переход:</u> $N - 1 \to N$. Рассмотрим r, s как в условии. Положим

$$r = r' + \frac{c_N(r)}{2^N}, \quad s = s' + \frac{c_N(s)}{2^N}.$$

Мы сразу же имеем

$$A(r) + A(s) = A(r') + A(s') + c_N(r) V_N + c_N(s) V_N \subset A(r' + s') + c_N(r) V_N + c_N(s) V_N.$$

Рассмотрим три случая:

1) $c_N(r) = c_N(s) = 0$. Тогда всё очевидно.
2) $c_N(r) = 1, c_N(s) = 0$ (не умаляя общности). Тогда $r + s = r' + s' + 2^{-N}$, и мы имеем

$$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s),$$

и утверждение доказано.

3) $c_N(r) = c_N(s) = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} A(r' + s') + V_N + V_N \subset A(r' + s') + V_{N-1} = A(r' + s') + A(2^{-N+1}) \subset \\ \subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s). \end{gathered}$$

Заметим, что, так как каждое из множеств $A(r)$ содержит 0, при $r < s$ выполнено включение

$$A(r) \subset A(r) + A(s-r) \subset A(s).$$

Иными словами, смейство множеств $\{A(r)\}$ линейно упорядочено по включению. Мы утверждаем, что для всех $x, y \in X$,

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y). \tag{2}$$

Если $f(x) + f(y) \geqslant 1$, то неравенство очевидно. В противном случае, фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдутся такие $r, s \in D$, что

$$f(x) \leqslant r, \quad f(y) \leqslant s, \quad r + s \leqslant f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in A(r)$, $y \in A(s)$, и потому

$$\begin{aligned} x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s) \\ \implies f(x+y) \leqslant r + s \leqslant f(x) + f(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε взято произвольно, мы убеждаемся в справедливости (2), и неравенство треугольника доказано.

Теперь, по построению d — инвариантрая метрика. Открытые шары с центром в нуле являются открытыми множествами:

$$B^d_\varepsilon(0) = \{x \in X \mid f(x) < \varepsilon\} = \bigcup_{r < \varepsilon} A(r)$$

(упражнение). Если $\varepsilon < 1/2^n$, то $B^d_\varepsilon(0) \subset V_n$. Следовательно, $\{B^d_\varepsilon(0)\}$ — локальная база топологии на X, а значит метрика d совместима с топологией. Так как все $A(r)$ уравновешены (упражнение), то такими же являются и $B^d_\varepsilon(0)$. Теорема доказана. ■

Определение 2.5.3. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность $x_n \in X$ называется d-фундаментальной, если

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geqslant N, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \\ \iff &d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

В ТВП X с топологией τ, последовательность $x_n \in X$ называется τ-фундаментальной, если

$$\begin{aligned} &\forall V \ni 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geqslant N, \quad x_n - x_m \in V \\ \iff &(x_n - x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Упражнение 2.5.4. Пусть d — инвариантная метрика, совместимая с топологией τ на ТВП X. Покажите, что для всякой последовательности $x_n \in X$,

$$x_n \ d\text{-фундаментальна} \iff x_n \ \tau\text{-фундаментальна}.$$

Пусть d_1, d_2 — две инвариантрые метрики на ТВП X, совместимые с топологией τ на X. Покажите, что d_1 полна $\iff d_2$ полна.

2.6. Полунормы и локальная выпуклость

Определение 2.6.1. Вещественная функция $p : X \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве X называется *полунормой*, если для всех $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(a) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$; (полуаддитивность)

(b) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$. (мультипликативность)

Полунормы отличаются от норм отсутствием условия $p(x) = 0 \iff x = 0$.
Семейство $\mathcal{P}$ полунорм на X называется *разделяющим*, если для всякого $x \neq 0$ найдётся такая полунорма $p \in \mathcal{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Определение 2.6.2. Пусть $A \subset X$ — выпуклое, поглощающее множество (например, выпуклая окрестность нуля) в векторном пространстве X. *Функционал Минковского* μ_A определяется как

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}.$$

Заметим, что $\mu_A(a) < \infty$ для всех $x \in X$, поскольку A поглощает X.

Упражнение 2.6.3. Пусть C — выпуклое подмножество векторного пространства X. Докажите, что $\alpha C + \beta C = (\alpha+\beta)C$ при всех $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Лемма 2.6.4. *Пусть A — выпуклое, поглощающее множество в векторном пространстве X. Тогда*

(a) $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$;

(b) $\mu_A(\alpha x) = \alpha \mu_A(x)$ *при всех* $\alpha \geqslant 0$;

(c) Если A уравновешено, то μ_A — полунорма;

(d) Если $B = \{x \mid \mu_A(x) < 1\}$ *и* $C = \{x \mid \mu_A(x) \leqslant 1\}$, *то* $B \subset A \subset C$ *и* $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

Доказательство:

(a) Полуаддитивность следует из выпуклости. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &\in (\mu_A(x)+\varepsilon)A \\ y &\in (\mu_A(y)+\varepsilon)A \end{aligned}\right\} \implies x + y \in (\mu_A(x)+\varepsilon)A + (\mu_A(y)+\varepsilon)A = (\mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon)A$$

$$\implies \mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, полуаддитивность доказана.

(b) Так $\alpha x \in tA \iff x \in \frac{\alpha}{t}A$, свойство очевидно (упражнение).

(c) Пусть $\alpha < 0$. Тогда, поскольку $A = -A$, имеем $\alpha x \in tA \iff (-\alpha)x \in tA$, а значит

$$\mu_A(\alpha x) = \mu_A((-\alpha)x) = (-\alpha)\mu_A(x) = |\alpha|\ \mu_A(x).$$

(d) Для $x \in X$, пусть $H_A(x) = \{t > 0 \mid x \in tA\}$. Предположим, что $\mu_A(x) < 1$. Тогда $1 \in H_A(x)$, а значит $x \in A$. Ясно, что если $x \in A$, то $\mu_A(x) \leqslant 1$, так как $1 \in H_A(x)$. Поэтому $B \subset A \subset C$. Отсюда следует, что $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$. Следовательно,

$$\mu_C(x) \leqslant \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x).$$

Чтобы доказать, что $\mu_B(x) \leqslant \mu_C(x)$, допустим, что $\mu_C(x) < s < t$. Тогда
$x \in sC \implies s^{-1}x \in C$, а значит $\mu_A(s^{-1}x) \leqslant 1$, так что

$$\mu_A(t^{-1}x) = \mu_A\left(\frac{s}{t} \cdot s^{-1}x\right) = \frac{s}{t}\mu_A(s^{-1}x) \leqslant \frac{s}{t} < 1.$$

Следовательно, $t^{-1}x \in B$, а значит $\mu_B(t^{-1}x) \leqslant 1$ и $\mu_{B(x)} \leqslant t$. Так как s и t взяты произвольно, мы заключаем, что $\mu_B(x) \leqslant \mu_C(x)$.

■

Лемма 2.6.5. *Пусть p — полунорма на векторном пространстве X. Тогда*
(a) $p(0) = 0$;
(b) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$, *в частности,* $p(x) \geqslant 0$;
(c) Множество $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ *является подпространством* X.
(d) Множество $B = \{x \mid p(x) < 1\}$ *выпукло, уравновешено и поглощающе, причём* $p = \mu_B$.

Доказательство: Свойства (a), (b), (c) остаются как упражнение читателю. Докажем (d).

- Выпуклость. При $x, y \in B$, $t \in [0, 1]$, имеем

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t + (1-t) = 1 \Longrightarrow tx + (1-t)y \in B.$$

- Уравновешенность. Если $|\alpha| \leqslant 1$ и $x \in B$, имеем

$$p(\alpha x) = |\alpha|\ p(x) < 1 \Longrightarrow \alpha x \in B.$$

- Поглощающесть. Для каждого $x \in X$ рассмотрим $\alpha = p(x) + 1$. Тогда

$$p\left(\frac{1}{\alpha}x\right) = \frac{p(x)}{\alpha} = \frac{p(x)}{p(x)+1} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}x \in B \Longrightarrow x \in \alpha B,$$

что и требовалось. ■

Теорема 2.6.6. *Пусть $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная локальная база в ТВП X. Тогда семейство* $\{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ *— разделяющее семейство непрерывных полунорм на X.*

Доказательство: Поскольку каждая окрестность $V \in \mathcal{B}$ — выпуклое уравновешенное поглощающее множество, μ_V является полунормой.
Далее, если $x \neq 0$, то $x \notin V$ для некоторой $V \in \mathcal{B}$, а значит $\mu_V(x) \geqslant 1$. Тогда $\{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ — разделяющее семейство.
Теперь покажем, что каждая полунорма μ_V непрерывна. Если $x \in V$, то по непрерывности операций на X, имеем $tx \in V$ для некоторого $t > 1$. Тогда

$$\mu_V(x) \leqslant 1/t < 1.$$

Теперь пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого $y \in x + \varepsilon V$, имеем $(y-x)/\varepsilon \in V$ и

$$|\mu_V(y) - \mu_V(x)| \leqslant \mu_V(y - x) = \varepsilon \cdot \mu_V\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon.$$

Следовательно, μ_V непрерывно в точке x. ■

Теорема 2.6.7. *Пусть $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм на векторном пространстве X. Для $p \in \mathcal{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим*

$$V(p, n) = \left\{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность всех конечных пересечений множеств $V(p, n)$:

$$\mathcal{B} = \{V(p_1, n_1) \cap ... \cap V(p_k, n_k) \mid k \in \mathbb{N}, p_k \in \mathcal{P}, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ в X, которая превращает X в локально выпуклое ТВП, причём все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны относительно τ;

Доказательство: Обозначим множество $A \subset X$ *открытым*, если вместе со всякой точкой $x \in A$ оно содержит множество $x + U$, где $U \in \mathcal{B}$. Очевидно, что такое определение рождает на X топологию (упражнение), инвариантную относительно сдвигов.
Также заметим, что по лемме 2.6.5 каждое множество $U \in \mathcal{B}$ выпукло, уравновешено и

поглощающе, и $\mathcal{B}$ является локальной базой топологии τ в нуле.

Далее, нужно показать, что всякое множество $\{x\}$ замкнуто в X. Пусть $x \in X$ и $x \neq 0$. Тогда найдётся полунорма $p \in \mathcal{P}$ со свойством $p(x) > 0$. Выбирая такое $n \in \mathbb{N}$, что $p(x) > \frac{1}{n}$, мы видим, что $x \notin V(p, n)$, а следовательно $0 \notin x + V(p, n)$. Тогда $x \notin \overline{\{0\}}$. Так как $x \neq 0$ было взято произвольно, мы видим, что $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Поскольку топология τ инвариантна относительно сдвигов, имеем $\overline{\{x\}} = \{x\}$ для всех $x \in X$.

Теперь докажем непрерывность сложения. Пусть U — окрестность нуля в X,

$$U \supset V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k).$$

Рассмотрим окрестность

$$V = V(p_1, 2n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, 2n_k).$$

Так как каждая полунорма p_i полуаддитивна, имеем $V(p_i, 2n_i) + V(p_i, 2n_i) \subset V(p_i, n_i)$ и следовательно $V + V \subset U$. Этим доказана непрерывность сложения.

Теперь пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$, U — окрестность нуля. Рассмотрим, как прежде, такую V, что $V + V \subset U$. Тогда $x \in sV$ для некоторого $s > 0$. Положим $t = s/(1 + |\alpha| s)$. Если $y \in x + tV$ и $|\beta - \alpha| < 1/s$, то, поскольку $|\beta| t \leqslant 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \in |\beta|\ tV + |\beta - \alpha|\ sV \subset V + V \subset U \\ \Longrightarrow\ & \beta y \in \alpha x + U, \end{aligned}$$

что доказывает непрерывность умножения. Таким образом, (X, τ) — локально выпуклое ТВП.

Из определения $V(p, n)$ следует, что все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны в нуле. По лемме 2.6.5 все они непрерывны на всём X (упражнение). ■

Замечание 2.6.8. Если рассмотреть просто все множества $V(p, n)$, то полученное семейство будет *предбазой* топологии τ, но не базой.

Замечание 2.6.9. Возникает следующая естественная задача. Если $\mathcal{B}_1$ — выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ_1 в ТВП X, то, согласно теореме 2.6.6, $\mathcal{B}_1$ порождает разделяющее семейство $\mathcal{P}$ непрерывных полунорм на X. В свою очередь, P индуцирует в X топологию τ_2 с базой $\mathcal{B}_2$. Верно ли, что $\tau_1 = \tau_2$? Оказывается, да.

Доказательство:

$\tau_1 \subset \tau_2$: Пусть $V \in \mathcal{B}$. Тогда $\mu_V \in \mathcal{P}$, и по лемме 2.6.4 мы имеем

$$W \coloneqq V(\mu_V, 1) = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \subset V,$$

причём $W \in \mathcal{B}_2$. Тогда $\tau_1 \subset \tau_2$.

$\tau_2 \subset \tau_1$: Так как все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны относительно τ_1, каждое из множеств

$$V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k) = p_1^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_1}\right)\right) \cap \ldots \cap p_k^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_k}\right)\right)$$

открыто в τ_1. Поэтому $\tau_2 \subset \tau_1$. ■

Упражнение 2.6.10. Пусть X — векторное пространство, $\mathcal{P}_1$ — разделяющее семейство полунорм на X. Правда ли, что семейство $\mathcal{P}_2$ полунорм, полученное переходом $\mathcal{P}_1 \to \mathcal{B} \to \mathcal{P}_2$ совпадает с $\mathcal{P}_1$?

Упражнение 2.6.11. Пусть $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$ — семейство, состоящее из единственной нормы $\|\cdot\|$ на пространстве X. Покажите, что $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм, и что топология τ, порождённая этим семейством по теореме 2.6.7, совпадает со стандартной топологией, порождённой нормой.

Теорема 2.6.12. *ТВП X нормируемо тогда и только тогда, когда X обладает выпуклой ограниченной окрестностью нуля.*

Доказательство:
Если пространство X нормируется нормой $\|\cdot\|$, то открытый шар $B_1(0) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ — выпуклое ограниченное множество (упражнение).
Напротив, пусть V — выпуклая ограниченная окрестность нуля в X. По лемме 2.2.7 она содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля U. Разумеется, U также ограничена. Положим

$$\|x\| = \mu_U(x), \quad x \in X.$$

Мы сразу видим, что $\|\cdot\|$ — полунорма. Теперь, если $x \neq 0$, то по теореме 2.2.9 $x \notin rU$ для некоторого $r > 0$, так как множества rU образуют локальную базу в X. Следовательно, $\|x\| \geqslant r > 0$. Таким образом, $\|\cdot\|$ — норма. Из того факта, что

$$\{x \mid \|x\| < r\} = \{x \mid \exists s < r,\ x \in sU\} = \bigcup_{s<r} sU = rU$$

(упражнение: проверить последний переход), мы видим, что топология, индуцированная полученной нормой, совпадает с исходной. ∎

3. Полнота и теорема Банаха-Штейнгауза

Определение 3.1. (равностепенная непрерывность): Пусть X и Y — ТВП. Семейство Γ линейных операторов X в Y называется *равностепенно непрерывным*, если для любой окрестности нуля $U \subset Y$, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset U$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.

Лемма 3.2. *Пусть X и Y — ТВП, Γ — равностепенно непрерывное семейство линейных операторов $\Lambda : X \to Y$. Тогда для любого ограниченного множества $E \subset X$, найдётся такое ограниченное множество $F \subset Y$, что $\Lambda(E) \subset F$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.*

Доказательство: Пусть $E \subset X$ ограничено. Положим

$$F = \bigcup_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda(E).$$

Покажем, что F также ограничено. Пусть U — окрестность нуля в Y. Тогда существует такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset U$ для всех $\Lambda \in \Gamma$. Поскольку E ограничено, $E \subset tV$ при достаточно больших $t > 0$. Следовательно, при больших t,

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tU \Longrightarrow F \subset tU,$$

что и требовалось доказать. ∎

Теорема 3.3. (Банаха-Штейнгауза): *Пусть X и Y — ТВП, Γ — некоторое семейство непрерывных линейных операторов из X в Y, а B — множество всех таких $x \in X$, орбиты которых*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничены в Y. Если B принадлежит II категории в X, то $B = X$ и Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство: Пусть U и W — такие окрестности нуля в Y, что $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. Положим

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}\left(\overline{U}\right).$$

Если $x \in B$, то $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, так что $x \in n\Lambda^{-1}(U)$ и поэтому $x \in nE$. Тогда

$$B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE.$$

Так как B — множество II категории, то по крайней мере одно из множеств nE, а значит и само множество E, тоже принадлежит II категории. Однако E замкнуто, как перечечение замкнутых множеств, поэтому

$$\left(\overline{E}\right)^{\circ} \neq \varnothing \Longrightarrow E^{\circ} \neq \varnothing \Longrightarrow \exists x_0 \in E^{\circ}.$$

Множество $x_0 - E$ содержит некоторую окрестность нуля V, причём

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(x_0 - E) = \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

для всякого $\Lambda \in \Gamma$. Это показывает, что Γ равностепенно непрерывно.
По лемме 3.2 семейство Γ равномерно ограничено. В частности, каждое из множеств $\Gamma(x)$ ограничено в Y, так как $\{x\}$ ограничено в X. Следовательно, что $B = X$. ■

Во многих приложениях условие, что B принадлежит II категории Бэра, проверяется при помощи следствия из теоремы Бэра:

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ полное метрическое} \\ S \text{ локально компактное хаусдорфово} \end{array}\right] \Longrightarrow S \text{ принадлежит II категории в себе.}$$

Теорема 3.4. *Пусть Γ — семейство непрерывных линейных отображений пространства Фреше X в ТВП Y, и пусть при каждом $x \in X$ множество*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничено в Y. Тогда семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство: Упражнение. ■

Существует также и более специальная версия для нормированных пространств:

Теорема 3.5. *Пусть X — Банахово пространство, Y — нормированное пространство, а Γ — семейство непрерывных линейных операторов из X в Y. Тогда выполняется импликация*

$$\left(\forall x \in X, \quad \sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\|_Y < \infty\right) \Longrightarrow \sup_{\Lambda \in \Gamma} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\Lambda x\|_Y < \infty.$$

Доказательство: Упражнение. ■

Теорема 3.6. *Пусть $\{\Lambda_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений пространства Фреше X в ТВП Y. Если для каждого $x \in X$ существует предел*

$$\Lambda x = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n x,$$

то отображение Λ непрерывно.

Доказательство: Для начала покажем, что семейство $\Gamma = \{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равностепенно непрерывно, воспользовавшись теоремой 3.4.
Пусть $x \in X$, и пусть V — уравновешенная окрестность нуля в Y. Последовательность $\{\Lambda_n x\}$ сходится к Λx. По теореме 2.2.9, для некоторого $t_0 > 0$ имеем $\Lambda x \in t_0 V$. Так как множество $t_0 V$ открыто, оно содержит Λx вместе с некоторой окрестностью $\Lambda x + W$. Начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\Lambda_n x \in \Lambda x + W \subset t_0 V.$$

Для $1 \leqslant k < N$, выберем такое t_k, что $\Lambda_k x \in t_k V$. Тогда для всех $s \geqslant \max_{0 \leqslant k < N}$, имеем

$$(\forall n, \quad \Lambda_n x \in sV) \Longrightarrow \Gamma(x) \subset sV.$$

Это показывает, что орбита точки x ограничена. Следовательно, Γ равностепенно непрерывно. Теперь мы покажем, что линейный оператор Λ непрерывен. Пусть U — окрестность нуля в Y. Выберем такую окрестность нуля $W \subset Y$, что $\overline{W} \subset U$. В силу равностепенной непрерывности Γ, в X существует такая окрестность нуля V, что $\Lambda_n(V) \subset W$. Тогда для всех $x \in V$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Lambda_n x \in W) \Longrightarrow \Lambda x \in \overline{W},$$

откуда мы выводим $\Lambda(V) \subset \overline{W} \subset U$. Поэтому Λ непрерывно. ■