

# Материал курса

## Функциональный анализ, 2025

### Содержание

1. Теоремы Бэра о категориях .....	- 2 -
2. Мера и интеграл .....	- 3 -
2.1. Пространства с мерой .....	- 3 -
2.2. Интеграл по мере .....	- 4 -
2.3. Свойства интеграла .....	- 4 -
3. Топологические векторные пространства .....	- 5 -
3.1. Основные понятия .....	- 5 -
3.2. Свойства отделимости .....	- 6 -

# 1. Теоремы Бэра о категориях

**Определение 1.1.** (плотность): Пусть  $X$  — топологическое пространство. Множество  $A \subset X$  называется *всюду плотным* в  $X$ , если  $\overline{A} = X$ . Множество  $A$  называется *нигде не плотным*, если  $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ , иначе говоря, если замыкание множества  $A$  не содержит ни одного открытого подмножества  $X$ .

**Упражнение 1.2.** Покажите, что если  $A$  нигде не плотно в  $X$ , то его дополнение  $A^C = X - A$  всюду плотно в  $X$ . Верно ли обратное?

**Определение 1.3.** (категории Бэра): Подмножество  $A \subset X$  является *множеством I категории*, если  $A$  представимо как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad S_n \text{ нигде не плотны в } X.$$

Множества II категории состоят из всех подмножеств  $X$ , не относящихся к I категории.

**Определение 1.4.** (локальная компактность): Топологическое пространство  $X$  называется *локально компактным*, если каждая точка  $x \in X$  имеет окрестность  $V_x$  такую, что  $\overline{V_x}$  компактно.

**Утверждение 1.5.** Пусть  $X$  локально компактно и хаусдорфово. Тогда каждое непустое открытое множество  $U \subset X$  содержит замыкание  $\overline{V}$  некоторого непустого относительно компактного открытого множества  $V$ .

*Доказательство:* Рассмотрим открытое множество  $U$  и точку  $x \in U$ . По локальной компактности точка  $x$  имеет относительно компактную окрестность  $V_x$ . Рассмотрим множество  $W = U \cap V_x$ . Теперь для каждой точки  $y \in \overline{V_x} \cap W^C$  рассмотрим множества  $A_y$  и  $B_y$  такие, что  $y \in A_y, x \in B_y, A_y \cap B_y = \emptyset$ . Множество  $\overline{V_x} \cap W^C$  компактно, а значит мы имеем

$$\overline{V_x} \cap W^C \subset A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \dots \cup A_{y_n}.$$

Наконец, положим  $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \dots \cap B_{y_n}$ . Множество  $V$  непусто, так как оно содержит точку  $x$ . Так как  $V$  не пересекается с  $\bigcup_{k=1}^n A_{y_k} \supset W^C \cap \overline{V_x}$  и  $V \subset \overline{V_x}$ , мы видим, что  $\overline{V} \subset W \subset U$ . Кроме того,  $\overline{V}$  компактно, как замкнутое подмножество компактного множества  $\overline{V_x}$ . ■

**Определение 1.6.** (полнота): Метрическое пространство  $(M, d)$  называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность, т.е. такая последовательность  $x_n \in M$ , что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

имеет некий предел  $x_\infty \in M$ .

**Теорема 1.7.** (Первая теорема Бэра о категориях): Пусть  $X$  — либо

- (a) полное метрическое пространство, либо
- (b) локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение счётного семейства открытых всюду плотных множеств также всюду плотно.

*Доказательство:* Пусть  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — семейство открытых всюду плотных множеств. Мы будем индуктивно строить последовательность открытых множеств  $B_n$  таким образом, чтобы выполнялось свойство

$$\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}.$$

1. В качестве  $B_1$  возьмём произвольное открытое непустое подмножество  $X$ .

2. Пусть множество  $B_{n-1}$  уже построено. Тогда в случае (а) можно рассмотреть некий шар  $B_n$  с радиусом не более  $1/n$ , такой что  $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$ , так как множество  $U_n \cap B_{n-1}$  открыто. В случае (б) утверждение 1.5 позволяет выбрать множество  $B_n$  таким образом, что  $\overline{B_n}$  компактно и  $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$ .

Теперь рассмотрим множество

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}.$$

В случае (а) центры  $x_n$  указанных шаров образуют фундаментальную последовательность, так как  $d(x_n, x_m) < 1/n$  всякий раз когда  $m \geq n$ . Следовательно, множество  $K$  содержит предел этой последовательности и потому непусто.

В случае (б) множество  $K$  является пересечением вложенной последовательности компактных множеств и потому непусто. В обоих случаях мы получили, что множество

$$K \subset B_1 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

непусто. Так как  $B_1$  было выбрано произвольно, мы показали, что пересечение семейства  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  всюду плотно. ■

## 2. Мера и интеграл

### 2.1. Пространства с мерой

**Определение 2.1.1.** (пространство с мерой): Пара  $(S, \mathfrak{B})$ , где  $\mathfrak{B} \subset 2^S$ , называется  $\sigma$ -алгеброй подмножеств  $S$ , если выполнены следующие условия:

- (1) Всё множество  $S$  лежит в  $\mathfrak{B}$ ;
- (2) Если  $B \in \mathfrak{B}$ , то дополнение  $B^C = S - B$  также является элементом  $\mathfrak{B}$ ;
- (3) Если  $B_n \in \mathfrak{B}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  также лежит в  $\mathfrak{B}$ . ( $\sigma$ -аддитивность)

**Упражнение 2.1.2.** Докажите, что и всякое счётное пересечение элементов  $\sigma$ -алгебры  $(S, \mathfrak{B})$  лежит в  $\mathfrak{B}$ .

**Определение 2.1.3.** (мера): Пусть  $(S, \mathfrak{B})$  — некая  $\sigma$ -алгебра. Тогда функция  $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  называется  $\sigma$ -аддитивной мерой, если выполнены следующие условия:

- (1)  $m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$ , для каждой счётной системы попарно непересекающихся множеств  $B_n \in \mathfrak{B}$ ; ( $\sigma$ -аддитивность)
- (2) Множество  $S$  можно представить в виде счётного объединения множеств  $B_n \in \mathfrak{B}$ , таких, что  $m(B_n) < \infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . ( $\sigma$ -финитность)

Значение  $m(B)$  называется  $m$ -мерой множества  $B$ , а множества  $B \in \mathfrak{B}$  называются  $\mathfrak{B}$ -измеримыми.

**Определение 2.1.4.** (измеримые функции): Вещественная функция  $x : S \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на множестве  $S$ , называется *измеримой*, если прообраз всякого открытого множества  $U \subset \mathbb{R}$  представляет из себя измеримое подмножество  $S$ , т.е.  $x^{-1}(U) \in \mathfrak{B}$ .

**Определение 2.1.5.** (почти всюду): Свойство  $P$ , относящееся к точкам множества  $S$ , выполняется  $m$ -почти всюду на  $S$ , если множество точек, в которых оно не выполняется, имеет  $m$ -меру нуль.

## 2.2. Интеграл по мере

**Определение 2.2.1.** (простая функция): Вещественная функция  $x : S \rightarrow \mathbb{R}$  называется *простой*, если существует конечный набор попарно непересекающихся множеств  $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ , такой, что на каждом из множеств  $B_j$  функция  $x$  принимает постоянное значение, и  $x(s) = 0$  при  $s \notin \bigcup_{j=1}^n B_j$ .

Такая функция  $x$  называется  *$m$ -интегрируемой* на множестве  $S$ , если

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \cdot m(B_j) < \infty, \quad (1)$$

где  $x_j$  есть постоянное значение  $x$  на множестве  $B_j$ . Величина (1) называется *интегралом* функции  $x$  и обозначается

$$\int_S x(s) m(ds) \quad \text{или} \quad \int_S x(s).$$

**Определение 2.2.2.** (интеграл по мере): Произвольная вещественная функция  $x$ , определённая  $m$ -почти всюду на  $S$ , называется  *$m$ -интегрируемой*, если существует последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  простых  $m$ -интегрируемых функций, сходящаяся  $m$ -п.в. к  $x$ , и при этом

$$\int_S |x_n(s) - x_m(s)| m(ds) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Так как пространство  $\mathbb{R}$  полно, существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S x_n(s) m(ds),$$

не зависящий от выбора аппроксимирующей последовательности  $\{x_n\}$ . Этот предел называется *интегралом функции  $x$* .

**Упражнение 2.2.3.** Докажите, что если поменять значения интегрируемой функции  $x$  на множестве меры нуль, то интеграл не изменится.

## 2.3. Свойства интеграла

(1) Если  $x, y$  — интегрируемые функции, то линейная комбинация  $\alpha x + \beta y$  (где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) также представляет собой интегрируемую функцию, и

$$\int_S (\alpha x + \beta y)(s) m(ds) = \alpha \int_S x(s) m(ds) + \beta \int_S y(s) m(ds).$$

(2) Функция  $x$  интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема  $|x|$  (упражнение).

(3) Если функция  $x$  интегрируема и  $x(s) \geq 0$  почти всюду на  $S$ , то  $\int_S x(s) m(ds) \geq 0$ .

(4) Если функция  $x$  интегрируема, то для любого множества  $B \in \mathfrak{B}$  мы полагаем

$$\int_B x(s) m(ds) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S x(s) \cdot \chi_B(s) m(ds),$$

где  $\chi_B$  — характеристическая функция множества  $B$ . В таком случае, функция  $X : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая как  $X(B) = \int_B x(s) m(ds)$  является  $\sigma$ -аддитивной.

- (5) Определённая выше функция  $X$  является *абсолютно непрерывной* относительно меры  $m$ , т.е. выполняется сходимость  $X(B) \xrightarrow{m(B) \rightarrow 0} 0$  равномерно по  $B \in \mathfrak{B}$ . (упражнение)

### 3. Топологические векторные пространства

#### 3.1. Основные понятия

**Определение 3.1.1.** (ТВП): Пусть  $X$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , и пусть  $\tau$  — топология на множестве  $X$ . Тогда  $X$  называется *топологическим векторным пространством*, если

- (1) каждая точка  $x \in X$  является замкнутым множеством;
- (2) операции  $(+): X \times X \rightarrow X$  и  $(\cdot): \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  непрерывны относительно топологии  $\tau$ .

В таком случае  $\tau$  называется *векторной топологией*.

**Определение 3.1.2.** Пусть  $X$  — топологическое векторное пространство. Подмножество  $C \subset X$  называется

- (1) *выпуклым*, если  $tC + (1-t)C \subset C$  при всех  $t \in [0, 1]$ ;
- (2) *уравновешенным*, если  $\alpha C \subset C$  при всех  $|\alpha| \leq 1$ ;
- (3) *поглощающим*, если  $X = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha C$ .
- (4) *ограниченным*, если для любой окрестности нуля  $V$  найдётся число  $s > 0$ , такое что  $C \subset tV$  при  $t \geq s$ .

**Замечание 3.1.3.** Условие (2) означает, что

- (1) для любой окрестности  $U$  точки  $x_1 + x_2 \in X$ , существуют окрестности  $V_1$  и  $V_2$  точек  $x_1$  и  $x_2$ , такие, что

$$V_1 + V_2 \subset U.$$

- (2) Для любой окрестности  $U$  точки  $\alpha x \in X$ , существуют окрестности  $V_\alpha \subset \mathbb{R}$  и  $V_x \subset X$ , такие, что

$$V_\alpha \cdot V_x = \{\beta y \mid \beta \in V_\alpha, y \in V_x\} \subset U.$$

**Утверждение 3.1.4.** Отображения  $T_a = \lambda x. x + a$  и  $M_\alpha = \lambda x. \alpha x$  являются гомеоморфизмами.

| Доказательство: Упражнение. ■

**Замечание 3.1.5.** По утверждению 3.1.4, векторная топология *инвариантна относительно сдвигов*: множество  $U$  открыто тогда и только тогда, когда открыты все сдвиги  $a + U$ , где  $a \in X$ . Таким образом, топология определяется любой своей локальной базой. Термин *локальная база* всегда будет означать *локальную базу в нуле*.

**Определение 3.1.6.** (типы ТВП): Топологическое пространство  $X$  называется

- (1) *локально выпуклым*, если в нём есть локальная база, состоящая из выпуклых множеств;
- (2) *локально ограниченным*, если существует ограниченная окрестность нуля;
- (3) *локально компактным*, если существует относительно компактная окрестность нуля;
- (4) *метризуемым*, если его топология совметима с некоторой метрикой;
- (5) *пространством Фреше*, если топология на  $X$  порождается некоторой полной *инвариантной* метрикой  $d$  (в том смысле, что  $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ );
- (6) *нормируемым*, если его топология порождается некоторой нормой;
- (7) *пространством Банаха*, если  $X$  нормируемо и его норма индуцирует полную метрику.

### 3.2. Свойства отделимости

**Определение 3.2.1.** (аксиомы отделимости): Пусть  $X$  — топологическое пространство. Выделяют 5 основных аксиом отделимости:

- (1)  $\mathbb{T}_0$ : для любых отличных точек  $x, y \in X$ , одна из них имеет окрестность, не содержащую другую;
- (2)  $\mathbb{T}_1$ : для любых двух точек  $x \neq y$ , каждая содержит окрестность, не содержащую другую;
- (3)  $\mathbb{T}_2$ : Каждые две отличные точки  $X$  имеют непересекающиеся окрестности;
- (4)  $\mathbb{T}_3$ : Каждая точка  $x \in X$  и замкнутое множество  $E \not\ni x$  имеют непересекающиеся окрестности;
- (5)  $\mathbb{T}_4$ : Каждая пара непересекающихся замкнутых множеств имеет непересекающиеся окрестности.

**Утверждение 3.2.2.** Каждая окрестность нуля  $U$  в ТВП  $X$  допускает симметричную окрестность нуля  $W$  (в том смысле, что  $-W = W$ ), такую, что  $W + W \subset U$ .

*Доказательство:* По непрерывности сложения имеем окрестности  $V_1, V_2$  со свойством  $V_1 + V_2 \subset U$ . Теперь, полагая

$$W = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

имеем искомую окрестность нуля. ■

**Теорема 3.2.3.** Пусть  $X$  — ТВП,  $K, E \subset X$ , причём  $K$  компактно,  $E$  замкнуто, и  $K \cap E = \emptyset$ . Тогда существует такая окрестность нуля  $V$ , что

$$(K + V) \cap (E + V) = \emptyset.$$

(заметим, что множества  $K + V$  и  $E + V$  открыты)

*Доказательство:* Заметим, что по предыдущему утверждению для любой окрестности  $U$  найдётся симметричная окрестность  $V$  таким образом, что

$$V + V + V + V \subset U.$$

Теперь предположим, что множество  $K$  непусто,  $x \in K$ . Так как  $E$  замкнуто, имеем окрестность нуля  $V_x$  такую, что

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset E^C - x \implies (x + V_x + V_x + V_x) \cap E = \emptyset.$$

Следовательно,

$$(x + V_x + V_x) \cap (E + V_x) = (x + V_x + V_x) \cap (E - V_x) = \emptyset.$$

Так как множество  $K$  компактно, найдётся конечное число точек  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ , таких что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k})$$

Положим  $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ . Имеем

$$\begin{aligned} K + V &\subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k} + V) \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V_{x_k} + V_{x_k}) \subset (E + V)^C \\ &\implies (K + V) \cap (E + V) = \emptyset, \end{aligned}$$

и доказательство завершено. ■

**Следствие 3.2.4.** Всякое ТВП  $X$  удовлетворяет аксиомам  $\mathbb{T}_0$ - $\mathbb{T}_3$  отделимости (упражнение).

**Следствие 3.2.5.** Если  $\mathcal{B}$  — локальная база ТВП  $X$ , то Теорема 3.2.3, применённая ко множествам  $\{0\}$  и  $U \in \mathcal{B}$ , влечёт существование некоторой другой окрестности  $V \in \mathcal{B}$ , такой, что  $\overline{V} \subset U$ .

Следующее техническое утверждение содержит некоторые свойства операторов замыкания и внутренности:

**Лемма 3.2.6.** Пусть  $X$  — топологическое векторное пространство.

- (a) Для всякого  $A \subset X$ , имеем  $\overline{A} = \bigcap_{0 \in V} (A + V)$ , где  $V$  пробегает все окрестности нуля;
- (b) Если  $A, B \subset X$ , то  $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ . Если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha \overline{A} = \overline{\alpha A}$ ;
- (c) Если  $Y \leq X$ , то  $\overline{Y} \leq X$ ; (замыкание подпространства есть подпространство)
- (d) Если  $C \subset X$  выпукло, то множества  $\overline{C}$  и  $C^\circ$  также выпуклы;
- (e) Если  $B \subset X$  уравновешено, то  $\overline{B}$  также уравновешено. Если к тому же  $0 \in B^\circ$ , то  $B^\circ$  уравновешено;
- (f) Если  $E \subset X$  ограничено, то  $\overline{E}$  ограничено.

*Доказательство:*

- (a)  $x \in \overline{A}$  тогда и только тогда, когда  $(x + V) \cap A \neq \emptyset$  для любой окрестности нуля  $V$ . Это эквивалентно условию  $x \in A - V$  для всех  $V$ , что равносильно  $x \in \bigcap_{0 \in V} (A + V)$ , так как  $(-V) - \text{окр. нуля} \iff V - \text{окр. нуля}$ .
- (b) По непрерывности операции сложения, имеем  $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$  при  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n \rightarrow y$ . Равенство  $\alpha \overline{A} = \overline{\alpha A}$  остаётся как упражнение.
- (c) Достаточно воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\alpha \overline{Y} + \beta \overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

а значит  $\overline{Y}$  — подпространство  $X$ .

- (d) Пусть  $C \subset X$  выпукло. Выпуклость  $\overline{C}$  — упражнение. Теперь, так как  $C^\circ \subset C$  и  $C$  выпукло, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset tC + (1 - t)C \subset C$$

при  $0 \leq t \leq 1$ . Оба слагаемых слева являются открытыми множествами, а значит их сумма тоже открыта. Так как внутренность  $C$  есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $C$ , имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ,$$

и  $C^\circ$  выпукло.

- (e) Пусть  $B \subset X$  уравновешено. Уравновешенность  $\overline{B}$  — упражнение. Если  $0 \in B^\circ$ , то имеем  $0 \cdot B^\circ \subset B^\circ$ . В то же время, при  $0 < |\alpha| \leq 1$  имеем

$$\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

так как  $\lambda x$ .  $\alpha x$  — гомеоморфизм. Но  $\alpha B^\circ$  открыто, а значит  $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ .

- (f) Пусть  $E \subset X$  ограничено и пусть  $V$  — произвольная окрестность нуля. По следствию 3.2.5 имеем такую окрестность нуля  $W$ , что  $\overline{W} \subset V$ . Далее, при достаточно больших  $t$  имеем

$$E \subset tW \implies \overline{E} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV,$$

и доказательство завершено. ■

**Лемма 3.2.7.** Пусть  $X$  — ТВП. Тогда:

- (a) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;
- (b) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

*Доказательство:*

- (a) Пусть  $U$  — произвольная окрестность нуля в  $X$ . Так как операция умножения непрерывна, найдутся такое число  $\delta > 0$  и такая окрестность нуля  $W$ , что  $\alpha W \subset U$  при  $|\alpha| < \delta$ . Рассмотрим окрестность  $V := \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha W$ . Очевидно, что  $V \subset U$  и что  $V$  уравновешено.
- (b) Пусть  $U$  — выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим множество  $A = U \cap (-U)$ . Как пересечение выпуклых множеств,  $A$  выпукло. Кроме того,  $A$  симметрично. Теперь, если  $|t| \leq 1$ , мы имеем

$$tA = |t| A \subset |t| A + (1 - |t|)A \subset A,$$

то есть множество  $A$  уравновешено,

что и требовалось доказать. ■