Материал курса

Функциональный анализ, 2025

Содержание

1. Теоремы Бэра о категориях

Определение 1.1. (плотность): Пусть X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным,* если $\left(\overline{A}\right)^{\circ} = \varnothing$, иначе говоря, если замыкание множества A не содержит ни одного открытого подмножества X.

Упражнение 1.2. Покажите, что если A нигде не плотно в X, то его дополнение $A^C = X - A$ всюду плотно в X. Верно ли обратное?

Определение 1.3. (категории Бэра): Подмножество $A \subset X$ *является множеством I категории,* если A представляется как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad S_n \text{ нигде не плотны в } X.$$

Множества II категории состоят из всех подмножеств X, не относящихся к I категории.

Определение 1.4. (локальная компактность): Топологическое пространство X называется *локально компактным,* если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность V_x такую, что $\overline{V_x}$ компактно.

Утверждение 1.5. *Пусть X локально компактно и хаусдорфово. Тогда каждое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит замыкание $\overline{V}$ некоторого непустого относительно компактного открытого множества V.*

> *Доказательство:* Рассмотрим открытое множество U и точку $x \in U$. По локальной компактности точка x имеет относительно компактную окрестность V_x. Рассмотрим множество $W = U \cap V_x$. Теперь для каждой точки $y \in \overline{V_x} \cap W^C$ рассмотрим множества A_y и B_y такие, что $y \in A_y$, $x \in B_y$, $A_y \cap B_y = \varnothing$. Множество $\overline{V_x} \cap W^C$ компактно, а значит мы имеем
>
> $$\overline{V_x} \cap W^C \subset A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \ldots \cup A_{y_n}.$$
>
> Наконец, положим $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \ldots \cap B_{y_n}$. Множество V непусто, так как оно содержит точку x. Так как V не пересекается с $\bigcup_{k=1}^{n} A_{y_k} \supset W^C \cap \overline{V_x}$ и $V \subset \overline{V_x}$, мы видим, что $\overline{V} \subset W \subset U$. Кроме того, $\overline{V}$ компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V_x}$. ■

Определение 1.6. (полнота): Метрическое пространство (M, d) называется *полным,* если каждая *фундаментальная последовательность,* т.е. такая последовательность $x_n \in M$, что

$$d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0,$$

имеет некий предел $x_\infty \in M$.

Теорема 1.7. (Первая теорема Бэра о категориях): *Пусть X — либо*
(a) полное метрическое пространство, либо
(b) локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение счётного семейства открытых всюду плотных множеств также всюду плотно.

> *Доказательство:* Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — семейство открытых всюду плотных множеств. Мы будем индуктивно строить последовательность открытых множеств B_n таким образом, чтобы выполнялось свойство
>
> $$\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}.$$
>
> 1. В качестве B_1 возьмём произвольное открытое непустое подмножество X.

2. Пусть множество B_{n-1} уже построено. Тогда в случае (a) можно рассмотреть некий шар B_n с радиусом не более $1/n$, такой что $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$, так как множество $U_n \cap B_{n-1}$ открыто.
В случае (b) утверждение 1.5 позволяет выбрать множество B_n таким образом, что $\overline{B_n}$ компактно и $\overline{B_n} \subset U_n \cap B_{n-1}$.

Теперь рассмотрим множество

$$K \coloneqq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}.$$

В случае (a) центры x_n указанных шаров образуют фундаментальную последовательность, так как $d(x_n, x_m) < 1/n$ всякий раз когда $m \geqslant n$. Следовательно, множество K содержит предел этой последовательности и потому непусто.
В случае (b) множество K является пересечением вложенной последовательности компактных множеств и потому непусто. В обоих случаях мы получили, что множество

$$K \subset B_1 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

непусто. Так как B_1 было выбрано произвольно, мы показали, что пересечение семейства $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ всюду плотно. ■

2. Топологические векторные пространства

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. (ТВП): Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, и пусть τ — топология на множестве X. Тогда X называется *топологическим векторным пространством,* если
(1) каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством;
(2) операции $(+) : X \times X \to X$ и $(\cdot) : \mathbb{R} \times X \to X$ непрерывны относительно топологии τ.

В таком случае τ называется *векторной топологией.*

Определение 2.1.2. Пусть X — топологическое векторное пространство. Подмножество $C \subset X$ называется
(1) *выпуклым,* если $tC + (1-t)C \subset C$ при всех $t \in [0,1]$;
(2) *уравновешенным,* если $\alpha C \subset C$ при всех $|\alpha| \leqslant 1$;
(3) *поглощающим,* если $X = \cup_{\alpha > 0} \alpha C$.
(4) *ограниченным,* если для любой окрестности нуля V найдётся число $s > 0$, такое что $C \subset tV$ при $t \geqslant s$.

Замечание 2.1.3. Условие (2) означает, что
(1) для любой окрестности U точки $x_1 + x_2 \in X$, существуют окрестности V_1 и V_2 точек x_1 и x_2, такие, что

$$V_1 + V_2 \subset U.$$

(2) Для любой окрестности U точки $\alpha x \in X$, существуют окрестности $V_\alpha \subset \mathbb{R}$ и $V_x \subset X$, такие, что

$$V_\alpha \cdot V_x = \{\beta y \mid \beta \in V_\alpha, y \in V_x\} \subset U.$$

Утверждение 2.1.4. *Отображения $T_a = \lambda x.\ x + a$ и $M_\alpha = \lambda x.\ \alpha x$ являются гомеоморфизмами.*

Доказательство: Упражнение. ■

Замечание 2.1.5. По утверждению 2.1.4, векторная топология *инвариантна относительно сдвигов:* множество U открыто тогда и только тогда, когда открыты все сдвиги
$a + U$, где $a \in X$. Таким образом, топология определяется любой своей локальной базой. Термин *локальная база* всегда будет означать *локальную базу в нуле.*

Определение 2.1.6. (типы ТВП): Топологическое пространство X называется
(1) *локально выпуклым,* если в нём есть локальная база, состоящая из выпуклых множеств;
(2) *локально ограниченным,* если существует ограниченная окрестность нуля;
(3) *локально компактным,* если существует относительно компактная окрестность нуля;
(4) *метризуемым,* если его топология совместима с некоторой метрикой;
(5) *пространством Фреше,* если топология на X порождается некоторой полной *инвариантной* метрикой d (в том смысле, что $d(x+z, y+z) = d(x, y)$);
(6) *нормируемым,* если его топология порождается некоторой нормой;
(7) *пространством Банаха,* если X нормируемо и его норма индуцирует полную метрику.

2.2. Топологические свойства

Определение 2.2.1. (аксиомы отделимости): Пусть X — топологическое пространство. Выделяют 5 основных *аксиом отделимости:*
(1) $\mathbb{T}_0$: для любых отличных точек $x, y \in X$, одна из них имеет окрестность, не содержащую другую;
(2) $\mathbb{T}_1$: для любых двух точек $x \neq y$, каждая содержит окрестность, не содержащую другую;
(3) $\mathbb{T}_2$: Каждые две отличные точки X имеют непересекающиеся окрестности;
(*хаусдорфово* пространство)
(4) $\mathbb{T}_3$: Каждые точка $x \in X$ и замкнутое множество $E \not\ni x$ имеют непересекающиеся окрестности;
(*регулярное* пространство)
(5) $\mathbb{T}_4$: Каждая пара непересекающихся замкнутых множеств имеет непересекающиеся окрестности. (*нормальное* пространство)

Утверждение 2.2.2. *Каждая окрестность нуля U в ТВП X допускает* симметричную *окрестность нуля W (в том смысле, что $-W = W$), такую, что $W + W \subset U$.*

Доказательство: По непрерывности сложения имеем окрестности V_1, V_2 со свойством $V_1 + V_2 \subset U$. Теперь, полагая

$$W = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

имеем искомую окрестность нуля. ■

Теорема 2.2.3. *Пусть X — ТВП, $K, E \subset X$, причём K компактно, E замкнуто, и $K \cap E = \varnothing$. Тогда существует такая окрестность нуля V, что*

$$(K + V) \cap (E + V) = \varnothing.$$

(заметим, что множества $K + V$ и $E + V$ открыты)

Доказательство: Заметим, что по предыдущему утверждению для любой окрестности U найдётся симметричная окрестность V таким образом, что

$$V + V + V + V \subset U.$$

Теперь предположим, что множество K непусто, $x \in K$. Так как E замкнуто, имеем окрестность нуля V_x такую, что

$$V_x + V_x + V_x + V_x \subset E^C - x \Longrightarrow (x + V_x + V_x + V_x) \cap E = \varnothing.$$

Следовательно,

$$(x + V_x + V_x) \cap (E + V_x) = (x + V_x + V_x) \cap (E - V_x) = \varnothing.$$

Так как множество K компактно, найдётся конечное число точек $x_1, x_2, ..., x_n \in K$, таких что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k}\right)$$

Положим $V := V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$. Имеем

$$K + V \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + V_{x_k} + V_{x_k}\right) \subset (E + V)^C$$
$$\Longrightarrow (K + V) \cap (E + V) = \varnothing,$$

и доказательство завершено. ■

Следствие 2.2.4. *Всякое ТВП X удовлетворяет аксиомам $\mathbb{T}_0$-$\mathbb{T}_3$ отделимости (упражнение).*

Следствие 2.2.5. *Если $\mathcal{B}$ — локальная база ТВП X, то Теорема 2.2.3, применённая ко множествам $\{0\}$ и $U \in \mathcal{B}$, влечёт существование некой другой окрестности $V \in \mathcal{B}$, такой, что $\overline{V} \subset U$.*

Следующее техническое утверждение содержит некоторые свойства операторов замыкания и внутренности:

Лемма 2.2.6. *Пусть X — топологическое векторное пространство.*
(a) Для всякого $A \subset X$, имеем $\overline{A} = \bigcap\limits_{0 \in V} (A + V)$, где V пробегает все окрестности нуля;
(b) Если $A, B \subset X$, то $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$;
(c) Если $Y \leqslant X$, то $\overline{Y} \leqslant X$; (замыкание подпространства есть подпространство)
(d) Если $C \subset X$ выпукло, то множества $\overline{C}$ и C° также выпуклы;
(e) Если $B \subset X$ уравновешено, то $\overline{B}$ также уравновешено. Если к тому же $0 \in B^\circ$, то B° уравновешено;
(f) Если $E \subset X$ ограничено, то $\overline{E}$ ограничено.

Доказательство:
(a) $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля V. Это эквивалентно условию $x \in A - V$ для всех V, что равносильно $x \in \bigcap_{0 \in V} (A + V)$, так как $(-V)$ — окрестность нуля $\Longleftrightarrow$ V — окрестность нуля.
(b) По непрерывности операции сложения, имеем $(x_n + y_n) \to x + y$ при $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Равенство $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$ остаётся как упражнение.
(c) Достаточно воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

а значит $\overline{Y}$ — подпространство X.
(d) Пусть $C \subset X$ выпукло. Выпуклость $\overline{C}$ — упражнение. Теперь, так как $C^\circ \subset C$ и C выпукло, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset tC + (1 - t)C \subset C$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Оба слагаемых слева являются открытыми множествами, я значит их сумма тоже открыта. Так как внутренность C есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в C, имеем

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ,$$

и C° выпукло.

(e) Пусть $B \subset X$ уравновешено. Уравновешенность $\overline{B}$ — упражнение. Если $0 \in B^\circ$, то имеем $0 \cdot B^\circ \subset B^\circ$. В то же время, при $0 < |\alpha| \leqslant 1$ имеем

$$\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

так как $\lambda x.\ \alpha x$ — гомеоморфизм. Но αB° открыто, а значит $\alpha B^\circ \subset B^\circ$.

(f) Пусть $E \subset X$ ограничено и пусть V — произвольная окрестность нуля. По следствию 2.2.5 имеем такую окрестность нуля W, что $\overline{W} \subset V$. Далее, при достаточно больших t имеем

$$E \subset tW \Longrightarrow \overline{E} \subset \overline{tW} = t\overline{W} \subset tV,$$

и доказательство завершено. ■

Лемма 2.2.7. *Пусть X — ТВП. Тогда:*

(a) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;

(b) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

Доказательство:

(a) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Так как операция умножения непрерывна, найдутся такое число $\delta > 0$ и такая окрестность нуля W, что $\alpha W \subset U$ при $|\alpha| < \delta$. Рассмотрим окрестность $V := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha W$. Очевидно, что $V \subset U$ и что V уравновешено.

(b) Пусть U — выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим множество $A = U \cap (-U)$. Как пересечение выпуклых множеств, A выпукло. Кроме того, A симметрично. Теперь, если $|t| \leqslant 1$, мы имеем

$$tA = |t|\ A \subset |t|\ A + (1-|t|)A \subset A,$$

то есть множество A уравновешено,

что и требовалось доказать. ■

Следствие 2.2.8. *Каждое ТВП X имеет уравновешенную локальную базу. Если же X локально выпукло, оно имеет выпуклую уравновешенную локальную базу.*

Теорема 2.2.9. *Пусть X — топологическое векторное пространство, а V — окрестность нуля.*

(a) Если $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V;$$

(b) Каждое компактное подмножество $K \subset X$ ограничено;

(c) Если окрестность V ограничена и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то семейство

$$\{\delta_n V \mid n \in \mathbb{N}\}$$

является локальной базой пространства X.

Доказательство:

(a) Фиксируем точку $x \in X$. Так как Отображение $\lambda\alpha.\ \alpha x$ непрерывно, множество $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x \in V\}$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Оно содержит $1/r_n$, НСНМ. Тогда для некоторого n имеем

$$(1/r_n) \cdot x \in V \Longrightarrow x \in r_n V.$$

(b) Пусть $W \subset V$ — уравновешенная окрестность нуля. Согласно (a), имеем

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW.$$

Поскольку K компактно, найдётся такой конечный набор $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, что

$$K \subset n_1 W \cup n_2 \cup \ldots \cup n_k W = n_k W.$$

Отсюда следует, что $K \subset tW \subset tV$ при $t \geqslant n_k$.

(c) Пусть U — произвольная окрестность нуля в X. Поскольку V ограничена, то $V \subset tU$ при $t \geqslant s$, для некоторого $s > 0$. Тогда $(1/t)V \subset U$ при больших t, а значит $\delta_n V \subset U$, НСНМ.

■

2.3. Линейные операторы

Определение 2.3.1. Напомним, что отображение $\Lambda : X \to Y$ называется *линейным,* если

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y.$$

Линейное отображение пространства в его поле скаляров называется *линейным функционалом.*

Упражнение 2.3.2. Пусть $\Lambda : X \to Y$ линейно. Тогда

(a) $\Lambda 0 = 0$;
(b) Если A — подпространство X (или выпуклое, или уравновешенное множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda(A)$.
(c) Если B — подпространство Y (или выпуклое/уравновешенное/поглощающее множество), тогда то же справедливо и для $\Lambda^{-1}(B)$.
(d) В частности, множество $\ker \Lambda = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ является подпространством X и называется *ядром* Λ.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\Lambda : X \to Y$ — линейный оператор между двумя ТВП. Тогда если Λ непрерывно в нуле, то Λ непрерывно на всём X, причём более того,* ***равномерно непрерывно:*** *для каждой окрестности W нуля в Y, найдётся окрестность V нуля в X, так что*

$$y - x \in V \Longrightarrow \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Доказательство: Пусть W — окрестность нуля в Y. Тогда по непрерывности в нуле, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset W$. Тогда $y - x \in V$ влечёт $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \subset W$. Наконец, при всех $x \in X$, оператор Λ отображает окрестность $x + V$ в окрестность $\Lambda x + W$, так что Λ непрерывно в точке x. ■

Теорема 2.3.4. *Пусть Λ — линейный функционал на ТВП X. Допустим также, что $\Lambda x \neq 0$ для некоторого $x \in X$. Тогда СУР:*

(a) Λ непрерывен;
(b) ядро $\ker \Lambda$ замкнуто в X;
(c) ядро $\ker \Lambda$ не плотно в X;
(d) функционал Λ ограничен в некоторой окрестности нуля V.

Доказательство:
$(a) \Longrightarrow (b)$: Рассмотрим последовательность $x_n \in \ker \Lambda$, сходящуюся к точке $x \in X$. В силу непрерывности, имеем

$$\Lambda x = \Lambda\Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \Lambda x_n = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$

откуда мы заключаем, что $x \in \ker \Lambda$.

$(b) \implies (c)$: По условию $\ker \Lambda \neq X$, так что замкнутое множество $\ker \Lambda$ не пересекается с непустым открытым множеством $X \setminus \ker \Lambda$, откуда следует, что $\ker \Lambda$ не плотно в X.

$(c) \implies (d)$: Условие (c) равносильно тому, что множество $X \setminus \ker \Lambda$ имеет непустую внутренность. По теореме 2.2.7 имеем такую уравновешенную окрестность нуля V и такую точку $x \in X$, что

$$(x + V) \cap \ker \Lambda = \varnothing. \tag{1}$$

Тогда образ $\Lambda(V)$ — уравновешенное подмножество $\mathbb{R}$. Следовательно, либо $\Lambda(V)$ ограничено, либо $\Lambda(V) = \mathbb{R}$ (упражнение). В первом случае всё доказано. Во втором, найдётся такой элемент $y \in V$, что $\Lambda y = -\Lambda x$. Тогда имеем $x + y \in (x + V) \cap \ker \Lambda$, что невозможно в силу (1).

$(d) \implies (a)$: Пусть для некоторой окрестности V и числа $M > 0$ справедливо $|\Lambda x| < M$ при $x \in V$. Тогда для любого $r > 0$, положив $W = (r/M)V$, имеем $|\Lambda x| < r$ для всех $x \in W$. Следовательно, функционал Λ непрерывен в нуле, а значит непрерывен. ■

2.4. Конечномерные пространства

Пример 2.4.1. Самый простой пример n-мерного пространства — $\mathbb{R}^n$, с нормой

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Можно также рассмотреть другие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Нетрудно проверить, что все они индуцируют одну и ту же топологию. Кроме того, всякое n-мерное пространство над $\mathbb{R}$ естественно изоморфно $\mathbb{R}^n$. Мы докажем, что естественная топология на $\mathbb{R}^n$ — это единственная векторная топология, возможная в произвольном вещественном n-мерном ТВП.

Определение 2.4.2. Система множеств $\mathcal{B}$ называется *центрированной,* если для всякого конечного набора $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, его пересечение непусто:

$$\bigcap_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing.$$

Упражнение 2.4.3. Покажите, что пересечение всякой центрированной системы компактов непусто.

Лемма 2.4.4. *Пусть X — ТВП, а Y — локально-компактное (в индуцированной топологии) подпространство X. Тогда множество Y замкнуто в X.*

Доказательство: Существует такое компактное множество $K \subset Y$, что $0 \in K^\circ$ в топологии Y. Следовательно, найдётся такая окрестность U нуля в X, что $U \cap Y \subset K$. Выберем симметричную окрестность $V \subset X$ таким образом, чтобы $\overline{V} + \overline{V} \subset U$.
Далее, мы покажем, что $\overline{Y} = Y$. Рассмотрим $x \in \overline{Y}$. Пусть $\mathcal{B}$ содержит все окрестности нуля в X, которые включены в V. Каждому $W \in \mathcal{B}$ сопоставим множество

$$E_W = Y \cap \left(x + \overline{W}\right).$$

Так как $x \in \overline{Y}$, каждое из множеств E_W непусто. Рассмотрим множество $W \in \mathcal{B}$ и фиксируем точку $y_0 \in E_W$. Для любой точки $y \in E_W$, имеем

$$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{W} + \left(-\overline{W}\right) \subset \overline{V} + \overline{V} \subset U.$$

Кроме того, $E_W \subset Y$. Следовательно, $E_W \subset Y \cap U \subset K$, а значит E_W компактно как замкнутое подмножество компакта K. Наконец, конечное пересечение множеств из $\mathcal{B}$ остаётся в $\mathcal{B}$.
Другими словами, $\{E_W \mid W \in \mathcal{B}\}$ — центрированная система компактных множеств, а значит существует точка $z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W$.
С одной стороны, $z \in Y$. Однако в то же время $z \in x + \overline{W}$ для всех $W \in \mathcal{B}$, а значит $z = x$, так как пространство X хаусдорфово. Значит, $x \in Y$. ■

Теорема 2.4.5. *Пусть X — ТВП, Y — его подпространство и $\dim Y = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда*
(a) Каждый изоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на Y является гомеоморфизмом;
(b) Y замкнуто.

Доказательство: Мы будем проводить индукцию по n.

- База: $n = 1$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R} \to Y$ — изоморфизм векторных пространств. Возьмём $u = \Lambda 1$. Тогда по линейности $\Lambda\alpha = \alpha u$, и из непрерывности умножения на скаляр следует, что Λ непрерывно. Заметим, что Λ^{-1} — линейный функционал $Y \to \mathbb{R}$ с ядром $\{0\}$, а значит по теореме 2.3.4 отображение Λ^{-1} также непрерывно. Наконец, заметим, что $Y \cong \mathbb{R}$ локально компактно, и по лемме 2.4.4 Y замкнуто.
- Переход: $n - 1 \to n$.
  Пусть $\Lambda : \mathbb{R}^n \to Y$ — изоморфизм. Определим $u_k = \Lambda e_k$, где $\{e_1, ..., e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

  $$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n,$$

  и по непрерывности операции $(\cdot)$ на Y мы заключаем, что Λ непрерывно. Теперь, для каждого $y \in Y$ имеем

  $$y = \Lambda(\Lambda^{-1} y) = \gamma_1(y) u_1 + ... + \gamma_n(y) u_n.$$

  Ядро каждого из функционалов γ_k является $(n-1)$-мерным подпространством Y, и по предположению индукции $\ker \gamma_k$ замкнуто. Тогда по теореме 2.3.4 каждый функционал γ_k непрерывен, а значит

  $$\Lambda^{-1}(y) = (\gamma_1(y), \gamma_2(y), ..., \gamma_n(y))$$

  также непрерывно, что доказывает (a). Наконец, поскольку $Y \cong \mathbb{R}^n$ локально компактно, по лемме 2.4.4 мы видим, что (b) также справедливо.

■

Замечание 2.4.6. Таким образом, всякое n-мерное ТВП X гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.4.7. *Пусть X — локально компактное ТВП. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: Пусть V — окрестность нуля в X, и $\overline{V}$ компактно. Окрестность V ограничена (упражнение), а значит по теореме 2.2.9 множества $\{2^{-n} V\}_{n \in \mathbb{N}}$ образуют локальную базу X. Так как $\overline{V}$ компактно, найдётся такой конечный набор $x_1, x_2, ..., x_m \in X$, что

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2} V\right) \cup ... \cup \left(x_m + \frac{1}{2} V\right).$$

Пусть Y — подпространство X, порождённое векторами $x_1, ..., x_m$. Тогда $\dim Y \leqslant m$. По теореме 2.4.5 множество Y замкнуто в X.
Поскольку $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ и $\alpha Y = Y$ для любого скаляра α, имеем

$$\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V,$$

откуда

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Продолжая этот принцип, мы видим, что

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Так как $\{2^{-n}V\}$ — локальная база, из утверждения (a) леммы 2.2.6 следует, что $V \subset \overline{Y}$. Однако $\overline{Y} = Y$, а значит $V \subset Y$. Тогда $kV \subset kY = Y$ при всех $k \in \mathbb{N}$, и, согласно утверждению (a) теоремы 2.2.9, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kV = Y$. Следовательно, $\dim X \leqslant m$. ■

Теорема 2.4.8. *Пусть X — локально ограниченное ТВП, обладающее свойством Гейне-Бореля. Тогда X конечномерно.*

Доказательство: По условию в X существует ограниченная окрестность нуля V. По лемме 2.2.6, $\overline{V}$ также ограничено. По свойству Гейне-Бореля $\overline{V}$ компактно. Следовательно, пространство X локально компактно и потому конечномерно. ■

Пример 2.4.9. Рассмотрим пространство $F = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid x_n = 0 \text{ НСНМ} \right\}$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|.$$

Очевидно, что это ТВП над полем $\mathbb{R}$. В нём есть *счётный базис*

$$\{e_k \mid k \in \mathbb{N}, e_k = \lambda n.\ \underline{\text{if}}\ n = k\ \underline{\text{then}}\ 1\ \underline{\text{else}}\ 0\}.$$

Следовательно, F *не* локально компактно.

2.5. Метризуемость

Замечание 2.5.1. Пусть X — ТВП, топология которого совместима с некоторой метрикой d. Тогда в X нетрудно построить счётную локальную базу: $V_n = B_{1/n}(0)$. Поэтому метризуемость влечёт существование счётной базы. Оказывается, что для ТВП справедливо и обратное:

Теорема 2.5.2. *Пусть X — ТВП, и в X есть счётная локальная база $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда существует такая метрика d на X, что*
(a) d совместима с топологией пространства X;
(b) открытые шары с центром в точке 0 уравновешены;
(c) d инвариантна (т.е. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ для всех $x, y, z \in X$).

Доказательство: По лемме 2.2.7 и утверждению 2.2.2 можно считать, что все окрестности V_n уравновешены, и

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел r, представимых в виде конечной суммы

$$r = \sum_{k=1}^{n(r)} \frac{c_k(r)}{2^k},$$

где «двоичный разряд» $c_k(r)$ равен 0 или 1, и $n(r) \in \mathbb{N}$. Таким образом, $0 \leqslant r < 1$ для всех $r \in D$.

Далее, положим $A(r) = X$ для $r \geqslant 1$, а для $r \in D$ определим

$$A(r) = \sum_{k=1}^{n(r)} c_k(r) V_k.$$

Для всякого $x \in X$ положим

$$f(x) = \inf \{r \mid x \in A(r)\} \quad \text{и} \quad d(x, y) = f(x - y).$$

Нам нужно доказать три свойства метрики:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Имеем

$$\begin{aligned} & d(x, y) = 0 \\ \iff & f(x - y) = 0 \\ \iff & x - y \in A(r) \text{ для сколь угодно малых } r \\ \iff & x - y \in V_n \text{ для сколь угодно больших } n \\ \iff & x - y = 0 \\ \iff & x = y. \end{aligned}$$

2. $d(x, y) = d(y, x)$. Заметим, что все множества V_n, а значит и $A(r)$, симметричны. Отсюда и следует симметричность метрики (упражнение).
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Для доказательства неравенства треугольника мы докажем по индукции следующее утверждение:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall r, s \in D : n(r) \leqslant N \wedge n(s) \leqslant N \wedge r + s < 1, \quad A(r) + A(s) \subset A(r + s).$$

- <u>База:</u> $N = 1$. В таком случае $A(0) + A(1/2) = A(1/2)$.
- <u>Переход:</u> $N - 1 \to N$. Рассмотрим r, s как в условии. Положим

$$r = r' + \frac{c_N(r)}{2^N}, \quad s = s' + \frac{c_N(s)}{2^N}.$$

Мы сразу же имеем

$$A(r) + A(s) = A(r') + A(s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N \subset A(r' + s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N.$$

Рассмотрим три случая:

1) $c_N(r) = c_N(s) = 0$. Тогда всё очевидно.
2) $c_N(r) = 1, c_N(s) = 0$ (не умаляя общности). Тогда $r + s = r' + s' + 2^{-N}$, и мы имеем

$$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s),$$

и утверждение доказано.

3) $c_N(r) = c_N(s) = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} A(r' + s') + V_N + V_N \subset A(r' + s') + V_{N-1} = A(r' + s') + A(2^{-N+1}) \subset \\ \subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s). \end{gathered}$$

Заметим, что, так как каждое из множеств $A(r)$ содержит 0, при $r < s$ выполнено включение

$$A(r) \subset A(r) + A(s-r) \subset A(s).$$

Иными словами, семейство множеств $\{A(r)\}$ линейно упорядочено по включению. Мы утверждаем, что для всех $x, y \in X$,

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y). \tag{2}$$

Если $f(x) + f(y) \geqslant 1$, то неравенство очевидно. В противном случае, фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдутся такие $r, s \in D$, что

$$f(x) \leqslant r, \quad f(y) \leqslant s, \quad r + s \leqslant f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in A(r)$, $y \in A(s)$, и потому

$$\begin{aligned} &x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s) \\ \Longrightarrow\ &f(x+y) \leqslant r + s \leqslant f(x) + f(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε взято произвольно, мы убеждаемся в справедливости (2), и неравенство треугольника доказано.

Теперь, по построению d — инвариантная метрика. Открытые шары с центром в нуле являются открытыми множествами:

$$B^d_\varepsilon(0) = \{x \in X \mid f(x) < \varepsilon\} = \bigcup_{r<\varepsilon} A(r)$$

(упражнение). Если $\varepsilon < 1/2^n$, то $B^d_\varepsilon(0) \subset V_n$. Следовательно, $\{B^d_\varepsilon(0)\}$ — локальная база топологии на X, а значит метрика d совместима с топологией. Так как все $A(r)$ уравновешены (упражнение), то такими же являются и $B^d_\varepsilon(0)$. Теорема доказана. ■

Определение 2.5.3. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность $x_n \in X$ называется d-фундаментальной, если

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geqslant N, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \\ \Longleftrightarrow\ &d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

В ТВП X с топологией τ, последовательность $x_n \in X$ называется τ-фундаментальной, если

$$\begin{aligned} &\forall V \ni 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geqslant N, \quad x_n - x_m \in V \\ \Longleftrightarrow\ &(x_n - x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Упражнение 2.5.4. Пусть d — инвариантная метрика, совместимая с топологией τ на ТВП X. Покажите, что для всякой последовательности $x_n \in X$,

$$x_n\ d\text{-фундаментальна} \Longleftrightarrow x_n\ \tau\text{-фундаментальна}.$$

Пусть d_1, d_2 — две инвариантные метрики на ТВП X, совместимые с топологией τ на X. Покажите, что d_1 полна $\Longleftrightarrow$ d_2 полна.

2.6. Полунормы и локальная выпуклость

Определение 2.6.1. Вещественная функция $p : X \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве X называется *полунормой,* если для всех $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(a) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$; (полуаддитивность)

(b) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$. (мультипликативность)

Полунормы отличаются от норм отсутствием условия $p(x) = 0 \iff x = 0$.
Семейство $\mathcal{P}$ полунорм на X называется *разделяющим,* если для всякого $x \neq 0$ найдётся такая полунорма $p \in \mathcal{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Определение 2.6.2. Пусть $A \subset X$ — выпуклое, поглощающее множество (например, выпуклая окрестность нуля) в векторном пространстве X. *Функционал Минковского* μ_A определяется как

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}.$$

Заметим, что $\mu_A(a) < \infty$ для всех $x \in X$, поскольку A поглощает X.

Упражнение 2.6.3. Пусть C — выпуклое подмножество векторного пространства X. Докажите, что $\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C$ при всех $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Лемма 2.6.4. *Пусть A — выпуклое, поглощающее множество в векторном пространстве X. Тогда*
(a) $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$;
(b) $\mu_A(\alpha x) = \alpha \mu_A(x)$ *при всех* $\alpha \geqslant 0$;
(c) Если A уравновешено, то μ_A — полунорма;
(d) Если $B = \{x \mid \mu_A(x) < 1\}$ *и* $C = \{x \mid \mu_A(x) \leqslant 1\}$, *то* $B \subset A \subset C$ *и* $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

Доказательство:

(a) Полуаддитивность следует из выпуклости. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} x \in (\mu_A(x) + \varepsilon) A \\ y \in (\mu_A(y) + \varepsilon) A \end{array}\right\} \Longrightarrow x + y \in (\mu_A(x) + \varepsilon) A + (\mu_A(y) + \varepsilon) A = (\mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon) A$$

$$\Longrightarrow \mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, полуаддитивность доказана.

(b) Так $\alpha x \in tA \iff x \in \frac{\alpha}{t} A$, свойство очевидно (упражнение).

(c) Пусть $\alpha < 0$. Тогда, поскольку $A = -A$, имеем $\alpha x \in tA \iff (-\alpha) x \in tA$, а значит

$$\mu_A(\alpha x) = \mu_A((-\alpha) x) = (-\alpha) \mu_A(x) = |\alpha|\; \mu_A(x).$$

(d) Для $x \in X$, пусть $H_A(x) = \{t > 0 \mid x \in tA\}$. Предположим, что $\mu_A(x) < 1$. Тогда $1 \in H_A(x)$, а значит $x \in A$. Ясно, что если $x \in A$, то $\mu_A(x) \leqslant 1$, так как $1 \in H_A(x)$. Поэтому $B \subset A \subset C$. Отсюда следует, что $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$. Следовательно,

$$\mu_C(x) \leqslant \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x).$$

Чтобы доказать, что $\mu_B(x) \leqslant \mu_C(x)$, допустим, что $\mu_C(x) < s < t$. Тогда
$x \in sC \Longrightarrow s^{-1} x \in C$, а значит $\mu_A(s^{-1} x) \leqslant 1$, так что

$$\mu_A(t^{-1} x) = \mu_A\left(\frac{s}{t} \cdot s^{-1} x\right) = \frac{s}{t} \mu_A(s^{-1} x) \leqslant \frac{s}{t} < 1.$$

Следовательно, $t^{-1} x \in B$, а значит $\mu_B(t^{-1} x) \leqslant 1$ и $\mu_{B(x)} \leqslant t$. Так как s и t взяты произвольно, мы заключаем, что $\mu_B(x) \leqslant \mu_C(x)$.

■

Лемма 2.6.5. *Пусть p — полунорма на векторном пространстве X. Тогда*
(a) $p(0) = 0$*;*
(b) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$*, в частности,* $p(x) \geqslant 0$*;*
(c) Множество $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ *является подпространством* X*.*
(d) Множество $B = \{x \mid p(x) < 1\}$ *выпукло, уравновешено и поглощает, причём* $p = \mu_B$*.*

Доказательство: Свойства (a), (b), (c) остаются как упражнение читателю. Докажем (d).

- Выпуклость. При $x, y \in B$, $t \in [0, 1]$, имеем

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t + (1-t) = 1 \Longrightarrow tx + (1-t)y \in B.$$

- Уравновешенность. Если $|\alpha| \leqslant 1$ и $x \in B$, имеем

$$p(\alpha x) = |\alpha|\ p(x) < 1 \Longrightarrow \alpha x \in B.$$

- Поглощение. Для каждого $x \in X$ рассмотрим $\alpha = p(x) + 1$. Тогда

$$p\left(\frac{1}{\alpha}x\right) = \frac{p(x)}{\alpha} = \frac{p(x)}{p(x)+1} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}x \in B \Longrightarrow x \in \alpha B,$$

что и требовалось. ■

Теорема 2.6.6. *Пусть $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная локальная база в ТВП X. Тогда семейство $\{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ — разделяющее семейство непрерывных полунорм на X.*

Доказательство: Поскольку каждая окрестность $V \in \mathcal{B}$ — выпуклое уравновешенное поглощающее множество, μ_V является полунормой.
Далее, если $x \neq 0$, то $x \notin V$ для некоторой $V \in \mathcal{B}$, а значит $\mu_V(x) \geqslant 1$. Тогда $\{\mu_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ — разделяющее семейство.
Теперь покажем, что каждая полунорма μ_V непрерывна. Если $x \in V$, то по непрерывности операций на X, имеем $tx \in V$ для некоторого $t > 1$. Тогда

$$\mu_V(x) \leqslant 1/t < 1.$$

Теперь пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого $y \in x + \varepsilon V$, имеем $(y - x)/\varepsilon \in V$ и

$$|\mu_V(y) - \mu_V(x)| \leqslant \mu_V(y - x) = \varepsilon \cdot \mu_V\left(\frac{y - x}{\varepsilon}\right) < \varepsilon.$$

Следовательно, μ_V непрерывно в точке x. ■

Теорема 2.6.7. *Пусть $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм на векторном пространстве X. Для $p \in \mathcal{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим*

$$V(p, n) = \left\{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность всех конечных пересечений множеств $V(p, n)$:

$$\mathcal{B} = \{V(p_1, n_1) \cap ... \cap V(p_k, n_k) \mid k \in \mathbb{N}, p_k \in \mathcal{P}, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ в X, которая превращает X в локально выпуклое ТВП, причём все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны относительно τ;

Доказательство: Обозначим множество $A \subset X$ *открытым*, если вместе со всякой точкой $x \in A$ оно содержит множество $x + U$, где $U \in \mathcal{B}$. Очевидно, что такое определение рождает на X топологию (упражнение), инвариантную относительно сдвигов.
Также заметим, что по лемме 2.6.5 каждое множество $U \in \mathcal{B}$ выпукло, уравновешено и

поглощает, и $\mathcal{B}$ является локальной базой топологии τ в нуле.
Далее, нужно показать, что всякое множество $\{x\}$ замкнуто в X. Пусть $x \in X$ и $x \neq 0$. Тогда найдётся полунорма $p \in \mathcal{P}$ со свойством $p(x) > 0$. Выбирая такое $n \in \mathbb{N}$, что $p(x) > \frac{1}{n}$, мы видим, что $x \notin V(p,n)$, а следовательно $0 \notin x + V(p,n)$. Тогда $x \notin \overline{\{0\}}$. Так как $x \neq 0$ было взято произвольно, мы видим, что $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Поскольку топология τ инвариантна относительно сдвигов, имеем $\overline{\{x\}} = \{x\}$ для всех $x \in X$.
Теперь докажем непрерывность сложения. Пусть U — окрестность нуля в X,

$$U \supset V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k).$$

Рассмотрим окрестность

$$V = V(p_1, 2n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, 2n_k).$$

Так как каждая полунорма p_i полуаддитивна, имеем $V(p_i, 2n_i) + V(p_i, 2n_i) \subset V(p_i, n_i)$ и следовательно $V + V \subset U$. Этим доказана непрерывность сложения.
Теперь пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$, U — окрестность нуля. Рассмотрим, как прежде, такую V, что $V + V \subset U$. Тогда $x \in sV$ для некоторого $s > 0$. Положим $t = s/(1 + |\alpha| s)$. Если $y \in x + tV$ и $|\beta - \alpha| < 1/s$, то, поскольку $|\beta| t \leqslant 1$, имеем

$$\begin{aligned} &\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \in |\beta|\ tV + |\beta - \alpha|\ sV \subset V + V \subset U \\ \Longrightarrow\ &\beta y \in \alpha x + U, \end{aligned}$$

что доказывает непрерывность умножения. Таким образом, (X, τ) — локально выпуклое ТВП.
Из определения $V(p,n)$ следует, что все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны в нуле. По лемме 2.6.5 все они непрерывны на всём X (упражнение). ■

Замечание 2.6.8. Если рассмотреть просто все множества $V(p,n)$, то полученное семейство будет *предбазой* топологии τ, но не базой.

Замечание 2.6.9. Возникает следующая естественная задача. Если $\mathcal{B}_1$ — выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ_1 в ТВП X, то, согласно теореме 2.6.6, $\mathcal{B}_1$ порождает разделяющее семейство $\mathcal{P}$ непрерывных полунорм на X. В свою очередь, P индуцирует в X топологию τ_2 с базой $\mathcal{B}_2$. Верно ли, что $\tau_1 = \tau_2$? Оказывается, да.

Доказательство:
$\tau_1 \subset \tau_2$: Пусть $V \in \mathcal{B}$. Тогда $\mu_V \in \mathcal{P}$, и по лемме 2.6.4 мы имеем

$$W \coloneqq V(\mu_V, 1) = \{x \in X \mid \mu_V(x) < 1\} \subset V,$$

причём $W \in \mathcal{B}_2$. Тогда $\tau_1 \subset \tau_2$.
$\tau_2 \subset \tau_1$: Так как все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны относительно τ_1, каждое из множеств

$$V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_k, n_k) = p_1^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_1}\right)\right) \cap \ldots \cap p_k^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_k}\right)\right)$$

открыто в τ_1. Поэтому $\tau_2 \subset \tau_1$. ■

Упражнение 2.6.10. Пусть X — векторное пространство, $\mathcal{P}_1$ — разделяющее семейство полунорм на X. Правда ли, что семейство $\mathcal{P}_2$ полунорм, полученное переходом $\mathcal{P}_1 \to \mathcal{B} \to \mathcal{P}_2$ совпадает с $\mathcal{P}_1$?

Упражнение 2.6.11. Пусть $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$ — семейство, состоящее из единственной нормы $\|\cdot\|$ на пространстве X. Покажите, что $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм, и что топология τ, порождённая этим семейством по теореме 2.6.7, совпадает со стандартной топологией, порождённой нормой.

Теорема 2.6.12. *ТВП X нормируемо тогда и только тогда, когда X обладает выпуклой ограниченной окрестностью нуля.*

Доказательство:
Если пространство X нормируется нормой $\|\cdot\|$, то открытый шар $B_1(0) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ — выпуклое ограниченное множество (упражнение).
Напротив, пусть V — выпуклая ограниченная окрестность нуля в X. По лемме 2.2.7 она содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля U. Разумеется, U также ограничена. Положим

$$\|x\| = \mu_U(x), \quad x \in X.$$

Мы сразу видим, что $\|\cdot\|$ — полунорма. Теперь, если $x \neq 0$, то по теореме 2.2.9 $x \notin rU$ для некоторого $r > 0$, так как множества rU образуют локальную базу в X. Следовательно, $\|x\| \geqslant r > 0$. Таким образом, $\|\cdot\|$ — норма. Из того факта, что

$$\{x \mid \|x\| < r\} = \{x \mid \exists s < r,\ x \in sU\} = \bigcup_{s<r} sU = rU$$

(упражнение: проверить последний переход), мы видим, что топология, индуцированная полученной нормой, совпадает с исходной. ■

3. Полнота

3.1. Теорема Банаха-Штейнгауза

Определение 3.1.1. (равностепенная непрерывность): Пусть X и Y — ТВП. Семейство Γ линейных операторов X в Y называется *равностепенно непрерывным*, если для любой окрестности нуля $U \subset Y$, найдётся такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset U$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.

Лемма 3.1.2. *Пусть X и Y — ТВП, Γ — равностепенно непрерывное семейство линейных операторов $\Lambda : X \to Y$. Тогда для любого ограниченного множества $E \subset X$, найдётся такое ограниченное множество $F \subset Y$, что $\Lambda(E) \subset F$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.*

Доказательство: Пусть $E \subset X$ ограничено. Положим

$$F = \bigcup_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda(E).$$

Покажем, что F также ограничено. Пусть U — окрестность нуля в Y. Тогда существует такая окрестность нуля $V \subset X$, что $\Lambda(V) \subset U$ для всех $\Lambda \in \Gamma$. Поскольку E ограничено, $E \subset tV$ при достаточно больших $t > 0$. Следовательно, при больших t,

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tU \Longrightarrow F \subset tU,$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.1.3. (Банаха-Штейнгауза): *Пусть X и Y — ТВП, Γ — некоторое семейство непрерывных линейных операторов из X в Y, а B — множество всех таких $x \in X$, орбиты которых*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничены в Y. Если B принадлежит II категории в X, то $B = X$ и Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство: Пусть U и W — такие окрестности нуля в Y, что $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. Положим

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}\left(\overline{U}\right).$$

Если $x \in B$, то $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, так что $x \in n\Lambda^{-1}(U)$ и поэтому $x \in nE$. Тогда

$$B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE.$$

Так как B — множество II категории, то по крайней мере одно из множеств nE, а значит и само множество E, тоже принадлежит II категории. Однако E замкнуто, как пересечение замкнутых множеств, поэтому

$$\left(\overline{E}\right)^{\circ} \neq \varnothing \Longrightarrow E^{\circ} \neq \varnothing \Longrightarrow \exists x_0 \in E^{\circ}.$$

Множество $x_0 - E$ содержит некоторую окрестность нуля V, причём

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(x_0 - E) = \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

для всякого $\Lambda \in \Gamma$. Это показывает, что Γ равностепенно непрерывно.
По лемме 3.1.2 семейство Γ равномерно ограничено. В частности, каждое из множеств $\Gamma(x)$ ограничено в Y, так как $\{x\}$ ограничено в X. Следовательно, что $B = X$. ■

Во многих приложениях условие, что B принадлежит II категории Бэра, проверяется при помощи следствия из теоремы Бэра:

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ полное метрическое} \\ S \text{ локально компактное хаусдорфово} \end{array}\right] \Longrightarrow S \text{ принадлежит II категории в себе.}$$

Теорема 3.1.4. *Пусть Γ — семейство непрерывных линейных отображений пространства Фреше X в ТВП Y, и пусть при каждом $x \in X$ множество*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x \mid \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничено в Y. Тогда семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство: Упражнение. ■

Существует также и более специальная версия для нормированных пространств:

Теорема 3.1.5. *Пусть X — Банахово пространство, Y — нормированное пространство, а Γ — семейство непрерывных линейных операторов из X в Y. Тогда выполняется импликация*

$$\left(\forall x \in X, \quad \sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\|_Y < \infty\right) \Longrightarrow \sup_{\Lambda \in \Gamma} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\Lambda x\|_Y < \infty.$$

Доказательство: Упражнение. ■

Теорема 3.1.6. *Пусть $\{\Lambda_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений пространства Фреше X в ТВП Y. Если для каждого $x \in X$ существует предел*

$$\Lambda x = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n x,$$

то отображение Λ непрерывно.

Доказательство: Для начала покажем, что семейство $\Gamma = \{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равностепенно непрерывно, воспользовавшись теоремой 3.1.4.
Пусть $x \in X$, и пусть V — уравновешенная окрестность нуля в Y. Последовательность $\{\Lambda_n x\}$ сходится к Λx. По теореме 2.2.9, для некоторого $t_0 > 0$ имеем $\Lambda x \in t_0 V$. Так как множество $t_0 V$ открыто, оно содержит Λx вместе с некоторой окрестностью $\Lambda x + W$. Начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\Lambda_n x \in \Lambda x + W \subset t_0 V.$$

Для $1 \leqslant k < N$, выберем такое t_k, что $\Lambda_k x \in t_k V$. Тогда для всех $s \geqslant \max_{0\leqslant k<N}$, имеем

$$(\forall n, \quad \Lambda_n x \in sV) \Longrightarrow \Gamma(x) \subset sV.$$

Это показывает, что орбита точки x ограничена. Следовательно, Γ равностепенно непрерывно. Теперь мы покажем, что линейный оператор Λ непрерывен. Пусть U — окрестность нуля в Y. Выберем такую окрестность нуля $W \subset Y$, что $\overline{W} \subset U$. В силу равностепенной непрерывности Γ, в X существует такая окрестность нуля V, что $\Lambda_n(V) \subset W$. Тогда для всех $x \in V$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Lambda_n x \in W) \Longrightarrow \Lambda x \in \overline{W},$$

откуда мы выводим $\Lambda(V) \subset \overline{W} \subset U$. Поэтому Λ непрерывно. ■

3.2. Билинейные операторы

Определение 3.2.1. Пусть X, Y, Z — вещественные векторные пространства и B — отображение пространства $X \times Y$ в Z. Для каждого $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$B_x(y) = B(x, y) = B_y(x).$$

Таким образом, $B_x : Y \to Z$ и $B_y : X \to Z$. Отображение B называется *билинейным оператором,* если отображения B_x и B_y линейны при всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Определение 3.2.2. Пусть X, Y, Z — ТВП, и пусть $B : X \times Y \to Z$. Если для всех $x \in X$ и $y \in Y$ отображения B_x и B_y непрерывны, то B называется *раздельно непрерывным.*

Упражнение 3.2.3. Покажите, что если отображение $B : X \times Y$ непрерывно (в смысле топологии произведения $X \times Y$), то оно раздельно непрерывно.

Теорема 3.2.4. *Пусть X есть пространство Фреше, а Y и Z — ТВП. Пусть также $B : X \times Y$ — билинейный раздельно непрерывный оператор. Тогда*

$$\left.\begin{aligned} x_n &\to x_0 \\ y_n &\to y_0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0). \tag{1}$$

Если же пространство Y метризуемо, то отсюда следует, что оператор B непрерывен.

Доказательство: Пусть W — произвольная окрестность нуля в Z и U такова, что $U + U \subset W$. Рассмотрим последовательности $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$. Положим

$$b_n(x) = B(x, y_n) \qquad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

Так как B раздельно непрерывно, то для всех $x \in X$

$$y_n \to y_0 \Longrightarrow b_n(x) = B(x, y_n) \to B(x, y_0).$$

Поэтому для любого $x \in X$ множество $\{b_n(x)\}$ ограничено в Z, как сходящаяся последовательность (см. доказательство теоремы 3.1.6). Следовательно, по теореме 3.1.4 семейство $\{b_n\}$ равностепенно непрерывно. Тогда в X найдётся такая окрестность нуля V, что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n(V) \subset U.$$

Заметим, что

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = B(x_n - x_0, y_n) + B(x_0, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0).$$

При достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, имеем $x_n \in x_0 + V$, так что $x_n - x_0 \in V$ и $b_n(x_n - x_0) \in U$, а также $B(x_0, y_n - y_0) \in U$, так как B непрерывно по второй компоненте и $y_n - y_0 \to 0$.
Следовательно, для таких $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) \in U + U \subset W \Longrightarrow B(x_n, y_n) \in B(x_0, y_0) + W.$$

Отсюда следует (1).
Наконец, если пространство Y метризуемо, то тогда метризуемо и $X \times Y$, и непрерывность B следует из (1) (упражнение). ■

3.3. Теорема о неподвижной точке

Теорема 3.3.1. *Пусть (M, d) — полное непустое метрическое пространство. Рассмотрим такое отображение $f : X \to X$, что для некоторой константы $\alpha \in (0, 1)$ выполняется*

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \cdot d(x, y).$$

(в таком случае отображение f называется ***сжимающим****). Тогда существует единственная точка $x^* \in X$ со свойством $f(x^*) = x^*$.*

Доказательство: Рассмотрим точку $x_1 \in X$. Определим последовательность $\{x_n\}$ соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Мы покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, имеем

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}),$$

и следовательно

$$\begin{aligned} &d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) \\ \Longrightarrow\ &d(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leqslant d(x_1, x_2) \cdot \alpha^{m-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} \alpha^k = \alpha^{m-1} \cdot \frac{d(x_1, x_2)}{1 - \alpha} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

В силу полноты, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел x^*. Однако так как отображение f непрерывно (упражнение), имеем

$$f(x^*) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Наконец, если нашлась ещё одна точка $y^* \in X$ с тем же свойством, то

$$d(x *, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leqslant \alpha \cdot d(x^*, y^*) \Longrightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Longrightarrow x^* = y^*,$$

что доказывает единственность. ■

Определение 3.3.2. Отображение $f : X \to Y$ между метрическими пространствами называется *липшицевым,* если существует такая константа $M > 0$, что

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant M \cdot d_X(x, y)$$

для всех $x, y \in X$.

Упражнение 3.3.3. Докажите, что всякая липшицева функция непрерывна.

Следствие 3.3.4. (теорема Пикарда-Линделёфа): *Пусть $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — замкнутый прямоугольник, $(0, y_0) \in D^\circ$. Рассмотрим функцию $f(t, x) : D \to \mathbb{R}$, которая непрерывна по переменной t и липшицева по переменной y. Тогда найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что система*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $y(t)$ на интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$

Доказательство: Сначала система (2) переводится в интегральную форму:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$

Далее, можно показать, что оператор $T : C[-\varepsilon, \varepsilon] \to C[-\varepsilon, \varepsilon]$, определённый формулой

$$T(\varphi)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))\, ds,$$

является сжимающим в пространстве $(C[-\varepsilon, \varepsilon], \|\cdot\|_\infty)$ для достаточно малых значений ε. Следовательно, по предыдущей теореме существует требуемая функция, и она единственна. ■

4. Обобщённая теорема Стоуна-Вейерштрасса

Теорема 4.1. (Урысон): *Пусть X — нормальное топологическое пространство (то есть, оно удовлетворяет аксиоме $\mathbb{T}_4$ отделимости), и пусть A, B — непересекающиеся замкнутые множества в X. Тогда существует такая вещественная непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что*

$$f(x) = 0 \text{ на } A, \quad f(x) = 1 \text{ на } B.$$

Доказательство: Для начала построим семейство отрытых множеств, с помощью которого мы определим функцию f.

Покажем, что каждому двоично-рациональному числу $r = k/2^n$ $(k = 0, 1, ..., 2^n)$ можно поставить в соответствие некоторое открытое множество $G(r)$ таким образом, чтобы:

(a) $A \subset G(0)$;

(b) $B = X \setminus G(1)$;

(c) Если $r_1 < r_2$, то $\overline{G(r_1)} \subset G(r_2)$.

Мы построим такое соответствие с помощью индукции по n.

- База: $n = 0$. Так как пространство X нормально, существуют открытые множества G_0 и G_1 со свойствами $A \subset G_0, B \subset G_1, G_0 \cap G_1 = \varnothing$. Положив $G(0) = G_0$ и $G(1) = X \setminus B$, мы видим, что

$$G(0) = G_0 \subset X \setminus G_1 \Longrightarrow \overline{G(0)} \subset X \setminus G_1 \subset X \setminus B = G(1).$$

- Переход: $n - 1 \to n$. Пусть для чисел вида $r = k/2^{n-1}$ множества $B(r)$ уже определены с выполнением условий (a), (b), (c). Рассмотрим некоторое нечётное $k > 0$ и $r = k/2^n$. В таком случае, положив $r_1 = (k-1)/2^n$ и $r_2 = (k+1)/2^n$, мы имеем

$$\overline{G(r_1)} \subset G(r_2),$$

по предположению индукции. Следовательно, в силу нормальности X, существуют открытые множества U и V со свойствами

$$\overline{G(r_1)} \subset U, \quad X \setminus G(r_2) \subset V, \quad U \cap V = \varnothing. \tag{1}$$

Положим $G(r) = U$. Тогда из (1) следует, что

$$\overline{G(r_1)} \subset G(r), \quad \overline{G(r)} \subset G(r_2)$$

(упражнение). Таким образом, доказательство по индукции завершено.

Теперь определим функцию f соотношениями

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{на множестве } G(0), \\ f(x) &= \sup \{r \mid x \notin G(r)\} && \text{если } x \notin G(0). \end{aligned}$$

По построению $f(x) = 0$ на A и $f(x) = 1$ на B.
Остаётся показать, что f непрерывна. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Мы должны предъявить окрестность точки x_0, образ которой укладывается в ε-окрестность $f(x_0)$.
Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $1/2^n < \varepsilon$. Выберем двоично-рациональное число r таким образом, чтобы $f(x_0) < r < f(x_0) + 1/2^{n+1}$. Положим

$$U = G(r) \cap \left(X \setminus \overline{G(r - 1/2^n)}\right).$$

(мы условимся, что $G(s) = \varnothing$ при $s < 0$ и $G(s) = X$ при $s > 1$)
Множество U открыто и содержит точку x_0 (упражнение). Далее, если $x \in U$, то $x \in G(r)$, и потому $f(x) \leqslant r$. Кроме того,

$$x \in U \subset X \setminus \overline{G(r - 1/2^n)} \subset X \setminus G(r - 1/2^n) \Longrightarrow x \notin G(r - 1/2^n),$$

а значит $r - 1/2^n \leqslant f(x)$. Следовательно, $f(x_0), f(x) \in [r - 1/2^n, r]$, откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant 1/2^n < \varepsilon,$$

и функция f непрерывна. ■

Упражнение 4.2. Пусть X — компактное топологическое пространство. Покажите, что X нормально.

Лемма 4.3. (теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами): *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой полином $P : [a, b] \to \mathbb{R}$, что*

$$\|f - P\|_\infty = \max_{[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Определение 4.4. Пусть X — компактное топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных вещественных отображений $f : X \to \mathbb{R}$. Поточечные операции

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

превращают его в *алгебру*. Кроме того, на $C(X)$ существует норма

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

вместе с которой $C(X)$ становится *Банаховой алгеброй* (упражнение).

Определение 4.5. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое семейство функций на множестве S. Тогда говорят, что семейство *$\mathcal{A}$ разделяет точки* множества S, если для всякой пары (s_1, s_2) различных элементов из S, найдётся функция $f \in \mathcal{A}$ со свойством $f(s_1) \neq f(s_2)$.

Упражнение 4.6. Пусть $\mathcal{P}$ — такое семейство полунорм на векторном пространстве X, что $\mathcal{P}$ разделяет точки X. Докажите, что тогда $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм. Верно ли обратное?

<u>Теорема 4.7.</u> (Стоун-Вейерштрасс): *Пусть X — компактное топологическое пространство, и пусть $B \subset C(X)$ — замкнутая подалгебра. Тогда*

$$B = C(X) \iff B \text{ разделяет точки } X.$$

Доказательство:
$\Longrightarrow$: Покажем, что $C(X)$ разделяет точки X. Будучи компактным, пространство X нормально, а значит по теореме Урысона, если $x_1 \neq x_2$, существует непрерывное отображение $f : X \to [0, 1]$ со свойством $f(x_1) = 0, f(x_2 = 1)$. Отображение $f \in C(X)$ и есть разделяющая функция.
$\Longleftarrow$: Введём некоторые обозначения:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)), \quad |f|(x) = |f(x)|.$$

1. Пусть $f \in B$. Функция f ограничена по причине непрерывности и компактности X. Пусть $a \leqslant f(x) \leqslant b$ для всех $x \in X$. Согласно <u>лемме 4.3</u>, функция $\lambda x.\ |x|$ сколь угодно точно приближается полиномами. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такой полином P_n, что

$$||y| - P_n(y)| < \frac{1}{n} \text{ при } a \leqslant y \leqslant b.$$

Тогда имеем

$$\left(\forall x \in X, \quad ||f(x)| - P_n(f(x))| < \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \||f| - P_n(f)\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $P_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} |f|$. Так как B — подалгебра, имеем $P_n(f) \in B$ и потому $|f| \in B$, в силу замкнутости B. Тогда, учитывая соотношения

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f+g|}{2} \quad \text{и} \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

мы заключаем, что подалгебра B замкнута относительно взятия минимума/максимума.

Теперь мы должны показать, что $B = C(X)$. Пусть $h \in C(X)$.

2. Выберем пару различных точек $x_1, x_2 \in X$. Тогда мы можем найти такую функцию $f_{x_1}^{x_2} \in B$, что

$$f_{x_1}^{x_2}(x_1) = h(x_1) \text{ и } f_{x_1}^{x_2}(x_2) = h(x_2).$$

Действительно, рассмотрим $g \in B$ со свойством $g(x_1) \neq g(x_2)$ и положим $f = \alpha g + \beta$, где α, β решают систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha g(x_1) + \beta = h(x_1) \\ \alpha g(x_2) + \beta = h(x_2) \end{cases}$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Мы должны показать, что в B найдётся такая функция f, что $\|h - f\| < \varepsilon$. Пусть $x \in X$. Тогда для всякой точки $y \in X$ найдётся такая окрестность $U(y)$, что $f_x^y(t) > h(t) - \varepsilon$ для всех $t \in U(y)$. Так как X компактно, оно покрывается конечным числом таких окрестностей:

$$X = U(y_1) \cup U(y_2) \cup \ldots \cup U(y_n).$$

Положим $f_x = f_x^{y_1} \vee f_x^{y_2} \vee \ldots \vee f_x^{y_n} \in B$. Тогда $f_x(t) > h(t) - \varepsilon$ для всех $t \in X$. Но заметим, что $f_x(x) = h(t)$, так как $f_x^{y_k}(x) = h(x)$. Следовательно, существует такая окрестность $V(x)$ точки x, что $f_x(t) < h(t) + \varepsilon$ для всех $t \in V(x)$. Так как X компактно, оно покрывается конечным числом таких окрестностей:

$$X = V(x_1) \cup V(x_2) \cup \ldots \cup V(x_m).$$

Тогда положим $f = f_{x_1} \wedge f_{x_2} \wedge \ldots \wedge f_{x_m} \in B$. По построению получаем, что

$$h(t) - \varepsilon < f(t) < h(t) + \varepsilon$$

для всех $t \in X$. Следовательно, $\|h - f\| < \varepsilon$, и $h \in B$. Таким образом, $B = C(X)$. ■

Упражнение 4.8. Докажите лемму 4.3 при помощи теоремы Стоуна-Вейерштрасса.