

Программа курса

λ-исчисление, 2024

Конверсия и редукция

Основные понятия

1. Множество λ -выражений. Свободные и связанные переменные. α -конгруэнтность. Правило переменных.
2. Оператор подстановки.

Конверсия

1. $\beta\eta$ -конверсия. Теорема о неподвижной точке.
2. Стандартные комбинаторы. Комбинатор неподвижной точки. Формальные λ -теории: согласованность, противоречивость, несовместимость.

Редукция

1. Редукция (β -, η -, $\beta\eta$ -). Нормальные формы. Редукционные графы.
2. Свойство Чёрча-Россера. Теорема о минимальном элементе.
3. Теорема Чёрча-Россера для β -редукции. Следствия.
4. Диаграммы бинарных отношений. Коммутирующие отношения. Лемма Хиндли-Росена.
5. Теорема Чёрча-Россера для η - и $\beta\eta$ -редукции. Следствия.
6. Внешние/внутренние редексы и нормальные формы.
7. Стандартный редукционный путь. Существование стандартной редукции.
8. Нормализующая редукционная стратегия. Теорема о нормализации.

λ-представимость

Основные понятия

1. Комбинаторы **T** и **F**. Упорядоченные пары. Конечные кортежи, проекции.
2. Обобщённая теорема о неподвижной точке.

Рекурсивные числовые функции

1. Числа Барендрегта (λ -числа). λ -представимость. Класс рекурсивных функций.
2. Все рекурсивные функции λ -представимы.
3. Все λ -представимые функции рекурсивны (эскиз доказательства).
4. Кодирование (числа Гёделя), функция комбинации, функция нумерации.

Числовые системы

1. Числа Чёрча.
2. Числовые системы. Адекватность. Критерий адекватности числовой системы.

Неразрешимость

1. Рекурсивно сепарабельные и рекурсивные множества. Замкнутость относительно конверсии.
2. Теорема Скотта-Карри о неразрешимости. Следствия.

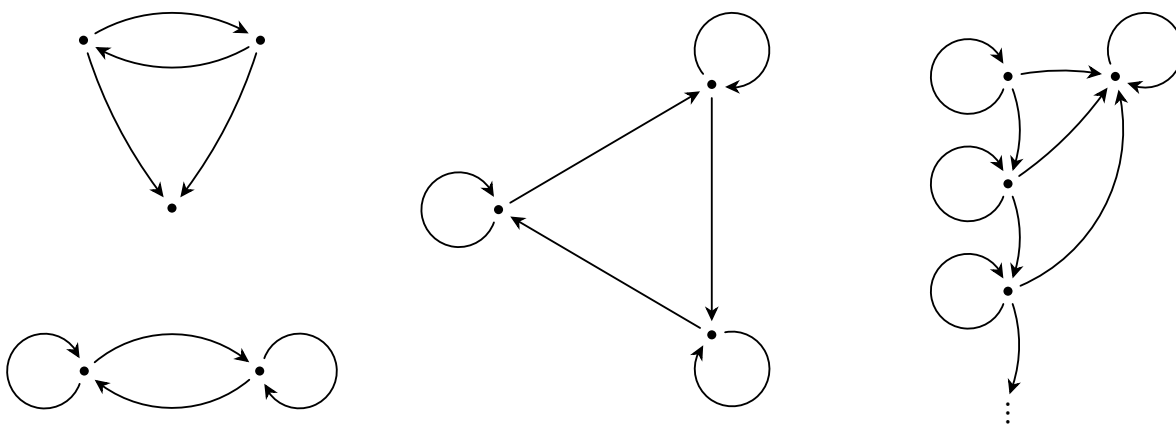
Задачи

λ-исчисление, 2024

Конверсия и редукция

1. • Перепишите в формальной нотации: $y(\lambda x. xy(\lambda z. w. yz))$
 • Перепишите в упрощённом виде: $(\lambda v'(\lambda v''(((\lambda v v)v')v'')((v''(\lambda v'''(v'v'''))))v''))))$
2. Положим $X \equiv \mathbf{SI}$. Покажите, что $XXXX = X(X(XX))$. Правда ли, что $X^n X = XX^{\sim n}$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}_0$?
3. Покажите, что выражение имеет нормальную форму:
 [a] $(\lambda y. yyy)((\lambda a. b. a)\mathbf{I}(\mathbf{SS}))$, [b] \mathbf{SSSS} , [c]* $\mathbf{S}(\mathbf{SS})(\mathbf{SS})\mathbf{S}$.
4. Найдите λ-выражение M , такое, что $\forall N \in \Lambda : MN = MM$.
5. Докажите, что **не** существует такого $F \in \Lambda$, что $\forall M, N \in \Lambda : F(MN) = M$.
6. Пусть $A \equiv \mathbf{SKKK}$. Постройте такое λ-выражение M , чтобы выполнялась конверсия $\mathbf{SIMKA} = \mathbf{SMSKA}$.
7. Докажите, что правило η-конверсии ($\lambda x. Mx = M$, $\forall M, x : x \notin \text{TV}(M)$) эквивалентно тому, что «функции равны, если равны их значения»:

$$Mx = Nx \Rightarrow M = N, \quad \forall M, N, x : x \notin \text{TV}(MN).$$
8. • Докажите, что: [a] $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$, [b] $\mathbf{I} \# \mathbf{S}$, [c]* $xy \# xx$.
 • Постройте последовательность M_0, M_1, \dots , такую, что $M_i \# M_j$, если $i \neq j$.
9. Докажите, что $P \# Q \iff (\lambda + (P = Q)) \vdash \mathbf{K} = \mathbf{K}_*$
10. Постройте последовательность λ-выражений M_0, M_1, \dots так, чтобы $M_0 = v$ и для любого $n \in \mathbb{N}_0$ выполнялось $M_{n+1} = M_{n+2}M_n$.
11. Докажите, что $\forall M \in \Lambda : \exists N \in \Lambda : N\mathbf{I} \xrightarrow[\beta]{} M$, причём N в β-нормальной форме.
12. Обозначим через $M \uparrow N$ условие $\exists L : (L \twoheadrightarrow M) \wedge (L \twoheadrightarrow N)$. Покажите, что:
 [a] $(\lambda x. ax)b \uparrow (\lambda y. yb)a$, [b] $(\lambda x. xc)c \uparrow (\lambda x. xx)c$, [c] $(\lambda x. bx)c \uparrow (\lambda x. x)bc$
13. Постройте λ-выражения со следующими редукционными графами:



14. Нарисуйте редукционные графы следующих λ-выражений:
 [a] $(\lambda x. \mathbf{I}xx)(\lambda x. \mathbf{I}xx)$, [b] $(\lambda x. \mathbf{I}(xx))(\lambda x. \mathbf{I}(xx))$
15. Пусть $M \equiv AAx$, где $A \equiv \lambda a. x. z. z(aax)$. Докажите, что редукционный граф $\text{Gr}(M)$ содержит n -мерный куб при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

16. Покажите, что концептуально существует только одно λ -выражение (а именно Ω), имеющее следующий редукционный граф:



17. Расширим множество λ -выражений двумя константами δ, ε . Также добавим новое правило редукции: $\delta MM \rightarrow \varepsilon$ для любого $M \in \Lambda \cup \{\delta, \varepsilon\}$. Докажите, что в получившейся системе **не** выполняется теорема Чёрча-Россера.

Подсказка: найдите выражения C, D такие, что

$$Cx \rightarrow \delta x(Cx),$$

$$D \rightarrow CD.$$

Докажите, что $D \rightarrow \varepsilon$ и $D \rightarrow C\varepsilon$, но у ε и $C\varepsilon$ нет общего редукта.

18. Пусть \sqsubset_1 и \sqsubset_2 — коммутующие отношения на множестве X . Покажите, что $\text{Trans}(\sqsubset_1)$ и $\text{Trans}(\sqsubset_2)$ также коммутуют.
19. λ -выражение M *сильно нормализуется* (нотация $\text{SN}(M)$), если **не** существует бесконечного редукционного пути, начинающегося в M . Докажите, что:
- [a] $\text{SN}(M) \Rightarrow M$ имеет нормальную форму;
 - [b] $\text{SN}(M) \Rightarrow \text{Gr}(M)$ конечен. Верно ли обратное?

20. Рассмотрим

$$\text{SN}_0 := \{M \in \Lambda \mid \text{SN}(M)\},$$

$$\text{SN}_{n+1} := \{M \in \Lambda \mid \forall N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}_n : MN_1N_2\dots N_k \in \text{SN}_n\}.$$

Докажите, что

[a] $\text{SN}_1 \subset \text{SN}_0$, но $\text{SN}_1 \neq \text{SN}_0$.

[b] $\text{SN}_1 = \text{SN}_2 = \text{SN}_3 = \dots$

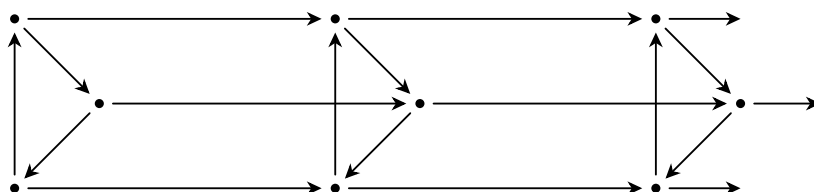
21. Нарисуйте редукционные графы выражений:

[a] $H\mathbf{I}H$, где $H \equiv \lambda x, y. x(z. yzy)x$;

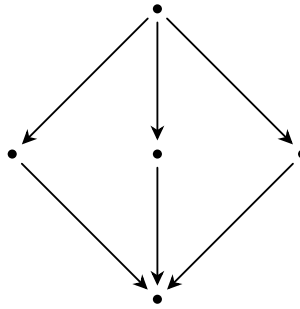
[b] $LL\mathbf{I}$, где $L \equiv \lambda x, y. x(yu)x$;

[c] PQ , где $P \equiv \lambda u. u\mathbf{I}u$, $Q \equiv \lambda x, y. xy\mathbf{I}(xy)$.

22. Постройте λ -выражения с редукционными графами:



23. Покажите, что **ни одно** λ -выражение не имеет редукционный граф



24. Найдите λ -выражение M_0 с редукционным путём

$$M_0 \xrightarrow[\beta]{\twoheadrightarrow} M_1 \xrightarrow[\eta]{\rightarrow} M_2 \xrightarrow[\beta]{\twoheadrightarrow} M_3 \xrightarrow[\eta]{\rightarrow} M_4 \xrightarrow[\beta]{\twoheadrightarrow} \dots$$

25. Пусть $M_1 \equiv (\lambda x. bx(bc))c$, $M_2 \equiv (\lambda x. xx)(bc)$. Докажите, что **не** существует такого выражения M , что $M \rightarrow M_1$ и $M \twoheadrightarrow M_2$.

λ -представимость

1. Пусть M_1, M_2, \dots, M_k и N_1, N_2, \dots, N_k — два набора λ -выражений. Покажите, что

$$\langle M_1, M_2, \dots, M_k \rangle = \langle N_1, N_2, \dots, N_k \rangle \iff M_1 = N_1, M_2 = N_2, \dots, M_k = N_k$$

2. Постройте λ -выражения $A, B \in \Lambda$ таким образом, чтобы $Ax = A$ и $Bx = xB$.

3. Постройте выражения $F, \pi \in \Lambda^0$, такие, что:

- $\forall n \in \mathbb{N} : F \ulcorner n \urcorner xy = xy \sim^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \leq n : \pi \ulcorner n \urcorner \ulcorner i \urcorner = \pi_i^n$

4. • Постройте λ -выражение **Mult**, такое, что **Mult** $\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \ulcorner mn \urcorner$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$.
• Постройте λ -выражение **Fac**, такое, что **Fac** $\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n! \urcorner$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

5. Элементарная функция Аккермана φ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi(0, n) &= n + 1, \\ \varphi(m + 1, 0) &= \varphi(m, 1), \\ \varphi(m + 1, n + 1) &= \varphi(m, \varphi(m + 1, n)). \end{aligned}$$

Покажите, что φ рекурсивна, и найдите λ -выражение, которое её λ -представляет.

6. Постройте функцию предшествующего элемента для чисел Чёрча: \mathbf{P}_c^- такое, что $\mathbf{P}_c^- c_{n+1} = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

7. Допустим, что каждый символ в упрощённой записи λ -выражения (переменная, скобка, точка, запятая, лямбда) занимает 0.5см пространства на бумаге. Найдите λ -выражение длиной менее 25см, имеющее нормальную форму длиной не менее $10^{10^{150}}$ световых лет (скорость света составляет $3 \cdot 10^{10}$ см/сек.)

8. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \lambda a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, s, t, u, v, w, x, y, z, r. r(\text{this is a fixed point combinator}), \\ \$ &= \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Покажите, что $\$$ — комбинатор неподвижной точки.

9. Докажите, что $M \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки $\iff M = (\mathbf{SI})M$.

10. Пусть f, g — λ -выражения. Положим $X \equiv \Theta(f \circ g)$. Докажите, что $g(X)$ — неподвижная точка выражения $g \circ f$.
11. Положим $\mathbf{Y}_M \equiv \lambda f. WWM$, где $W \equiv \lambda x, z. f(xxz)$. Докажите, что \mathbf{Y}_M — комбинатор неподвижной точки для любого $M \in \Lambda$.
12. Докажите, что $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y}_N \Rightarrow M = N$. (\mathbf{Y}_M и \mathbf{Y}_N определены как в предыдущей задаче)
13. • Пусть $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ — рекурсивная функция. Постройте последовательность X_0, X_1, \dots λ -выражений, такую, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется $X_n X_m = X_{f(n,m)}$.
 • Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и пусть \times — бинарная операция на X . Постройте λ -выражения X_1, X_2, \dots, X_n таким образом, чтобы выполнялось $X_i X_j = X_k \iff x_i \times x_j = x_k$ при всех i, j, k .
14. Пусть d — числовая система. Докажите, что d адекватна тогда и только тогда, когда
- $$\exists F, F^{-1} \in \Lambda : \forall n \in \mathbb{N}_0 : (F \ulcorner n \urcorner = d_n) \wedge (F^{-1} d_n = \ulcorner n \urcorner).$$
15. Пусть d_0, d_1, \dots — адекватная числовая система. Положим $d'_n \equiv \mathbf{Y}\mathbf{C}d_n$, где $\mathbf{C} \equiv \lambda x, y, z. x(zy)$. Покажите, что все рекурсивные функции одного аргумента $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ λ -представляются с помощью d' .
 (подсказка: рассмотрите $F' \equiv \lambda x. xF$)
16. Пусть $f_0 \equiv \lambda x, y, z. y$ и $\mathbf{S}_f^+ \equiv \lambda x. \langle x \rangle$. Покажите, что функции $\mathbf{P}_f^- \equiv \langle I \rangle$ и $\mathbf{Zero}_f \equiv \lambda x, y, z. x(\lambda x', y', z'. z')yz$ превращают (f_0, \mathbf{S}_f^+) в адекватную числовую систему.
17. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n \mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.
18. Покажите, что множество $\{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$ — **не** рекурсивное.
19. Докажите, что существует λ -выражение M , такое, что $M = \ulcorner M \urcorner$.
 (подсказка: обратите внимание на доказательство теоремы Скотта-Карри о неразрешимости)
20. Докажите вторую теорему о неподвижной точке: $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : F \ulcorner X \urcorner = X$.