МАТЕРИАЛ КУРСА

λ-исчисление, 2024

Содержание

1. Конверсия и редукция

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. Рассмотрим счётное множество $V = \{v, v', v'', ...\}$. Элементы этого множества будут называться *переменными.* Множество λ-выражений, Λ, — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- $x \in V,\ M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$; (абстракция, морально: определение функции)
- $M \in \Lambda,\ N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$. (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

Пример 1.1.1. λ-выражения в формальной нотации:

$$v';$$
$$(vv');$$
$$(\lambda v(v'v));$$
$$((\lambda v(v'v))v'');$$
$$(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v''');$$

Нотация

- x, y, z, ... обозначают произвольные переменные из множества V.
- M, N, K, ... обозначают произвольные λ-выражения из Λ.
- Внешние скобки опускаются: $(\lambda x(yz)) \to \lambda x(yz)$.
- Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda...(\lambda x_n M)...)) \to \lambda x_1, x_2, ..., x_n.\ M \to \lambda \vec{x}.\ M$$

- Многократная комбинация сокращается:

$$((...((M_1 M_2)M_3)...)M_n)N \to M_1 M_2 ... M_n N \to \overrightarrow{M} N$$

- Комбинация берёт приоритет над абстракцией: $\lambda x.\ yz = \lambda x.\ (yz)$

Определение 1.1.2. Пусть M — λ-выражение. Множества $\mathrm{TV}(M),\ \mathrm{FV}(M),\ \mathrm{BV}(M) \subset V$ определяются индуктивно:

M	$\mathrm{TV}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$	$\mathrm{BV}(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\varnothing$
$\lambda x.\ N$	$\{x\} \cup \mathrm{TV}(N)$	$\mathrm{FV}(N) \setminus \{x\}$	$\{x\} \cup \mathrm{BV}(N)$
NK	$\mathrm{TV}(N) \cup \mathrm{TV}(K)$	$\mathrm{FV}(N) \cup \mathrm{FV}(K)$	$\mathrm{BV}(N) \cup \mathrm{BV}(K)$

Замечание 1.1.1. В данный момент существуют не вполне осмысленные λ-выражения. Так, в выражении $(\lambda x.\ xy)x$ переменная x выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении $\lambda x.\ \lambda x.\ xx$ переменная x связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить *заменой связанных переменных:* $(\lambda x.\ xy)x \to (\lambda u.\ uy)x$, $\lambda x.\ \lambda x.\ xx \to \lambda x.\ \lambda u.\ uu$. Сейчас мы формализуем эту идею.

Определение 1.1.3. Пусть $\sqsubset$ — бинарное отношение на множестве Λ. Тогда $\sqsubset$ называется *совместимым с операциями,* если:

$$M \sqsubset N \Rightarrow \lambda x.\ M \sqsubset \lambda x.\ N,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow ZM \sqsubset ZN,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow MZ \sqsubset NZ.$$

Определение 1.1.4. *Тождественное равенство* ($\equiv$) обозначает полностью идентичный состав символов: $\lambda x.\ xy \not\equiv \lambda u.\ uy$.

Определение 1.1.5. Отношение *α-конгруэнтности* ($\overset{\alpha}{=}$) на Λ — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:
- $M \overset{\alpha}{=} M$;
- $\lambda x.\ M \overset{\alpha}{=} \lambda y.\ (M[x \to y])$, при условии что $y \notin \mathrm{TV}(M)$;
- $\overset{\alpha}{=}$ совместимо с операциями.

Определение 1.1.6. Пусть M — λ-выражение. M называется *корректным* в следующих случаях:
(1) $M \equiv x \in V$;
(2) $M \equiv \lambda x.\ N$, причём N корректно, а также $x \notin \mathrm{BV}(N)$;
(3) $M \equiv NK$, причём N, K корректны, а также $\mathrm{BV}(N) \cap \mathrm{FV}(K) = \varnothing$ и $\mathrm{FV}(N) \cap \mathrm{BV}(K) = \varnothing$.

Упражнение Доказать, что если M корректно, то $\mathrm{FV}(M) \cap \mathrm{BV}(M) = \varnothing$, $\mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M) = \mathrm{TV}(M)$.

Упражнение Пусть M — λ-выражение. Доказать, что существует корректное λ-выражение N, такое, что $M \overset{\alpha}{=} N$.

Договорённость (Правило переменных): Пусть λ-выражения $M_1, M_2, ..., M_n$ выступают с едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что выражение $M_1 M_2 ... M_n$ — корректное.

Определение 1.1.7. λ-выражение M называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$. Λ^0 обозначает множество всех замкнутых λ-выражений.

Определение 1.1.8. M является *подвыражением* N ($M \subset N$), если M лежит во множестве $\mathrm{Sub}(N)$:

N	$\mathrm{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x.\ K$	$\{\lambda x.\ K\} \cup \mathrm{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\mathrm{Sub}(K_1) \cup \mathrm{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

Определение 1.1.9. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда
- $F^0 M \equiv M$; $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $FM^{\sim 0} \equiv F$; $FM^{\sim n+1} \equiv (FM^{\sim n})M$

1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$-конверсия

Определение 1.2.1. Пусть $M \in \Lambda$, $x \notin \mathrm{BV}(M)$. Пусть также $N \in \Lambda$. *Результат подстановки N вместо x*, $M[x := N]$, определяется индуктивно:

$$\begin{aligned} x[x := N] &\equiv N; \\ y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \not\equiv x; \\ (\lambda y.\ M')[x := N] &\equiv \lambda y.\ (M'[x := N]); \\ (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]). \end{aligned}$$

Замечание 1.2.1. Рассмотрим $M \equiv \lambda y.\ x$, $N \equiv yy$. Тогда по предыдущему определению мы получаем $M[x := N] = \lambda y.\ yy$, что настораживает, ведь $M \equiv \lambda y.\ x \overset{\alpha}{=} \lambda u.\ x \equiv M'$, тогда как

$$M[x := N] = \lambda y.\ yy \overset{\alpha}{\neq} \lambda u.\ yy = M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь $\mathrm{BV}(M) \cap \mathrm{FV}(N) = \{y\} \neq \varnothing$.

Упражнение Доказать, что оператор подстановки уважает α-конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left.\begin{array}{l} M \overset{\alpha}{=} M' \\ N \overset{\alpha}{=} N' \end{array}\right\} \Rightarrow M[x := N] \overset{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

Лемма 1.2.1. (о подстановке): *Пусть $M, N, L \in \Lambda$. Тогда если $x \not\equiv y$ и $x \notin \mathrm{FV}(L)$, то*

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре λ-выражения M.

(1) База: $M \equiv u \in V$. Тогда рассмотрим три случая:
- $u \equiv x$. Тогда обе части тождественно равны $N[y := L]$, так как $x \not\equiv y$.
- $u \equiv y$. Тогда обе части равны L, так как $L[x := ...] = L$, ведь $x \notin \mathrm{FV}(L)$.
- $u \not\equiv x, y$. Тогда обе части равны u.

(2) Переход.
- $M \equiv \lambda z.\ M'$. По правилу переменых и определению оператора подстановки мы имеем $z \notin \mathrm{FV}(NL)$ и $z \not\equiv x, y$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned}(\lambda z.\ M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z.\ M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.\ M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z.\ M')[y := L][x := N[y := L]].\end{aligned}$$

- $M \equiv M_1 M_2$. Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

Определение 1.2.2. ($\beta\eta$-конверсия): Отношение $\beta\eta$-конверсии ($=$) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:
- $(\lambda x.\ M)N = M[x := N]$; ($\beta$-конверсия)
- $\lambda x.\ Mx = M$, при условии что $x \notin \mathrm{TV}(M)$; (η-конверсия)
- $=$ — отношение эквивалентности;
- $=$ совместимо с операциями.

Если $M = M$, мы говорим, что «M равно N», или «M конвертируется в N». Запись «$\lambda \vdash M = N$» означает, что конверсию $M = N$ можно вывести из вышеуказанных правил.

Теорема 1.2.1. (о неподвижной точке): $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda :\ FX = X$.

Доказательство: Пусть $W \equiv \lambda x.\ F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.\ F(xx))W = F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

Утверждение 1.2.1. (fallacy): $\forall M, N \in \Lambda :\ \lambda \vdash M = N$

Доказательство: Рассмотрим $F \equiv \lambda x{,}y.\ yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))M)N = (\lambda y.\ yM)N = NM.$$

В частности, $Fyx = xy$. Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))y)x = (\lambda y.\ yy)x = xx.$$

Тогда $xy = xx$, а значит $F_1 \equiv \lambda x{,}y.\ xy = \lambda x{,}y.\ xx \equiv F_2$. Теперь для любого $M \in \Lambda$ имеем

$$M = (\lambda x.\ x)M = F_1(\lambda x.\ x)M = F_2(\lambda x.\ x)M = (\lambda x.\ x)(\lambda x.\ x) = (\lambda x.\ x),$$

и по транзитивности $M = (\lambda x.\ x) = N$ для любых $M, N \in \Lambda$. В чём ошибка? ■

Лемма 1.2.2. *Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если $M = M'$, $N = N'$, то $M[x := N] = M'[x := N']$.*

Доказательство: Упражнение. ■

1.3. Комбинаторы и согласованность

Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\ x$
- $\mathbf{K} \equiv \lambda x{,}y.\ x$
- $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x{,}y.\ y$
- $\mathbf{S} \equiv \lambda x{,}y{,}z.\ xz(yz)$
- $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f(xx))(\lambda x.\ f(xx))$ — комбинатор неподвижной точки: $\forall F \in \Lambda :\ F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$. Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. РАссмотрим λ-выражение M, определённое рекуррентной формулой:

  $$Mx \equiv FxM.$$

  Определим $G \equiv \lambda y.\ \lambda x.\ Fxy$. Тогда M приобретает явную форму: $M \equiv \mathbf{Y}G$ (упражнение).

Определение 1.3.2.

- Выражение вида $M = N$ называется *равенством;*
- Равенство $M = N$ называется *замкнутым,* если $M, N \in \Lambda^0$;
- Пусть $\mathcal{T}$ — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие λ-теории). Тогда $\mathcal{T}$ называется *согласованной* (нотация $\mathrm{Con}(\mathcal{T})$) если $\mathcal{T}$ **не** доказывает все замкнутые равенства. В противном случае $\mathcal{T}$ называется *противоречивой.*
- Если $\mathcal{T}$ — это набор равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, полученную добавлением равенств из $\mathcal{T}$ к стандартному списку аксиом $\beta\eta$-конверсии.

Определение 1.3.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда M и N называются *несовместимыми* (нотация $M \# N$), если теория $\lambda + (M = N)$ противоречива.

Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

Доказательство: Имеем $\mathbf{I}MN = \mathbf{K}MN$ для любых $M, N \in \Lambda$. По определению комбинаторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$, имеем $MN = M$. Подставляя $M \equiv \mathbf{I}$, получаем $N = \mathbf{I}\ \forall N \in \Lambda$. ■

1.4. Нормальные формы

Определение 1.4.1.

- λ-выражение M называется *$\beta\eta$-нормальной формой,* если оно **не** имеет подвыражений вида $(\lambda x.\ M)N$ или $\lambda y.\ (My)$ (где $y \notin \mathrm{TV}(M)$).
- *M имеет нормальную форму N,* если $M = N$ и N — нормальная форма.

Пример 1.4.1.

- $\mathbf{I}$ находится в нормальной форме;
- $\mathbf{KI}$ имеет нормальную форму $\lambda y.\ \mathbf{I}$;
- Комбинатор $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы (доказательство позже).

Воспоминания о будущем.

- Если M и N — различные $\beta\eta$-нф, то $M \# N$
- M может иметь максимум одну нормальную форму;
- $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы;
- λ — согласованная теория.

1.5. Редукция

Замечание 1.5.1. В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x.\ x^2 + 1)3 = 10$$

можно сказать, что «10 является результатом *упрощения* выражения $(\lambda x.\ x^2 + 1)3$», но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

Определение 1.5.1.

(1) Отношение $\to$ (*редукция за один шаг*) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, такое что:
  - $(\lambda x.\ M)N \to M[x := N]$;
  - $\lambda x.\ Mx \to M$, если $x \notin \mathrm{TV}(M)$;
  - $\to$ совместимо с операциями.

(2) Отношение $\twoheadrightarrow$ (*редукция*) — это замыкание $\to$ до предпорядка: $\twoheadrightarrow = \mathrm{Preord}(\to)$;

(3) Отношение $=$ (*конгруэнтность* или *эквивалентность*) — это замыкание $\twoheadrightarrow$ до отношения эквивалентности: $= = \mathrm{Equiv}(\twoheadrightarrow)$

Определение 1.5.2.

- λ-выражения вида $(\lambda x.\ M)N$ называются *β-редексами;* соотв. отношения: $\underset{\beta}{\to}, \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}, \underset{\beta}{=}$
- λ-выражения вида $\lambda x.\ Mx$ называются *η-редексами.* соотв. отношения: $\underset{\eta}{\to}, \underset{\eta}{\twoheadrightarrow}, \underset{\eta}{=}$
- M — *нормальная форма* (или *в нормальной форме*), если M не содержит редексов.
- Пусть Δ — редекс в выражении M. Запись $M \overset{\Delta}{\to} N$ означает, что N получается из M сокращением редекса Δ: $N \equiv M[\Delta \to \Delta']$
- *Редукционный путь* — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to} M_2 \to \ldots$$

Пример 1.5.1.

- Определим $\omega_3 \equiv \lambda x.\ xxx$. Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \ldots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$\mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}x}{\to} \mathbf{I}x, \quad \mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}(\mathbf{I}x)}{\to} \mathbf{I}x$$

Утверждение 1.5.1. *Пусть M — нормальная форма. Тогда:*

(1) $\nexists N : M \to N$;

(2) $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \equiv N$.

> *Доказательство:*
>
> (1) Очевидно.
>
> (2) По определению $\twoheadrightarrow$, условие $M \twoheadrightarrow N$ влечёт два случая:
>   - $M \to K_1 \to K_2 \to \ldots \to N$ — невозможно по (1);
>   - $M \equiv N$ — искомый.
>
> q.e.d. ■

Определение 1.5.3. *Редукционный граф* выражения M (нотация $\mathrm{Gr}(M)$) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \twoheadrightarrow N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \to K\}$$

Определение 1.5.4. Пусть $\sqsupset$ — произвольное отношение на множестве X. $\sqsupset$ *обладает свойством Чёрча-Россера* (нотация $\mathrm{CR}(\sqsupset)$), если

$$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsupset x_1) \wedge (x \sqsupset x_2), \quad \exists z \in X : (x_1 \sqsupset z) \wedge (x_2 \sqsupset z).$$

Теорема 1.5.1. *Пусть $\sqsupset$ рефлексивно и обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения $\sim\, = \mathrm{Equiv}(\sqsupset)$ справедливо:*

$$x \sim y \;\Rightarrow\; \exists z : (x \sqsupset z) \wedge (y \sqsupset z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения $\sim$. Пусть $x \sim y$. Тогда возникают три случая:
- $x \sim y \;\Leftarrow\; x \sqsupset y$. Тогда положим $z \equiv y$.
- $x \sim y \;\Leftarrow\; y \sim x$. Тогда возьмём z по предположению индукции.
- $x \sim y \;\Leftarrow\; (x \sim L) \wedge (L \sim y)$. Тогда рассмотрим $z_1, z_2 \in \Lambda : (z_1 \sqsubset x, L) \wedge (z_2 \sqsubset L, y)$. Поскольку $\mathrm{CR}(\sqsupset)$, найдётся λ-выражение z, такое, что $(z_1 \sqsupset z) \wedge (z_2 \sqsupset z)$. Оно искомое.

q.e.d. ■

1.6. Теорема Чёрча-Россера

Сначала мы докажем, что отношение $\underset{\beta}{\to}$ обладает свойством Чёрча-Россера.

Лемма 1.6.1. *Пусть $\sqsupset$ — бинарное отношение на множестве X и пусть $\sqsupset' = \mathrm{Trans}(\sqsupset)$ — его транзитивное замыкание. Тогда* $\mathrm{CR}(\sqsupset) \;\Rightarrow\; \mathrm{CR}(\sqsupset')$.

Доказательство: Пусть $x \sqsupset' x_1,\; x \sqsupset' x_2$. Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] & u_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & u_2 \arrow[d, dashed] \\
w_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & z_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & z_2 \arrow[d, dashed] \\
w_2 \arrow[r, dashed] & z_3 \arrow[r, dashed] & z_4
\end{tikzcd}$$

q.e.d. ■

Определение 1.6.1. Рассмотрим бинарное отношение $\rightsquigarrow$, определённое индуктивно следующим образом:
- $M \rightsquigarrow M$;
- $M \rightsquigarrow M' \;\Rightarrow\; \lambda x.\, M \rightsquigarrow \lambda x.\, M'$;
- $M \rightsquigarrow M',\; N \rightsquigarrow N' \;\Rightarrow\; MN \rightsquigarrow M'N'$;
- $M \rightsquigarrow M',\; N \rightsquigarrow N' \;\Rightarrow\; (\lambda x.\, M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Лемма 1.6.2. *Если $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, то $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.*

Доказательство: Индукция по определению $M \rightsquigarrow M'$.

(1) $M \rightsquigarrow M' \;\Leftarrow\; M \rightsquigarrow M$. Тогда требуется доказать, что $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$. Проведём индукцию по структуре M:

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
x	N	N'	OK
y	y	y	OK
PQ	$P[...]Q[...]$	$P[...']Q[...']$	предп. инд.

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
$\lambda y.\ P$	$\lambda y.\ P[...]$	$\lambda y.\ P[...']$	аналогично

(2) $M \rightsquigarrow M' \ \Leftarrow\ \lambda y.\ P \rightsquigarrow \lambda y.\ P'$, прямое следствие $P \rightsquigarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightsquigarrow P'[x := N']$, а тогда $\lambda y.\ P[x := N] \rightsquigarrow \lambda y.\ P'[x := N']$, что и требовалось доказать.

(3) $M \rightsquigarrow M' \ \Leftarrow\ PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$ и $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \\ &\rightsquigarrow P'[x := N']Q'[x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

(4) $M \rightsquigarrow M' \ \Leftarrow\ (\lambda y.\ P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y.\ P[x := N])(Q[x := N]) \\ &\rightsquigarrow P'[x := N'][y := Q'[x := N']] \\ &\equiv P'[y := Q'][x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Лемма 1.6.3.

(1) $\lambda x.\ M \rightsquigarrow N$ влечёт $N \equiv \lambda x.\ M'$, где $M \rightsquigarrow M'$;

(2) $MN \rightsquigarrow L$ влечёт либо

- *$L \equiv M'N'$, где $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, либо*
- *$M \equiv \lambda x.\ P,\ L \equiv P'[x := N']$, где $P \rightsquigarrow P',\ N \rightsquigarrow N'$.*

Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 1.6.4. *$\rightsquigarrow$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.*

Доказательство: Пусть $M \rightsquigarrow M_1,\ M \rightsquigarrow M_2$. Проводим индукцию по определению $M \rightsquigarrow M_1$.

(1) $M \rightsquigarrow M_1 \ \Leftarrow\ M \equiv M_1$. Тогда положим $Z \equiv M_2$.

(2) $M \rightsquigarrow M_1 \ \Leftarrow\ (\lambda x.\ P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Лемма 1.6.3 позволяет рассмотреть два подслучая:

- $M_2 \equiv (\lambda x.\ P'')Q''$, где $P \rightsquigarrow P'',\ Q \rightsquigarrow Q''$. По предположению индукции существуют λ-выражения Z_P, Z_Q, такие, что

$$P' \rightsquigarrow Z_P,\ P'' \rightsquigarrow Z_P,\ Q' \rightsquigarrow Z_Q,\ Q'' \rightsquigarrow Z_Q.$$

Лемма 1.6.2 позволяет взять $Z \equiv Z_P\left[x := Z_Q\right]$ в качестве искомого (упражнение).

- $M_2 \equiv P''[x := Q'']$ — аналогично.

(3) $M \rightsquigarrow M_1 \ \Leftarrow\ PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Снова два подслучая:

- $M_2 \equiv P''Q''$, причём $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Тогда аналогично берём $Z \equiv Z_P\left[x := Z_Q\right]$.
- $P \equiv (\lambda x.\ P_1)$, $M_2 \equiv P_1''[x := Q'']$ и $P_1 \rightsquigarrow P_1''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Лемма 1.6.3 гарантирует, что $P' \equiv \lambda x.\ P_1'$, где $P_1 \rightsquigarrow P_1'$. Применяя предположение индукции, берём $Z = Z_{P_1}\left[x := Z_Q\right]$.

(4) $M \rightsquigarrow M_1 \ \Leftarrow\ \lambda x.\ P \rightsquigarrow \lambda x.\ P'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x,\ P''$. По предположению индукции возьмём $Z = \lambda x.\ Z_P$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.5. *$\underset{\beta}{\to}$ — это транзитивное замкание $\rightsquigarrow$.*

Доказательство: Очевидно по определению. ■

Теорема 1.6.1. (Чёрча-Россера):
(1) $\underset{\beta}{\to}$ *удовлетворяет свойству Ч.-Р.;*
(2) $M \underset{\beta}{=} N \Rightarrow \exists Z : \left(M \underset{\beta}{\to} Z\right) \land \left(N \underset{\beta}{\to} Z\right)$.

Доказательство: Упражнение. ■

Следствие
(1) Если M имеет β-нормальную форму N, то $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.
(2) M может иметь максимум одну нормальную форму.

Доказательство:
(1) Пусть $M \underset{\beta}{=} N$, где N — β-нормальная форма. Тогда существует λ-выражение Z, такое, что $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ и $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ (Теорема 1.5.1). Однако раз N — нормальная форма, мы заключаем, что $N \equiv Z$ (Утверждение 1.5.1), и $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.
(2) Пусть N_1, N_2 — β-нормальнве формы выражения M. Тогда $N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ и $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ для некоторого Z. Следовательно, $N_1 \equiv Z \equiv N_2$.

q.e.d. ■

Теперь мы перейдём к η-редукции.

Определение 1.6.2. Пусть $\sqsupset_1, \sqsupset_2, \sqsupset_3, \sqsupset_4$ — бинарные отношения на множестве X. Следующая диаграма,

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\sqsupset_1"] \arrow[d, dash, "\sqsupset_2"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\sqsupset_4"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\sqsupset_3"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

означает «$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsupset_1 x_1) \land (x \sqsupset_2 x_2), \quad \exists z \in X : (x_2 \sqsupset_3 z) \land (x_1 \sqsupset_4 z)$».

Замечание 1.6.1. Свойство Чёрча-Россера можно переформулировать в этой нотации.

Определение 1.6.3. Пусть $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ — два бинарных отношения на X. Мы говорим, что $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ *коммутируют*, если

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\sqsupset_1"] \arrow[d, dash, "\sqsupset_2"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\sqsupset_2"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\sqsupset_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Замечание 1.6.2. Отношение $\sqsupset$ обладает свойством Ч.-Р. $\Leftrightarrow$ $\sqsupset$ коммутирует само с собой.

Утверждение 1.6.1. (лемма Хиндли-Росена): *Пусть $\sqsupset_1, \sqsupset_2 \subset X \times X$ таковы, что*
(1) $\mathrm{CR}(\sqsupset_1), \mathrm{CR}(\sqsupset_2)$;
(2) $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ коммутируют.

Тогда $\mathrm{Trans}(\sqsupset_1 \cup \sqsupset_2)$ также обладает свойством Чёрча-Россера.

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 1.6.6. *Пусть $\sqsupset_1, \sqsupset_2$ — бинарные отношения на множестве X. Допустим также, что*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\sqsupset_1"] \arrow[d, dash, "\sqsupset_2"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\mathrm{Preord}(\sqsupset_2)"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\mathrm{Refl}(\sqsupset_1)"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Тогда отношения $\mathrm{Preord}(\sqsupset_1)$ и $\mathrm{Preord}(\sqsupset_2)$ коммутируют.

Доказательство: Диаграммный поиск (лень рисовать). ■

Лемма 1.6.7. *$\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.*

Доказательство: Так как $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow} = \mathrm{Preord}(\underset{\eta}{\rightarrow}) = \mathrm{Trans}(\mathrm{Refl}(\underset{\eta}{\rightarrow}))$, достаточно доказать утверждение для отношения $\mathrm{Refl}(\underset{\eta}{\rightarrow}) =: (\rightsquigarrow)$ (Лемма 1.6.1). Предположим теперь, что $M \rightsquigarrow M_1$ и $M \rightsquigarrow M_2$. Без ограничения общности, допустим, что все три выражения M, M_1, M_2 различны (иначе очевидно). Индукция по определению $M \rightsquigarrow M_1$:

(1) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ Px \rightsquigarrow P$. Тогда $M_2 = \lambda x.\ P'x$, где $P \rightsquigarrow P'$. Положим $Z \equiv P'$ и дело в шляпе.

(2) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow KP \rightsquigarrow KP'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда если $M_2 \equiv K'P$, $K \rightsquigarrow K'$, то положим $Z \equiv K'P'$. Если же $M_2 \equiv KP''$, $P' \rightsquigarrow P''$, то воспользуемся предположением индукции: $\exists Z_P : P', P'' \rightsquigarrow Z_P$. Положим $Z = KZ_P$.

(3) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PK \rightsquigarrow P'K$, где $P \rightsquigarrow P'$. Аналогично с предыдущим случаем.

(4) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ P \rightsquigarrow \lambda x.\ P'$, где $P \rightsquigarrow P'$.
   (a) $M_2 \equiv \lambda x.\ P''$, $P \rightsquigarrow P''$. Тогда положим $Z \equiv \lambda x.\ Z_P$, где Z_P взято из предположения индукции.
   (b) $P \equiv P_0 x$, $M_2 \equiv P_0$. Тогда $P' \equiv P'_0 x$, и мы можем положить $Z \equiv P'_0$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.8. *$\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ коммутирует с $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}$.*

Доказательство: Лемма 1.6.6 сводит доказательство к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\underset{\beta}{\rightarrow}"] \arrow[d, dash, "\underset{\eta}{\rightarrow}"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\mathrm{Refl}(\underset{\beta}{\rightarrow})"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Упражнение. ■

Теорема 1.6.2. (теорема Чёрча-Россера для $\beta\eta$-редукции):
(1) $\twoheadrightarrow$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера;
(2) $M = N \Rightarrow \exists Z : (M \twoheadrightarrow Z) \wedge (N \twoheadrightarrow Z)$.

Доказательство: Упражнение. ■

Следствие

- *Если M имеет $\beta\eta$-нормальную форму N, то $M \twoheadrightarrow N$;*
- *M может иметь максимум одну нормальную форму;*
- *Теория $\lambda\beta\eta$ согласованна;*

- *λ-выражение $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы.*

> *Доказательство:* Очевидно, применяя Утверждение 1.5.1. ■

1.7. Стандартная редукция

Определение 1.7.1.

(1) λ-выражение $M \in \Lambda$ называется *внешней нормальной формой,* если оно имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ xM_1...M_m,$$

где $n, m \geq 0$.

(2) Если M имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ (\lambda x.\ M_0)M_1...M_m,\ n \geq 0, m \geq 1,$$

то выражение $(\lambda x.\ M_0)M_1$ называется *внешним редексом.*

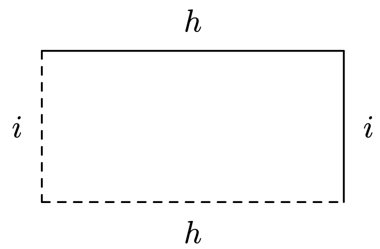
(3) $\underset{h}{\to}$ (соотв. $\underset{h}{\twoheadrightarrow}$) — редукция, в которой сокращаются только внешние редексы.

(4) Редекс Δ называется *внутренним,* если он не внешний.

(5) $\underset{i}{\to}$ (соотв. $\underset{i}{\twoheadrightarrow}$) — редукция, в которой сокращаются только внутренние редексы.

Определение 1.7.2. Пусть M — λ-выражение. Редекс Δ_1 в M *левее* редекса Δ_2, если первая «λ» в Δ_1 левее, чем первая «λ» в Δ_2.

Лемма 1.7.1. *Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда существует $Z \in \Lambda$, такое, что $M \underset{h}{\twoheadrightarrow} Z \underset{i}{\twoheadrightarrow} N$.*

> *Доказательство (эскиз):* Ключ в том, что внешняя и внутренняя редукции коммутируют:
>
> 
>
>
> Редукция $M \twoheadrightarrow N$ представляется как
>
> $$M \underset{h}{\twoheadrightarrow} M_1 \underset{i}{\twoheadrightarrow} M_2 \underset{h}{\twoheadrightarrow} M_3 \underset{i}{\twoheadrightarrow} ... \underset{i}{\twoheadrightarrow} N.$$
>
> Переставляя редукции, получаем искомое разбиение. ■

Определение 1.7.3. Пусть σ — это редукционная последовательность, то есть

$$\sigma : M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to} M_2 \overset{\Delta_2}{\to} \cdots.$$

σ называется *стандартной,* если $\forall i, \forall j < i$: Δ_i — не результат сокращения редекса, находящегося левее Δ_j. Стандартная редукция обозначается $M \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$.

Теорема 1.7.1. *Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда $M \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$.*

> *Доказательство:* Имеем $M \underset{h}{\twoheadrightarrow} Z \underset{i}{\twoheadrightarrow} N$ для какого-то $Z \in \Lambda$. Индукция по длине выражения N.
>
> (1) $N = x \in V$. Тогда $Z \equiv x$ и доказательство завершено.
>
> (2) $N \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ N_0 N_1...N_m$, где $n + m > 0$. Тогда Z должно иметь форму
>
> $$\lambda x_1,...,x_n.\ Z_0 Z_1...Z_m,$$

где $Z_i \twoheadrightarrow N_i$ при $0 \leqslant i < m$. По предположению индукции имеем $Z_i \underset{s}{\twoheadrightarrow} N_i$. Тогда $Z \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$ и доказательство завершено. ■

1.8. Редукционные стратегии

Определение 1.8.1. (редукционная стратегия): Отображение $F : \Lambda \to \Lambda$ называется *редукционной стратегией,* если для любого $M \in \Lambda$ выполняется редукция

$$M \twoheadrightarrow F(M).$$

Определение 1.8.2.

(1) Пусть F — редукционная стратегия. F*-редукционный путь* выражения M — это последовательность

$$M,\ F(M),\ F^2(M),\ \dots$$

(2) F называется *нормализующей,* если лдя любого $M \in \Lambda$, имеющего нф, $F^n(M)$ находится в нормальной форме для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.8.3. *Крайняя левая редукционная стратегия,* F_l, определяется следующим образом:

- $F_l(M) = M$, если M в нормальной форме.
- $F_l(M) = M'$, если $M \overset{\Delta}{\to} M'$, где Δ — крайний левый редекс в M.

Теорема 1.8.1. (о нормализации): F_l — *нормализующая стратегия.*

Доказательство: Пусть выражение M имеет нормальную форму N. Тогда по теореме Чёрча-Россера имеем $M \twoheadrightarrow N$. Тогда по предыдущей теореме есть стандартная редукционная последовательность

$$\sigma : M \equiv M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to}\to \cdots \overset{\Delta_{n-1}}{\to} M_n \equiv N.$$

Утверждается, что σ — это редукционный путь стратегии F_l. Допустим противное. Тогда на каком-то шагу редекс Δ_i — не крайний левый, а значит он уже не сможет сократиться в дальнейшем. Тогда N — не нормальная форма. Противоречие. ■

2. λ-представимость

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. Пусть $A \equiv \lambda x,y.\ y(xxy)$. Комбинатор $\mathbf{\Theta} \equiv AA$ называется *комбинатором Тьюринга.*

Упражнение Доказать, что $\mathbf{\Theta}$ — комбинатор фиксированной точки, то есть $\mathbf{\Theta}F \twoheadrightarrow F(\mathbf{\Theta}F)$ для любого $F \in \Lambda$.

Определение 2.1.2.

(1) $\underline{\text{true}} \equiv \mathsf{T} \equiv \lambda x,y.\ x$

(2) $\underline{\text{false}} \equiv \mathsf{F} \equiv \lambda x,y.\ y$

(3) Пусть $B \in \Lambda$. Тогда запись

$$\underline{\text{if}}\ B\ \underline{\text{then}}\ M\ \underline{\text{else}}\ N$$

обозначает λ-выражение BMN.

Определение 2.1.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. *Уподядоченная пара* $[M, N]$ определяется как

$$[M, N] \equiv \lambda z.\ zMN.$$

Определим также $(P)_0 \equiv P\mathsf{T},\ (P)_1 \equiv P\mathsf{F}$.

Упражнение Показать, что $([M, N])_0 \twoheadrightarrow M,\ ([M, N])_1 \twoheadrightarrow N$. Правда ли, что $\left[(P)_0, (P)_1\right] = P$?

Определение 2.1.4. (конечные кортежи):

$$[M] \equiv M, \qquad [M_0, M_1, ..., M_{n+1}] \equiv [M_0, [M_1, ..., M_{n+1}]],$$
$$\langle M_0, M_1, ..., M_n \rangle \equiv \lambda z.\ z M_0 M_1 ... M_n$$

Определение 2.1.5.

(1) $$\pi_i^n \equiv \lambda z.\ z\mathbf{F}^{\sim i}\mathbf{T}, \quad 0 \leqslant i < n,$$
$$\pi_n^n \equiv \lambda z.\ z\mathbf{F}^{\sim n}$$

(2) $\mathbf{P}_i^n \equiv \lambda z.\ z(\lambda x_1, x_2, ..., x_n.\ x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant n$

Упражнение Показать, что

$$\pi_i^n [M_0, M_1, ..., M_n] \twoheadrightarrow M_i, \qquad \mathbf{P}_i^n \langle M_0, M_1, ..., M_n \rangle \twoheadrightarrow M_i$$

Теорема 2.1.1. (обобщённая теорема о неподвижной точке): *Пусть $F_1, F_2, ..., F_n \in \Lambda$. Тогда существуют выражения $X_1, X_2, ..., X_n \in \Lambda$, такие, что*

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 X_1 X_2 ... X_n, \\ X_2 &= F_2 X_1 X_2 ... X_n, \\ &\vdots \\ X_n &= F_n X_1 X_2 ... X_n. \end{aligned}$$

Доказательство: Определим выражения

$$\begin{aligned} M &\equiv \lambda f, x.\ f(\pi_1^n x)(\pi_2^n x)...(\pi_n^n x), \\ F &\equiv \lambda x.\ \langle M F_1 x, M F_2 x, ..., M F_n x \rangle. \end{aligned}$$

Тогда по теореме о неподвижной точке найдётся выражение $X \in \Lambda :\ X = FX$. Наконец, положим $X_i \equiv \pi_i^n X$. Действительно,

$$X_i \equiv \pi_i^n X = M F_i X = F_i X_1 X_2 ... X_n,$$

q.e.d. ∎

Определение 2.1.6. Пусть $M, N \in \Lambda$. *Композиция* $M \circ N$ определяется как $\lambda x.\ M(Nx)$, где $x \notin \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$.

Определение 2.1.7.

(1) *Числа Барендрегта* (или просто λ-числа) — это следующая последовательность λ-выражений:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \mathbf{I}, \qquad \ulcorner n+1 \urcorner \equiv [\mathbf{F}, \ulcorner n \urcorner]$$

Заметим, что все λ-числа — различные нормальные формы.

(2) Определим

$$\mathbf{S}^+ \equiv \lambda z.\ [F, z], \qquad \mathbf{P}^- \equiv \lambda z.\ z\mathbf{F}, \qquad \mathbf{Zero} \equiv \lambda z.\ z\mathbf{T}$$

Упражнение $\mathbf{S}^+(\ulcorner n \urcorner) = \ulcorner n+1 \urcorner, \quad \mathbf{P}^-(\ulcorner n+1 \urcorner) = \ulcorner n \urcorner, \quad \mathbf{Zero}\ (\ulcorner 0 \urcorner) = \mathbf{T}, \quad \mathbf{Zero}\ (\ulcorner n+1 \urcorner) = \mathbf{F}$

Определение 2.1.8. Пусть $P : \mathbb{N}_0 \to \{\text{true}, \text{false}\}$ — предикат на натуральных числах. Запись

$$\mu m[P(m)]$$

обозначает наименьшее число m, такое, что выполняется $P(m)$, если такое число существует. В противном случае $\mu m[P(m)]$ неопределено.

2.2. Рекурсивные функции

Определение 2.2.1.

(1) *Числовая функция* — это отображение $\mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$, для некоторого $p \in \mathbb{N}$.

(2) Числовая функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$ называется λ-представимой, если существует выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, ..., n_p \in \mathbb{N}_0 : \qquad F \ulcorner n_1 \urcorner \ \ulcorner n_2 \urcorner \ ... \ \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, n_2, ..., n_p) \urcorner$$

(3) Если $\vec{n} = n_1, n_2, ..., n_p$, то положим

$$\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner n_1 \urcorner, \ulcorner n_2 \urcorner, ..., \ulcorner n_p \urcorner.$$

Определение 2.2.2. (первичные функции): Функции $U_i^p, \ S^+, \ Z$ называются *первичными:*

$$U_i^p(n_0, n_1, ..., n_p) = n_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant p,$$
$$S^+(n) = n + 1, \qquad Z(n) = 0.$$

Определение 2.2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — некий класс числовых функций.

(1) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно суперпозиции,* если для любых $\chi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_m \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi\Big(\psi_1(\vec{n}), \psi_2(\vec{n}), ..., \psi_{m(\vec{n})}\Big)$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно примитивной рекурсии,* если лдя любых $\chi, \psi \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$
$$\varphi(k + 1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно минимизации,* если для любой функции $\chi \in \mathcal{A}$: $\forall \vec{n} \ \exists m \quad \chi(\vec{n}, m) = 0$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(4) Класс $\mathcal{R}$ *рекурсивных функций* – это наименьший класс числовых функций, который содержит все первичные функции, а также замкнут относительно суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

2.3. Теорема Клини

Лемма 2.3.1. *Все первичные функции λ-представимы.*

Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 2.3.2. *λ-представимые функции замкнуты относительно суперпозиции.*

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 2.3.3. *λ-представимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.*

Доказательство: Пусть функция φ задаётся соотношениями

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$
$$\varphi(k + 1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),$$

где χ и ψ λ-представлены выражениями G и H соответственно. Рассмотрим выражение

$$X \equiv \lambda f.\ \lambda x,\vec{y}.\ (\underline{\text{if}}\ \textbf{Zero}\ x\ \underline{\text{then}}\ G\vec{y}\ \underline{\text{else}}\ H\,(f(\mathbf{P}^{-}x)\vec{y})\,(\mathbf{P}^{-}x)\,\vec{y}).$$

λ-выражение $F \equiv \mathbf{Y}X$ представляет функцию φ (упражнение). ■

Определение 2.3.1. Пусть $P \in \Lambda$. Определим

$$H_P \equiv \mathbf{\Theta}(\lambda h,z.\ \underline{\text{if}}\ Pz\ \underline{\text{then}}\ z\ \underline{\text{else}}\ h(\mathbf{S}^{+}z)),$$
$$\mu P \equiv H_P\ulcorner 0\urcorner.$$

Утверждение 2.3.1. *Пусть $P \in \Lambda$ таково, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ либо $P\ulcorner n\urcorner = \mathbf{T}$, либо $P\ulcorner n\urcorner = \mathbf{F}$. Тогда:*
(1) $H_P z \twoheadrightarrow \underline{\text{if}}\ Pz\ \underline{\text{then}}\ z\ \underline{\text{else}}\ H_P(\mathbf{S}^{+}z)$;
(2) $\mu P = \ulcorner \mu n[P\ulcorner n\urcorner = \mathbf{T}]\urcorner$ (если минимум существует).

Доказательство:
(1) Упражнение.
(2) Допустим, что $\mu n[P\ulcorner n\urcorner = \mathbf{T}] = m$. Тогда имеем

$$H_P\ulcorner m\urcorner = \ulcorner m\urcorner,$$
$$\forall n < m: \quad H_P\ulcorner n\urcorner = H_P\ulcorner n+1\urcorner = H_P\ulcorner n+2\urcorner = \ldots = H_P\ulcorner m\urcorner = \ulcorner m\urcorner.$$

Отсюда получаем, что $\mu P \equiv H_P\ulcorner 0\urcorner = \ulcorner m\urcorner$,

q.e.d. ■

Лемма 2.3.4. *λ-представимые функции замкнуты относительно минимизации.*

Доказательство: Пусть

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0],$$

где $G \in \Lambda$ представляет функцию χ. Определим $F \in \Lambda$ как

$$F\vec{x} = \mu(\lambda y.\ \textbf{Zero}\ (G\vec{x}y)).$$

По предыдущему утверждению, F представляет функцию φ. ■

Следствие *Все рекурсивные функции λ-представимы.*

Лемма 2.3.5. *Пусть φ λ-представляется выражением F. Тогда для всех $\vec{n}, m \in \mathbb{N}_0$*

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow F\ulcorner\vec{n}\urcorner = \ulcorner n\urcorner$$

Доказательство:
($\Longrightarrow$) Очевидно по определению.
($\Longleftarrow$) Предположим, что $F\ulcorner\vec{n}\urcorner = \ulcorner m\urcorner$. Тогда $\ulcorner\varphi(\vec{n})\urcorner = \ulcorner m\urcorner$. Так как λ-числа — это различные нормальные формы, по теореме Чёрча-Россера имеем $\varphi(\vec{n}) = m$,

q.e.d. ■

Теорема 2.3.1. (Клини): *Функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$ рекурсивна $\Longleftrightarrow$ φ λ-представима.*

Доказательство (эскиз):
($\Longrightarrow$) Очевидно.
($\Longleftarrow$) Идея в том, чтобы воспользоваться тем фактом, что λ-теория сама по себе рекурсивна (λ-выражения рекурсивно определены). Для этого мы строим биекцию $g : \Lambda \leftrightarrow \mathbb{N}_0 : g^{-1}$. Далее мы определяем ряд рекурсивных функций:

(1) $T : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : T(m) = g(\ulcorner m \urcorner)$.
(2) $T^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : T^{-1}(g(\ulcorner m \urcorner)) = m$
(3) $\mathrm{App} : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{App}(n_1, n_2, ..., n_k) = g(g^{-1}(n_1) \cdot g^{-1}(n_2) \cdot ... \cdot g^{-1}(n_k))$
(4) $\mathrm{Red} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{Red}(g(M)) = g(N)$, где N — нормальная форма M (если таковая существует).

Далее, рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$, представленную λ-выражением F. Пусть $n_1, n_2, ..., n_p$ — набор аргументов. Пусть $f = g(F)$. Определим φ' как $T^{-}1 \circ \mathrm{Red} \circ \mathrm{Appl} \circ$

$$\begin{aligned}
&n_1, n_2, ..., n_p \\
&\downarrow (T) \\
&m_1, m_2, ..., m_p \\
&\downarrow (\mathrm{App}) \\
&m = \mathrm{Appl}\left(f, m_1, ..., m_p\right) \\
&\downarrow (\mathrm{Red}) \\
&r = \mathrm{Red}(m) \\
&\downarrow (T^{-1}) \\
&s = T^{-1}(r)
\end{aligned}$$

Будучи композицией рекурсивных функций, функция $\varphi' : n_1, n_2, ..., n_p \mapsto s$ рекурсивна. Более того, она совпадает с φ по предыдущей лемме. ■

2.4. Числа Чёрча

Определение 2.4.1. *Числа Чёрча* — это следующая последовательность λ-выражений:

$$c_0 \equiv \lambda f,x.\ x, \qquad c_{n+1} \equiv \lambda f,x.\ f(c_n f x).$$

В явном виде, $c_n \equiv \lambda f.\ f^n$.

Утверждение 2.4.1. *Сущетвуют λ-выражения H, H^{-1}, такие, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$*

$$H \ulcorner n \urcorner = c_n, \qquad H^{-1} c_n = \ulcorner n \urcorner.$$

Доказательство: Пусть $S_c^+ \equiv \lambda a,b,c.\ b(abc)$. Очевидно, что $S_c^+ c_n = c_{n+1}$. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}
H &\equiv \lambda x.\ \underline{\text{if}}\ \mathbf{Zero}\ x\ \underline{\text{then}}\ c_0\ \underline{\text{else}}\ S_c^+(H(\mathbf{P}^- x)), \\
H^{-1} &\equiv \lambda x.\ x \mathbf{S}^+ \ulcorner 0 \urcorner.
\end{aligned}$$

Очевидно, что эти выражения являются искомыми. ■

Следствие *Пусть $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$. Тогда φ λ-представима относительно чисел Чёрча $\iff$ φ рекурсивна.*

Доказательство: Упражнение. ■