

Материал курса

λ -исчисление, 2024

Содержание

1. Конверсия и редукция	2
1.1. Основные понятия	2
1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия	3
1.3. Комбинаторы и согласованность	5
1.4. Нормальные формы	5
1.5. Редукция	6
1.6. Теорема Чёрча-Россера	7
1.7. Стандартная редукция	12
1.8. Редукционные стратегии	13
2. λ-Представимость	13
2.1. Основные понятия	13
2.2. Рекурсивные функции	15
2.3. Теорема Клини	15
2.4. Числа Чёрча	17
2.5. Числовые системы	18
3. Теорема о неразрешимости	19
Библиография	21

1. Конверсия и редукция

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. Рассмотрим счётное множество $V = \{v, v', v'', \dots\}$. Элементы этого множества будут называться *переменными*. Множество λ -выражений, Λ , — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- (2) $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$; (абстракция, морально: определение функции)
- (3) $M \in \Lambda, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$. (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

Пример 1.1.1. λ -выражения в формальной нотации:

$$\begin{aligned} &v'; \\ &(vv'); \\ &(\lambda v(v'v)); \\ &((\lambda v(v'v))v''); \\ &(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v'''); \end{aligned}$$

Нотация

- (1) x, y, z, \dots обозначают произвольные переменные из множества V .
- (2) M, N, K, \dots обозначают произвольные λ -выражения из Λ .
- (3) Внешние скобки опускаются: $(\lambda x(yz)) \rightarrow \lambda x. (yz)$.
- (4) Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda \dots (\lambda x_n M) \dots)) \rightarrow \lambda x_1, x_2, \dots, x_n. M \rightarrow \lambda \vec{x}. M$$

- (5) Многократная комбинация сокращается:

$$((\dots((M_1 M_2) M_3) \dots) M_n) N \rightarrow M_1 M_2 \dots M_n N \rightarrow \vec{M} N$$

- (6) Комбинация берёт приоритет над абстракцией: $\lambda x. (yz) \rightarrow \lambda x. yz$

Определение 1.1.2. Пусть M — λ -выражение. Множества $TV(M)$, $FV(M)$, $BV(M) \subset V$ определяются индуктивно:

M	$TV(M)$	$FV(M)$	$BV(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	\emptyset
$\lambda x. N$	$\{x\} \cup TV(N)$	$FV(N) \setminus \{x\}$	$\{x\} \cup BV(N)$
NK	$TV(N) \cup TV(K)$	$FV(N) \cup FV(K)$	$BV(N) \cup BV(K)$

Замечание 1.1.1. В данный момент существуют не вполне осмысленные λ -выражения. Так, в выражении $(\lambda x. xy)x$ переменная x выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении $\lambda x. \lambda x. xx$ переменная x связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить заменой связанных переменных: $(\lambda x. xy)x \rightarrow (\lambda u. uy)x$, $\lambda x. \lambda x. xx \rightarrow \lambda x. \lambda u. uu$. Сейчас мы формализуем эту идею.

Определение 1.1.3. Пусть \sqsubset — бинарное отношение на множестве Λ . Тогда \sqsubset называется *совместимым с операциями*, если:

$$\begin{aligned} M \sqsubset N &\Rightarrow \lambda x. M \sqsubset \lambda x. N, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow ZM \sqsubset ZN, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow MZ \sqsubset NZ. \end{aligned}$$

Определение 1.1.4. Тожественное равенство (\equiv) обозначает полностью идентичный состав символов: $\lambda x. xy \not\equiv \lambda u. uy$.

Определение 1.1.5. Отношение α -конгруэнтности ($\stackrel{\alpha}{\equiv}$) на Λ — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $M \stackrel{\alpha}{\equiv} M$;
- (2) $\lambda x. M \stackrel{\alpha}{\equiv} \lambda y. (M[x \rightarrow y])$, при условии что $y \notin \text{TV}(M)$;
- (3) $\stackrel{\alpha}{\equiv}$ совместимо с операциями.

Определение 1.1.6. Пусть M — λ -выражение. M называется *корректным* в следующих случаях:

- (1) $M \equiv x \in V$;
- (2) $M \equiv \lambda x. N$, причём N корректно, а также $x \notin \text{BV}(N)$;
- (3) $M \equiv NK$, причём N, K корректны, а также $\text{BV}(N) \cap \text{FV}(K) = \emptyset$ и $\text{FV}(N) \cap \text{BV}(K) = \emptyset$.

Упражнение Доказать, что если M корректно, то $\text{FV}(M) \cap \text{BV}(M) = \emptyset$, $\text{FV}(M) \cup \text{BV}(M) = \text{TV}(M)$.

Упражнение Пусть M — λ -выражение. Доказать, что существует корректное λ -выражение N , такое, что $M \stackrel{\alpha}{\equiv} N$.

Договорённость (правило переменных): Пусть λ -выражения M_1, M_2, \dots, M_n выступают в едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что все комбинации этих выражений корректны. Более того, с данного момента мы будем факторизовать множество Λ по отношению λ -конгруэнтности, то есть $M \equiv N \Leftrightarrow M \stackrel{\alpha}{\equiv} N$.

Определение 1.1.7. λ -выражение M называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если $\text{FV}(M) = \emptyset$. Λ^0 обозначает множество всех замкнутых λ -выражений.

Определение 1.1.8. M является *подвыражением* N ($M \subset N$), если M лежит во множестве $\text{Sub}(N)$:

N	$\text{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x. K$	$\{\lambda x. K\} \cup \text{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\text{Sub}(K_1) \cup \text{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

Определение 1.1.9. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда

- $F^0 M \equiv M$; $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $FM^{\sim 0} \equiv F$; $FM^{\sim n+1} \equiv (FM^{\sim n})M$

1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия

Определение 1.2.1. Пусть $M \in \Lambda$, $x \notin \text{BV}(M)$. Пусть также $N \in \Lambda$. Результат подстановки N вместо x , $M[x := N]$, определяется индуктивно:

$$\begin{aligned}
 x[x := N] &\equiv N; \\
 y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \neq x; \\
 (\lambda y. M')[x := N] &\equiv \lambda y. (M'[x := N]); \\
 (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]).
 \end{aligned}$$

Замечание 1.2.1. Рассмотрим $M \equiv \lambda y. x$, $N \equiv yy$. Тогда по предыдущему определению мы получаем $M[x := N] \equiv \lambda y. yy$, что настораживает, ведь $M \equiv \lambda y. x \stackrel{\alpha}{=} \lambda u. x \equiv M'$, тогда как

$$M[x := N] \equiv \lambda y. yy \not\stackrel{\alpha}{=} \lambda u. yy \equiv M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь $BV(M) \cap FV(N) = \{y\} \neq \emptyset$.

Упражнение Доказать, что оператор подстановки уважает α -конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left. \begin{array}{l} M \stackrel{\alpha}{=} M' \\ N \stackrel{\alpha}{=} N' \end{array} \right\} \Rightarrow M[x := N] \stackrel{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

Подсказка: очевидно, что $M[x := N] \stackrel{\alpha}{=} M'[x := N]$. Остаётся доказать индукцией по структуре M , что $M[x := N] \stackrel{\alpha}{=} M[x := N']$.

Лемма 1.2.1. (о подстановке): Пусть $M, N, L \in \Lambda$. Тогда если $x \neq y$ и $x \notin FV(L)$, то

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре λ -выражения M .

(1) База: $M \equiv u \in V$. Тогда рассмотрим три случая:

- $u \equiv x$. Тогда обе части тождественно равны $N[y := L]$, так как $x \neq y$.
- $u \equiv y$. Тогда обе части равны L , так как $L[x := \dots] = L$, ведь $x \notin FV(L)$.
- $u \neq x, y$. Тогда обе части равны u .

(2) Переход.

- $M \equiv \lambda z. M'$. По правилу переменных и определению оператора подстановки мы имеем $z \notin FV(NL)$ и $z \neq x, y$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} (\lambda z. M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z. M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z. M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z. M')[y := L][x := N[y := L]]. \end{aligned}$$

- $M \equiv M_1 M_2$. Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

Определение 1.2.2. ($\beta\eta$ -конверсия): Отношение $\beta\eta$ -конверсии ($=$) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $(\lambda x. M)N = M[x := N]$; (β -конверсия)
- (2) $\lambda x. Mx = M$, при условии что $x \notin TV(M)$; (η -конверсия)
- (3) $=$ — отношение эквивалентности;
- (4) $=$ совместимо с операциями.

Если $M = N$, мы говорим, что « M равно N », или « M конвертируется в N ». Запись « $\lambda \vdash M = N$ » означает, что конверсию $M = N$ можно вывести из вышеуказанных правил.

Теорема 1.2.1. (о неподвижной точке): $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : FX = X$.

Доказательство: Пусть $W \equiv \lambda x. F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. F(xx))W = F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

Утверждение 1.2.1. (fallacy): $\forall M, N \in \Lambda : \lambda \vdash M = N$

Доказательство: Рассмотрим $F \equiv \lambda x, y. yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))M)N = (\lambda y. yM)N = NM.$$

В частности, $Fyx = xy$. Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))y)x = (\lambda y. yy)x = xx.$$

Тогда $xy = xx$, а значит $F_1 \equiv \lambda x, y. xy = \lambda x, y. xx \equiv F_2$. Теперь для любого $M \in \Lambda$ имеем

$$M = (\lambda x. x)M = F_1(\lambda x. x)M = F_2(\lambda x. x)M = (\lambda x. x)(\lambda x. x) = (\lambda x. x),$$

и по транзитивности $M = (\lambda x. x) = N$ для любых $M, N \in \Lambda$. В чём ошибка? ■

Лемма 1.2.2. Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если $M = M'$, $N = N'$, то $M[x := N] = M'[x := N']$.

Доказательство: Пусть $M = M'$, $N = N'$. Тогда

$$M[x := N] = (\lambda x. M)N = (\lambda x. M')N = (\lambda x. M')N' = M'[x := N'].$$

q.e.d. ■

1.3. Комбинаторы и согласованность

Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$
 - $\mathbf{K} \equiv \lambda x, y. x$
 - $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x, y. y$
 - $\mathbf{S} \equiv \lambda x, y, z. xz(yz)$
 - $\mathbf{Y} \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$ — комбинатор неподвижной точки: $\forall F \in \Lambda : F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$.
- Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. Рассмотрим λ -выражение M , определённое рекуррентной формулой:

$$Mx \equiv FxM.$$

Определим $G \equiv \lambda y. \lambda x. Fxy$. Тогда M приобретает явную форму: $M \equiv \mathbf{Y}G$ (упражнение).

Определение 1.3.2.

- (1) Выражение вида $M = N$ называется *равенством*;
- (2) Равенство $M = N$ называется *замкнутым*, если $M, N \in \Lambda^0$;
- (3) Пусть \mathcal{T} — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие λ -теории). Тогда \mathcal{T} называется *согласованной* (нотация $\text{Con}(\mathcal{T})$) если \mathcal{T} **не** доказывает все замкнутые равенства. В противном случае \mathcal{T} называется *противоречивой*.
- (4) Если \mathcal{T} — это набор равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, полученную добавлением равенств из \mathcal{T} к стандартному списку аксиом $\beta\eta$ -конверсии.

Определение 1.3.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда M и N называются *несовместимыми* (нотация $M \# N$), если теория $\lambda + (M = N)$ противоречива.

Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

Доказательство: Имеем $\mathbf{I}MN = \mathbf{K}MN$ для любых $M, N \in \Lambda$. По определению комбинаторов \mathbf{I} и \mathbf{K} , имеем $MN = M$. Подставляя $M \equiv \mathbf{I}$, получаем $N = \mathbf{I} \forall N \in \Lambda$. ■

1.4. Нормальные формы

Определение 1.4.1.

- (1) λ -выражение M называется $\beta\eta$ -нормальной формой, если оно **не** имеет подвыражений вида $(\lambda x. M)N$ или $\lambda y. (My)$ (где $y \notin \text{TV}(M)$).
- (2) M имеет нормальную форму N , если $M = N$ и N — нормальная форма.

Пример 1.4.1.

- I находится в нормальной форме;
- KI имеет нормальную форму $\lambda y. I$;
- Комбинатор $\Omega = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы (доказательство позже).

Воспоминания о будущем.

- (1) M может иметь максимум одну нормальную форму;
- (2) $\Omega = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы;
- (3) λ — согласованная теория.

1.5. Редукция

Замечание 1.5.1. В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x. x^2 + 1)3 = 10$$

можно сказать, что «10 является результатом упрощения выражения $(\lambda x. x^2 + 1)3$ », но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

Определение 1.5.1.

- (1) Отношение \rightarrow (редукция за один шаг) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, такое что:
 - $(\lambda x. M)N \rightarrow M[x := N]$;
 - $\lambda x. Mx \rightarrow M$, если $x \notin \text{TV}(M)$;
 - \rightarrow совместимо с операциями.
- (2) Отношение \twoheadrightarrow (редукция) — это замыкание \rightarrow до предпорядка: $\twoheadrightarrow = \text{Preord}(\rightarrow)$;
- (3) Отношение $=$ (конгруэнтность или эквивалентность или равенство) — это замыкание \twoheadrightarrow до отношения эквивалентности: $(=) = \text{Equiv}(\twoheadrightarrow)$

Определение 1.5.2.

- (1) λ -выражения вида $(\lambda x. M)N$ называются β -редексами; соотв. отношения: $\xrightarrow{\beta}, \twoheadrightarrow_{\beta}, \equiv_{\beta}$
- (2) λ -выражения вида $\lambda x. Mx$ называются η -редексами. соотв. отношения: $\xrightarrow{\eta}, \twoheadrightarrow_{\eta}, \equiv_{\eta}$
- (3) M — $(\beta\eta)$ -нормальная форма (или в нормальной форме), если M не содержит $(\beta\eta)$ -редексов.
- (4) Пусть Δ — редекс в выражении M . Запись $M \xrightarrow{\Delta} N$ означает, что N получается из M сокращением редекса Δ : $N \equiv M[\Delta \rightarrow \Delta']$
- (5) Редукционный путь — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$\sigma : M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \rightarrow \dots$$

Пример 1.5.1.

- Определим $\omega_3 \equiv \lambda x. xxx$. Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \dots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$I(Ix) \xrightarrow{Ix} Ix, \quad I(Ix) \xrightarrow{I(Ix)} Ix$$

Утверждение 1.5.1. Пусть M — нормальная форма. Тогда:

- (1) $\nexists N : M \rightarrow N$;
- (2) $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \equiv N$.

Доказательство:

- (1) Очевидно.
- (2) По определению \rightarrow , условие $M \rightarrow N$ влечёт два случая:
 - $M \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow N$ — невозможно по (1);
 - $M \equiv N$ — искомый.

q.e.d. ■

Определение 1.5.3. Редукционный граф выражения M (нотация $\text{Gr}(M)$) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \rightarrow N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \rightarrow K\}$$

Определение 1.5.4. Пусть \sqsubset — произвольное отношение на множестве X . \sqsubset обладает свойством Чёрча-Россера (нотация $\text{CR}(\sqsubset)$), если

$$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsubset x_1) \wedge (x \sqsubset x_2), \quad \exists z \in X : (x_1 \sqsubset z) \wedge (x_2 \sqsubset z).$$

Теорема 1.5.1. (о минимальном элементе): Пусть \sqsubset рефлексивно и обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения $\sim = \text{Equiv}(\sqsubset)$ справедливо:

$$x \sim y \Rightarrow \exists z : (x \sqsubset z) \wedge (y \sqsubset z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения \sim . Пусть $x \sim y$. Тогда возникают три случая:

- $x \sim y \Leftarrow x \sqsubset y$. Тогда положим $z \equiv y$.
- $x \sim y \Leftarrow y \sim x$. Тогда возьмём z по предположению индукции.
- $x \sim y \Leftarrow (x \sim L) \wedge (L \sim y)$. Тогда рассмотрим $z_1, z_2 \in \Lambda : (z_1 \sqsubset x, L) \wedge (z_2 \sqsubset L, y)$. Поскольку $\text{CR}(\sqsubset)$, найдётся λ -выражение z , такое, что $(z_1 \sqsubset z) \wedge (z_2 \sqsubset z)$. Оно искомое.

q.e.d. ■

1.6. Теорема Чёрча-Россера

Сначала мы докажем, что отношение \rightarrow_β обладает свойством Чёрча-Россера.

Лемма 1.6.1. Пусть \sqsubset — бинарное отношение на множестве X и пусть $\sqsubset' = \text{Trans}(\sqsubset)$ — его транзитивное замыкание. Тогда $\text{CR}(\sqsubset) \Rightarrow \text{CR}(\sqsubset')$.

Доказательство: Пусть $x \sqsubset' x_1, x \sqsubset' x_2$. Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \longrightarrow & u_1 & \longrightarrow & u_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 w_1 & \dashrightarrow & z_1 & \dashrightarrow & z_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 w_2 & \dashrightarrow & z_3 & \dashrightarrow & z_4
 \end{array}$$

q.e.d. ■

Определение 1.6.1. Рассмотрим бинарное отношение \rightsquigarrow , определённое индуктивно следующим образом:

- (1) $M \rightsquigarrow M$;
- (2) $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x. M \rightsquigarrow \lambda x. M'$;
- (3) $M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$;

$$(4) M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x. M)N \rightsquigarrow M'[x := N'].$$

Лемма 1.6.2. Если $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, то $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Доказательство: Индукция по определению $M \rightsquigarrow M'$.

(1) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Тогда требуется доказать, что $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$. Проведём индукцию по структуре M :

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
x	N	N'	ОК
y	y	y	ОК
PQ	$P[\dots]Q[\dots]$	$P[\dots']Q[\dots']$	предп. инд.
$\lambda y. P$	$\lambda y. P[\dots]$	$\lambda y. P[\dots']$	аналогично

(2) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y. P \rightsquigarrow \lambda y. P'$, прямое следствие $P \rightsquigarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightsquigarrow P'[x := N']$, а тогда $\lambda y. P[x := N] \rightsquigarrow \lambda y. P'[x := N']$, что и требовалось доказать.

(3) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$ и $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \\ &\rightsquigarrow P'[x := N']Q'[x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

(4) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y. P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y. P[x := N])(Q[x := N]) \\ &\rightsquigarrow P'[x := N'] [y := Q'[x := N']] \\ &\equiv P'[y := Q'] [x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Лемма 1.6.3.

(1) $\lambda x. M \rightsquigarrow N$ влечёт $N \equiv \lambda x. M'$, где $M \rightsquigarrow M'$;

(2) $MN \rightsquigarrow L$ влечёт либо

- $L \equiv M'N'$, где $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, либо
- $M \equiv \lambda x. P$, $L \equiv P'[x := N']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $N \rightsquigarrow N'$.

Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 1.6.4. \rightsquigarrow удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.

Доказательство: Пусть $M \rightsquigarrow M_1$, $M \rightsquigarrow M_2$. Проводим индукцию по определению $M \rightsquigarrow M_1$.

(1) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow M \equiv M_1$. Тогда положим $Z \equiv M_2$.

(2) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow (\lambda x. P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Лемма 1.6.3 позволяет рассмотреть два подслучая:

- $M_2 \equiv (\lambda x. P'')Q''$, где $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. По предположению индукции существуют λ -выражения Z_P, Z_Q , такие, что

$$P' \rightsquigarrow Z_P, P'' \rightsquigarrow Z_P, Q' \rightsquigarrow Z_Q, Q'' \rightsquigarrow Z_Q.$$

Лемма 1.6.2 позволяет взять $Z \equiv Z_P[x := Z_Q]$ в качестве искомого (упражнение).

• $M_2 \equiv P''[x := Q'']$ — аналогично.

(3) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Снова два подслучая:

• $M_2 \equiv P''Q''$, причём $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Тогда аналогично берём $Z \equiv Z_P[x := Z_Q]$.

• $P \equiv (\lambda x. P_1)$, $M_2 \equiv P_1''[x := Q'']$ и $P_1 \rightsquigarrow P_1''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Лемма 1.6.3 гарантирует, что $P' \equiv \lambda x. P_1'$, где $P_1 \rightsquigarrow P_1'$. Применяя предположение индукции, берём $Z = Z_{P_1}[x := Z_Q]$.

(4) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x. P \rightsquigarrow \lambda x. P'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x. P''$. По предположению индукции возьмём $Z = \lambda x. Z_P$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.5. $\xrightarrow[\beta]$ — это транзитивное замыкание \rightsquigarrow .

| Доказательство: Очевидно по определению. ■

Теорема 1.6.1. (Чёрча-Россера):

(1) $\xrightarrow[\beta]$ удовлетворяет свойству Ч.-Р.;

(2) $M \equiv N \Rightarrow \exists Z : \left(M \xrightarrow[\beta]{} Z \right) \wedge \left(N \xrightarrow[\beta]{} Z \right)$.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие

(1) Если M имеет β -нормальную форму N , то $M \xrightarrow[\beta]{} N$.

(2) M может иметь максимум одну нормальную форму.

Доказательство:

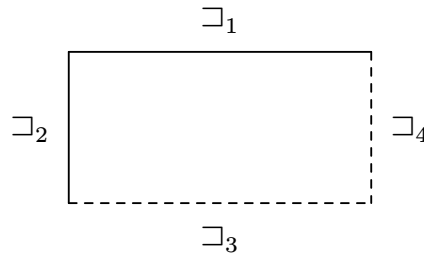
(1) Пусть $M \equiv N$, где N — β -нормальная форма. Тогда существует λ -выражение Z , такое, что $M \xrightarrow[\beta]{} Z$ и $N \xrightarrow[\beta]{} Z$ (Теорема 1.5.1). Однако раз N — нормальная форма, мы заключаем, что $N \equiv Z$ (Утверждение 1.5.1), и $M \xrightarrow[\beta]{} N$.

(2) Пусть N_1, N_2 — β -нормальные формы выражения M . Тогда $N_1 \xrightarrow[\beta]{} Z$ и $N_2 \xrightarrow[\beta]{} Z$ для некоторого Z . Следовательно, $N_1 \equiv Z \equiv N_2$.

q.e.d. ■

Теперь мы перейдём к η -редукции.

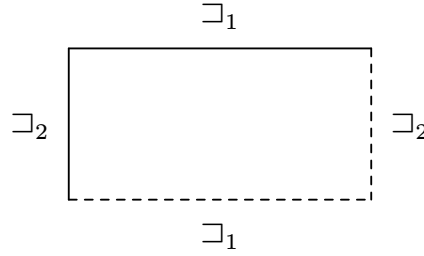
Определение 1.6.2. Пусть $\sqsubset_1, \sqsubset_2, \sqsubset_3, \sqsubset_4$ — бинарные отношения на множестве X . Следующая диаграмма,



означает « $\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsubset_1 x_1) \wedge (x \sqsubset_2 x_2), \exists z \in X : (x_2 \sqsubset_3 z) \wedge (x_1 \sqsubset_4 z)$ ».

Замечание 1.6.1. Свойство Чёрча-Россера можно переформулировать в этой нотации.

Определение 1.6.3. Пусть \sqsubset_1 и \sqsubset_2 — два бинарных отношения на X . Мы говорим, что \sqsubset_1 и \sqsubset_2 коммутируют, если



Замечание 1.6.2. Отношение \sqsupset обладает свойством Ч.-Р. $\Leftrightarrow \sqsupset$ коммутует само с собой.

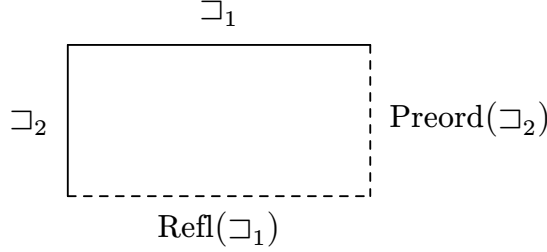
Утверждение 1.6.1. (лемма Хиндли-Росена): Пусть $\sqsupset_1, \sqsupset_2 \subset X \times X$ таковы, что

- (1) $\text{CR}(\sqsupset_1), \text{CR}(\sqsupset_2)$;
- (2) \sqsupset_1 и \sqsupset_2 коммутуют.

Тогда $\text{Trans}(\sqsupset_1 \cup \sqsupset_2)$ также обладает свойством Чёрча-Россера.

| **Доказательство:** Упражнение. ■

Лемма 1.6.6. Пусть \sqsupset_1, \sqsupset_2 — бинарные отношения на множестве X . Допустим также, что



Тогда отношения $\text{Preord}(\sqsupset_1)$ и $\text{Preord}(\sqsupset_2)$ коммутуют.

| **Доказательство:** Диаграммный поиск (лень рисовать). ■

Лемма 1.6.7. $\xrightarrow[\eta]$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.

Доказательство: Так как $\xrightarrow[\eta]{} = \text{Preord}(\xrightarrow[\eta]{}) = \text{Trans}(\text{Refl}(\xrightarrow[\eta]{}))$, достаточно доказать утверждение для отношения $\text{Refl}(\xrightarrow[\eta]{}) =: (\sim_\eta)$ (Лемма 1.6.1). Предположим теперь, что $M \sim_\eta M_1$ и $M \sim_\eta M_2$.

Без ограничения общности, допустим, что все три выражения M, M_1, M_2 различны (иначе очевидно). Индукция по определению $M \sim_\eta M_1$:

- (1) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow \lambda x. Px \sim_\eta P$. Тогда $M_2 = \lambda x. P'x$, где $P \sim_\eta P'$. Положим $Z \equiv P'$ и дело в шляпе.
- (2) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow KP \sim_\eta KP'$, где $P \sim_\eta P'$. Тогда если $M_2 \equiv K'P$, $K \sim_\eta K'$, то положим $Z \equiv K'P'$. Если же $M_2 \equiv KP''$, $P' \sim_\eta P''$, то воспользуемся предположением индукции: $\exists Z_P : P', P'' \sim_\eta Z_P$. Положим $Z = KZ_P$.
- (3) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow PK \sim_\eta P'K$, где $P \sim_\eta P'$. Аналогично с предыдущим случаем.
- (4) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow \lambda x. P \sim_\eta \lambda x. P'$, где $P \sim_\eta P'$.
 - (a) $M_2 \equiv \lambda x. P''$, $P \sim_\eta P''$. Тогда положим $Z \equiv \lambda x. Z_P$, где Z_P взято из предположения индукции.
 - (b) $P \equiv P_0x$, $M_2 \equiv P_0$. Тогда $P' \equiv P'_0x$, и мы можем положить $Z \equiv P'_0$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.8. Пусть $\sim_\eta = \text{Refl}(\xrightarrow[\eta]{})$. Пусть также $M \sim_\eta M'$ и $N \sim_\eta N'$. Тогда

$$M[x := N] \xrightarrow[\eta]{} M'[x := N'].$$

| **Доказательство:** Индукция по определению отношения \sim_η .

- (1) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Доказательство следует индукцией по структуре M (упражнение).
(2) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y. M'y \rightsquigarrow M'$, причём $y \notin \text{TV}(M')$. Мы также можем считать, что $y \notin \text{TV}(N)$.

Тогда

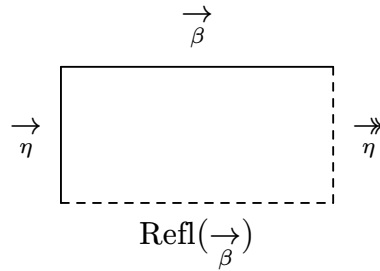
$$M[x := N] \equiv (\lambda y. M'y)[x := N] \equiv \lambda y. (M'[x := N])y \xrightarrow[\eta]{} M'[x := N] \xrightarrow[\eta]{} M'[x := N'].$$

- (3) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y. P) \rightsquigarrow (\lambda y. P'), P \rightsquigarrow P'$. Упражнение.
(4) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q, P \rightsquigarrow P'$. Упражнение.
(5) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow PQ', Q \rightsquigarrow Q'$. Упражнение.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.9. $\xrightarrow[\beta]{} \rightsquigarrow$ коммутирует с $\xrightarrow[\eta]{} \rightsquigarrow$.

Доказательство: Лемма 1.6.6 сводит доказательство к следующей диаграмме:



Пусть $M \xrightarrow[\beta]{} M_1, M \xrightarrow[\eta]{} M_2$. Ищем $Z : M_1 \xrightarrow[\eta]{} Z, (M_2 \xrightarrow[\beta]{} Z \vee M_2 \equiv Z)$. Проводим индукцию по определению $\xrightarrow[\beta]{} \rightsquigarrow$.

- (1) $M \xrightarrow[\beta]{} M_1 \Leftarrow (\lambda x. P)Q \xrightarrow[\beta]{} P[x := Q]$. Рассмотрим несколько случаев для M_2 :
(a) $M_2 \equiv (\lambda x. P')Q$, где $P \xrightarrow[\eta]{} P'$. По предыдущей лемме мы можем взять $Z \equiv P'[x := Q]$.
(b) $M_2 \equiv (\lambda x. P)Q'$, где $Q \xrightarrow[\eta]{} Q'$. Аналогично.
(c) $M_2 \equiv P'Q$, где $P \equiv P'x, x \notin \text{TV}(P')$. Тогда

$$M_1 \equiv P[x := Q] \equiv (P'x)[x := Q] \equiv P'Q \equiv M_2.$$

Берём $Z \equiv M_1 \equiv M_2$. Больше случаев нет (упражнение).

- (2) $M \xrightarrow[\beta]{} M_1 \Leftarrow PQ \xrightarrow[\beta]{} P'Q$, где $P \xrightarrow[\beta]{} P'$. Упражнение.
(3) $M \xrightarrow[\beta]{} M_1 \Leftarrow PQ \xrightarrow[\beta]{} PQ'$, где $Q \xrightarrow[\beta]{} Q'$. Упражнение.
(4) $M \xrightarrow[\beta]{} M_1 \Leftarrow \lambda x. P \xrightarrow[\beta]{} \lambda x. P'$, где $P \xrightarrow[\beta]{} P'$. Снова рассмотрим несколько случаев для M_2 :
(a) $M_2 \equiv \lambda x. P''$, где $P \xrightarrow[\eta]{} P''$. Тогда пользуемся предположением индукции: $Z \equiv \lambda x. Z_P$.
(b) $M_2 \equiv P''$, где $P \equiv P''x, x \notin \text{TV}(P'')$. Имеем β -редукцию $P \equiv P''x \xrightarrow[\beta]{} P'$. Для P'

возникает два случая:

- $P' \equiv P'_1x$, где $P'' \xrightarrow[\beta]{} P'_1$. Тогда возьмём $Z \equiv P'_1$.
- $P'' \equiv \lambda y. P'_1, P' \equiv P'_1[y := x]$. Тогда заметим, что

$$M_1 \equiv \lambda x. P'_1[y := x] \stackrel{\alpha}{\equiv} \lambda y. P'_1 \equiv P'' \equiv M_2,$$

и мы опять берём $Z \equiv M_1 \equiv M_2$.

q.e.d. ■

Теорема 1.6.2. (теорема Чёрча-Россера для $\beta\eta$ -редукции):

- (1) $\xrightarrow{\rightsquigarrow}$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера;
(2) $M = N \Rightarrow \exists Z : (M \twoheadrightarrow Z) \wedge (N \twoheadrightarrow Z)$.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие

- Если M имеет $\beta\eta$ -нормальную форму N , то $M \rightarrow N$;
- M может иметь максимум одну нормальную форму;
- Теория $\lambda\beta\eta$ согласованна;
- λ -выражение $\Omega = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы.

| Доказательство: Очевидно, применяя Утверждение 1.5.1. ■

1.7. Стандартная редукция

Определение 1.7.1.

(1) λ -выражение $M \in \Lambda$ называется *внешней нормальной формой*, если оно имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. x M_1 \dots M_m,$$

где $n, m \geq 0$.

(2) Если M имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m, \quad n \geq 0, m \geq 1,$$

то выражение $(\lambda x. M_0) M_1$ называется *внешним редексом*.

(3) \rightarrow_h (соотв. \rightarrow_i) — редукция, в которой сокращаются только внешние редексы.

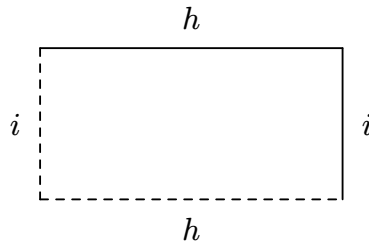
(4) Редекс Δ называется *внутренним*, если он не внешний.

(5) \rightarrow_i (соотв. \rightarrow_h) — редукция, в которой сокращаются только внутренние редексы.

Определение 1.7.2. Пусть M — λ -выражение. Редекс Δ_1 в M левее редекса Δ_2 , если первая « λ » в Δ_1 левее, чем первая « λ » в Δ_2 .

Лемма 1.7.1. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \rightarrow N$. Тогда существует $Z \in \Lambda$, такое, что $M \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{i} N$.

Доказательство (эскиз): Ключ в том, что внешняя и внутренняя редукции коммутируют:



Редукция $M \rightarrow N$ представляется как

$$M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{h} M_3 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} N.$$

Переставляя редукции, получаем искомое разбиение. ■

Определение 1.7.3. Пусть σ — это редукционный путь, то есть

$$\sigma : M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \xrightarrow{\Delta_2} \dots$$

σ называется *стандартным*, если $\forall i, \forall j < i: \Delta_i$ — не результат сокращения редекса, находящегося левее Δ_j . Стандартная редукция обозначается $M \xrightarrow{s} N$.

Теорема 1.7.1. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \rightarrow N$. Тогда $M \xrightarrow{s} N$.

| Доказательство: Имеем $M \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{i} N$ для какого-то $Z \in \Lambda$. Индукция по длине выражения N .

(1) $N \equiv x \in V$. Тогда $Z \equiv x$ и доказательство завершено.

(2) $N \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. N_0 N_1 \dots N_m$, где $n + m > 0$. Тогда Z должно иметь форму

$$\lambda x_1, \dots, x_n. Z_0 Z_1 \dots Z_m,$$

где $Z_i \rightarrow_s N_i$ при $0 \leq i < m$. По предположению индукции имеем $Z_i \rightarrow_s^* N_i$. Тогда $Z \rightarrow_s^* N$ и доказательство завершено. ■

1.8. Редукционные стратегии

Определение 1.8.1. (редукционная стратегия): Отображение $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ называется *редукционной стратегией*, если для любого $M \in \Lambda$ выполняется редукция

$$M \rightarrow F(M).$$

Определение 1.8.2.

(1) Пусть F — редукционная стратегия. F -редукционный путь выражения M — это последовательность

$$M, F(M), F^2(M), \dots$$

(2) F называется *нормализующей*, если для любого $M \in \Lambda$, имеющего нормальную форму, $F^n(M)$ находится в нормальной форме для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.8.3. Крайняя левая редукционная стратегия, F_l , определяется следующим образом:

(1) $F_l(M) \equiv M$, если M в нормальной форме.

(2) $F_l(M) \equiv M'$, если $M \xrightarrow{\Delta} M'$, где Δ — крайний левый редекс в M .

Теорема 1.8.1. (о нормализации): F_l — нормализующая стратегия.

Доказательство: Пусть выражение M имеет нормальную форму N . Тогда по теореме Чёрча-Россера имеем $M \rightarrow N$. Тогда по предыдущей теореме есть стандартный редукционный путь

$$\sigma : M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots \xrightarrow{\Delta_{n-1}} M_n \equiv N.$$

Утверждается, что σ — это редукционный путь стратегии F_l . Допустим противное. Тогда на каком-то шагу редекс Δ_i — не крайний левый, а значит он уже не сможет сократиться в дальнейшем. Тогда N — не нормальная форма. Противоречие. ■

2. λ -Представимость

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. Пусть $A \equiv \lambda x, y. y(xxy)$. Комбинатор $\Theta \equiv AA$ называется *комбинатором Тьюринга*.

Упражнение Доказать, что Θ — комбинатор фиксированной точки, то есть $\Theta F \rightarrow F(\Theta F)$ для любого $F \in \Lambda$.

Определение 2.1.2.

(1) $\text{true} \equiv \mathbf{T} \equiv \lambda x, y. x$

(2) $\text{false} \equiv \mathbf{F} \equiv \lambda x, y. y$

(3) Пусть $B \in \Lambda$. Тогда запись

$$\text{if } B \text{ then } M \text{ else } N$$

обозначает λ -выражение BMN .

Определение 2.1.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Упорядоченная пара $[M, N]$ определяется как

$$[M, N] \equiv \lambda z. zMN.$$

Определим также $(P)_0 \equiv P\mathbf{T}$, $(P)_1 \equiv P\mathbf{F}$.

Упражнение Показать, что $([M, N])_0 \rightarrow M$, $([M, N])_1 \rightarrow N$. Правда ли, что $[(P)_0, (P)_1] = P$?

Определение 2.1.4. (конечные кортежи):

$$[M] \equiv M, \quad [M_0, M_1, \dots, M_{n+1}] \equiv [M_0, [M_1, \dots, M_{n+1}]],$$

$$\langle M_0, M_1, \dots, M_n \rangle \equiv \lambda z. zM_0M_1\dots M_n$$

Определение 2.1.5.

$$(1) \quad \pi_i^n \equiv \lambda z. z\mathbf{F}^{\sim i}\mathbf{T}, \quad 0 \leq i < n,$$

$$\pi_n^n \equiv \lambda z. z\mathbf{F}^{\sim n}$$

$$(2) \quad \mathbf{P}_i^n \equiv \lambda z. z(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n. x_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

Упражнение Показать, что

$$\pi_i^n [M_0, M_1, \dots, M_n] \rightarrow M_i, \quad \mathbf{P}_i^n \langle M_0, M_1, \dots, M_n \rangle \rightarrow M_i$$

Теорема 2.1.1. (обобщённая теорема о неподвижной точке): Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n \in \Lambda$. Тогда существуют выражения $X_1, X_2, \dots, X_n \in \Lambda$, такие, что

$$X_1 = F_1 X_1 X_2 \dots X_n,$$

$$X_2 = F_2 X_1 X_2 \dots X_n,$$

$$\vdots$$

$$X_n = F_n X_1 X_2 \dots X_n.$$

Доказательство: Определим выражения

$$M \equiv \lambda f, x. f(\mathbf{P}_1^n x)(\mathbf{P}_2^n x) \dots (\mathbf{P}_n^n x),$$

$$F \equiv \lambda x. \langle MF_1 x, MF_2 x, \dots, MF_n x \rangle.$$

Тогда по теореме о неподвижной точке найдётся выражение $X \in \Lambda : X = FX$. Наконец, положим $X_i \equiv \mathbf{P}_i^n X$. Действительно,

$$X_i \equiv \mathbf{P}_i^n X = MF_i X = F_i X_1 X_2 \dots X_n,$$

q.e.d. ■

Определение 2.1.6. Пусть $M, N \in \Lambda$. Композиция $M \circ N$ определяется как $\lambda x. M(Nx)$, где $x \notin \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N)$.

Определение 2.1.7.

(1) Числа Барендрегта (или просто λ -числа) — это следующая последовательность λ -выражений:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \mathbf{I}, \quad \ulcorner n + 1 \urcorner \equiv [\mathbf{F}, \ulcorner n \urcorner]$$

Заметим, что все λ -числа — различные нормальные формы.

(2) Определим

$$\mathbf{S}^+ \equiv \lambda z. [\mathbf{F}, z], \quad \mathbf{P}^- \equiv \lambda z. z\mathbf{F}, \quad \mathbf{Zero} \equiv \lambda z. z\mathbf{T}$$

Упражнение $\mathbf{S}^+(\ulcorner n \urcorner) = \ulcorner n + 1 \urcorner$, $\mathbf{P}^-(\ulcorner n + 1 \urcorner) = \ulcorner n \urcorner$, $\mathbf{Zero}(\ulcorner 0 \urcorner) = \mathbf{T}$, $\mathbf{Zero}(\ulcorner n + 1 \urcorner) = \mathbf{F}$

Определение 2.1.8. Пусть $P : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ — предикат на натуральных числах. Запись

$$\mu t[P(m)]$$

обозначает наименьшее число m , такое, что выполняется $P(m)$, если такое число существует. В противном случае $\mu t[P(m)]$ не определено.

2.2. Рекурсивные функции

Определение 2.2.1.

- (1) Числовая функция — это отображение $\mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$, для некоторого $p \in \mathbb{N}$.
(2) Числовая функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$ называется λ -представимой, если существует выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}_0 : \quad F \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, n_2, \dots, n_p) \urcorner$$

- (3) Если $\vec{n} = n_1, n_2, \dots, n_p$, то положим

$$\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner n_1 \urcorner, \ulcorner n_2 \urcorner, \dots, \ulcorner n_p \urcorner.$$

Определение 2.2.2. (первичные функции): Функции U_i^p , S^+ , Z называются *первичными*:

$$U_i^p(n_0, n_1, \dots, n_p) = n_i, \quad 0 \leq i \leq p, \\ S^+(n) = n + 1, \quad Z(n) = 0.$$

Определение 2.2.3. Пусть \mathcal{A} — некий класс числовых функций.

- (1) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно суперпозиции*, если для любых $\chi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \psi_2(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$$

лежит в \mathcal{A} .

- (2) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно примитивной рекурсии*, если для любых $\chi, \psi \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}), \\ \varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

лежит в \mathcal{A} .

- (3) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно минимизации*, если для любой функции $\chi \in \mathcal{A}$:
 $\forall \vec{n} \exists m \chi(\vec{n}, m) = 0$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \mu t[\chi(\vec{n}, t) = 0]$$

лежит в \mathcal{A} .

- (4) Класс \mathcal{R} *рекурсивных функций* — это наименьший класс числовых функций, который содержит все первичные функции, а также замкнут относительно суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

2.3. Теорема Клини

Лемма 2.3.1. Все первичные функции λ -представимы.

| *Доказательство*: Очевидно. ■

Лемма 2.3.2. λ -представимые функции замкнуты относительно суперпозиции.

| *Доказательство*: Упражнение. ■

Лемма 2.3.3. λ -представимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.

Доказательство: Пусть функция φ задаётся соотношениями

$$\begin{aligned}\varphi(0, \vec{n}) &= \chi(\vec{n}), \\ \varphi(k+1, \vec{n}) &= \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),\end{aligned}$$

где χ и ψ λ -представлены выражениями G и H соответственно. Рассмотрим выражение

$$X \equiv \lambda f. \lambda x, \vec{y}. (\text{if } \mathbf{Zero} \ x \ \text{then} \ G\vec{y} \ \text{else} \ H(f(\mathbf{P}^-x)\vec{y}) (\mathbf{P}^-x) \vec{y}).$$

λ -выражение $F \equiv \mathbf{Y}X$ представляет функцию φ (упражнение). ■

Определение 2.3.1. Пусть $P \in \Lambda$. Определим

$$\begin{aligned}H_P &\equiv \Theta(\lambda h, z. \text{if } Pz \ \text{then} \ z \ \text{else} \ h(\mathbf{S}^+z)), \\ \mu P &\equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner.\end{aligned}$$

Утверждение 2.3.1. Пусть $P \in \Lambda$ таково, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ либо $P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}$, либо $P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{F}$. Тогда:

- (1) $H_P z \rightarrow \text{if } Pz \ \text{then} \ z \ \text{else} \ H_P(\mathbf{S}^+z)$;
- (2) $\mu P = \ulcorner \mu n [P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] \urcorner$ (если минимум существует).

Доказательство:

- (1) Упражнение.
- (2) Допустим, что $\mu n [P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] = m$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}H_P \ulcorner m \urcorner &= \ulcorner m \urcorner, \\ \forall n < m : H_P \ulcorner n \urcorner &= H_P \ulcorner n + 1 \urcorner = H_P \ulcorner n + 2 \urcorner = \dots = H_P \ulcorner m \urcorner = \ulcorner m \urcorner.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\mu P \equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner = \ulcorner m \urcorner$,

q.e.d. ■

Лемма 2.3.4. λ -представимые функции замкнуты относительно минимизации.

Доказательство: Пусть

$$\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0],$$

где $G \in \Lambda$ представляет функцию χ . Определим $F \in \Lambda$ как

$$F\vec{x} = \mu(\lambda y. \mathbf{Zero} (G\vec{x}y)).$$

По предыдущему утверждению, F представляет функцию φ . ■

Следствие Все рекурсивные функции λ -представимы.

Лемма 2.3.5. Пусть φ λ -представляется выражением F . Тогда для всех $\vec{n}, t \in \mathbb{N}_0$

$$\varphi(\vec{n}) = t \Leftrightarrow F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner t \urcorner$$

Доказательство:

(\Rightarrow) Очевидно по определению.

(\Leftarrow) Предположим, что $F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner t \urcorner$. Тогда $\ulcorner \varphi(\vec{n}) \urcorner = \ulcorner t \urcorner$. Так как λ -числа — это различные нормальные формы, по теореме Чёрча-Россера имеем $\varphi(\vec{n}) = t$,

q.e.d. ■

Теорема 2.3.1. (Клини): Функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$ рекурсивна $\Leftrightarrow \varphi$ λ -представима.

Доказательство (эскиз):

(\Rightarrow) Очевидно.

(\Leftarrow) Идея в том, чтобы воспользоваться тем фактом, что λ -теория сама по себе рекурсивна (λ -выражения рекурсивно определены). Для этого мы строим биекцию $g : \Lambda \leftrightarrow \mathbb{N}_0 : g^{-1}$. Далее мы определяем ряд рекурсивных функций:

- (1) $\text{Num} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 : \text{Num}(m) = g(\ulcorner m \urcorner)$.
- (2) $\text{Num}^{-1} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 : \text{Num}^{-1}(g(\ulcorner m \urcorner)) = m$
- (3) $\text{App} : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0 : \text{App}(n_1, n_2, \dots, n_k) = g(g^{-1}(n_1) \cdot g^{-1}(n_2) \cdot \dots \cdot g^{-1}(n_k))$
- (4) $\text{Red} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 : \text{Red}(g(M)) = g(N)$, где N — нормальная форма M (если таковая существует).

Далее, рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$, представленную λ -выражением F . Пусть n_1, n_2, \dots, n_p — набор аргументов. Пусть $f = g(F)$. Определим φ' как $\text{Num}^{-1} \circ \text{Red} \circ \text{App} \circ$

$$\begin{aligned}
 & n_1, n_2, \dots, n_p \\
 & \Downarrow (\text{Num}) \\
 & m_1, m_2, \dots, m_p \\
 & \Downarrow (\text{App}) \\
 & m = \text{App}(f, m_1, \dots, m_p) \\
 & \Downarrow (\text{Red}) \\
 & r = \text{Red}(m) \\
 & \Downarrow (\text{Num}^{-1}) \\
 & s = \text{Num}^{-1}(r)
 \end{aligned}$$

Будучи композицией рекурсивных функций, функция $\varphi' : n_1, n_2, \dots, n_p \mapsto s$ рекурсивна. Более того, она совпадает с φ по предыдущей лемме. ■

2.4. Числа Чёрча

Определение 2.4.1. Числа Чёрча — это следующая последовательность λ -выражений:

$$c_0 \equiv \lambda f, x. x, \quad c_{n+1} \equiv \lambda f, x. f(c_n f x).$$

В явном виде, $c_n \equiv \lambda f. f^n$.

Утверждение 2.4.1. Существуют λ -выражения H, H^{-1} , такие, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$H^{\ulcorner n \urcorner} = c_n, \quad H^{-1} c_n = \ulcorner n \urcorner.$$

Доказательство: Пусть $S_c^+ \equiv \lambda a, b, c. b(abc)$. Очевидно, что $S_c^+ c_n = c_{n+1}$. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}
 H & \equiv \lambda x. \text{if } \mathbf{Zero} \ x \ \text{then } c_0 \ \text{else } S_c^+(H(\mathbf{P}^- x)), \\
 H^{-1} & \equiv \lambda x. x \mathbf{S}^{+\ulcorner 0 \urcorner}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что эти выражения являются искомыми. ■

Следствие Пусть $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда φ λ -представима с помощью чисел Чёрча $\iff \varphi$ рекурсивна.

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 2.4.1. Положим

$$\mathbf{A}_+ \equiv \lambda x, y, p, q. xp(yrq), \quad \mathbf{A}_* \equiv \lambda x, y, z. x(yz), \quad \mathbf{A}_{\text{exp}} \equiv \lambda x, y. yx.$$

Тогда

$$\mathbf{A}_+ c_n c_m = c_{n+m}, \quad \mathbf{A}_* c_n c_m = c_{nm}, \quad \mathbf{A}_{\text{exp}} c_n c_m = c_{n^m}$$

Доказательство: Очевидно, что $(f^n)^m = f^{nm}$. Отсюда все три утверждения следуют тривиально. ■

Замечание 2.4.1. Числа Чёрча хороши тем, что на них очень простая арифметика. Однако они плохи отсутствием естественного предшествующего элемента.

2.5. Числовые системы

Определение 2.5.1. Последовательность λ -выражений d_0, d_1, d_2, \dots называется *числовой системой*, если существуют λ -выражения \mathbf{S}_d^+ и \mathbf{Zero}_d , удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_d^+ d_n &= d_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbf{Zero}_d b_0 &= \mathbf{T}, \quad \mathbf{Zero}_d d_{n+1} = \mathbf{F}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Замечание 2.5.1. Каждая числовая система однозначно определяется нулевым элементом d_0 и функцией следующего элемента \mathbf{S}_d^+ . Поэтому мы будем писать $d = (d_0, \mathbf{S}_d^+)$.

Определение 2.5.2. Пусть $d = (d_0, \mathbf{S}_d^+)$ — числовая система.

- (1) d называется *нормальной*, если все выражения d_k находятся в нормальной форме.
- (2) d называется *адекватной*, если все рекурсивные функции λ -представляются с помощью чисел d_k . Иными словами, для любой рекурсивной $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$ существует λ -выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}_0 : F d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_p} = d_{\varphi(n_1, n_2, \dots, n_p)}.$$

Утверждение 2.5.1. Пусть d — числовая система. Тогда d адекватна в том и только том случае, если существует *функция предшествующего элемента*, \mathbf{P}_d^- , такая что

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{P}_d^- d_{n+1} = d_n.$$

Доказательство:

(\Rightarrow) По определению.

(\Leftarrow) Доказательство аналогично таковому для λ -чисел (упражнение).

q.e.d. ■

3. Теорема о неразрешимости

Определение 3.1.

- (1) Биекция $g : \Lambda \leftrightarrow \mathbb{N}_0 : g^{-1}$ называется *кодированием λ -выражений*. Для выражения $M \in \Lambda$ число $g(M)$ называется его *числом Гёделя*.
- (2) Рекурсивная функция $\tau : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такая, что

$$\tau(g(M), g(N)) = g(MN),$$

называется *функцией комбинации*. Мы предположим, что такая существует.

- (3) Рекурсивная функция $\kappa : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такая, что

$$\kappa(n) = g(\ulcorner n \urcorner),$$

называется *функцией нумерации λ -чисел*.

Определение 3.2. Пусть M — λ -выражение. Тогда λ -число $\ulcorner M \urcorner$ определяется как

$$\ulcorner M \urcorner = \ulcorner g(M) \urcorner.$$

Определение 3.3.

- (1) Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{N}_0$ называются *рекурсивно сепарабельными*, если существует рекурсивная функция $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$, такая, что

$$n \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(n) = 0,$$

$$n \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(n) = 1.$$

Два множества $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \subset \Lambda$ называются *рекурсивно сепарабельными*, если рекурсивно сепарабельны множества $g(\mathcal{A}'), g(\mathcal{B}')$.

- (2) Множество \mathcal{A} называется *рекурсивным* (или *разрешимым*), если \mathcal{A} и \mathcal{A}^C рекурсивно сепарабельны.

Определение 3.4. Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$. Тогда \mathcal{A} называется *замкнутым относительно конверсии*, если для любых $M, N \in \Lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{A} \\ N = M \end{array} \right\} \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Теорема 3.1. (Скотта-Карри о неразрешимости): Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — непустые подмножества Λ , замкнутые относительно конверсии. Тогда \mathcal{A} и \mathcal{B} **не** рекурсивно сепарабельны.

Доказательство: Рассмотрим \mathcal{A}, \mathcal{B} как в условии и допустим, что \mathcal{A} и \mathcal{B} разделяются функцией φ . Имеем

$$M \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(g(M)) = 0,$$

$$M \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(g(N)) = 1.$$

По теореме Клини φ представляется неким λ -выражением F . Иными словами,

$$M \in \mathcal{A} \Rightarrow F^{\ulcorner M \urcorner} = \ulcorner 0 \urcorner,$$

$$M \in \mathcal{B} \Rightarrow F^{\ulcorner M \urcorner} = \ulcorner 1 \urcorner.$$

Пусть функции τ и κ представляются выражениями T и K соответственно (Определение 3.1). Имеем

$$T^{\ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner} = \ulcorner XY \urcorner,$$

$$K^{\ulcorner n \urcorner} = \ulcorner \ulcorner n \urcorner \urcorner.$$

Возьмём произвольные $M \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{B}$. Было бы круто построить λ -выражение J , такое, что

$$F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \Rightarrow J = B,$$

$$F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner \Rightarrow J = A.$$

В таком случае мы придём к противоречию. Действительно, пусть $j = g(J)$. Тогда $\varphi(j)$ — это либо 0, либо 1. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(j) = 0 &\Rightarrow F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \\ &\Rightarrow J = B \\ &\Rightarrow J \in \mathcal{B} \quad (\text{в силу замкнутости относительно конверсии}) \\ &\Rightarrow \varphi(j) = 1. \quad (\text{по определению}) \end{aligned}$$

$$\varphi(j) = 1 \Rightarrow \varphi(j) = 0. \quad (\text{аналогично})$$

Теперь мы построим J . Требуемое свойство выражается формулой

$$J = \text{if } \mathbf{Zero} (F \ulcorner J \urcorner) \text{ then } B \text{ else } A = \mathbf{Zero} (F \ulcorner J \urcorner) B A$$

Мы не можем напрямую воспользоваться теоремой о неподвижной точке, потому что $\ulcorner J \urcorner$, вообще говоря, не λ -представимо для произвольного $J \in \Lambda$. Поэтому мы используем небольшой трюк. Пусть $y \notin \text{FV}(AB)$. Положим

$$\begin{aligned} H &\equiv \lambda y. (\mathbf{Zero} (F(Ty(Ky))) B A), \\ J &\equiv H \ulcorner H \urcorner. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что J удовлетворяет нужным соотношениям. ■

Следствие Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$ замкнуто относительно конверсии и таково, что $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A}^C \neq \emptyset$. Тогда \mathcal{A} не разрешимо.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие Множество всех λ -выражений, имеющих нормальную форму, не разрешимо.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие Отношение конверсии ($=$) не разрешимо. То есть, не существует рекурсивной функции $\varphi : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такой, что

$$M = N \Rightarrow \varphi(g(M), g(N)) = 0,$$

$$M \neq N \Rightarrow \varphi(g(M), g(N)) = 1,$$

Доказательство: Пусть такая функция нашлась. Тогда возьмём $\mathcal{A} = \{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$.

Очевидно, что \mathcal{A} нетривиально и замкнуто относительно конверсии. Однако функция $\psi(n) = \varphi(n, g(\mathbf{I}))$ явно разделяет \mathcal{A} и его дополнение:

$$M \in \mathcal{A} \Rightarrow \psi(g(M)) = 0, \quad M \notin \mathcal{A} \Rightarrow \psi(g(M)) = 1,$$

противоречие. ■

Библиография

- [1] Barendregt H. P., *The Lambda calculus: its syntax and semantics*, т. 103. 1984.
- [2] Barendregt H. P. и Barendsen E., *Introduction to Lambda calculus*. 2000.
- [3] J. Roger Hindley и Jonathan P. Seldin, *Lambda-calculus and combinators, an introduction*. 2008.