

# Лист №1. Конверсия и редукция

$\lambda$ -исчисление, 2024

- 1.1. • Перепишите в формальной нотации:  $y(\lambda x. xy(\lambda z, w. yz))$   
 • Перепишите в упрощённом виде:  $\lambda v'(\lambda v''(((\lambda v v')v'')((v''(\lambda v'''(v'v'''))v''))))$
- 1.2. Положим  $X \equiv \mathbf{SI}$ . Покажите, что  $XXXX = X(X(XX))$ . Правда ли, что  $X^n X = XX^{n-1}$  справедливо для всех  $n \in \mathbb{N}_0$ ?

- 1.3. Покажите, что выражение имеет нормальную форму:  
 [a]  $(\lambda y. yyy)((\lambda a, b. a)\mathbf{I}(\mathbf{SS}))$ , [b]  $\mathbf{SSSS}$ , [c]\*  $\mathbf{S}(\mathbf{SS})(\mathbf{SS})\mathbf{S}$ .

- 1.4. Найдите  $\lambda$ -выражение  $M$ , такое, что  $\forall N \in \Lambda : MN = MM$ .

- 1.5. Докажите, что **не** существует такого  $F \in \Lambda$ , что  $\forall M, N \in \Lambda : F(MN) = M$ .

- 1.6. Пусть  $A \equiv \mathbf{SKKK}$ . Постройте такое  $\lambda$ -выражение  $M$ , чтобы выполнялась конверсия  $\mathbf{SIMKA} = \mathbf{SMSKA}$ .

- 1.7. Докажите, что правило  $\eta$ -конверсии  $(\lambda x. Mx = M, \forall M, x : x \notin \text{TV}(M))$  эквивалентно тому, что «функции равны, если равны их значения»:

$$Mx = Nx \Rightarrow M = N, \quad \forall M, N, x : x \notin \text{TV}(MN).$$

- 1.8. • Докажите, что: [a]  $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$ , [b]  $\mathbf{I} \# \mathbf{S}$ , [c]\*  $xy \# xx$ .  
 • Постройте последовательность  $M_0, M_1, \dots$ , такую, что  $M_i \# N_j$ , если  $i \neq j$ .

- 1.9. Докажите, что  $P \# Q \iff (\lambda + (P = Q)) \vdash \mathbf{K} = \mathbf{K}_*$

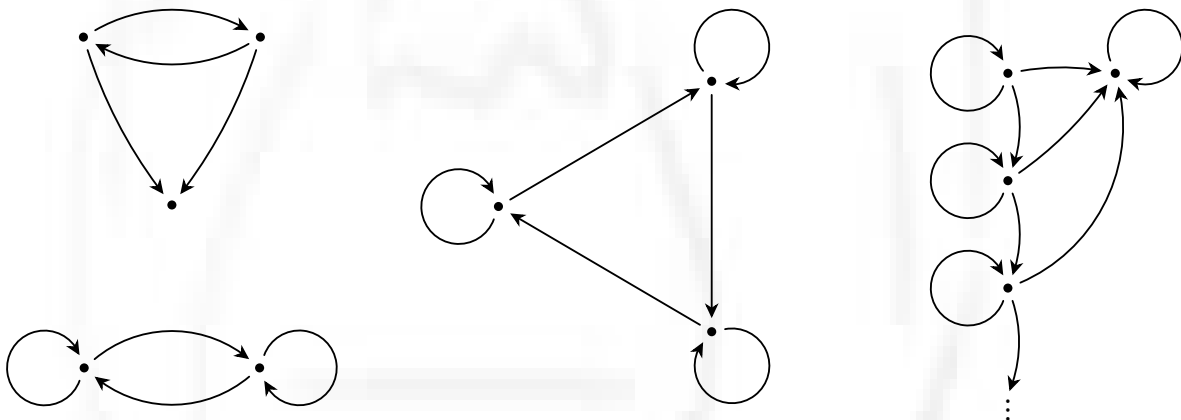
- 1.10. Постройте последовательность  $\lambda$ -выражений  $M_0, M_2, \dots$  так, чтобы  $M_0 = v$  и для любого  $n \in \mathbb{N}_0$  выполнялось  $M_{n+1} = M_{n+2}M_n$ .

- 1.11. Докажите, что  $\forall M \in \Lambda : \exists N \in \Lambda : N\mathbf{I} \xrightarrow[\beta]{\rightarrow} M$ , причём  $N$  в  $\beta$ -нормальной форме.

- 1.12. Обозначим через  $M \uparrow N$  условие  $\exists L : (L \twoheadrightarrow M) \wedge (L \twoheadrightarrow N)$ . Покажите, что:

$$[a] (\lambda x. ax)b \uparrow (\lambda y. yb)a, \quad [b] (\lambda x. xc)c \uparrow (\lambda x. xx)c, \quad [c] (\lambda x. bx)c \uparrow (\lambda x. x)bc$$

- 1.13. Постройте  $\lambda$ -выражения со следующими редукционными графами:



- 1.14. Нарисуйте редукционные графы следующих  $\lambda$ -выражений:

$$[a] (\lambda x. \mathbf{I}xx)(\lambda x. \mathbf{I}xx), \quad [b] (\lambda x. \mathbf{I}(xx))(\lambda x. \mathbf{I}(xx))$$

- 1.15. Пусть  $M \equiv AAx$ , где  $A \equiv \lambda a, x, z. z(aax)$ . Докажите, что редукционный граф  $\text{Gr}(M)$  содержит  $n$ -мерный куб при всех  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- 1.16. Покажите, что концептуально существует только одно  $\lambda$ -выражение (а именно  $\Omega$ ), имеющее следующий редукционный граф:



- 1.17. Расширим множество  $\lambda$ -выражений двумя константами  $\delta, \epsilon$ . Также добавим новое правило редукции:  $\delta MM \rightarrow \epsilon$  для любого  $M \in \Lambda \cup \{\delta, \epsilon\}$ . Докажите, что в получившейся системе **не** выполняется теорема Чёрча-Россера.

Подсказка: найдите выражения  $C, D$  такие, что

$$Cx \rightarrow \delta x(Cx),$$

$$D \rightarrow CD.$$

Докажите, что  $D \rightarrow \epsilon$  и  $D \rightarrow C\epsilon$ , но у  $\epsilon$  и  $C\epsilon$  нет общего редукта.

- 1.18. Пусть  $\sqsubset_1$  и  $\sqsubset_2$  — коммутующие отношения на множестве  $X$ . Покажите, что  $\text{Trans}(\sqsubset_1)$  и  $\text{Trans}(\sqsubset_2)$  также коммутуют.
- 1.19.  $\lambda$ -выражение  $M$  *сильно нормализуется* (нотация  $\text{SN}(M)$ ), если **не** существует бесконечного редукционного пути, начинающегося в  $M$ . Докажите, что:
- [a]  $\text{SN}(M) \Rightarrow M$  имеет нормальную форму;
  - [b]  $\text{SN}(M) \Rightarrow \text{Gr}(M)$  конечен. Верно ли обратное?
- 1.20. Рассмотрим

$$\text{SN}_0 := \{M \in \Lambda \mid \text{SN}(M)\},$$

$$\text{SN}_1 := \{M \in \Lambda \mid \forall N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}_0 : MN_1N_2\dots N_k \in \text{SN}_0\}.$$

Докажите, что  $\text{SN}_1 \not\subseteq \text{SN}_0$ .