Итоговая работа, I вариант

λ-исчисление, 2024

На 3:

1. Дайте определение множеств всех, свободных и связанных переменных для λ-выражения M $(\mathrm{TV}(M), \mathrm{FV}(M), \mathrm{BV}(M))$. Правда ли, что

$$\mathrm{TV}(M) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M)$$

   для любого $M \in \Lambda$?

2. Определите *результат подстановки,* $M[x := N]$, для λ-выражений M, N и переменной $x \notin \mathrm{BV}(M)$.

3. Определите комбинаторы I, K, K_*, S. Покажите, что $\mathsf{KI} = \mathsf{K}_*$ и $\mathsf{SKK} = \mathsf{I}$.

4. Дайте определение *нормальной формы.* Покажите, что, если M — нормальная форма, то для любого $N \in \Lambda$ редукция $M \twoheadrightarrow N$ влечёт $M \equiv N$.

На 4:

1. Докажите *лемму о подстановке:* если $M, N, L \in \Lambda$, $x \not\equiv y$ и $x \notin \mathrm{FV}(L)$, то тогда

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

2. Докажите *теорему о неподвижной точке:* $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : \ X = FX$. Дайте определение *комбинатора неподвижной точки.*

3. Рассмотрим бинарное отношение $\rightsquigarrow$, заданное рекурсивно следующими соотношениями:
   1. $M \rightsquigarrow M$;
   2. $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x.\, M \rightsquigarrow \lambda x.\, M'$;
   3. $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$;
   4. $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$.

   Покажите, что $\mathrm{Refl}(\underset{\beta}{\rightarrow}) \subset \rightsquigarrow$. Докажите, если $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, то $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.

На 5:

1. Правда ли, что всякая произвольная комбинация выражений S и K (например, $\mathsf{S}(\mathsf{KSK})\mathsf{SK}$) будет иметь нормальную форму?

2. Докажите, что

$$\Big(\forall N \in \Lambda :\ N \underset{\beta\eta}{=} M \Rightarrow x \in \mathrm{FV}(N)\Big) \iff \Big(\forall N \in \Lambda :\ M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N \Rightarrow x \in \mathrm{FV}(N)\Big).$$

3. Покажите, что для любого $M \in \Lambda$ существует нормальная форма $N \in \Lambda$, такая, что $N\mathsf{I} \twoheadrightarrow M$.