Две задачи

λ-исчисление, 2024

1. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n\mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.

   Подсказка: Для начала, приведите a_n в нормальную форму. Допустим, что нашлось λ-выражение $Z \in \Lambda^0$ со свойствами $Za_0 \twoheadrightarrow K$ и $Za_n \twoheadrightarrow K^*$ для всех $n \geqslant 1$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}_0$, рассмотрите крайний левый редукционный путь

   $$Za_n \equiv P_0 \xrightarrow[\beta]{} P_1 \xrightarrow[\beta]{} \dots \xrightarrow[\beta]{} P_N \equiv H,$$

   где H обозначает K или K^*. Попытайтесь «выделить» выражение a_n из P_i, для $0 \leqslant i \leqslant N$.

2. Пусть $M_1 \equiv (\lambda x.\ bx(bc))c$, $M_2 \equiv (\lambda x.\ xx)(bc)$. Докажите, что **не** существует такого выражения A, что $A \twoheadrightarrow M_1$ и $A \twoheadrightarrow M_2$.

   Подсказка: Напомним, что редукция $M \twoheadrightarrow N$ называется *стандартной* ($M \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$), если она идёт «слева направо», то есть после редукции

   $$[\dots](\lambda x.\ P)Q[\dots] \xrightarrow[\beta]{} [\dots]P[x \coloneqq Q][\dots]$$

   часть $[\dots]$ слева от $(\lambda x.\ P)Q$ остаётся неизменной при последующих редукциях в редукционном пути $M \twoheadrightarrow N$. Это можно формализовать так: пусть запись $A \xrightarrow{n} B$ означает, что B получается из A путём редукции n-ного по счёту слева редекса в выражении A. Тогда редукционный путь

   $$M_1 \xrightarrow{n_1} M_2 \xrightarrow{n_2} M_3 \xrightarrow{n_3} \dots$$

   называется *стандартным*, если $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \dots$

   Теперь допустим, что у выражений M_1 и M_2 есть общий β-предок, A. Тогда по теореме о стандартизации существуют стандартные редукции $A \underset{s}{\twoheadrightarrow} M_1$ и $A \underset{s}{\twoheadrightarrow} M_2$. Без ограничения общности предположим, что эти два редукционных пути отличаются уже в самом первом редексе:

   $$A \xrightarrow{\Delta_1} P_1, \qquad A \xrightarrow{\nabla_1} Q_1, \qquad \Delta_1 \not\equiv \nabla_1.$$

   Пусть $R \equiv (\lambda x.\ P)Q$ — левейший из этих двух редексов. Что можно сказать о выражении A?