Лист №1. Конверсия и редукция

λ-исчисление, 2024

1.1. • Перепишите в формальной нотации: $y(\lambda x.\, xy(\lambda z{,}w.\, yz))$
- Перепишите в упрощённом виде: $\lambda v'(\lambda v''((((\lambda vv)v')v'')((v''(\lambda v'''(v'v''')))v'')))$

1.2. Положим $X \equiv \mathsf{SI}$. Покажите, что $XXXX = X(X(XX))$. Правда ли, что $X^n X = XX^{\sim n}$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}_0$?

1.3. Покажите, что выражение имеет нормальную форму:
[a] $(\lambda y.\, yyy)((\lambda a{,}b.\, a)\mathsf{I}(\mathsf{SS}))$, [b] SSSS, [c]* $\mathsf{S}(\mathsf{SS})(\mathsf{SS})\mathsf{S}$.

1.4. Найдите λ-выражение M, такое, что $\forall N \in \Lambda :\ MN = MM$.

1.5. Докажите, что **не** существует такого $F \in \Lambda$, что $\forall M, N \in \Lambda :\ F(MN) = M$.

1.6. Пусть $A \equiv \mathsf{SKKK}$. Постройте такое λ-выражение M, чтобы выполнялась конверсия $\mathsf{SI}M\mathsf{K}A = \mathsf{S}M\mathsf{SK}A$.

1.7. Докажите, что правило η-конверсии ($\lambda x.\, Mx = M,\ \forall M, x : x \notin \mathrm{TV}(M)$) эквивалентно тому, что «функции равны, если равны их значения»:

$$Mx = Nx \Rightarrow M = N, \quad \forall M, N, x : x \notin \mathrm{TV}(MN).$$

1.8. • Докажите, что: [a] $\mathsf{I} \# \mathsf{K}$, [b] $\mathsf{I} \# \mathsf{S}$, [c]* $xy \# xx$.
- Постройте последовательность $M_0, M_1, \ldots$, такую, что $M_i \# N_j$, если $i \neq j$.

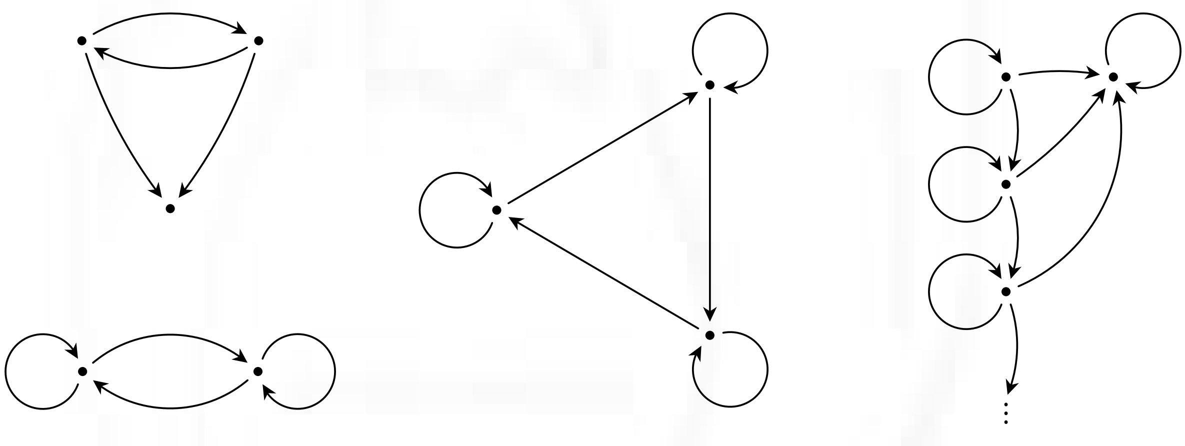
1.9. Докажите, что $P \# Q \iff (\lambda + (P = Q)) \vdash \mathsf{K} = \mathsf{K}_*$

1.10. Постройте последовательность λ-выражений $M_0, M_2, \ldots$ так, чтобы $M_0 = v$ и для любого $n \in \mathbb{N}_0$ выполнялось $M_{n+1} = M_{n+2}M_n$.

1.11. Докажите, что $\forall M \in \Lambda :\ \exists N \in \Lambda :\ N\mathsf{I} \twoheadrightarrow_\beta M$, причём N в β-нормальной форме.

1.12. Обозначим через $M \uparrow N$ условие $\exists L :\ (L \twoheadrightarrow M) \wedge (L \twoheadrightarrow N)$. Покажите, что:
[a] $(\lambda x.\, ax)b \uparrow (\lambda y.\, yb)a$, [b] $(\lambda x.\, xc)c \uparrow (\lambda x.\, xx)c$, [c] $(\lambda x.\, bx)c \uparrow (\lambda x.\, x)bc$

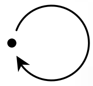
1.13. Постройте λ-выражения со следующими редукционными графами:



1.14. Нарисуйте редукционные графы следующих λ-выражений:
[a] $(\lambda x.\, \mathsf{I}xx)(\lambda x.\, \mathsf{I}xx)$, [b] $(\lambda x.\, \mathsf{I}(xx))(\lambda x.\, \mathsf{I}(xx))$

1.15. Пусть $M \equiv AAx$, где $A \equiv \lambda a{,}x{,}z.\, z(aax)$. Докажите, что редукционный граф $\mathrm{Gr}(M)$ содержит n-мерный куб при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

1.16. Покажите, что концептуально существует только одно λ-выражение (а именно $\mathbf{\Omega}$), имеющее следующий редукционный граф:



1.17. Расширим множество λ-выражений двумя константами δ, ε. Также добавим новое правило редукции: $\delta M M \to \varepsilon$ для любого $M \in \Lambda \cup \{\delta, \varepsilon\}$. Докажите, что в получившейся системе **не** выполняется теорема Чёрча-Россера.

> Подсказка: найдите выражения C. D такие, что
>
> $$Cx \twoheadrightarrow \delta x(Cx),$$
> $$D \twoheadrightarrow CD.$$
>
> Докажите, что $D \twoheadrightarrow \varepsilon$ и $D \twoheadrightarrow C\varepsilon$, но у ε и $C\varepsilon$ нет общего редукта.

1.18. Пусть $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ — коммутирующие отношения на множестве X. Покажите, что $\mathrm{Trans}(\sqsupset_1)$ и $\mathrm{Trans}(\sqsupset_2)$ также коммутируют.

1.19. λ-выражение M *сильно нормализуется* (нотация $\mathrm{SN}(M)$), если **не** существует бесконечного редукционного пути, начинающегося в M. Докажите, что:
[a] $\mathrm{SN}(M) \Rightarrow M$ имеет нормальную форму;
[b] $\mathrm{SN}(M) \Rightarrow \mathrm{Gr}(M)$ конечен. Верно ли обратное?

1.20. Рассмотрим

$$\mathrm{SN}_0 := \{M \in \Lambda \mid \mathrm{SN}(M)\},$$
$$\mathrm{SN}_{n+1} := \{M \in \Lambda \mid \forall N_1, N_2, ..., N_k \in \mathrm{SN}_n : M N_1 N_2 ... N_k \in \mathrm{SN}_n\}.$$

Докажите, что
[a] $\mathrm{SN}_1 \subset \mathrm{SN}_0$, но $\mathrm{SN}_1 \neq \mathrm{SN}_0$.
[b] $\mathrm{SN}_1 = \mathrm{SN}_2 = \mathrm{SN}_3 = ...$