

Лист №2. λ -Представимость и неразрешимость

λ-исчисление, 2024

2.1. Пусть M_1, M_2, \dots, M_k и N_1, N_2, \dots, N_k — два набора λ -выражений. Покажите, что

$$\langle M_1, M_2, \dots, M_k \rangle = \langle N_1, N_2, \dots, N_k \rangle \iff M_1 = N_1, M_2 = N_2, \dots, M_k = N_k$$

2.2. Постройте λ -выражения $A, B \in \Lambda$ таким образом, чтобы $Ax = A$ и $Bx = xB$.

2.3. Постройте выражения $F, \pi \in \Lambda^0$, такие, что:

- $\forall n \in \mathbb{N} : F^{\ulcorner n \urcorner} xy = xy^{\sim n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \leq n : \pi^{\ulcorner n \urcorner \ulcorner i \urcorner} = \pi_i^n$

2.4. • Постройте λ -выражение **Mult**, такое, что **Mult** $\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \ulcorner mn \urcorner$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$.

- Постройте λ -выражение **Fac**, такое, что **Fac** $\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n! \urcorner$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

2.5. Элементарная функция Аккермана φ определяется следующими соотношениями:

$$\varphi(0, n) = n + 1,$$

$$\varphi(m+1, 0) = \varphi(m, 1),$$

$$\varphi(m+1, n+1) = \varphi(m, \varphi(m+1, n)).$$

Покажите, что φ рекурсивна, и найдите λ -выражение, которое её λ -представляет.

2.6. Постройте функцию предшествующего элемента для чисел Чёрча: \mathbf{P}_c^- такое, что $\mathbf{P}_c^- c_{n+1} = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

2.7. Допустим, что каждый символ в упрощённой записи λ -выражения (переменная, скобка, точка, запятая, лямбда) занимает 0.5см пространства на бумаге. Найдите λ -выражение длиной менее 25см, имеющее нормальную форму длиной не менее $10^{10^{150}}$ световых лет (скорость света составляет $3 \cdot 10^{10}$ см/сек.)

2.8. Пусть

$$\mathfrak{E} = \lambda a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,s,t,u,v,w,x,y,z,r. r(\text{this is a fixed point combinator}),$$

\$ = ££££££££££££££££££££££££.

Покажите, что $\$$ — комбинатор неподвижной точки.

2.9. Докажите, что $M \in \Lambda$ – комбинатор неподвижной точки $\Leftrightarrow M = (\mathbf{SI})M$.

2.10. Пусть f, g — λ -выражения. Положим $X \equiv \Theta(f \circ g)$. Докажите, что $g(X)$ — неподвижная точка выражения $g \circ f$.

2.11. Положим $\mathbf{Y}_M \equiv \lambda f. WWM$, где $W \equiv \lambda x, z. f(xxz)$. Докажите, что \mathbf{Y}_M — комбинатор неподвижной точки для любого $M \in \Lambda$.

2.12. Докажите, что $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y}_N \Rightarrow M = N$. (\mathbf{Y}_M и \mathbf{Y}_N определены как в предыдущей задаче)

2.13. • Пусть $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ — рекурсивная функция. Постройте последовательность X_0, X_1, \dots λ -выражений, такую, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется $X_n X_m = X_{f(n,m)}$.

- Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и пусть \times – бинарная операция на X . Постройте λ -выражения X_1, X_2, \dots, X_n таким образом, чтобы выполнялось $X_i X_j = X_k \iff x_i \times x_j = x_k$ при всех i, j, k .

2.14. Пусть d — числовая система. Докажите, что d адекватна тогда и только тогда, когда

$$\exists F, F^{-1} \in \Lambda : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad (F \ulcorner n \urcorner = d_n) \wedge (F^{-1}d_n = \ulcorner n \urcorner).$$

- 2.15. Пусть d_0, d_1, \dots — адекватная числовая система. Положим $d'_n \equiv \mathbf{Y}\mathbf{C}d_n$, где $\mathbf{C} \equiv \lambda x, y, z. x(zy)$. Покажите, что все рекурсивные функции одного аргумента $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ λ -представляются с помощью d' .
(подсказка: рассмотрите $F' \equiv \lambda x. xF$)
- 2.16. Пусть $f_0 \equiv \lambda x, y, z. y$ и $\mathbf{S}_f^+ \equiv \lambda x. \langle x \rangle$. Покажите, что функции $\mathbf{P}_f^- \equiv \langle I \rangle$ и $\mathbf{Zero}_f \equiv \lambda x, y, z. x(\lambda x', y', z'. z')yz$ превращают (f_0, \mathbf{S}_f^+) в адекватную числовую систему.
- 2.17. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n \mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.
- 2.18. Покажите, что множество $\{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$ — **не** рекурсивное.
- 2.19. Докажите, что существует λ -выражение M , такое, что $M = \ulcorner M \urcorner$.
(подсказка: обратите внимание на доказательство теоремы Скотта-Карри о неразрешимости)
- 2.20. Докажите вторую теорему о неподвижной точке: $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : F \ulcorner X \urcorner = X$.