Программа курса

λ-исчисление, 2024

Конверсия и редукция

Основные понятия

1. Множество λ-выражений. Свободные и связанные переменные. α-конгруэнтность. Правило переменных.
2. Оператор подстановки.

Конверсия

1. $\beta\eta$-конверсия. Теорема о неподвижной точке.
2. Стандартные комбинаторы. Комбинатор неподвижной точки. Формальные λ-теории: согласованность, противоречивость, несовместимость.

Редукция

1. Редукция (β-, η-, $\beta\eta$-). Нормальные формы. Редукционные графы.
2. Свойство Чёрча-Россера. Теорема о минимальном элементе.
3. Теорема Чёрча-Россера для β-редукции. Следствия.
4. Диаграммы бинарных отношений. Коммутирующие отношения. Лемма Хиндли-Росена.
5. Теорема Чёрча-Россера для η- и $\beta\eta$-редукции. Следствия.
6. Внешние/внутренние редексы и нормальные формы.
7. Стандартный редукционный путь. Существование стандартной редукции.
8. Нормализующая редукционная стратегия. Теорема о нормализации.

λ-представимость

Основные понятия

1. Комбинаторы T и F. Упорядоченные пары. Конечные кортежи, проекции.
2. Обобщённая теорема о неподвижной точке.

Рекурсивные числовые функции

1. Числа Барендрегта (λ-числа). λ-представимость. Класс рекурсивных функций.
2. Все рекурсивные функции λ-представимы.
3. Все λ-представимые функции рекурсивны (эскиз доказательства).
4. Кодирование (числа Гёделя), функция комбинации, функция нумерации.

.... *текущий прогресс*

Числовые системы

1. Числа Чёрча.
2. Числовые системы. Адекватность. Критерий адекватности числовой системы.

Неразрешимость

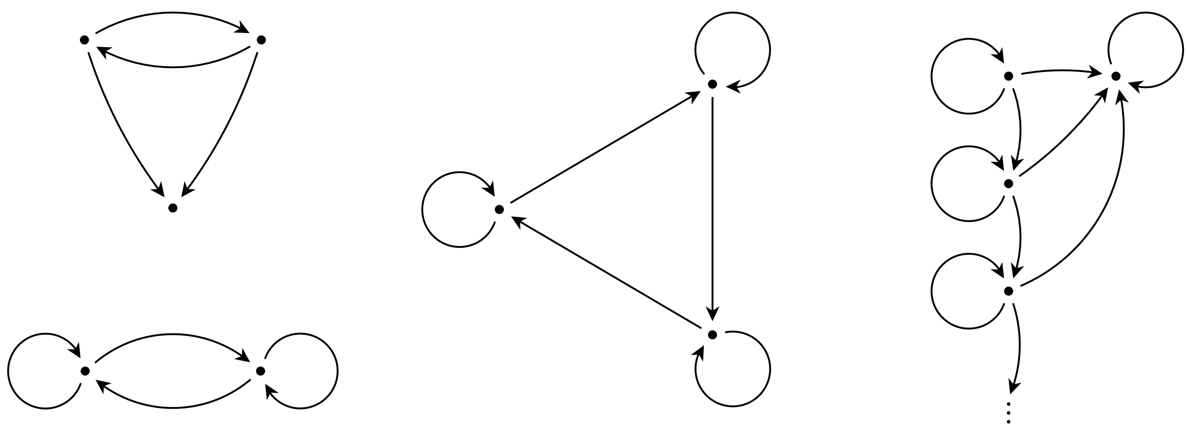
1. Рекурсивно сепарабельные и рекурсивные множества. Замкнутость относительно конверсии.
2. Теорема Скотта-Карри о неразрешимости. Следствия.

Задачи

λ-исчисление, 2024

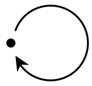
Конверсия и редукция

1. • Перепишите в формальной нотации: $y(\lambda x.\ xy(\lambda z{,}w.\ yz))$
   • Перепишите в упрощённом виде: $(\lambda v'(\lambda v''((((\lambda vv)v')v'')((v''(\lambda v'''(v'v''')))v''))))$
2. Положим $X \equiv \mathbf{SI}$. Покажите, что $XXXX = X(X(XX))$. Правда ли, что $X^n X = XX^{\sim n}$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}_0$?
3. Покажите, что выражение имеет нормальную форму:
   [a] $(\lambda y.\ yyy)((\lambda a{,}b.\ a)\mathbf{I}(\mathbf{SS}))$, [b] $\mathbf{SSSS}$, [c]* $\mathbf{S}(\mathbf{SS})(\mathbf{SS})\mathbf{S}$.
4. Найдите λ-выражение M, такое, что $\forall N \in \Lambda :\ MN = MM$.
5. Докажите, что **не** существует такого $F \in \Lambda$, что $\forall M, N \in \Lambda :\ F(MN) = M$.
6. Пусть $A \equiv \mathbf{SKKK}$. Постройте такое λ-выражение M, чтобы выполнялась конверсия $\mathbf{SI}M\mathbf{K}A = \mathbf{S}M\mathbf{SK}A$.
7. Докажите, что правило η-конверсии ($\lambda x.\ Mx = M,\ \forall M, x : x \notin \mathrm{TV}(M)$) эквивалентно тому, что «функции равны, если равны их значения»:
   $$Mx = Nx \Rightarrow M = N, \quad \forall M, N, x : x \notin \mathrm{TV}(MN).$$
8. • Докажите, что: [a] $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$, [b] $\mathbf{I} \# \mathbf{S}$, [c]* $xy \# xx$.
   • Постройте последовательность $M_0, M_1, \ldots$, такую, что $M_i \# M_j$, если $i \neq j$.
9. Докажите, что $P \# Q \iff (\lambda + (P = Q)) \vdash \mathbf{K} = \mathbf{K}_*$
10. Постройте последовательность λ-выражений $M_0, M_1, \ldots$ так, чтобы $M_0 = v$ и для любого $n \in \mathbb{N}_0$ выполнялось $M_{n+1} = M_{n+2}M_n$.
11. Докажите, что $\forall M \in \Lambda :\ \exists N \in \Lambda :\ N\mathbf{I} \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$, причём N в β-нормальной форме.
12. Обозначим через $M \uparrow N$ условие $\exists L :\ (L \twoheadrightarrow M) \land (L \twoheadrightarrow N)$. Покажите, что:
    [a] $(\lambda x.\ ax)b \uparrow (\lambda y.\ yb)a$, [b] $(\lambda x.\ xc)c \uparrow (\lambda x.\ xx)c$, [c] $(\lambda x.\ bx)c \uparrow (\lambda x.\ x)bc$
13. Постройте λ-выражения со следующими редукционными графами:



14. Нарисуйте редукционные графы следующих λ-выражений:
    [a] $(\lambda x.\ \mathbf{I}xx)(\lambda x.\ \mathbf{I}xx)$, [b] $(\lambda x.\ \mathbf{I}(xx))(\lambda x.\ \mathbf{I}(xx))$
15. Пусть $M \equiv AAx$, где $A \equiv \lambda a{,}x{,}z.\ z(aax)$. Докажите, что редукционный граф $\mathrm{Gr}(M)$ содержит n-мерный куб при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

16. Покажите, что концептуально существует только одно λ-выражение (а именно $\mathbf{\Omega}$), имеющее следующий редукционный граф:



17. Расширим множество λ-выражений двумя константами δ, ε. Также добавим новое правило редукции: $\delta MM \to \varepsilon$ для любого $M \in \Lambda \cup \{\delta, \varepsilon\}$. Докажите, что в получившейся системе **не** выполняется теорема Чёрча-Россера.

> Подсказка: найдите выражения C. D такие, что
>
> $$Cx \twoheadrightarrow \delta x(Cx),$$
> $$D \twoheadrightarrow CD.$$
>
> Докажите, что $D \twoheadrightarrow \varepsilon$ и $D \twoheadrightarrow C\varepsilon$, но у ε и $C\varepsilon$ нет общего редукта.

18. Пусть $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ — коммутирующие отношения на множестве X. Покажите, что $\mathrm{Trans}(\sqsupset_1)$ и $\mathrm{Trans}(\sqsupset_2)$ также коммутируют.

19. λ-выражение M *сильно нормализуется* (нотация $\mathrm{SN}(M)$), если **не** существует бесконечного редукционного пути, начинающегося в M. Докажите, что:
[a] $\mathrm{SN}(M) \Rightarrow M$ имеет нормальную форму;
[b] $\mathrm{SN}(M) \Rightarrow \mathrm{Gr}(M)$ конечен. Верно ли обратное?

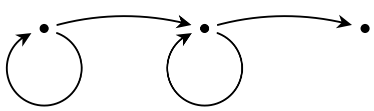
20. Рассмотрим

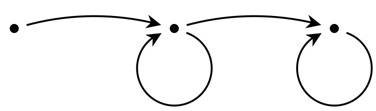
$$\mathrm{SN}_0 \coloneqq \{M \in \Lambda \mid \mathrm{SN}(M)\},$$
$$\mathrm{SN}_{n+1} \coloneqq \{M \in \Lambda \mid \forall N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}_n : MN_1N_2\ldots N_k \in \mathrm{SN}_n\}.$$

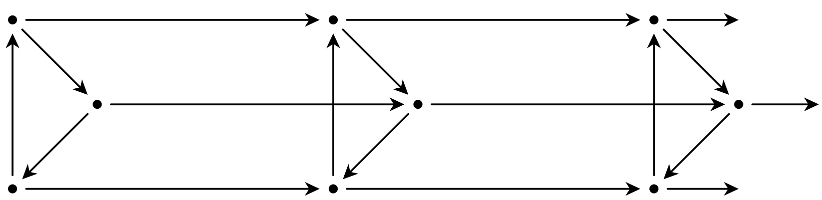
Докажите, что
[a] $\mathrm{SN}_1 \subset \mathrm{SN}_0$, но $\mathrm{SN}_1 \neq \mathrm{SN}_0$.
[b] $\mathrm{SN}_1 = \mathrm{SN}_2 = \mathrm{SN}_3 = \ldots$

21. Нарисуйте редукционные графы выражений:
[a] $H\mathbf{I}H$, где $H \equiv \lambda x{,}y.\ x(z.\ yzy)x$;
[b] $LL\mathbf{I}$, где $L \equiv \lambda x{,}y.\ x(yy)x$;
[c] PQ, где $P \equiv \lambda u.\ u\mathbf{I}u$, $Q \equiv \lambda x{,}y.\ xy\mathbf{I}(xy)$.

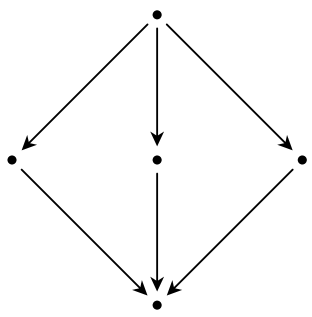
22. Постройте λ-выражения с редукционными графами:







23. Покажите, что **ни одно** λ-выражение не имеет редукционный граф



24. Найдите λ-выражение M_0 с редукционным путём

$$M_0 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_1 \underset{\eta}{\rightarrow} M_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_3 \underset{\eta}{\rightarrow} M_4 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \cdots$$

25. Пусть $M_1 \equiv (\lambda x.\ bx(bc))c$, $M_2 \equiv (\lambda x.\ xx)(bc)$. Докажите, что **не** существует такого выражения M, что $M \twoheadrightarrow M_1$ и $M \twoheadrightarrow M_2$.

λ-представимость

1. Пусть $M_1, M_2, ..., M_k$ и $N_1, N_2, ..., N_k$ — два набора λ-выражений. Покажите, что

$$\langle M_1, M_2, ..., M_k \rangle = \langle N_1, N_2, ..., N_k \rangle \iff M_1 = N_1, M_2 = N_2, ..., M_k = N_k$$

2. Постройте λ-выражения $A, B \in \Lambda$ таким образом, чтобы $Ax = A$ и $Bx = xB$.
3. Постройте выражения $F, \pi \in \Lambda^0$, такие, что:
   - $\forall n \in \mathbb{N} :\ F \ulcorner n \urcorner xy = xy^{\sim n}$
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \leqslant n :\ \pi \ulcorner n \urcorner \ulcorner i \urcorner = \pi_i^n$
4. - Постройте λ-выражение **Mult**, такое, что **Mult** $\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \ulcorner mn \urcorner$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$.
   - Постройте λ-выражение **Fac**, такое, что **Fac** $\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n! \urcorner$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.
5. *Элементарная функция Аккермана* φ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi(0, n) &= n + 1, \\ \varphi(m + 1, 0) &= \varphi(m, 1), \\ \varphi(m + 1, n + 1) &= \varphi(m, \varphi(m + 1, n)). \end{aligned}$$

   Покажите, что φ рекурсивна, и найдите λ-выражение, которое её λ-представляет.
6. Постройте функцию предшествующего элемента для чисел Чёрча: $\mathbf{P}_c^-$ такое, что $\mathbf{P}_c^- c_{n+1} = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.
7. Допустим, что каждый символ в упрощённой записи λ-выражения (переменная, скобка, точка, запятая, лямбда) занимает 0.5см пространства на бумаге. Найдите λ-выражение длиной менее 25см, имеющее нормальную форму длиной не менее $10^{10^{150}}$ световых лет (скорость света составляет $3 \cdot 10^{10}$ см/сек.)
8. Пусть

$$\begin{aligned} £ &= \lambda a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,s,t,u,v,w,x,y,z,r.\ r(thisisafixedpointcombinator), \\ \$ &= ££££££££££££££££££££££££££. \end{aligned}$$

   Покажите, что \$ — комбинатор неподвижной точки.
9. Докажите, что $M \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки $\iff M = (\mathbf{SI})M$.

10. Пусть f, g — λ-выражения. Положим $X \equiv \mathbf{\Theta}(f \circ g)$. Докажите, что $g(X)$ — неподвижная точка выражения $g \circ f$.

11. Положим $\mathbf{Y}_M \equiv \lambda f.\ WWM$, где $W \equiv \lambda x,z.\ f(xxz)$. Докажите, что $\mathbf{Y}_M$ — комбинатор неподвижной точки для любого $M \in \Lambda$.

12. Докажите, что $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y}_N \ \Rightarrow\ M = N$. ($\mathbf{Y}_M$ и $\mathbf{Y}_N$ определены как в предыдущей задаче)

13.
    - Пусть $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ — рекурсивная функция. Постройте последовательность $X_0, X_1, \ldots$ λ-выражений, такую, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется $X_n X_m = X_{f(n,m)}$.
    - Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, и пусть $\times$ — бинарная операция на X. Постройте λ-выражения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ таким образом, чтобы выполнялось $X_i X_j = X_k \iff x_i \times x_j = x_k$ при всех i, j, k.

14. Пусть d — числовая система. Докажите, что d адекватна тогда и только тогда, когда

$$\exists F, F^{-1} \in \Lambda : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad (F \ulcorner n \urcorner = d_n) \wedge (F^{-1} d_n = \ulcorner n \urcorner).$$

15. Пусть $d_0, d_1, \ldots$ — адекватная числовая система. Положим $d'_n \equiv \mathbf{YC}d_n$, где $\mathbf{C} \equiv \lambda x,y,z.\ x(zy)$. Покажите, что все рекурсивные функции одного аргумента $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ λ-представляются с помощью d'.
(подсказка: рассмотрите $F' \equiv \lambda x.\ xF$)

16. Пусть $f_0 \equiv \lambda x,y,z.\ y$ и $\mathbf{S}^+_f \equiv \lambda x.\ \langle x \rangle$. Покажите, что функции $\mathbf{P}^-_f \equiv \langle I \rangle$ и $\mathbf{Zero}_f \equiv \lambda x,y,z.\ x(\lambda x',y',z'.\ z')yz$ превращают $\left(f_0, \mathbf{S}^+_f\right)$ в адекватную числовую систему.

17. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n\mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.

18. Покажите, что множество $\{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$ — **не** рекурсивное.

19. Докажите, что существует λ-выражение M, такое, что $M = \ulcorner M \urcorner$.
(подсказка: обратите внимание на доказательство теоремы Скотта-Карри о неразрешимости)

20. Докажите *вторую теорему о неподвижной точке:* $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda :\ F \ulcorner X \urcorner = X$.