МАТЕРИАЛ КУРСА

λ-исчисление, 2024

Содержание

1. Конверсия и Редукция

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. Рассмотрим счётное множество $V = \{v, v', v'', ...\}$. Элементы этого множества будут называться *переменными.* Множество λ-выражений, Λ, — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- $x \in V,\ M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$; (абстракция, морально: определение функции)
- $M \in \Lambda,\ N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$. (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

Пример 1.1.1. λ-выражения в формальной нотации:

$$v';$$
$$(vv');$$
$$(\lambda v(v'v));$$
$$((\lambda v(v'v))v'');$$
$$(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v''');$$

Нотация

- x, y, z, ... обозначают произвольные переменные из множества V.
- M, N, K, ... обозначают произвольные λ-выражения из Λ.
- Внешние скобки опускаются: $(\lambda x(yz)) \to \lambda x(yz)$.
- Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda...(\lambda x_n M)...)) \to \lambda x_1,x_2,...,x_n.\ M \to \lambda \vec{x}.\ M$$

- Многократная комбинация сокращается:

$$((...((M_1 M_2)M_3)...)M_n)N \to M_1 M_2 ... M_n N \to \overrightarrow{M} N$$

- Комбинация берёт приоритет над абстракцией: $\lambda x.\ yz = \lambda x.\ (yz)$

Определение 1.1.2. Пусть M — λ-выражение. Множества $\mathrm{TV}(M),\ \mathrm{FV}(M),\ \mathrm{BV}(M) \subset V$ определяются индуктивно:

M	$\mathrm{TV}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$	$\mathrm{BV}(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\varnothing$
$\lambda x.\ N$	$\{x\} \cup \mathrm{TV}(N)$	$\mathrm{FV}(N) \lambda \{x\}$	$\{x\} \cup \mathrm{BV}(N)$
NK	$\mathrm{TV}(N) \cup \mathrm{TV}(K)$	$\mathrm{FV}(N) \cup \mathrm{FV}(K)$	$\mathrm{BV}(N) \cup \mathrm{BV}(K)$

Замечание 1.1.1. В данный момент существуют не вполне осмысленные λ-выражения. Так, в выражении $(\lambda x.\ xy)x$ переменная x выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении $\lambda x.\ \lambda x.\ xx$ переменная x связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить *заменой связанных переменных:* $(\lambda x.\ xy)x \to (\lambda u.\ uy)x$, $\lambda x.\ \lambda x.\ xx \to \lambda x.\ \lambda u.\ uu$. Сейчас мы формализуем эту идею.

Определение 1.1.3. Пусть $\sqsubset$ — бинарное отношение на множестве Λ. Тогда $\sqsubset$ называется *совместимым с операциями,* если:

$$M \sqsubset N \Rightarrow \lambda x.\ M \sqsubset \lambda x.\ N,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow ZM \sqsubset ZN,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow MZ \sqsubset NZ.$$

Определение 1.1.4. *Тождественное равенство* ($\equiv$) обозначает полностью идентичный состав символов: $\lambda x.\ xy \not\equiv \lambda u.\ uy$.

Определение 1.1.5. Отношение *α-конгруэнтности* ($\overset{\alpha}{=}$) на Λ — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:
- $M \overset{\alpha}{=} M$;
- $\lambda x.\ M \overset{\alpha}{=} \lambda y.\ (M[x \to y])$, при условии что $y \notin \mathrm{TV}(M)$;
- $\overset{\alpha}{=}$ совместимо с операциями.

Определение 1.1.6. Пусть M — λ-выражение. M называется *корректным* в следующих случаях:
1. $M \equiv x \in V$;
2. $M \equiv \lambda x.\ N$, причём N корректно, а также $x \notin \mathrm{BV}(N)$;
3. $M \equiv NK$, причём N, K корректны, а также $\mathrm{BV}(N) \cap \mathrm{FV}(K) = \varnothing$ и $\mathrm{FV}(N) \cap \mathrm{BV}(K) = \varnothing$.

Упражнение Доказать, что если M корректно, то $\mathrm{FV}(M) \cap \mathrm{BV}(M) = \varnothing$, $\mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M) = \mathrm{TV}(M)$.

Упражнение Пусть M — λ-выражение. Доказать, что существует корректное λ-выражение N, такое, что $M \overset{\alpha}{=} N$.

Договорённость (Правило переменных): Пусть λ-выражения $M_1, M_2, ..., M_n$ выступают с едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что выражение $M_1 M_2 ... M_n$ — корректное.

Определение 1.1.7. λ-выражение M называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$. Λ^0 обозначает множество всех замкнутых λ-выражений.

Определение 1.1.8. M является *подвыражением* N ($M \subset N$), если M лежит во множестве $\mathrm{Sub}(N)$:

N	$\mathrm{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x.\ K$	$\{\lambda x.\ K\} \cup \mathrm{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\mathrm{Sub}(K_1) \cup \mathrm{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

Определение 1.1.9. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда
- $F^0 M \equiv M$; $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $F M^{\sim 0} \equiv F$; $F M^{\sim n+1} \equiv (F M^{\sim n}) M$

1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$-конверсия

Определение 1.2.1. Пусть $M \in \Lambda$, $x \notin \mathrm{BV}(M)$. Пусть также $N \in \Lambda$. *Результат подстановки N вместо x*, $M[x := N]$, определяется индуктивно:

$$\begin{aligned} x[x := N] &\equiv N; \\ y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \not\equiv x; \\ (\lambda y.\ M')[x := N] &\equiv \lambda y.\ (M'[x := N]); \\ (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]). \end{aligned}$$

Замечание 1.2.1. Рассмотрим $M \equiv \lambda y.\ x$, $N \equiv yy$. Тогда по предыдущему определению мы получаем $M[x := N] = \lambda y.\ yy$, что настораживает, ведь $M \equiv \lambda y.\ x \overset{\alpha}{=} \lambda u.\ x \equiv M'$, тогда как

$$M[x := N] = \lambda y.\ yy \overset{\alpha}{\neq} \lambda u.\ yy = M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь $\mathrm{BV}(M) \cap \mathrm{FV}(N) = \{y\} \neq \varnothing$.

Упражнение Доказать, что оператор подстановки уважает α-конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left.\begin{array}{l} M \overset{\alpha}{=} M' \\ N \overset{\alpha}{=} N' \end{array}\right\} \Rightarrow M[x := N] \overset{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

Лемма 1.2.1. (о подстановке): *Пусть $M, N, L \in \Lambda$. Тогда если $x \not\equiv y$ и $x \notin \mathrm{FV}(L)$, то*

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре λ-выражения M.

1. База: $M \equiv u \in V$. Тогда рассмотрим три случая:
   - $u \equiv x$. Тогда обе части тождественно равны $N[y := L]$, так как $x \not\equiv y$.
   - $u \equiv y$. Тогда обе части равны L, так как $L[x := ...] = L$, ведь $x \notin \mathrm{FV}(L)$.
   - $u \not\equiv x, y$. Тогда обе части равны u.
2. Переход.
   - $M \equiv \lambda z.\ M'$. По правилу переменых и определению оператора подстановки мы имеем $z \notin \mathrm{FV}(NL)$ и $z \not\equiv x, y$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned}(\lambda z.\ M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z.\ M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.\ M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z.\ M')[y := L][x := N[y := L]].\end{aligned}$$

   - $M \equiv M_1 M_2$. Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

Определение 1.2.2. ($\beta\eta$-конверсия): Отношение $\beta\eta$-конверсии ($\simeq$) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $(\lambda x.\ M)N = M[x := N]$; ($\beta$-конверсия)
- $\lambda x.\ Mx = M$, при условии что $x \notin \mathrm{TV}(M)$; (η-конверсия)
- $\simeq$ — отношение эквивалентности;
- $\simeq$ совместимо с операциями.

Если $M \simeq M$, мы говорим, что «M равно N», или «M конвертируется в N». Запись «$\lambda \vdash M \simeq N$» означает, что конверсию $M \simeq N$ можно вывести из вышеуказанных правил.

Теорема 1.2.1. (о неподвижной точке): $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda :\ FX = X$.

Доказательство: Пусть $W \equiv \lambda x.\ F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.\ F(xx))W \simeq F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

Утверждение 1.2.1. $\forall M, N \in \Lambda :\ \lambda \vdash M \simeq N$

Доказательство: Рассмотрим $F \equiv \lambda x{,}y.\ yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))M)N \simeq (\lambda y.\ yM)N \simeq NM.$$

В частности, $Fyx \simeq xy$. Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))y)x \simeq (\lambda y.\ yy)x = xx.$$

Тогда $xy \simeq xx$, а значит $F_1 \equiv \lambda x{,}y.\ xy \simeq \lambda x{,}y.\ xx \equiv F_2$. Теперь для любого $M \in \Lambda$ имеем

$$M \simeq (\lambda x.\ x)M \simeq F_1(\lambda x.\ x)M \simeq F_2(\lambda x.\ x)M \simeq (\lambda x.\ x)(\lambda x.\ x) \simeq (\lambda x.\ x),$$

и по транзитивности $M \simeq (\lambda x.\ x) \simeq N$ для любых $M, N \in \Lambda$. В чём ошибка? ■

Лемма 1.2.2. *Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если* $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, *то* $M[x := N] \simeq M'[x := N']$.

Доказательство: Упражнение. ■

1.3. Комбинаторы и согласованность

Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\ x$
- $\mathbf{K} \equiv \lambda x, y.\ x$
- $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x, y.\ y$
- $\mathbf{S} \equiv \lambda x, y, z.\ xz(yz)$
- $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f(xx))(\lambda x.\ f(xx))$ — комбинатор неподвижной точки: $\forall F \in \Lambda :\ F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$. Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. РАссмотрим λ-выражение M, определённое рекуррентной формулой:

$$Mx \equiv FxM.$$

Определим $G \equiv \lambda y.\ \lambda x.\ Fxy$. Тогда M приобретает явную форму: $M \equiv \mathbf{Y}G$ (упражнение).

Определение 1.3.2.

- Выражение вида $M \simeq N$ называется *равенством;*
- Равенство $M \simeq N$ называется *замкнутым,* если $M, N \in \Lambda^0$;
- Пусть $\mathcal{T}$ — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие λ-теории). Тогда $\mathcal{T}$ называется *согласованной* (нотация $\operatorname{Con}(\mathcal{T})$) если $\mathcal{T}$ **не** доказывает все замкнутые равенства. В противном случае $\mathcal{T}$ называется *противоречивой.*
- Если $\mathcal{T}$ — это набор равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, полученную добавлением равенств из $\mathcal{T}$ к стандартному списку аксиом $\beta\eta$-конверсии.

Определение 1.3.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда M и N называются *несовместимыми* (нотация $M \# N$), если теория $\lambda + (M \simeq N)$ противоречива.

Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

Доказательство: Имеем $\mathbf{I}MN \simeq \mathbf{K}MN$ для любых $M, N \in \Lambda$. По определению комбинаторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$, имеем $MN \simeq M$. Подставляя $M \equiv \mathbf{I}$, получаем $N \simeq \mathbf{I}\ \forall N \in \Lambda$. ■

1.4. Нормальные формы

Определение 1.4.1.

- λ-выражение M называется *$\beta\eta$-нормальной формой,* если оно **не** имеет подвыражений вида $(\lambda x.\ M)N$ или $\lambda y.\ (My)$ (где $y \notin \operatorname{TV}(M)$).
- *M имеет нормальную форму N,* если $M \simeq N$ и N — нормальная форма.

Пример 1.4.1.

- $\mathbf{I}$ находится в нормальной форме;
- $\mathbf{KI}$ имеет нормальную форму $\lambda y.\ \mathbf{I}$;
- Комбинатор $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы (доказательство позже).

Воспоминания о будущем.

- M имеет $\beta\eta$-нормальную форму тогда и только тогда, когда имеет β-нормальную форму;
- Если M и N — различные $\beta\eta$-нф, то $\lambda \nvdash M \simeq N$;
- Следствие: λ — согласованная теория (упражнение);
- Если M и N — различные $\beta\eta$-нф, то $M \# N$

- Следствие: пусть M и N имеют нормальную форму. Тогда либо $M \simeq N$, либо $M \# N$;

1.5. Редукция

Замечание 1.5.1. В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x.\, x^2 + 1)3 \simeq 10$$

можно сказать, что «10 является результатом *упрощения* выражения $(\lambda x.\, x^2 + 1)3$», но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

Определение 1.5.1.

1. Отношение $\to$ (*редукция за один шаг*) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, такое что:
   - $(\lambda x.\, M)N \to M[x := N]$;
   - $\lambda x.\, Mx \to M$, если $x \notin \mathrm{TV}(M)$;
   - $\to$ совместимо с операциями.
2. Отношение $\twoheadrightarrow$ (*редукция*) — это замыкание $\to$ до предпорядка: $\twoheadrightarrow = \mathrm{Preord}(\to)$;
3. Отношение $\simeq$ (*конгруэнтность* или *эквивалентность*) — это замыкание $\twoheadrightarrow$ до отношения эквивалентности: $\simeq = \mathrm{Equiv}(\twoheadrightarrow)$

Определение 1.5.2.

1. λ-выражения вида $(\lambda x.\, M)N$ называются *β-редексами;* соотв. отношения: $\underset{\beta}{\to}, \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}, \underset{\beta}{\simeq}$
2. λ-выражения вида $\lambda x.\, Mx$ называются *η-редексами.* соотв. отношения: $\underset{\eta}{\to}, \underset{\eta}{\twoheadrightarrow}, \underset{\eta}{\simeq}$
3. M — *нормальная форма* (или *в нормальной форме*), если M не содержит редексов.
4. Пусть Δ — редекс в выражении M. Запись $M \overset{\Delta}{\to} N$ означает, что N получается из M сокращением редекса Δ: $N \equiv M[\Delta \to \Delta']$
5. *Редукционный путь* — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to} M_2 \to \dots$$

Пример 1.5.1.

- Определим $\omega_3 = \lambda x.\, xxx$. Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \dots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$\mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}x}{\to} \mathbf{I}x, \quad \mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}(\mathbf{I}x)}{\to} \mathbf{I}x$$

Утверждение 1.5.1. *Пусть M — нормальная форма. Тогда:*

1. $\nexists N : M \to N;$
2. $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \equiv N.$

> *Доказательство:*
> 1. Очевидно.
> 2. По определению $\twoheadrightarrow$, условие $M \twoheadrightarrow N$ влечёт два случая:
>   - $M \to K_1 \to K_2 \to \dots \to N$ — невозможно по (1);
>   - $M \equiv N$ — искомый.
>
> q.e.d. ■

Определение 1.5.3. *Редукционный граф* выражения M (нотация $\mathrm{Gr}(M)$) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \twoheadrightarrow N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \to K\}$$

Определение 1.5.4. Пусть $\sqsupset$ — рефлексивное отношение на множестве Λ. $\sqsupset$ *обладает свойством Чёрча-Россера* (нотация $\mathrm{CR}(\sqsupset)$), если

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda : \,(M \sqsupset M_1) \wedge (M \sqsupset M_2), \quad \exists Z \in \Lambda : \,(M_1 \sqsupset Z) \wedge (M_2 \sqsupset Z).$$

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\sqsupset$ *обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения* $\sim\, = \mathrm{Equiv}(\sqsupset)$ *справедливо:*

$$M \sim N \Rightarrow \exists Z : \,(M \sqsupset Z) \wedge (N \sqsupset Z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения $\sim$. Пусть $M \sim N$. Тогда возникают три случая:
- $M \sqsupset N \Rightarrow M \sim N$. Тогда положим $Z \equiv N$.
- $N \sim M \Rightarrow M \sim N$. Тогда возьмём Z по предположению индукции.
- $M \sim L \wedge L \sim N \Rightarrow M \sim N$. Тогда рассмотрим $Z_1, Z_2 \in \Lambda : \,(Z_1 \sqsubset M, L) \wedge (Z_2 \sqsubset L, N)$. Поскольку $\mathrm{CR}(\sqsupset)$, найдётся λ-выражение Z, такое, что $(Z_1 \sqsupset Z) \wedge (Z_2 \sqsupset Z)$. Оно искомое.

q.e.d. ■

1.6. Теорема Чёрча-Россера для β- и $\beta\eta$-редукции

Сначала мы докажем, что отношение $\underset{\beta}{\to}$ обладает свойством Чёрча-Россера.

Лемма 1.6.1. *Пусть* $\sqsupset$ *— бинарное отношение на* Λ *и пусть* $\sqsupset'$ *— его транзитивное замыкание. Тогда* $\mathrm{CR}(\sqsupset) \Rightarrow \mathrm{CR}(\sqsupset')$.

Доказательство: Пусть $M \sqsupset' M_1,\ M \sqsupset' M_2$. Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & N_2 \arrow[d, dashed] \\
K_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & Z_2 \arrow[d, dashed] \\
K_2 \arrow[r, dashed] & Z_3 \arrow[r, dashed] & Z_4
\end{tikzcd}$$

q.e.d. ■

Определение 1.6.1. Рассмотрим бинарное отношение $\rightsquigarrow$, определённое индуктивно следующим образом:
- $M \rightsquigarrow M$;
- $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x.\, M \rightsquigarrow \lambda x.\, M'$;
- $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$;
- $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Лемма 1.6.2. *Если* $M \rightsquigarrow M'$ *и* $N \rightsquigarrow N'$, *то* $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Доказательство: Индукция по определению $M \rightsquigarrow M'$.

1. $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Тогда требуется доказать, что $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$. Проведём индукцию по структуре M:

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
x	N	N'	ОК

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
y	y	y	OK
PQ	$P[...]Q[...]$	$P[...']Q[...']$	предп. инд.
$\lambda y.\ P$	$\lambda y.\ P[...]$	$\lambda y.\ P[...']$	аналогично

2. $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y.\ P \rightsquigarrow \lambda y.\ P'$, прямое следствие $P \rightsquigarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightsquigarrow P'[x := N']$, а тогда $\lambda y.\ P[x := N] \rightsquigarrow \lambda y.\ P'[x := N']$, что и требовалось доказать.

3. $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$ и $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \\ &\rightsquigarrow P'[x := N']Q'[x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

4. $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y.\ P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y.\ P[x := N])(Q[x := N]) \\ &\rightsquigarrow P'[x := N'][y := Q'[x := N']] \\ &\equiv P'[y := Q'][x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Лемма 1.6.3.

1. *$\lambda x.\ M \rightsquigarrow N$ влечёт $N \equiv \lambda x.\ M'$, где $M \rightsquigarrow M'$;*

2. *$MN \rightsquigarrow L$ влечёт либо*
- *$L \equiv M'N'$, где $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, либо*
- *$M \equiv \lambda x.\ P,\ L \equiv P'[x := N']$, где $P \rightsquigarrow P',\ N \rightsquigarrow N'$.*

Доказательство:

1. Очевидно.

2. Очевидно.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.4. *$\rightsquigarrow$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.*

Доказательство: Пусть $M \rightsquigarrow M_1,\ M \rightsquigarrow M_2$. Проводим индукцию по определению $M \rightsquigarrow M_1$.

1. $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow M \equiv M_1$. Тогда положим $Z \equiv M_2$.

2. $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow (\lambda x.\ P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Лемма 1.6.3 позволяет рассмотреть два подслучая:
- $M_2 \equiv (\lambda x.\ P'')Q''$, где $P \rightsquigarrow P'',\ Q \rightsquigarrow Q''$. По предположению индукции существуют λ-выражения Z_P, Z_Q, такие, что

$$P' \rightsquigarrow Z_P,\ P'' \rightsquigarrow Z_P,\ Q' \rightsquigarrow Z_Q,\ Q'' \rightsquigarrow Z_Q.$$

  Лемма 1.6.2 позволяет взять $Z \equiv Z_P\left[x := Z_Q\right]$ в качестве искомого (упражнение).
- $M_2 \equiv P''[x := Q'']$ — аналогично.

3. $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Снова два подслучая:
- $M_2 \equiv P''Q''$, причём $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Тогда аналогично берём $Z \equiv Z_P\left[x := Z_Q\right]$.
- $P \equiv (\lambda x.\ P_1)$, $M_2 \equiv P_{1''}[x := Q'']$ и $P_1 \rightsquigarrow P_{1''}$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Лемма 1.6.3 гарантирует, что $P' \equiv \lambda x.\ P_{1'}$, где $P_1 \rightsquigarrow P_{1'}$. Применяя предположение индукции, берём $Z = Z_P\left[x := Z_Q\right]$.

4. $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ P \rightsquigarrow \lambda x.\ P'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x,\ P''$. По предположению индукции возьмём $Z = \lambda x.\ Z_P$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.5. $\underset{\beta}{\to}$ — *это транзитивное замыкание* $\rightsquigarrow$.

Доказательство: Очевидно по определению. ■

Теорема 1.6.1. (Чёрча-Россера):

1. $\underset{\beta}{\to}$ *удовлетворяет свойству Ч.-Р.;*
2. $M \underset{\beta}{\simeq} N \Rightarrow \exists Z : \left(M \underset{\beta}{\to} Z\right) \land \left(N \underset{\beta}{\to} Z\right)$.

Доказательство: Упражнение. ■