

# МАТЕРИАЛ КУРСА

*$\lambda$ -исчисление, 2024*

## Содержание

<b>1. Конверсия и Редукция</b>	<b>2</b>
1.1. Основные понятия	2
1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия	3
1.3. Комбинаторы и согласованность	5
1.4. Нормальные формы	5
1.5. Редукция	6
1.6. Теорема Чёрча-Россера для $\beta$ - и $\beta\eta$ -редукции	7

# 1. Конверсия и Редукция

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.1.** Рассмотрим счётное множество  $V = \{v, v', v'', \dots\}$ . Элементы этого множества будут называться *переменными*. Множество  $\lambda$ -выражений,  $\Lambda$ , — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$ ;
- $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$ ; (абстракция, морально: определение функции)
- $M \in \Lambda, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$ . (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

**Пример 1.1.1.**  $\lambda$ -выражения в формальной нотации:

$$\begin{aligned} &v'; \\ &(vv'); \\ &(\lambda v(v'v)); \\ &((\lambda v(v'v))v''); \\ &(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v'''); \end{aligned}$$

### Нотация

- $x, y, z, \dots$  обозначают произвольные переменные из множества  $V$ .
- $M, N, K, \dots$  обозначают произвольные  $\lambda$ -выражения из  $\Lambda$ .
- Внешние скобки опускаются:  $(\lambda x(yz)) \rightarrow \lambda x(yz)$ .
- Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda \dots (\lambda x_n M) \dots)) \rightarrow \lambda x_1, x_2, \dots, x_n. M \rightarrow \lambda \vec{x}. M$$

- Многократная комбинация сокращается:

$$((\dots((M_1 M_2) M_3) \dots) M_n) N \rightarrow M_1 M_2 \dots M_n N \rightarrow \vec{M} N$$

- Комбинация берёт приоритет над абстракцией:  $\lambda x. yz = \lambda x. (yz)$

**Определение 1.1.2.** Пусть  $M$  —  $\lambda$ -выражение. Множества  $TV(M)$ ,  $FV(M)$ ,  $BV(M) \subset V$  определяются индуктивно:

$M$	$TV(M)$	$FV(M)$	$BV(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\emptyset$
$\lambda x. N$	$\{x\} \cup TV(N)$	$FV(N) \setminus \{x\}$	$\{x\} \cup BV(N)$
$NK$	$TV(N) \cup TV(K)$	$FV(N) \cup FV(K)$	$BV(N) \cup BV(K)$

**Замечание 1.1.1.** В данный момент существуют не вполне осмысленные  $\lambda$ -выражения. Так, в выражении  $(\lambda x. xy)x$  переменная  $x$  выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении  $\lambda x. \lambda x. xx$  переменная  $x$  связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить заменой связанных переменных:  $(\lambda x. xy)x \rightarrow (\lambda u. uy)x$ ,  $\lambda x. \lambda x. xx \rightarrow \lambda x. \lambda u. uu$ . Сейчас мы формализуем эту идею.

**Определение 1.1.3.** Пусть  $\sqsubset$  — бинарное отношение на множестве  $\Lambda$ . Тогда  $\sqsubset$  называется *совместимым с операциями*, если:

$$\begin{aligned} M \sqsubset N &\Rightarrow \lambda x. M \sqsubset \lambda x. N, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow ZM \sqsubset ZN, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow MZ \sqsubset NZ. \end{aligned}$$

**Определение 1.1.4.** Тожественное равенство ( $\equiv$ ) обозначает полностью идентичный состав символов:  $\lambda x. xy \neq \lambda u. uy$ .

**Определение 1.1.5.** Отношение  $\alpha$ -конгруэнтности ( $\stackrel{\alpha}{=}$ ) на  $\Lambda$  — это наименьшее подмножество  $\Lambda \times \Lambda$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- $M \stackrel{\alpha}{=} M$ ;
- $\lambda x. M \stackrel{\alpha}{=} \lambda y. (M[x \rightarrow y])$ , при условии что  $y \notin \text{TV}(M)$ ;
- $\stackrel{\alpha}{=}$  совместимо с операциями.

**Определение 1.1.6.** Пусть  $M$  —  $\lambda$ -выражение.  $M$  называется *корректным* в следующих случаях:

1.  $M \equiv x \in V$ ;
2.  $M \equiv \lambda x. N$ , причём  $N$  корректно, а также  $x \notin \text{BV}(N)$ ;
3.  $M \equiv NK$ , причём  $N, K$  корректны, а также  $\text{BV}(N) \cap \text{FV}(K) = \emptyset$  и  $\text{FV}(N) \cap \text{BV}(K) = \emptyset$ .

**Упражнение 1.1.1.** Доказать, что если  $M$  корректно, то  $\text{FV}(M) \cap \text{BV}(M) = \emptyset$ ,  $\text{FV}(M) \cup \text{BV}(M) = \text{TV}(M)$ .

**Упражнение 1.1.2.** Пусть  $M$  —  $\lambda$ -выражение. Доказать, что существует корректное  $\lambda$ -выражение  $N$ , такое, что  $M \stackrel{\alpha}{=} N$ .

**Договорённость** (Правило переменных): Пусть  $\lambda$ -выражения  $M_1, M_2, \dots, M_n$  выступают с едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что выражение  $M_1 M_2 \dots M_n$  — корректное.

**Определение 1.1.7.**  $\lambda$ -выражение  $M$  называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если  $\text{FV}(M) = \emptyset$ .  $\Lambda^0$  обозначает множество всех замкнутых  $\lambda$ -выражений.

**Определение 1.1.8.**  $M$  является *подвыражением*  $N$  ( $M \subset N$ ), если  $M$  лежит во множестве  $\text{Sub}(N)$ :

$N$	$\text{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x. K$	$\{\lambda x. K\} \cup \text{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\text{Sub}(K_1) \cup \text{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

**Определение 1.1.9.** Пусть  $F, M \in \Lambda$ . Тогда

- $F^0 M \equiv M$ ;  $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $FM^{\sim 0} \equiv F$ ;  $FM^{\sim n+1} \equiv (FM^{\sim n})M$

## 1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия

**Определение 1.2.1.** Пусть  $M \in \Lambda$ ,  $x \notin \text{BV}(M)$ . Пусть также  $N \in \Lambda$ . *Результат подстановки*  $N$  вместо  $x$ ,  $M[x := N]$ , определяется индуктивно:

$$\begin{aligned}
 x[x := N] &\equiv N; \\
 y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \neq x; \\
 (\lambda y. M')[x := N] &\equiv \lambda y. (M'[x := N]); \\
 (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]).
 \end{aligned}$$

**Замечание 1.2.1.** Рассмотрим  $M \equiv \lambda y. x$ ,  $N \equiv yy$ . Тогда по предыдущему определению мы получаем  $M[x := N] = \lambda y. yy$ , что настораживает, ведь  $M \equiv \lambda y. x \stackrel{\alpha}{=} \lambda u. x \equiv M'$ , тогда как

$$M[x := N] = \lambda y. yy \not\stackrel{\alpha}{=} \lambda u. yy = M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь  $\text{BV}(M) \cap \text{FV}(N) = \{y\} \neq \emptyset$ .

**Упражнение 1.2.1.** Доказать, что оператор подстановки уважает  $\alpha$ -конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left. \begin{array}{l} M \stackrel{\alpha}{=} M' \\ N \stackrel{\alpha}{=} N' \end{array} \right\} \Rightarrow M[x := N] \stackrel{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

**Лемма 1.2.1.** (о подстановке): Пусть  $M, N, L \in \Lambda$ . Тогда если  $x \neq y$  и  $x \notin \text{FV}(L)$ , то

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре  $\lambda$ -выражения  $M$ .

1. База:  $M \equiv u \in V$ . Тогда рассмотрим три случая:

- $u \equiv x$ . Тогда обе части тождественно равны  $N[y := L]$ , так как  $x \neq y$ .
- $u \equiv y$ . Тогда обе части равны  $L$ , так как  $L[x := \dots] = L$ , ведь  $x \notin \text{FV}(L)$ .
- $u \neq x, y$ . Тогда обе части равны  $u$ .

2. Переход.

- $M \equiv \lambda z. M'$ . По правилу переменных и определению оператора подстановки мы имеем  $z \notin \text{FV}(NL)$  и  $z \neq x, y$ . Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} (\lambda z. M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z. M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z. M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z. M')[y := L][x := N[y := L]]. \end{aligned}$$

- $M \equiv M_1 M_2$ . Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

**Определение 1.2.2.** ( $\beta\eta$ -конверсия): Отношение  $\beta\eta$ -конверсии ( $\simeq$ ) — это наименьшее подмножество  $\Lambda \times \Lambda$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- $(\lambda x. M)N = M[x := N]$ ; ( $\beta$ -конверсия)
- $\lambda x. Mx = M$ , при условии что  $x \notin \text{TV}(M)$ ; ( $\eta$ -конверсия)
- $\simeq$  — отношение эквивалентности;
- $\simeq$  совместимо с операциями.

Если  $M \simeq N$ , мы говорим, что « $M$  равно  $N$ », или « $M$  конвертируется в  $N$ ». Запись « $\lambda \vdash M \simeq N$ » означает, что конверсию  $M \simeq N$  можно вывести из вышеуказанных правил.

**Теорема 1.2.1.** (о неподвижной точке):  $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : FX = X$ .

Доказательство: Пусть  $W \equiv \lambda x. F(xx)$  и  $X \equiv WW$ . Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. F(xx))W \simeq F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

**Утверждение 1.2.1.**  $\forall M, N \in \Lambda : \lambda \vdash M \simeq N$

Доказательство: Рассмотрим  $F \equiv \lambda x, y. xy$ . Тогда для любых  $M, N$  имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))M)N \simeq (\lambda y. yM)N \simeq NM.$$

В частности,  $Fyx \simeq xy$ . Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))y)x \simeq (\lambda y. yy)x = xx.$$

Тогда  $xy \simeq xx$ , а значит  $F_1 \equiv \lambda x, y. xy \simeq \lambda x, y. xx \equiv F_2$ . Теперь для любого  $M \in \Lambda$  имеем

$$M \simeq (\lambda x. x)M \simeq F_1(\lambda x. x)M \simeq F_2(\lambda x. x)M \simeq (\lambda x. x)(\lambda x. x) \simeq (\lambda x. x),$$

| и по транзитивности  $M \simeq (\lambda x. x) \simeq N$  для любых  $M, N \in \Lambda$ . В чём ошибка? ■

**Лемма 1.2.2.** *Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если  $M \simeq M'$ ,  $N \simeq N'$ , то  $M[x := N] \simeq M'[x := N']$ .*

| Доказательство: Упражнение. ■

### 1.3. Комбинаторы и согласованность

#### Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$
- $\mathbf{K} \equiv \lambda x, y. x$
- $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x, y. y$
- $\mathbf{S} \equiv \lambda x, y, z. xz(yz)$
- $\mathbf{Y} \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$  — комбинатор неподвижной точки:  $\forall F \in \Lambda : F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$ .  
Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. Рассмотрим  $\lambda$ -выражение  $M$ , определённое рекуррентной формулой:

$$Mx \equiv FxM.$$

Определим  $G \equiv \lambda y. \lambda x. Fxy$ . Тогда  $M$  приобретает явную форму:  $M \equiv \mathbf{Y}G$  (упражнение).

#### Определение 1.3.2.

- Выражение вида  $M \simeq N$  называется *равенством*;
- Равенство  $M \simeq N$  называется *замкнутым*, если  $M, N \in \Lambda^0$ ;
- Пусть  $\mathcal{T}$  — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие  $\lambda$ -теории). Тогда  $\mathcal{T}$  называется *согласованной* (нотация  $\text{Con}(\mathcal{T})$ ) если  $\mathcal{T}$  **не** доказывает все замкнутые равенства. В противном случае  $\mathcal{T}$  называется *противоречивой*.
- Если  $\mathcal{T}$  — это набор равенств, то  $\lambda + \mathcal{T}$  обозначает теорию, полученную добавлением равенств из  $\mathcal{T}$  к стандартному списку аксиом  $\beta\eta$ -конверсии.

**Определение 1.3.3.** Пусть  $M, N \in \Lambda$ . Тогда  $M$  и  $N$  называются *несовместимыми* (нотация  $M \# N$ ), если теория  $\lambda + (M \simeq N)$  противоречива.

#### Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

| Доказательство: Имеем  $\mathbf{I}MN \simeq \mathbf{K}MN$  для любых  $M, N \in \Lambda$ . По определению комбинаторов  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{K}$ , имеем  $MN \simeq M$ . Подставляя  $M \equiv \mathbf{I}$ , получаем  $N \simeq \mathbf{I} \forall N \in \Lambda$ . ■

### 1.4. Нормальные формы

#### Определение 1.4.1.

- $\lambda$ -выражение  $M$  называется  *$\beta\eta$ -нормальной формой*, если оно **не** имеет подвыражений вида  $(\lambda x. M)N$  или  $\lambda y. (My)$  (где  $y \notin \text{TV}(M)$ ).
- $M$  имеет нормальную форму  $N$ , если  $M \simeq N$  и  $N$  — нормальная форма.

#### Пример 1.4.1.

- $\mathbf{I}$  находится в нормальной форме;
- $\mathbf{KI}$  имеет нормальную форму  $\lambda y. \mathbf{I}$ ;
- Комбинатор  $\mathbf{\Omega} = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$  не имеет нормальной формы (доказательство позже).

#### Воспоминания о будущем.

- $M$  имеет  $\beta\eta$ -нормальную форму тогда и только тогда, когда имеет  $\beta$ -нормальную форму;
- Если  $M$  и  $N$  — различные  $\beta\eta$ -нф, то  $\lambda \not\vdash M \simeq N$ ;
- Следствие:  $\lambda$  — согласованная теория (упражнение);
- Если  $M$  и  $N$  — различные  $\beta\eta$ -нф, то  $M \# N$

- Следствие: пусть  $M$  и  $N$  имеют нормальную форму. Тогда либо  $M \simeq N$ , либо  $M \# N$ ;

## 1.5. Редукция

**Замечание 1.5.1.** В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x. x^2 + 1)3 \simeq 10$$

можно сказать, что «10 является результатом упрощения выражения  $(\lambda x. x^2 + 1)3$ », но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

### Определение 1.5.1.

1. Отношение  $\rightarrow$  (редукция за один шаг) — это наименьшее подмножество  $\Lambda \times \Lambda$ , такое что:
  - $(\lambda x. M)N \rightarrow M[x := N]$ ;
  - $\lambda x. Mx \rightarrow M$ , если  $x \notin \text{TV}(M)$ ;
  - $\rightarrow$  совместимо с операциями.
2. Отношение  $\rightarrow^*$  (редукция) — это замыкание  $\rightarrow$  до предпорядка:  $\rightarrow^* = \text{Preord}(\rightarrow)$ ;
3. Отношение  $\simeq$  (конгруэнтность или эквивалентность) — это замыкание  $\rightarrow^*$  до отношения эквивалентности:  $\simeq = \text{Equiv}(\rightarrow^*)$

### Определение 1.5.2.

1.  $\lambda$ -выражения вида  $(\lambda x. M)N$  называются  $\beta$ -редексами; соотв. отношения:  $\xrightarrow{\beta}, \xrightarrow{*}_{\beta}, \simeq_{\beta}$
2.  $\lambda$ -выражения вида  $\lambda x. Mx$  называются  $\eta$ -редексами. соотв. отношения:  $\xrightarrow{\eta}, \xrightarrow{*}_{\eta}, \simeq_{\eta}$
3.  $M$  — нормальная форма (или в нормальной форме), если  $M$  не содержит редексов.
4. Пусть  $\Delta$  — редекс в выражении  $M$ . Запись  $M \xrightarrow{\Delta} N$  означает, что  $N$  получается из  $M$  сокращением редекса  $\Delta$ :  $N \equiv M[\Delta \rightarrow \Delta']$
5. Редукционный путь — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \rightarrow \dots$$

### Пример 1.5.1.

- Определим  $\omega_3 = \lambda x. xxx$ . Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3\omega_3 \xrightarrow{\omega_3\omega_3} \omega_3\omega_3\omega_3 \xrightarrow{\omega_3\omega_3} \omega_3\omega_3\omega_3\omega_3 \xrightarrow{\omega_3\omega_3} \dots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$I(Ix) \xrightarrow{Ix} Ix, \quad I(Ix) \xrightarrow{I(Ix)} Ix$$

**Утверждение 1.5.1.** Пусть  $M$  — нормальная форма. Тогда:

1.  $\nexists N : M \rightarrow N$ ;
2.  $M \rightarrow^* N \Rightarrow M \equiv N$ .

Доказательство:

1. Очевидно.
2. По определению  $\rightarrow^*$ , условие  $M \rightarrow^* N$  влечёт два случая:
  - $M \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow N$  — невозможно по (1);
  - $M \equiv N$  — искомый.

q.e.d. ■

**Определение 1.5.3.** Редукционный граф выражения  $M$  (нотация  $\text{Gr}(M)$ ) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \rightarrow^* N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \rightarrow K\}$$

**Определение 1.5.4.** Пусть  $\sqsupset$  — рефлексивное отношение на множестве  $\Lambda$ .  $\sqsupset$  обладает свойством Чёрча-Россера (нотация  $\text{CR}(\sqsupset)$ ), если

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda : (M \sqsupset M_1) \wedge (M \sqsupset M_2), \exists Z \in \Lambda : (M_1 \sqsupset Z) \wedge (M_2 \sqsupset Z).$$

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $\sqsupset$  обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения  $\sim = \text{Equiv}(\sqsupset)$  справедливо:

$$M \sim N \Rightarrow \exists Z : (M \sqsupset Z) \wedge (N \sqsupset Z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения  $\sim$ . Пусть  $M \sim N$ . Тогда возникают три случая:

- $M \sqsupset N \Rightarrow M \sim N$ . Тогда положим  $Z \equiv N$ .
- $N \sim M \Rightarrow M \sim N$ . Тогда возьмём  $Z$  по предположению индукции.
- $M \sim L \wedge L \sim N \Rightarrow M \sim N$ . Тогда рассмотрим  $Z_1, Z_2 \in \Lambda : (Z_1 \sqsupset M, L) \wedge (Z_2 \sqsupset L, N)$ . Поскольку  $\text{CR}(\sqsupset)$ , найдётся  $\lambda$ -выражение  $Z$ , такое, что  $(Z_1 \sqsupset Z) \wedge (Z_2 \sqsupset Z)$ . Оно искомое.

q.e.d. ■

## 1.6. Теорема Чёрча-Россера для $\beta$ - и $\beta\eta$ -редукции

Сначала мы докажем, что отношение  $\xrightarrow{\beta}$  обладает свойством Чёрча-Россера.

**Лемма 1.6.1.** Пусть  $\sqsupset$  — бинарное отношение на  $\Lambda$  и пусть  $\sqsupset'$  — его транзитивное замыкание. Тогда  $\text{CR}(\sqsupset) \Rightarrow \text{CR}(\sqsupset')$ .

Доказательство: Пусть  $M \sqsupset' M_1, M \sqsupset' M_2$ . Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1 & \dashrightarrow & Z_1 & \dashrightarrow & Z_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_2 & \dashrightarrow & Z_3 & \dashrightarrow & Z_4 \end{array}$$

q.e.d. ■

**Определение 1.6.1.** Рассмотрим бинарное отношение  $\rightsquigarrow$ , определённое индуктивно следующим образом:

- $M \rightsquigarrow M$ ;
- $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x. M \rightsquigarrow \lambda x. M'$ ;
- $M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$ ;
- $M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x. M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$ .

**Лемма 1.6.2.** Если  $M \rightsquigarrow M'$  и  $N \rightsquigarrow N'$ , то  $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$ .

Доказательство: Индукция по определению  $M \rightsquigarrow M'$ .

1.  $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$ . Тогда требуется доказать, что  $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$ . Проведём индукцию по структуре  $M$ :

$M$	Правая часть	Левая часть	Комментарий
$x$	$N$	$N'$	ОК

$M$	Правая часть	Левая часть	Комментарий
$y$	$y$	$y$	ОК
$PQ$	$P[... ]Q[... ]$	$P[... ' ]Q[... ' ]$	предп. инд.
$\lambda y. P$	$\lambda y. P[... ]$	$\lambda y. P[... ' ]$	аналогично

2.  $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y. P \rightsquigarrow \lambda y. P'$ , прямое следствие  $P \rightsquigarrow P'$ .

■