

Две задачи

λ -исчисление, 2024

1. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n \mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.

Подсказка: Для начала, приведите a_n в нормальную форму. Допустим, что нашлось λ -выражение $Z \in \Lambda^0$ со свойствами $Za_0 \rightarrow K$ и $Za_n \rightarrow K^*$ для всех $n \geq 1$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}_0$, рассмотрим *крайний левый редукционный путь*

$$Za_n \equiv P_0 \xrightarrow{\beta} P_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} P_N \equiv H,$$

где H обозначает K или K^* . Докажите, что для всех $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ выражение P_i за один шаг редуцируется путём

$$(\lambda u. Q_i) a_n \xrightarrow{\beta} Q_i[u := a_n] \equiv P_i,$$

где Q_i таково, что $Z \rightarrow \lambda u. Q_i$. Исходя из этого, придите к противоречию.

2. Пусть $M_1 \equiv (\lambda x. bx(bc))c$, $M_2 \equiv (\lambda x. xx)(bc)$. Докажите, что **не** существует такого выражения A , что $A \rightarrow M_1$ и $A \rightarrow M_2$.

Подсказка: Напомним, что редукция $M \rightarrow N$ называется *стандартной* ($M \xrightarrow{s} N$), если она идёт «слева направо», то есть после редукции

$$[\dots](\lambda x. P)Q[\dots] \xrightarrow{\beta} [\dots]P[x := Q][\dots]$$

часть $[\dots]$ слева от $(\lambda x. P)Q$ остаётся неизменной при последующих редукциях в редукционном пути $M \rightarrow N$. Это можно формализовать так: пусть запись $A \xrightarrow{n} B$ означает, что B получается из A путём редукции n -ного по счёту слева редекса в выражении A . Тогда редукционный путь

$$M_1 \xrightarrow{n_1} M_2 \xrightarrow{n_2} M_3 \xrightarrow{n_3} \dots$$

называется *стандартным*, если $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$

Теперь допустим, что у выражений M_1 и M_2 есть общий β -предок, A . Тогда по теореме о стандартизации существуют стандартные редукции $A \xrightarrow{s} M_1$ и $A \xrightarrow{s} M_2$. Без ограничения общности предположим, что эти два редукционных пути отличаются уже в самом первом редексе:

$$A \xrightarrow{\Delta_1} P_1, \quad A \xrightarrow{\nabla_1} Q_1, \quad \Delta_1 \neq \nabla_1.$$

Пусть $R \equiv (\lambda x. P)Q$ — левейший из этих двух редексов. Что можно сказать о выражении A ?