Материал курса

λ-исчисление, 2024

Содержание

1. Конверсия и редукция

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. Рассмотрим счётное множество $V = \{v, v', v'', ...\}$. Элементы этого множества будут называться *переменными.* Множество λ-выражений, Λ, — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;

(2) $x \in V,\ M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$; (абстракция, морально: определение функции)

(3) $M \in \Lambda,\ N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$. (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

Пример 1.1.1. λ-выражения в формальной нотации:

$$v';$$
$$(vv');$$
$$(\lambda v(v'v));$$
$$((\lambda v(v'v))v'');$$
$$(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v''');$$

Нотация

(1) x, y, z, ... обозначают произвольные переменные из множества V.

(2) M, N, K, ... обозначают произвольные λ-выражения из Λ.

(3) Внешние скобки опускаются: $(\lambda x(yz)) \to \lambda x.\ (yz)$.

(4) Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda...(\lambda x_n M)...)) \to \lambda x_1{,}x_2{,}...{,}x_n.\ M \to \lambda \vec{x}.\ M$$

(5) Многократная комбинация сокращается:

$$((...((M_1 M_2)M_3)...)M_n)N \to M_1 M_2 ... M_n N \to \overrightarrow{M} N$$

(6) Комбинация берёт приоритет над абстракцией: $\lambda x.\ (yz) \to \lambda x.\ yz$

Определение 1.1.2. Пусть M — λ-выражение. Множества $\mathrm{TV}(M),\ \mathrm{FV}(M),\ \mathrm{BV}(M) \subset V$ определяются индуктивно:

M	$\mathrm{TV}(M)$	$\mathrm{FV}(M)$	$\mathrm{BV}(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\varnothing$
$\lambda x.\ N$	$\{x\} \cup \mathrm{TV}(N)$	$\mathrm{FV}(N) \setminus \{x\}$	$\{x\} \cup \mathrm{BV}(N)$
NK	$\mathrm{TV}(N) \cup \mathrm{TV}(K)$	$\mathrm{FV}(N) \cup \mathrm{FV}(K)$	$\mathrm{BV}(N) \cup \mathrm{BV}(K)$

Замечание 1.1.1. В данный момент существуют не вполне осмысленные λ-выражения. Так, в выражении $(\lambda x.\ xy)x$ переменная x выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении $\lambda x.\ \lambda x.\ xx$ переменная x связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить *заменой связанных переменных:* $(\lambda x.\ xy)x \to (\lambda u.\ uy)x$, $\lambda x.\ \lambda x.\ xx \to \lambda x.\ \lambda u.\ uu$. Сейчас мы формализуем эту идею.

Определение 1.1.3. Пусть $\sqsubset$ — бинарное отношение на множестве Λ. Тогда $\sqsubset$ называется *совместимым с операциями,* если:

$$M \sqsubset N \Rightarrow \lambda x.\ M \sqsubset \lambda x.\ N,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow ZM \sqsubset ZN,$$
$$M \sqsubset N \Rightarrow MZ \sqsubset NZ.$$

Определение 1.1.4. *Тождественное равенство* ($\equiv$) обозначает полностью идентичный состав символов: $\lambda x.\ xy \not\equiv \lambda u.\ uy$.

Определение 1.1.5. Отношение *α-конгруэнтности* ($\stackrel{\alpha}{=}$) на Λ — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:
(1) $M \stackrel{\alpha}{=} M$;
(2) $\lambda x.\ M \stackrel{\alpha}{=} \lambda y.\ (M[x \to y])$, при условии что $y \notin \mathrm{TV}(M)$;
(3) $\stackrel{\alpha}{=}$ совместимо с операциями.

Определение 1.1.6. Пусть M — λ-выражение. M называется *корректным* в следующих случаях:
(1) $M \equiv x \in V$;
(2) $M \equiv \lambda x.\ N$, причём N корректно, а также $x \notin \mathrm{BV}(N)$;
(3) $M \equiv NK$, причём N, K корректны, а также $\mathrm{BV}(N) \cap \mathrm{FV}(K) = \varnothing$ и $\mathrm{FV}(N) \cap \mathrm{BV}(K) = \varnothing$.

Упражнение Доказать, что если M корректно, то $\mathrm{FV}(M) \cap \mathrm{BV}(M) = \varnothing$, $\mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{BV}(M) = \mathrm{TV}(M)$.

Упражнение Пусть M — λ-выражение. Доказать, что существует корректное λ-выражение N, такое, что $M \stackrel{\alpha}{=} N$.

Договорённость (правило переменных): Пусть λ-выражения $M_1, M_2, ..., M_n$ выступают в едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что все комбинации этих выражений корректны. Более того, с данного момента мы будем факторизовать множество Λ по отношению λ-конгруэнтности, то есть $M \equiv N \Leftrightarrow M \stackrel{\alpha}{=} N$.

Определение 1.1.7. λ-выражение M называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$. Λ^0 обозначает множество всех замкнутых λ-выражений.

Определение 1.1.8. M является *подвыражением* N ($M \subset N$), если M лежит во множестве $\mathrm{Sub}(N)$:

N	$\mathrm{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x.\ K$	$\{\lambda x.\ K\} \cup \mathrm{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\mathrm{Sub}(K_1) \cup \mathrm{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

Определение 1.1.9. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда
- $F^0 M \equiv M$; $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $FM^{\sim 0} \equiv F$; $FM^{\sim n+1} \equiv (FM^{\sim n})M$

1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$-конверсия

Определение 1.2.1. Пусть $M \in \Lambda$, $x \notin \mathrm{BV}(M)$. Пусть также $N \in \Lambda$. *Результат подстановки N вместо x*, $M[x := N]$, определяется индуктивно:

$$\begin{aligned} x[x := N] &\equiv N; \\ y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \not\equiv x; \\ (\lambda y.\ M')[x := N] &\equiv \lambda y.\ (M'[x := N]); \\ (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]). \end{aligned}$$

Замечание 1.2.1. Рассмотрим $M \equiv \lambda y.\ x,\ N \equiv yy$. Тогда по предыдущему определению мы получаем $M[x := N] \equiv \lambda y.\ yy$, что настораживает, ведь $M \equiv \lambda y.\ x \overset{\alpha}{=} \lambda u.\ x \equiv M'$, тогда как

$$M[x := N] \equiv \lambda y.\ yy \overset{\alpha}{\neq} \lambda u.\ yy \equiv M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь $\mathrm{BV}(M) \cap \mathrm{FV}(N) = \{y\} \neq \varnothing$.

Упражнение Доказать, что оператор подстановки уважает α-конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left.\begin{matrix} M \overset{\alpha}{=} M' \\ N \overset{\alpha}{=} N' \end{matrix}\right\} \Rightarrow M[x := N] \overset{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

Подсказка: очевидно, что $M[x := N] \overset{\alpha}{=} M'[x := N]$. Остаётся доказать индукцией по структуре M, что $M[x := N] \overset{\alpha}{=} M[x := N']$.

Лемма 1.2.1. (о подстановке): *Пусть $M, N, L \in \Lambda$. Тогда если $x \not\equiv y$ и $x \notin \mathrm{FV}(L)$, то*

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре λ-выражения M.
(1) База: $M \equiv u \in V$. Тогда рассмотрим три случая:
- $u \equiv x$. Тогда обе части тождественно равны $N[y := L]$, так как $x \not\equiv y$.
- $u \equiv y$. Тогда обе части равны L, так как $L[x := ...] = L$, ведь $x \notin \mathrm{FV}(L)$.
- $u \not\equiv x, y$. Тогда обе части равны u.

(2) Переход.
- $M \equiv \lambda z.\ M'$. По правилу переменых и определению оператора подстановки мы имеем $z \notin \mathrm{FV}(NL)$ и $z \not\equiv x, y$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned}(\lambda z.\ M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z.\ M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.\ M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z.\ M')[y := L][x := N[y := L]].\end{aligned}$$

- $M \equiv M_1 M_2$. Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

Определение 1.2.2. ($\beta\eta$-конверсия): Отношение $\beta\eta$-конверсии ($=$) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:
(1) $(\lambda x.\ M)N = M[x := N]$; ($\beta$-конверсия)
(2) $\lambda x.\ Mx = M$, при условии что $x \notin \mathrm{TV}(M)$; (η-конверсия)
(3) $=$ — отношение эквивалентности;
(4) $=$ совместимо с операциями.

Если $M = N$, мы говорим, что «M равно N», или «M конвертируется в N». Запись «$\lambda \vdash M = N$» означает, что конверсию $M = N$ можно вывести из вышеуказанных правил.

Теорема 1.2.1. (о неподвижной точке): $\forall F \in \Lambda :\ \exists X \in \Lambda :\ FX = X$.

Доказательство: Пусть $W \equiv \lambda x.\ F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.\ F(xx))W = F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

Утверждение 1.2.1. (fallacy): $\forall M, N \in \Lambda :\ \lambda \vdash M = N$

Доказательство: Рассмотрим $F \equiv \lambda x{,}y.\ yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))M)N = (\lambda y.\ yM)N = NM.$$

В частности, $Fyx = xy$. Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x.\ (\lambda y.\ yx))y)x = (\lambda y.\ yy)x = xx.$$

Тогда $xy = xx$, а значит $F_1 \equiv \lambda x{,}y.\ xy = \lambda x{,}y.\ xx \equiv F_2$. Теперь для любого $M \in \Lambda$ имеем

$$M = (\lambda x.\ x)M = F_1(\lambda x.\ x)M = F_2(\lambda x.\ x)M = (\lambda x.\ x)(\lambda x.\ x) = (\lambda x.\ x),$$

и по транзитивности $M = (\lambda x.\ x) = N$ для любых $M, N \in \Lambda$. В чём ошибка? ■

Лемма 1.2.2. *Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если* $M = M',\ N = N'$, *то* $M[x := N] = M'[x := N']$.

Доказательство: Пусть $M = M'$, $N = N'$. Тогда

$$M[x := N] = (\lambda x.\ M)N = (\lambda x.\ M')N = (\lambda x.\ M')N' = M'[x := N'].$$

q.e.d. ■

1.3. Комбинаторы и согласованность

Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\ x$
- $\mathbf{K} \equiv \lambda x{,}y.\ x$
- $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x{,}y.\ y$
- $\mathbf{S} \equiv \lambda x{,}y{,}z.\ xz(yz)$
- $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f(xx))(\lambda x.\ f(xx))$ — комбинатор неподвижной точки: $\forall F \in \Lambda :\ F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$.
  Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. Рассмотрим λ-выражение M, определённое рекуррентной формулой:

  $$Mx \equiv FxM.$$

  Определим $G \equiv \lambda y.\ \lambda x.\ Fxy$. Тогда M приобретает явную форму: $M \equiv \mathbf{Y}G$ (упражнение).

Определение 1.3.2.

(1) Выражение вида $M = N$ называется *равенством;*
(2) Равенство $M = N$ называется *замкнутым,* если $M, N \in \Lambda^0$;
(3) Пусть $\mathcal{T}$ — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие λ-теории). Тогда $\mathcal{T}$ называется *согласованной* (нотация $\mathrm{Con}(\mathcal{T})$) если $\mathcal{T}$ **не** доказывает все замкнутые равенства. В противном случае $\mathcal{T}$ называется *противоречивой.*
(4) Если $\mathcal{T}$ — это набор равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, полученную добавлением равенств из $\mathcal{T}$ к стандартному списку аксиом $\beta\eta$-конверсии.

Определение 1.3.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда M и N называются *несовместимыми* (нотация $M \# N$), если теория $\lambda + (M = N)$ противоречива.

Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

Доказательство: Имеем $\mathbf{I}MN = \mathbf{K}MN$ для любых $M, N \in \Lambda$. По определению комбинаторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{K}$, имеем $MN = M$. Подставляя $M \equiv \mathbf{I}$, получаем $N = \mathbf{I}\ \forall N \in \Lambda$. ■

1.4. Нормальные формы

Определение 1.4.1.
(1) λ-выражение M называется *$\beta\eta$-нормальной формой,* если оно **не** имеет подвыражений вида $(\lambda x.\ M)N$ или $\lambda y.\ (My)$ (где $y \notin \mathrm{TV}(M)$).
(2) M *имеет нормальную форму N,* если $M = N$ и N — нормальная форма.

Пример 1.4.1.
- $\mathbf{I}$ находится в нормальной форме;
- $\mathbf{KI}$ имеет нормальную форму $\lambda y.\ \mathbf{I}$;
- Комбинатор $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы (доказательство позже).

Воспоминания о будущем.
(1) M может иметь максимум одну нормальную форму;
(2) $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы;
(3) λ — согласованная теория.

1.5. Редукция

Замечание 1.5.1. В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x.\ x^2 + 1)3 = 10$$

можно сказать, что «10 является результатом *упрощения* выражения $(\lambda x.\ x^2 + 1)3$», но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

Определение 1.5.1.
(1) Отношение $\to$ (*редукция за один шаг*) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, такое что:
   - $(\lambda x.\ M)N \to M[x := N]$;
   - $\lambda x.\ Mx \to M$, если $x \notin \mathrm{TV}(M)$;
   - $\to$ совместимо с операциями.
(2) Отношение $\twoheadrightarrow$ (*редукция*) — это замыкание $\to$ до предпорядка: $\twoheadrightarrow = \mathrm{Preord}(\to)$;
(3) Отношение $=$ (*конгруэнтность* или *эквивалентность* или *равенство*) — это замыкание $\twoheadrightarrow$ до отношения эквивалентности: $(=) = \mathrm{Equiv}(\twoheadrightarrow)$

Определение 1.5.2.
(1) λ-выражения вида $(\lambda x.\ M)N$ называются *β-редексами;* соотв. отношения: $\underset{\beta}{\to}$, $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$, $\underset{\beta}{=}$
(2) λ-выражения вида $\lambda x.\ Mx$ называются *η-редексами.* соотв. отношения: $\underset{\eta}{\to}$, $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}$, $\underset{\eta}{=}$
(3) M — ($\beta\eta$-)*нормальная форма* (или *в нормальной форме*), если M не содержит ($\beta\eta$-)редексов.
(4) Пусть Δ — редекс в выражении M. Запись $M \overset{\Delta}{\to} N$ означает, что N получается из M сокращением редекса Δ: $N \equiv M[\Delta \to \Delta']$
(5) *Редукционный путь* — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$\sigma : M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to} M_2 \to \ldots$$

Пример 1.5.1.
- Определим $\omega_3 \equiv \lambda x.\ xxx$. Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \omega_3\omega_3\omega_3\omega_3 \overset{\omega_3\omega_3}{\to} \ldots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$\mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}x}{\to} \mathbf{I}x,\quad \mathbf{I}(\mathbf{I}x) \overset{\mathbf{I}(\mathbf{I}x)}{\to} \mathbf{I}x$$

Утверждение 1.5.1. *Пусть M — нормальная форма. Тогда:*
(1) $\nexists N : M \to N$;
(2) $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \equiv N$.

Доказательство:
(1) Очевидно.
(2) По определению $\twoheadrightarrow$, условие $M \twoheadrightarrow N$ влечёт два случая:
- $M \to K_1 \to K_2 \to \ldots \to N$ — невозможно по (1);
- $M \equiv N$ — искомый.

q.e.d. ■

Определение 1.5.3. *Редукционный граф* выражения M (нотация $\mathrm{Gr}(M)$) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \twoheadrightarrow N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \to K\}$$

Определение 1.5.4. Пусть $\sqsupset$ — произвольное отношение на множестве X. $\sqsupset$ *обладает свойством Чёрча-Россера* (нотация $\mathrm{CR}(\sqsupset)$), если

$$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsupset x_1) \land (x \sqsupset x_2), \quad \exists z \in X : (x_1 \sqsupset z) \land (x_2 \sqsupset z).$$

Теорема 1.5.1. (о минимальном элементе): *Пусть $\sqsupset$ рефлексивно и обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения $\sim = \mathrm{Equiv}(\sqsupset)$ справедливо:*

$$x \sim y \Rightarrow \exists z : (x \sqsupset z) \land (y \sqsupset z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения $\sim$. Пусть $x \sim y$. Тогда возникают три случая:
- $x \sim y \Leftarrow x \sqsupset y$. Тогда положим $z \equiv y$.
- $x \sim y \Leftarrow y \sim x$. Тогда возьмём z по предположению индукции.
- $x \sim y \Leftarrow (x \sim L) \land (L \sim y)$. Тогда рассмотрим $z_1, z_2 \in \Lambda : (z_1 \sqsubset x, L) \land (z_2 \sqsubset L, y)$. Поскольку $\mathrm{CR}(\sqsupset)$, найдётся λ-выражение z, такое, что $(z_1 \sqsupset z) \land (z_2 \sqsupset z)$. Оно искомое.

q.e.d. ■

1.6. Теорема Чёрча-Россера

Сначала мы докажем, что отношение $\underset{\beta}{\to}$ обладает свойством Чёрча-Россера.

Лемма 1.6.1. *Пусть $\sqsupset$ — бинарное отношение на множестве X и пусть $\sqsupset' = \mathrm{Trans}(\sqsupset)$ — его транзитивное замыкание. Тогда* $\mathrm{CR}(\sqsupset) \Rightarrow \mathrm{CR}(\sqsupset')$.

Доказательство: Пусть $x \sqsupset' x_1,\ x \sqsupset' x_2$. Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] & u_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & u_2 \arrow[d, dashed] \\
w_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & z_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & z_2 \arrow[d, dashed] \\
w_2 \arrow[r, dashed] & z_3 \arrow[r, dashed] & z_4
\end{tikzcd}$$

q.e.d. ■

Определение 1.6.1. Рассмотрим бинарное отношение $\rightsquigarrow$, определённое индуктивно следующим образом:
(1) $M \rightsquigarrow M$;
(2) $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x.\, M \rightsquigarrow \lambda x.\, M'$;
(3) $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$;
(4) $M \rightsquigarrow M',\ N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Лемма 1.6.2. *Если $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, то $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.*

Доказательство: Индукция по определению $M \rightsquigarrow M'$.
(1) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Тогда требуется доказать, что $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$. Проведём индукцию по структуре M:

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
x	N	N'	ОК
y	y	y	ОК
PQ	$P[...]Q[...]$	$P[...']Q[...']$	предп. инд.
$\lambda y.\, P$	$\lambda y.\, P[...]$	$\lambda y.\, P[...']$	аналогично

(2) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y.\, P \rightsquigarrow \lambda y.\, P'$, прямое следствие $P \rightsquigarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightsquigarrow P'[x := N']$, а тогда $\lambda y.\, P[x := N] \rightsquigarrow \lambda y.\, P'[x := N']$, что и требовалось доказать.
(3) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$ и $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \\ &\rightsquigarrow P'[x := N']Q'[x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

(4) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y.\, P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y.\, P[x := N])(Q[x := N]) \\ &\rightsquigarrow P'[x := N'][y := Q'[x := N']] \\ &\equiv P'[y := Q'][x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Лемма 1.6.3.
(1) $\lambda x.\, M \rightsquigarrow N$ влечёт $N \equiv \lambda x.\, M'$, где $M \rightsquigarrow M'$;
(2) $MN \rightsquigarrow L$ влечёт либо
- *$L \equiv M'N'$, где $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, либо*
- *$M \equiv \lambda x.\, P,\ L \equiv P'[x := N']$, где $P \rightsquigarrow P',\ N \rightsquigarrow N'$.*

Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 1.6.4. *$\rightsquigarrow$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.*

Доказательство: Пусть $M \rightsquigarrow M_1,\ M \rightsquigarrow M_2$. Проводим индукцию по определению $M \rightsquigarrow M_1$.
(1) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow M \equiv M_1$. Тогда положим $Z \equiv M_2$.
(2) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow (\lambda x.\, P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Лемма 1.6.3 позволяет рассмотреть два подслучая:

- $M_2 \equiv (\lambda x.\ P'')Q''$, где $P \rightsquigarrow P'',\ Q \rightsquigarrow Q''$. По предположению индукции существуют λ-выражения Z_P, Z_Q, такие, что

$$P' \rightsquigarrow Z_P,\ P'' \rightsquigarrow Z_P,\ Q' \rightsquigarrow Z_Q,\ Q'' \rightsquigarrow Z_Q.$$

Лемма 1.6.2 позволяет взять $Z \equiv Z_P\left[x \coloneqq Z_Q\right]$ в качестве искомого (упражнение).
- $M_2 \equiv P''[x \coloneqq Q'']$ — аналогично.

(3) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Снова два подслучая:
- $M_2 \equiv P''Q''$, причём $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Тогда аналогично берём $Z \equiv Z_P\left[x \coloneqq Z_Q\right]$.
- $P \equiv (\lambda x.\ P_1)$, $M_2 \equiv P_1''[x \coloneqq Q'']$ и $P_1 \rightsquigarrow P_1''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Лемма 1.6.3 гарантирует, что $P' \equiv \lambda x.\ P_1'$, где $P_1 \rightsquigarrow P_1'$. Применяя предположение индукции, берём $Z = Z_{P_1}\left[x \coloneqq Z_Q\right]$.

(4) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ P \rightsquigarrow \lambda x.\ P'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x,\ P''$. По предположению индукции возьмём $Z = \lambda x.\ Z_P$.

q.e.d. ■

<u>Лемма 1.6.5.</u> $\underset{\beta}{\to}$ *— это транзитивное замыкание* $\rightsquigarrow$.

<u>Доказательство</u>: Очевидно по определению. ■

<u>Теорема 1.6.1.</u> (Чёрча-Россера):
(1) $\underset{\beta}{\to}$ *удовлетворяет свойству Ч.-Р.;*
(2) $M \underset{\beta}{=} N \Rightarrow \exists Z : \left(M \underset{\beta}{\to} Z\right) \land \left(N \underset{\beta}{\to} Z\right)$.

<u>Доказательство</u>: Упражнение. ■

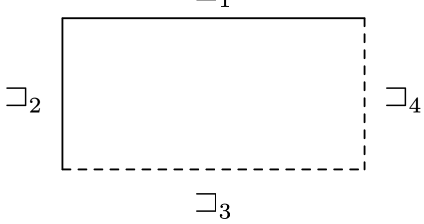
<u>Следствие</u>
(1) Если M *имеет* β*-нормальную форму* N*, то* $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.
(2) M *может иметь максимум одну нормальную форму.*

<u>Доказательство</u>:
(1) Пусть $M \underset{\beta}{=} N$, где N — β-нормальная форма. Тогда существует λ-выражение Z, такое, что $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ и $N \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ (Теорема 1.5.1). Однако раз N — нормальная форма, мы заключаем, что $N \equiv Z$ (Утверждение 1.5.1), и $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.
(2) Пусть N_1, N_2 — β-нормальнве формы выражения M. Тогда $N_1 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ и $N_2 \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Z$ для некоторого Z. Следовательно, $N_1 \equiv Z \equiv N_2$.

q.e.d. ■

Теперь мы перейдём к η-редукции.

<u>Определение 1.6.2.</u> Пусть $\sqsupset_1, \sqsupset_2, \sqsupset_3, \sqsupset_4$ — бинарные отношения на множестве X. Следующая диаграма,



означает «$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsupset_1 x_1) \land (x \sqsupset_2 x_2),\quad \exists z \in X : (x_2 \sqsupset_3 z) \land (x_1 \sqsupset_4 z)$».

<u>Замечание 1.6.1.</u> Свойство Чёрча-Россера можно переформулировать в этой нотации.

Определение 1.6.3. Пусть $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ — два бинарных отношения на X. Мы говорим, что $\sqsupset_1$ и $\sqsupset_2$ *коммутируют,* если

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\sqsupset_1"] \arrow[d, dash, "\sqsupset_2"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\sqsupset_2"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\sqsupset_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Замечание 1.6.2. Отношение $\sqsupset$ обладает свойством Ч.-Р. $\Leftrightarrow$ $\sqsupset$ коммутирует само с собой.

Утверждение 1.6.1. (лемма Хиндли-Росена): *Пусть* $\sqsupset_1, \sqsupset_2 \subset X \times X$ *таковы, что*
(1) $\mathrm{CR}(\sqsupset_1), \mathrm{CR}(\sqsupset_2)$*;*
(2) $\sqsupset_1$ *и* $\sqsupset_2$ *коммутируют.*

Тогда $\mathrm{Trans}(\sqsupset_1 \cup \sqsupset_2)$ *также обладает свойством Чёрча-Россера.*

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 1.6.6. *Пусть* $\sqsupset_1, \sqsupset_2$ *— бинарные отношения на множестве* X*. Допустим также, что*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "\sqsupset_1"] \arrow[d, dash, "\sqsupset_2"'] & \cdot \arrow[d, dash, dashed, "\mathrm{Preord}(\sqsupset_2)"] \\ \cdot \arrow[r, dash, dashed, "\mathrm{Refl}(\sqsupset_1)"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Тогда отношения $\mathrm{Preord}(\sqsupset_1)$ *и* $\mathrm{Preord}(\sqsupset_2)$ *коммутируют.*

Доказательство: Диаграммный поиск (лень рисовать). ■

Лемма 1.6.7. $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}$ *удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.*

Доказательство: Так как $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow} = \mathrm{Preord}(\underset{\eta}{\rightarrow}) = \mathrm{Trans}(\mathrm{Refl}(\underset{\eta}{\rightarrow}))$, достаточно доказать утверждение для отношения $\mathrm{Refl}(\underset{\eta}{\rightarrow}) =: (\rightsquigarrow)$ (Лемма 1.6.1). Предположим теперь, что $M \rightsquigarrow M_1$ и $M \rightsquigarrow M_2$. Без ограничения общности, допустим, что все три выражения M, M_1, M_2 различны (иначе очевидно). Индукция по определению $M \rightsquigarrow M_1$:

(1) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ Px \rightsquigarrow P$. Тогда $M_2 = \lambda x.\ P'x$, где $P \rightsquigarrow P'$. Положим $Z \equiv P'$ и дело в шляпе.
(2) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow KP \rightsquigarrow KP'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда если $M_2 \equiv K'P$, $K \rightsquigarrow K'$, то положим $Z \equiv K'P'$. Если же $M_2 \equiv KP''$, $P' \rightsquigarrow P''$, то воспользуемся предположением индукции: $\exists Z_P :$ $P', P'' \rightsquigarrow Z_P$. Положим $Z = KZ_P$.
(3) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PK \rightsquigarrow P'K$, где $P \rightsquigarrow P'$. Аналогично с предыдущим случаем.
(4) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x.\ P \rightsquigarrow \lambda x.\ P'$, где $P \rightsquigarrow P'$.
    (a) $M_2 \equiv \lambda x.\ P''$, $P \rightsquigarrow P''$. Тогда положим $Z \equiv \lambda x.\ Z_P$, где Z_P взято из предположения индукции.
    (b) $P \equiv P_0 x$, $M_2 \equiv P_0$. Тогда $P' \equiv P_0' x$, и мы можем положить $Z \equiv P_0'$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.8. *Пусть* $\rightsquigarrow = \mathrm{Refl}(\underset{\eta}{\rightarrow})$*. Пусть также* $M \rightsquigarrow M'$ *и* $N \rightsquigarrow N'$*. Тогда*

$$M[x := N] \underset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'[x := N'].$$

<u>*Доказательство*</u>: Индукция по определению отношения $\rightsquigarrow$.
(1) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Доказательство следует индукцией по структуре M (упражнение).
(2) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y.\ M'y \rightsquigarrow M'$, причём $y \notin \mathrm{TV}(M')$. Мы также можем считать, что $y \notin \mathrm{TV}(N)$. Тогда

$$M[x := N] \equiv (\lambda y.\ M'y)[x := N] \equiv \lambda y.\ (M'[x := N])y \underset{\eta}{\to} M'[x := N] \underset{\eta}{\twoheadrightarrow} M'[x := N'].$$

(3) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y.\ P) \rightsquigarrow (\lambda y.\ P')$, $P \rightsquigarrow P'$. Упражнение.
(4) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q$, $P \rightsquigarrow P'$. Упражнение.
(5) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow PQ'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Упражнение.

q.e.d. ■

<u>Лемма 1.6.9.</u> $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ *коммутирует с* $\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}$.

<u>*Доказательство*</u>: <u>Лемма 1.6.6</u> сводит доказательство к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\underset{\beta}{\to}"] \arrow[d, "\underset{\eta}{\to}"'] & \cdot \arrow[d, dashed, "\underset{\eta}{\twoheadrightarrow}"] \\ \cdot \arrow[r, dashed, "\mathrm{Refl}(\underset{\beta}{\to})"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Пусть $M \underset{\beta}{\to} M_1$, $M \underset{\eta}{\to} M_2$. Ищем $Z :\ M_1 \underset{\eta}{\twoheadrightarrow} Z$, $\left(M_2 \underset{\beta}{\to} Z \lor M_2 \equiv Z\right)$. Проводим индукцию по определению $\underset{\beta}{\to}$.
(1) $M \underset{\beta}{\to} M_1 \Leftarrow (\lambda x.\ P)Q \underset{\beta}{\to} P[x := Q]$. Рассмотрим несколько случаев для M_2:
  (a) $M_2 \equiv (\lambda x.\ P')Q$, где $P \underset{\eta}{\to} P'$. По предыдущей лемме мы можем взять $Z \equiv P'[x := Q]$.
  (b) $M_2 \equiv (\lambda x.\ P)Q'$, где $Q \underset{\eta}{\to} Q'$. Аналогично.
  (c) $M_2 \equiv P'Q$, где $P \equiv P'x,\ x \notin \mathrm{TV}(P')$. Тогда

$$M_1 \equiv P[x := Q] \equiv (P'x)[x := Q] \equiv P'Q \equiv M_2.$$

  Берём $Z \equiv M_1 \equiv M_2$. Больше случаев нет (упражнение).
(2) $M \underset{\beta}{\to} M_1 \Leftarrow PQ \underset{\beta}{\to} P'Q$, где $P \underset{\beta}{\to} P'$. Упражнение.
(3) $M \underset{\beta}{\to} M_1 \Leftarrow PQ \underset{\beta}{\to} PQ'$, где $Q \underset{\beta}{\to} Q'$. Упражнение.
(4) $M \underset{\beta}{\to} M_1 \Leftarrow \lambda x.\ P \underset{\beta}{\to} \lambda x.\ P'$, где $P \underset{\beta}{\to} P'$. Снова рассмотрим несколько случаев для M_2:
  (a) $M_2 \equiv \lambda x.\ P''$, где $P \underset{\eta}{\to} P''$. Тогда пользуемся предположением индукции: $Z \equiv \lambda x.\ Z_P$.
  (b) $M_2 \equiv P''$, где $P \equiv P''x,\ x \notin \mathrm{TV}(P'')$. Имеем β-редукцию $P \equiv P''x \underset{\beta}{\to} P'$. Для P' возникает два случая:
  - $P' \equiv P_1'x$, где $P'' \underset{\beta}{\to} P_1'$. Тогда возьмём $Z \equiv P_1'$.
  - $P'' \equiv \lambda y.\ P_1'',\ P' \equiv P_1''[y := x]$. Тогда заметим, что

$$M_1 \equiv \lambda x.\ P_1''[y := x] \overset{\alpha}{=} \lambda y.\ P_1'' \equiv P'' \equiv M_2,$$

  и мы опять берём $Z \equiv M_1 \equiv M_2$.

q.e.d. ■

<u>Теорема 1.6.2.</u> (теорема Чёрча-Россера для $\beta\eta$-редукции):
(1) $\twoheadrightarrow$ *удовлетворяет свойству Чёрча-Россера;*
(2) $M = N \Rightarrow \exists Z : (M \twoheadrightarrow Z) \land (N \twoheadrightarrow Z)$.

Доказательство: Упражнение. ■

Следствие
- *Если M имеет $\beta\eta$-нормальную форму N, то $M \twoheadrightarrow N$;*
- *M может иметь максимум одну нормальную форму;*
- *Теория $\lambda\beta\eta$ согласованна;*
- *λ-выражение $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$ не имеет нормальной формы.*

Доказательство: Очевидно, применяя Утверждение 1.5.1. ■

1.7. Стандартная редукция

Определение 1.7.1.

(1) λ-выражение $M \in \Lambda$ называется *внешней нормальной формой,* если оно имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ xM_1...M_m,$$

где $n, m \geqslant 0$.

(2) Если M имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ (\lambda x.\ M_0)M_1...M_m,\ n \geqslant 0, m \geqslant 1,$$

то выражение $(\lambda x.\ M_0)M_1$ называется *внешним редексом.*

(3) $\underset{h}{\to}$ (соотв. $\underset{h}{\twoheadrightarrow}$) — редукция, в которой сокращаются только внешние редексы.

(4) Редекс Δ называется *внутренним,* если он не внешний.

(5) $\underset{i}{\to}$ (соотв. $\underset{i}{\twoheadrightarrow}$) — редукция, в которой сокращаются только внутренние редексы.

Определение 1.7.2. Пусть M — λ-выражение. Редекс Δ_1 в M *левее* редекса Δ_2, если первая «λ» в Δ_1 левее, чем первая «λ» в Δ_2.

Лемма 1.7.1. *Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда существует $Z \in \Lambda$, такое, что $M \underset{h}{\twoheadrightarrow} Z \underset{i}{\twoheadrightarrow} N$.*

Доказательство (эскиз): Ключ в том, что внешняя и внутренняя редукции коммутируют:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "i"'] & {} \arrow[d, "i"] \\ {} \arrow[r, dashed, "h"'] & {} \end{tikzcd}$$

Редукция $M \twoheadrightarrow N$ представляется как

$$M \underset{h}{\twoheadrightarrow} M_1 \underset{i}{\twoheadrightarrow} M_2 \underset{h}{\twoheadrightarrow} M_3 \underset{i}{\twoheadrightarrow} ... \underset{i}{\twoheadrightarrow} N.$$

Переставляя редукции, получаем искомое разбиение. ■

Определение 1.7.3. Пусть σ — это редукционный путь, то есть

$$\sigma : M_0 \overset{\Delta_0}{\to} M_1 \overset{\Delta_1}{\to} M_2 \overset{\Delta_2}{\to} \cdots.$$

σ называется *стандартным,* если $\forall i, \forall j < i$: Δ_i — не результат сокращения редекса, находящегося левее Δ_j. Стандартная редукция обозначается $M \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$.

Теорема 1.7.1. *Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда $M \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$.*

Доказательство: Имеем $M \underset{h}{\twoheadrightarrow} Z \underset{i}{\twoheadrightarrow} N$ для какого-то $Z \in \Lambda$. Индукция по длине выражения N.

(1) $N \equiv x \in V$. Тогда $Z \equiv x$ и доказательство завершено.
(2) $N \equiv \lambda x_1,...,x_n.\ N_0 N_1 ... N_m$, где $n + m > 0$. Тогда Z должно иметь форму

$$\lambda x_1,...,x_n.\ Z_0 Z_1 ... Z_m,$$

где $Z_i \twoheadrightarrow N_i$ при $0 \leqslant i < m$. По предположению индукции имеем $Z_i \underset{s}{\twoheadrightarrow} N_i$. Тогда $Z \underset{s}{\twoheadrightarrow} N$ и доказательство завершено. ■

1.8. Редукционные стратегии

Определение 1.8.1. (редукционная стратегия): Отображение $F : \Lambda \to \Lambda$ называется *редукционной стратегией,* если для любого $M \in \Lambda$ выполняется редукция

$$M \twoheadrightarrow F(M).$$

Определение 1.8.2.
(1) Пусть F — редукционная стратегия. *F-редукционный путь* выражения M — это последовательность

$$M,\ F(M),\ F^2(M),\ ...$$

(2) F называется *нормализующей,* если лдя любого $M \in \Lambda$, имеющего нормальную форму, $F^n(M)$ находится в нормальной форме для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.8.3. *Крайняя левая редукционная стратегия,* F_l, определяется следующим образом:
(1) $F_l(M) \equiv M$, если M в нормальной форме.
(2) $F_l(M) \equiv M'$, если $M \xrightarrow{\Delta} M'$, где Δ — крайний левый редекс в M.

Теорема 1.8.1. (о нормализации): *F_l — нормализующая стратегия.*

Доказательство: Пусть выражение M имеет нормальную форму N. Тогда по теореме Чёрча-Россера имеем $M \twoheadrightarrow N$. Тогда по предыдущей теореме есть стандартный редукционный путь

$$\sigma : M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1}\to \cdots \xrightarrow{\Delta_{n-1}} M_n \equiv N.$$

Утверждается, что σ — это редукционный путь стратегии F_l. Допустим противное. Тогда на каком-то шагу редекс Δ_i — не крайний левый, а значит он уже не сможет сократиться в дальнейшем. Тогда N — не нормальная форма. Противоречие. ■

2. λ-Представимость

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. Пусть $A \equiv \lambda x,y.\ y(xxy)$. Комбинатор $\mathbf{\Theta} \equiv AA$ называется *комбинатором Тьюринга.*

Упражнение Доказать, что $\mathbf{\Theta}$ — комбинатор фиксированной точки, то есть $\mathbf{\Theta} F \twoheadrightarrow F(\mathbf{\Theta} F)$ для любого $F \in \Lambda$.

Определение 2.1.2.
(1) true $\equiv \mathbf{T} \equiv \lambda x,y.\ x$
(2) false $\equiv \mathbf{F} \equiv \lambda x,y.\ y$
(3) Пусть $B \in \Lambda$. Тогда запись

$$\underline{\text{if}}\ B\ \underline{\text{then}}\ M\ \underline{\text{else}}\ N$$

обозначает λ-выражение BMN.

Определение 2.1.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. *Уподядоченная пара* $[M, N]$ определяется как

$$[M, N] \equiv \lambda z.\ zMN.$$

Определим также $(P)_0 \equiv P\mathsf{T},\ (P)_1 \equiv P\mathsf{F}$.

Упражнение Показать, что $([M, N])_0 \twoheadrightarrow M,\ ([M, N])_1 \twoheadrightarrow N$. Правда ли, что $\left[(P)_0, (P)_1\right] = P$?

Определение 2.1.4. (конечные кортежи):

$$[M] \equiv M, \qquad [M_0, M_1, ..., M_{n+1}] \equiv [M_0, [M_1, ..., M_{n+1}]],$$
$$\langle M_0, M_1, ..., M_n \rangle \equiv \lambda z.\ zM_0M_1...M_n$$

Определение 2.1.5.

(1) $\pi_i^n \equiv \lambda z.\ z\mathsf{F}^{\sim i}\mathsf{T},\quad 0 \leqslant i < n,$

$\pi_n^n \equiv \lambda z.\ z\mathsf{F}^{\sim n}$

(2) $\mathsf{P}_i^n \equiv \lambda z.\ z(\lambda x_1,x_2,...,x_n.\ x_i),\quad 0 \leqslant i \leqslant n$

Упражнение Показать, что

$$\pi_i^n[M_0, M_1, ..., M_n] \twoheadrightarrow M_i, \qquad \mathsf{P}_i^n\langle M_0, M_1, ..., M_n\rangle \twoheadrightarrow M_i$$

Теорема 2.1.1. (обобщённая теорема о неподвижной точке): *Пусть $F_1, F_2, ..., F_n \in \Lambda$. Тогда существуют выражения $X_1, X_2, ..., X_n \in \Lambda$, такие, что*

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1X_1X_2...X_n, \\ X_2 &= F_2X_1X_2...X_n, \\ &\vdots \\ X_n &= F_nX_1X_2...X_n. \end{aligned}$$

Доказательство: Определим выражения

$$M \equiv \lambda f,x.\ f(\mathsf{P}_1^n x)(\mathsf{P}_2^n x)...(\mathsf{P}_n^n x),$$
$$F \equiv \lambda x.\ \langle MF_1x, MF_2x, ..., MF_nx\rangle.$$

Тогда по теореме о неподвижной точке найдётся выражение $X \in \Lambda :\ X = FX$. Наконец, положим $X_i \equiv \mathsf{P}_i^n X$. Действительно,

$$X_i \equiv \mathsf{P}_i^n X = MF_iX = F_iX_1X_2...X_n,$$

q.e.d. ■

Определение 2.1.6. Пусть $M, N \in \Lambda$. *Композиция* $M \circ N$ определяется как $\lambda x.\ M(Nx)$, где $x \notin \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$.

Определение 2.1.7.

(1) *Числа Барендрегта* (или просто λ-числа) — это следующая последовательность λ-выражений:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \mathsf{I}, \qquad \ulcorner n+1 \urcorner \equiv [\mathsf{F}, \ulcorner n \urcorner]$$

Заметим, что все λ-числа — различные нормальные формы.

(2) Определим

$$\mathsf{S}^+ \equiv \lambda z.\ [\mathsf{F}, z], \qquad \mathsf{P}^- \equiv \lambda z.\ z\mathsf{F}, \qquad \mathsf{Zero} \equiv \lambda z.\ z\mathsf{T}$$

Упражнение $\mathsf{S}^+(\ulcorner n \urcorner) = \ulcorner n+1 \urcorner,\quad \mathsf{P}^-(\ulcorner n+1 \urcorner) = \ulcorner n \urcorner,\quad \mathsf{Zero}\ (\ulcorner 0 \urcorner) = \mathsf{T},\quad \mathsf{Zero}\ (\ulcorner n+1 \urcorner) = \mathsf{F}$

Определение 2.1.8. Пусть $P : \mathbb{N}_0 \to \{\underline{\text{true}}, \underline{\text{false}}\}$ — предикат на натуральных числах. Запись

$$\mu m[P(m)]$$

обозначает наименьшее число m, такое, что выполняется $P(m)$, если такое число существует. В противном случае $\mu m[P(m)]$ неопределено.

2.2. Рекурсивные функции

Определение 2.2.1.

(1) *Числовая функция* — это отображение $\mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$, для некоторого $p \in \mathbb{N}$.

(2) Числовая функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$ называется λ-представимой, если существует выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, ..., n_p \in \mathbb{N}_0 : \qquad F \ulcorner n_1 \urcorner \ \ulcorner n_2 \urcorner \ ... \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi\left(n_1, n_2, ..., n_p\right) \urcorner$$

(3) Если $\vec{n} = n_1, n_2, ..., n_p$, то положим

$$\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner n_1 \urcorner, \ulcorner n_2 \urcorner, ..., \ulcorner n_p \urcorner.$$

Определение 2.2.2. (первичные функции): Функции $U_i^p,\ S^+,\ Z$ называются *первичными:*

$$U_i^p\left(n_0, n_1, ..., n_p\right) = n_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant p,$$
$$S^+(n) = n + 1, \qquad Z(n) = 0.$$

Определение 2.2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — некий класс числовых функций.

(1) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно суперпозиции,* если для любых $\chi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_m \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi\left(\psi_1(\vec{n}), \psi_2(\vec{n}), ..., \psi_{m(\vec{n})}\right)$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно примитивной рекурсии,* если лдя любых $\chi, \psi \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$
$$\varphi(k + 1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно минимизации,* если для любой функции $\chi \in \mathcal{A}$: $\forall \vec{n}\ \exists m \quad \chi(\vec{n}, m) = 0$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$$

лежит в $\mathcal{A}$.

(4) Класс $\mathcal{R}$ *рекурсивных функций* – это наименьший класс числовых функций, который содержит все первичные функции, а также замкнут относительно суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

2.3. Теорема Клини

Лемма 2.3.1. *Все первичные функции λ-представимы.*

| *Доказательство:* Очевидно. ■

Лемма 2.3.2. *λ-представимые функции замкнуты относительно суперпозиции.*

| *Доказательство:* Упражнение. ■

Лемма 2.3.3. *λ-представимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.*

Доказательство: Пусть функция φ задаётся соотношениями

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$
$$\varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),$$

где χ и ψ λ-представлены выражениями G и H соответственно. Рассмотрим выражение

$$X \equiv \lambda f.\, \lambda x, \vec{y}.\, (\underline{\text{if}}\ \mathbf{Zero}\ x\ \underline{\text{then}}\ G\vec{y}\ \underline{\text{else}}\ H\,(f(\mathbf{P}^{-}x)\vec{y})\,(\mathbf{P}^{-}x)\,\vec{y}).$$

λ-выражение $F \equiv \mathbf{Y}X$ представляет функцию φ (упражнение). ■

Определение 2.3.1. Пусть $P \in \Lambda$. Определим

$$H_P \equiv \mathbf{\Theta}(\lambda h, z.\ \underline{\text{if}}\ Pz\ \underline{\text{then}}\ z\ \underline{\text{else}}\ h(\mathbf{S}^{+}z)),$$
$$\mu P \equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner.$$

Утверждение 2.3.1. *Пусть $P \in \Lambda$ таково, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ либо $P\ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}$, либо $P\ulcorner n \urcorner = \mathbf{F}$. Тогда:*
(1) $H_P z \twoheadrightarrow \underline{\text{if}}\ Pz\ \underline{\text{then}}\ z\ \underline{\text{else}}\ H_P(\mathbf{S}^{+}z)$;
(2) $\mu P = \ulcorner \mu n[P\ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] \urcorner$ (если минимум существует).

Доказательство:
(1) Упражнение.
(2) Допустим, что $\mu n[P\ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] = m$. Тогда имеем

$$H_P \ulcorner m \urcorner = \ulcorner m \urcorner,$$
$$\forall n < m: \quad H_P \ulcorner n \urcorner = H_P \ulcorner n+1 \urcorner = H_P \ulcorner n+2 \urcorner = \ldots = H_P \ulcorner m \urcorner = \ulcorner m \urcorner.$$

Отсюда получаем, что $\mu P \equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner = \ulcorner m \urcorner$,

q.e.d. ■

Лемма 2.3.4. *λ-представимые функции замкнуты относительно минимизации.*

Доказательство: Пусть

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0],$$

где $G \in \Lambda$ представляет функцию χ. Определим $F \in \Lambda$ как

$$F\vec{x} = \mu(\lambda y.\ \mathbf{Zero}\ (G\vec{x}y)).$$

По предыдущему утверждению, F представляет функцию φ. ■

Следствие *Все рекурсивные функции λ-представимы.*

Лемма 2.3.5. *Пусть φ λ-представляется выражением F. Тогда для всех $\vec{n}, m \in \mathbb{N}_0$*

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow F\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner$$

Доказательство:
($\Longrightarrow$) Очевидно по определению.
($\Longleftarrow$) Предположим, что $F\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner$. Тогда $\ulcorner \varphi(\vec{n}) \urcorner = \ulcorner m \urcorner$. Так как λ-числа — это различные нормальные формы, по теореме Чёрча-Россера имеем $\varphi(\vec{n}) = m$,

q.e.d. ■

Теорема 2.3.1. (Клини): *Функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$ рекурсивна $\Longleftrightarrow$ φ λ-представима.*

Доказательство (эскиз):

($\Longrightarrow$) Очевидно.

($\Longleftarrow$) Идея в том, чтобы воспользоваться тем фактом, что λ-теория сама по себе рекурсивна (λ-выражения рекурсивно определены). Для этого мы строим биекцию $g : \Lambda \leftrightarrow \mathbb{N}_0 : g^{-1}$. Далее мы определяем ряд рекурсивных функций:

(1) $\mathrm{Num} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{Num}(m) = g(\ulcorner m \urcorner)$.
(2) $\mathrm{Num}^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{Num}^{-1}(g(\ulcorner m \urcorner)) = m$
(3) $\mathrm{App} : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{App}(n_1, n_2, ..., n_k) = g(g^{-1}(n_1) \cdot g^{-1}(n_2) \cdot ... \cdot g^{-1}(n_k))$
(4) $\mathrm{Red} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : \mathrm{Red}(g(M)) = g(N)$, где N — нормальная форма M (если таковая существует).

Далее, рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$, представленную λ-выражением F. Пусть $n_1, n_2, ..., n_p$ — набор аргументов. Пусть $f = g(F)$. Определим φ' как $\mathrm{Num}^-1 \circ \mathrm{Red} \circ \mathrm{Appl} \circ$

$$
\begin{aligned}
& n_1, n_2, ..., n_p \\
& \downarrow (\mathrm{Num}) \\
& m_1, m_2, ..., m_p \\
& \downarrow (\mathrm{App}) \\
& m = \mathrm{Appl}(f, m_1, ..., m_p) \\
& \downarrow (\mathrm{Red}) \\
& r = \mathrm{Red}(m) \\
& \downarrow (\mathrm{Num}^{-1}) \\
& s = \mathrm{Num}^{-1}(r)
\end{aligned}
$$

Будучи композицией рекурсивных функций, функция $\varphi' : n_1, n_2, ..., n_p \mapsto s$ рекурсивна. Более того, она совпадает с φ по предыдущей лемме. ■

2.4. Числа Чёрча

Определение 2.4.1. *Числа Чёрча* — это следующая последовательность λ-выражений:

$$c_0 \equiv \lambda f{,}x.\ x, \qquad c_{n+1} \equiv \lambda f{,}x.\ f(c_n f x).$$

В явном виде, $c_n \equiv \lambda f.\ f^n$.

Утверждение 2.4.1. *Сущетвуют λ-выражения H, H^{-1}, такие, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$*

$$H \ulcorner n \urcorner = c_n, \qquad H^{-1} c_n = \ulcorner n \urcorner.$$

Доказательство: Пусть $S_c^+ \equiv \lambda a{,}b{,}c.\ b(abc)$. Очевидно, что $S_c^+ c_n = c_{n+1}$. Теперь рассмотрим

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \lambda x.\ \underline{\text{if}}\ \mathbf{Zero}\ x\ \underline{\text{then}}\ c_0\ \underline{\text{else}}\ S_c^+(H(\mathbf{P}^- x)), \\
H^{-1} &\equiv \lambda x.\ x \mathbf{S}^+ \ulcorner 0 \urcorner.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что эти выражения являются искомыми. ■

Следствие *Пусть $\varphi : \mathbb{N}_0^p \to \mathbb{N}_0$. Тогда φ λ-представима с помощью чисел Чёрча $\Longleftrightarrow$ φ рекурсивна.*

Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 2.4.1. *Положим*

$$\mathsf{A}_+ \equiv \lambda x,y,p,q.\ xp(ypq), \qquad \mathsf{A}_* \equiv \lambda x,y,z.\ x(yz), \qquad \mathsf{A}_{\mathsf{exp}} \equiv \lambda x,y.\ yx.$$

Тогда

$$\mathsf{A}_+ c_n c_m = c_{n+m}, \qquad \mathsf{A}_* c_n c_m = c_{nm}, \qquad \mathsf{A}_{\mathsf{exp}} c_n c_m = c_{n^m}$$

Доказательство: Очевидно, что $(f^n)^m = f^{nm}$. Отсюда все три утверждения следуют тривиально. ■

Замечание 2.4.1. Числа Чёрча хороши тем, что на них очень простая арифметика. Однако они плохи отсутствием нативного предшествующего элемента.

2.5. Числовые системы

Определение 2.5.1. Последовательность λ-выражений $d_0, d_1, d_2, \ldots$ называется *числовой системой,* если существуют λ-выражения S_d^+ и Zero_d, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\mathsf{S}_d^+ d_n = d_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\mathsf{Zero}_d b_0 = \mathsf{T}, \quad \mathsf{Zero}_d d_{n+1} = \mathsf{F}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Замечание 2.5.1. Каждая числовая система однозначно определяется нулевым элементом d_0 и функцией следующего элемента S_d^+. Поэтому мы будем писать $d = (d_0, \mathsf{S}_d^+)$.

Определение 2.5.2. Пусть $d = (d_0, \mathsf{S}_d^+)$ — числовая система.

(1) d называется *нормальной,* если все выражения d_k находятся в нормальной форме.

(2) d называется *адекватной,* если все рекурсивные функции λ-представляются с помощью чисел d_k. Иными словами, для любой рекурсивной $\varphi : \mathbb{N}_o^p \to \mathbb{N}_0$ существует λ-выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}_0 : \quad F d_{n_1} d_{n_2} \ldots d_{n_p} = d_{\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_p)}.$$

Утверждение 2.5.1. *Пусть* d *— числовая система. Тогда* d *адекватна в том и только том случае, если существует функция предшествующего элемента,* P_d^-*, такая что*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \mathsf{P}_d^- d_{n+1} = d_n.$$

Доказательство:

(⟹) По определению.

(⟸) Доказательство аналогично таковому для λ-чисел (упражнение).

q.e.d. ■

3. Теорема о неразрешимости

Определение 3.1.

(1) Биекция $g : \Lambda \leftrightarrow \mathbb{N}_0 : g^{-1}$ называется *кодированием* λ-выражений. Для выражения $M \in \Lambda$ число $g(M)$ называется его *числом Гёделя.*

(2) Рекурсивная функция $\tau : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, такая, что

$$\tau(g(M), g(N)) = g(MN),$$

называется *функцией комбинации.* Мы предположим, что такая существует.

(3) Рекурсивная функция $\kappa : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такая, что

$$\kappa(n) = g(\ulcorner n \urcorner),$$

называется *функцией нумерации λ-чисел.*

Определение 3.2. Пусть M — λ-выражение. Тогда λ-число $\ulcorner M \urcorner$ определяется как

$$\ulcorner M \urcorner = \ulcorner g(M) \urcorner.$$

Определение 3.3.

(1) Множества $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{N}_0$ называются *рекурсивно сепарабельными,* если существует рекурсивная функция $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$, такая, что

$$n \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(n) = 0,$$
$$n \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(n) = 1.$$

Два множества $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \subset \Lambda$ называются *рекурсивно сепарабельными,* если рекурсивно сепарабельны множества $g(\mathcal{A}'), g(\mathcal{B}')$.

(2) Множество $\mathcal{A}$ называется *рекурсивным* (или *разрешимым*), если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^C$ рекурсивно сепарабельны.

Определение 3.4. Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$. Тогда $\mathcal{A}$ называется *замкнутым относительно конверсии,* если лдя любых $M, N \in \Lambda$:

$$\left.\begin{matrix} M \in \mathcal{A} \\ N = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Теорема 3.1. (Скотта-Карри о неразрешимости): *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — непустые подмножества Λ, замкнутые относительно конверсии. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не рекурсивно сепарабельны.*

Доказательство: Рассмотрим $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ как в условии и допустим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ разделяются функцией φ. Имеем

$$M \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(g(M)) = 0,$$
$$M \in \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(g(N)) = 1.$$

По теореме Клини φ представляется неким λ-выражением F. Иными словами,

$$M \in \mathcal{A} \Rightarrow F \ulcorner M \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner,$$
$$M \in \mathcal{B} \Rightarrow F \ulcorner M \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner.$$

Пусть функции τ и κ представляются выражениями T и K соответственно (Определение 3.1). Имеем

$$T \ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner = \ulcorner XY \urcorner,$$
$$K \ulcorner n \urcorner = \ulcorner \ulcorner n \urcorner \urcorner.$$

Возьмём произвольные $M \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{B}$. Было бы круто построить λ-выражение J, такое, что

$$F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \ \Rightarrow\ J = B,$$
$$F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner \ \Rightarrow\ J = A.$$

В таком случае мы придём к противоречию. Действительно, пусть $j = g(J)$. Тогда $\varphi(j)$ — это либо 0, либо 1. Имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(j) = 0 &\Rightarrow\ F \ulcorner J \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \\
&\Rightarrow\ J = B \\
&\Rightarrow\ J \in \mathcal{B} \quad \text{(в силу замкнутости относительно конверсии)} \\
&\Rightarrow\ \varphi(j) = 1. \quad \text{(по определению)}
\end{aligned}$$

$$\varphi(j) = 1 \ \Rightarrow\ \varphi(j) = 0. \quad \text{(аналогично)}$$

Теперь мы построим J. Требуемое свойство выражается формулой

$$J = \underline{\text{if}}\ \textbf{Zero}\ (F \ulcorner J \urcorner)\ \underline{\text{then}}\ B\ \underline{\text{else}}\ A = \textbf{Zero}\ (F \ulcorner J \urcorner)\ B\ A$$

Мы не можем напрямую воспользоваться теоремой о неподвижной точке, потому что $\ulcorner J \urcorner$, вообще говоря, не λ-представимо для произвольного $J \in \Lambda$. Поэтому мы используем небольшой трюк. Пусть $y \notin \mathrm{FV}(AB)$. Положим

$$H \equiv \lambda y.\ (\textbf{Zero}\ (F(Ty(Ky)))\ B\ A),$$
$$J \equiv H \ulcorner H \urcorner.$$

Нетрудно видеть, что J удовлетворяет нужным соотношениям. ■

<u>Следствие</u> *Пусть $\mathcal{A} \subset \Lambda$ замкнуто относительно конверсии и таково, что $\mathcal{A} \neq \varnothing,\ \mathcal{A}^C \neq \varnothing$. Тогда $\mathcal{A}$ не разрешимо.*

<u>Доказательство</u>: Упражнение. ■

<u>Следствие</u> *Множество всех λ-выражений, имеющих нормальную форму, не разрешимо.*

<u>Доказательство</u>: Упражнение. ■

<u>Следствие</u> *Отношение конверсии (=) не разрешимо. То есть, не существует рекурсивной функции $\varphi : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, такой, что*

$$M = N \ \Rightarrow\ \varphi(g(M), g(N)) = 0,$$
$$M \neq N \ \Rightarrow\ \varphi(g(M), g(N)) = 1,$$

<u>Доказательство</u>: Пусть такая функция нашлась. Тогда возьмём $\mathcal{A} = \{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$. Очевидно, что $\mathcal{A}$ нетривиально и замкнуто относительно конверсии. Однако функция $\psi(n) = \varphi(n, g(\mathbf{I}))$ явно разделяет $\mathcal{A}$ и его дополнение:

$$M \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \psi(g(M)) = 0, \qquad M \notin \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \psi(g(M)) = 1,$$

противоречие. ■

Библиография

[1] Barendregt H. P., *The Lambda calculus: its syntax and semantics*, т. 103. 1984.

[2] Barendregt H. P. и Barendsen E., *Introduction to Lambda calculus*. 2000.

[3] J. Roger Hindley и Jonathan P. Seldin, *Lambda-calculus and combinators, an introduction*. 2008.