

МАТЕРИАЛ КУРСА

λ -исчисление, 2024

Содержание

1. Конверсия и редукция	2
1.1. Основные понятия	2
1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия	3
1.3. Комбинаторы и согласованность	5
1.4. Нормальные формы	5
1.5. Редукция	6
1.6. Теорема Чёрча-Россера	7
1.7. Стандартная редукция	11
1.8. Редукционные стратегии	12
2. λ-представимость	12
2.1. Основные понятия	12
2.2. Рекурсивные функции	14

1. Конверсия и редукция

1.1. Основные понятия

Определение 1.1.1. Рассмотрим счётное множество $V = \{v, v', v'', \dots\}$. Элементы этого множества будут называться *переменными*. Множество λ -выражений, Λ , — это наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$;
- $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$; (абстракция, морально: определение функции)
- $M \in \Lambda, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$. (комбинация, морально: применение функции к аргументу)

Пример 1.1.1. λ -выражения в формальной нотации:

$$\begin{aligned} &v'; \\ &(vv'); \\ &(\lambda v(v'v)); \\ &((\lambda v(v'v))v''); \\ &(((\lambda v(\lambda v'(v'v)))v'')v'''); \end{aligned}$$

Нотация

- x, y, z, \dots обозначают произвольные переменные из множества V .
- M, N, K, \dots обозначают произвольные λ -выражения из Λ .
- Внешние скобки опускаются: $(\lambda x(yz)) \rightarrow \lambda x(yz)$.
- Многократная абстракция сокращается:

$$\lambda x_1(\lambda x_2(\lambda \dots (\lambda x_n M) \dots)) \rightarrow \lambda x_1, x_2, \dots, x_n. M \rightarrow \lambda \vec{x}. M$$

- Многократная комбинация сокращается:

$$((\dots((M_1 M_2) M_3) \dots) M_n) N \rightarrow M_1 M_2 \dots M_n N \rightarrow \overrightarrow{MN}$$

- Комбинация берёт приоритет над абстракцией: $\lambda x. yz = \lambda x. (yz)$

Определение 1.1.2. Пусть M — λ -выражение. Множества $\text{TV}(M)$, $\text{FV}(M)$, $\text{BV}(M) \subset V$ определяются индуктивно:

M	$\text{TV}(M)$	$\text{FV}(M)$	$\text{BV}(M)$
$x \in V$	$\{x\}$	$\{x\}$	\emptyset
$\lambda x. N$	$\{x\} \cup \text{TV}(N)$	$\text{FV}(N) \setminus \{x\}$	$\{x\} \cup \text{BV}(N)$
NK	$\text{TV}(N) \cup \text{TV}(K)$	$\text{FV}(N) \cup \text{FV}(K)$	$\text{BV}(N) \cup \text{BV}(K)$

Замечание 1.1.1. В данный момент существуют не вполне осмысленные λ -выражения. Так, в выражении $(\lambda x. xy)x$ переменная x выступает одновременно связанной и свободной, а в выражении $\lambda x. \lambda x. xx$ переменная x связывается дважды. Обе этих проблемы можно исправить заменой связанных переменных: $(\lambda x. xy)x \rightarrow (\lambda u. uy)x$, $\lambda x. \lambda x. xx \rightarrow \lambda x. \lambda u. uu$. Сейчас мы формализуем эту идею.

Определение 1.1.3. Пусть \sqsubset — бинарное отношение на множестве Λ . Тогда \sqsubset называется *совместимым с операциями*, если:

$$\begin{aligned} M \sqsubset N &\Rightarrow \lambda x. M \sqsubset \lambda x. N, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow ZM \sqsubset ZN, \\ M \sqsubset N &\Rightarrow MZ \sqsubset NZ. \end{aligned}$$

Определение 1.1.4. Тожественное равенство (\equiv) обозначает полностью идентичный состав символов: $\lambda x. xy \neq \lambda u. uy$.

Определение 1.1.5. Отношение α -конгруэнтности ($\stackrel{\alpha}{\equiv}$) на Λ — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $M \stackrel{\alpha}{\equiv} M$;
- $\lambda x. M \stackrel{\alpha}{\equiv} \lambda y. (M[x \rightarrow y])$, при условии что $y \notin \text{TV}(M)$;
- $\stackrel{\alpha}{\equiv}$ совместимо с операциями.

Определение 1.1.6. Пусть M — λ -выражение. M называется *корректным* в следующих случаях:

- (1) $M \equiv x \in V$;
- (2) $M \equiv \lambda x. N$, причём N корректно, а также $x \notin \text{BV}(N)$;
- (3) $M \equiv NK$, причём N, K корректны, а также $\text{BV}(N) \cap \text{FV}(K) = \emptyset$ и $\text{FV}(N) \cap \text{BV}(K) = \emptyset$.

Упражнение Доказать, что если M корректно, то $\text{FV}(M) \cap \text{BV}(M) = \emptyset$, $\text{FV}(M) \cup \text{BV}(M) = \text{TV}(M)$.

Упражнение Пусть M — λ -выражение. Доказать, что существует корректное λ -выражение N , такое, что $M \stackrel{\alpha}{\equiv} N$.

Договорённость (Правило переменных): Пусть λ -выражения M_1, M_2, \dots, M_n выступают с едином контексте. Тогда мы будем предполагать, что выражение $M_1 M_2 \dots M_n$ — корректное.

Определение 1.1.7. λ -выражение M называется *замкнутым* (или *комбинатором*), если $\text{FV}(M) = \emptyset$. Λ^0 обозначает множество всех замкнутых λ -выражений.

Определение 1.1.8. M является *подвыражением* N ($M \subset N$), если M лежит во множестве $\text{Sub}(N)$:

N	$\text{Sub}(N)$
$x \in V$	$\{x\}$
$\lambda x. K$	$\{\lambda x. K\} \cup \text{Sub}(K)$
$K_1 K_2$	$\text{Sub}(K_1) \cup \text{Sub}(K_2) \cup \{K_1 K_2\}$

Определение 1.1.9. Пусть $F, M \in \Lambda$. Тогда

- $F^0 M \equiv M$; $F^{n+1} M \equiv F(F^n M)$
- $F M^{\sim 0} \equiv F$; $F M^{\sim n+1} \equiv (F M^{\sim n}) M$

1.2. Оператор подстановки и $\beta\eta$ -конверсия

Определение 1.2.1. Пусть $M \in \Lambda$, $x \notin \text{BV}(M)$. Пусть также $N \in \Lambda$. *Результат подстановки* N вместо x , $M[x := N]$, определяется индуктивно:

$$\begin{aligned}
 x[x := N] &\equiv N; \\
 y[x := N] &\equiv y, \text{ если } y \neq x; \\
 (\lambda y. M')[x := N] &\equiv \lambda y. (M'[x := N]); \\
 (M_1 M_2)[x := N] &\equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N]).
 \end{aligned}$$

Замечание 1.2.1. Рассмотрим $M \equiv \lambda y. x$, $N \equiv yy$. Тогда по предыдущему определению мы получаем $M[x := N] = \lambda y. yy$, что настораживает, ведь $M \equiv \lambda y. x \stackrel{\alpha}{\equiv} \lambda u. x \equiv M'$, тогда как

$$M[x := N] = \lambda y. yy \not\stackrel{\alpha}{\equiv} \lambda u. yy = M'[x := N].$$

Однако заметим, что такая ситуация некорректна, ведь $\text{BV}(M) \cap \text{FV}(N) = \{y\} \neq \emptyset$.

Упражнение Доказать, что оператор подстановки уважает α -конгруэнтность, если рассматриваемые выражения соблюдают правило переменных. Иначе говоря,

$$\left. \begin{array}{l} M \stackrel{\alpha}{=} M' \\ N \stackrel{\alpha}{=} N' \end{array} \right\} \Rightarrow M[x := N] \stackrel{\alpha}{=} M'[x := N'].$$

Лемма 1.2.1. (о подстановке): Пусть $M, N, L \in \Lambda$. Тогда если $x \neq y$ и $x \notin \text{FV}(L)$, то

$$(M[x := N])[y := L] \equiv (M[y := L])[x := N[y := L]]$$

Доказательство: Индукция по структуре λ -выражения M .

(1) База: $M \equiv u \in V$. Тогда рассмотрим три случая:

- $u \equiv x$. Тогда обе части тождественно равны $N[y := L]$, так как $x \neq y$.
- $u \equiv y$. Тогда обе части равны L , так как $L[x := \dots] = L$, ведь $x \notin \text{FV}(L)$.
- $u \neq x, y$. Тогда обе части равны u .

(2) Переход.

- $M \equiv \lambda z. M'$. По правилу переменных и определению оператора подстановки мы имеем $z \notin \text{FV}(NL)$ и $z \neq x, y$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} (\lambda z. M')[x := N][y := L] &\equiv \lambda z. M'[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z. M'[y := L][x := N[y := L]] \\ &\equiv (\lambda z. M')[y := L][x := N[y := L]]. \end{aligned}$$

- $M \equiv M_1 M_2$. Доказательство аналогично.

q.e.d. ■

Определение 1.2.2. ($\beta\eta$ -конверсия): Отношение $\beta\eta$ -конверсии ($=$) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $(\lambda x. M)N = M[x := N]$; (β -конверсия)
- $\lambda x. Mx = M$, при условии что $x \notin \text{TV}(M)$; (η -конверсия)
- $=$ — отношение эквивалентности;
- $=$ совместимо с операциями.

Если $M = N$, мы говорим, что « M равно N », или « M конвертируется в N ». Запись « $\lambda \vdash M = N$ » означает, что конверсию $M = N$ можно вывести из вышеуказанных правил.

Теорема 1.2.1. (о неподвижной точке): $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda : FX = X$.

Доказательство: Пусть $W \equiv \lambda x. F(xx)$ и $X \equiv WW$. Тогда имеем

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. F(xx))W = F(xx)[x := W] \equiv F(WW) \equiv FX,$$

q.e.d. ■

Утверждение 1.2.1. (fallacy): $\forall M, N \in \Lambda : \lambda \vdash M = N$

Доказательство: Рассмотрим $F \equiv \lambda x, y. yx$. Тогда для любых M, N имеем

$$FMN \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))M)N = (\lambda y. yM)N = NM.$$

В частности, $Fyx = xy$. Однако

$$Fyx \equiv ((\lambda x. (\lambda y. yx))y)x = (\lambda y. yy)x = xx.$$

Тогда $xy = xx$, а значит $F_1 \equiv \lambda x, y. xy = \lambda x, y. xx \equiv F_2$. Теперь для любого $M \in \Lambda$ имеем

$$M = (\lambda x. x)M = F_1(\lambda x. x)M = F_2(\lambda x. x)M = (\lambda x. x)(\lambda x. x) = (\lambda x. x),$$

| и по транзитивности $M = (\lambda x. x) = N$ для любых $M, N \in \Lambda$. В чём ошибка? ■

Лемма 1.2.2. *Оператор подстановки уважает конверсию. Иначе говоря, если $M = M'$, $N = N'$, то $M[x := N] = M'[x := N']$.*

| Доказательство: Упражнение. ■

1.3. Комбинаторы и согласованность

Определение 1.3.1.

- $\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$
- $\mathbf{K} \equiv \lambda x, y. x$
- $\mathbf{K}_* \equiv \lambda x, y. y$
- $\mathbf{S} \equiv \lambda x, y, z. xz(yz)$
- $\mathbf{Y} \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$ — комбинатор неподвижной точки: $\forall F \in \Lambda : F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$.
Этот комбинатор позволяет моделировать простую рекурсию. Рассмотрим λ -выражение M , определённое рекуррентной формулой:

$$Mx \equiv FxM.$$

Определим $G \equiv \lambda y. \lambda x. Fxy$. Тогда M приобретает явную форму: $M \equiv \mathbf{Y}G$ (упражнение).

Определение 1.3.2.

- Выражение вида $M = N$ называется *равенством*;
- Равенство $M = N$ называется *замкнутым*, если $M, N \in \Lambda^0$;
- Пусть \mathcal{T} — формальная теория, т.е. набор правил, с помощью которых можно выводить равенства (наподобие λ -теории). Тогда \mathcal{T} называется *согласованной* (нотация $\text{Con}(\mathcal{T})$) если \mathcal{T} не доказывает все замкнутые равенства. В противном случае \mathcal{T} называется *противоречивой*.
- Если \mathcal{T} — это набор равенств, то $\lambda + \mathcal{T}$ обозначает теорию, полученную добавлением равенств из \mathcal{T} к стандартному списку аксиом $\beta\eta$ -конверсии.

Определение 1.3.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Тогда M и N называются *несовместимыми* (нотация $M \# N$), если теория $\lambda + (M = N)$ противоречива.

Пример 1.3.1. $\mathbf{I} \# \mathbf{K}$

| Доказательство: Имеем $\mathbf{I}MN = \mathbf{K}MN$ для любых $M, N \in \Lambda$. По определению комбинаторов \mathbf{I} и \mathbf{K} , имеем $MN = M$. Подставляя $M \equiv \mathbf{I}$, получаем $N = \mathbf{I} \forall N \in \Lambda$. ■

1.4. Нормальные формы

Определение 1.4.1.

- λ -выражение M называется *$\beta\eta$ -нормальной формой*, если оно **не** имеет подвыражений вида $(\lambda x. M)N$ или $\lambda y. (My)$ (где $y \notin \text{TV}(M)$).
- M имеет нормальную форму N , если $M = N$ и N — нормальная форма.

Пример 1.4.1.

- \mathbf{I} находится в нормальной форме;
- \mathbf{KI} имеет нормальную форму $\lambda y. \mathbf{I}$;
- Комбинатор $\mathbf{\Omega} = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы (доказательство позже).

Воспоминания о будущем.

- Если M и N — различные $\beta\eta$ -нф, то $M \# N$
- M может иметь максимум одну нормальную форму;
- $\mathbf{\Omega} = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы;
- λ — согласованная теория.

1.5. Редукция

Замечание 1.5.1. В правилах конверсии есть определённая асимметрия. Так, о конверсии

$$(\lambda x. x^2 + 1)3 = 10$$

можно сказать, что «10 является результатом упрощения выражения $(\lambda x. x^2 + 1)3$ », но никак не в обратную сторону. Сейчас мы формализуем эту асимметрию.

Определение 1.5.1.

- (1) Отношение \rightarrow (редукция за один шаг) — это наименьшее подмножество $\Lambda \times \Lambda$, такое что:
 - $(\lambda x. M)N \rightarrow M[x := N]$;
 - $\lambda x. Mx \rightarrow M$, если $x \notin \text{TV}(M)$;
 - \rightarrow совместимо с операциями.
- (2) Отношение \twoheadrightarrow (редукция) — это замыкание \rightarrow до предпорядка: $\twoheadrightarrow = \text{Preord}(\rightarrow)$;
- (3) Отношение \equiv (конгруэнтность или эквивалентность) — это замыкание \twoheadrightarrow до отношения эквивалентности: $\equiv = \text{Equiv}(\twoheadrightarrow)$

Определение 1.5.2.

- λ -выражения вида $(\lambda x. M)N$ называются β -редексами; соотв. отношения: $\xrightarrow{\beta}, \twoheadrightarrow_{\beta}, \equiv_{\beta}$
- λ -выражения вида $\lambda x. Mx$ называются η -редексами. соотв. отношения: $\xrightarrow{\eta}, \twoheadrightarrow_{\eta}, \equiv_{\eta}$
- M — нормальная форма (или в нормальной форме), если M не содержит редексов.
- Пусть Δ — редекс в выражении M . Запись $M \xrightarrow{\Delta} N$ означает, что N получается из M сокращением редекса Δ : $N \equiv M[\Delta \rightarrow \Delta']$
- Редукционный путь — это последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \rightarrow \dots$$

Пример 1.5.1.

- Определим $\omega_3 \equiv \lambda x. xxx$. Это выражение порождает бесконечный редукционный путь:

$$\omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \omega_3 \xrightarrow{\omega_3 \omega_3} \dots$$

- Редекс не всегда однозначно задаётся редукцией:

$$I(Ix) \xrightarrow{Ix} Ix, \quad I(Ix) \xrightarrow{I(Ix)} Ix$$

Утверждение 1.5.1. Пусть M — нормальная форма. Тогда:

- (1) $\nexists N : M \rightarrow N$;
- (2) $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \equiv N$.

Доказательство:

- (1) Очевидно.
- (2) По определению \twoheadrightarrow , условие $M \twoheadrightarrow N$ влечёт два случая:
 - $M \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow N$ — невозможно по (1);
 - $M \equiv N$ — искомым.

q.e.d. ■

Определение 1.5.3. Редукционный граф выражения M (нотация $\text{Gr}(M)$) — это граф, в котором:

$$V = \{N \in \Lambda \mid M \twoheadrightarrow N\}, \quad E = \{(N, K) \in V^2 \mid N \rightarrow K\}$$

Определение 1.5.4. Пусть \sqsubset — произвольное отношение на множестве X . \sqsubset обладает свойством Чёрча-Россера (нотация $\text{CR}(\sqsubset)$), если

$$\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsupset x_1) \wedge (x \sqsupset x_2), \quad \exists z \in X : (x_1 \sqsupset z) \wedge (x_2 \sqsupset z).$$

Теорема 1.5.1. Пусть \sqsupset рефлексивно и обладает свойством Чёрча-Россера. Тогда для отношения $\sim = \text{Equiv}(\sqsupset)$ справедливо:

$$x \sim y \Rightarrow \exists z : (x \sqsupset z) \wedge (y \sqsupset z)$$

Доказательство: Индукция по определению отношения \sim . Пусть $x \sim y$. Тогда возникают три случая:

- $x \sim y \Leftarrow x \sqsupset y$. Тогда положим $z \equiv y$.
- $x \sim y \Leftarrow y \sim x$. Тогда возьмём z по предположению индукции.
- $x \sim y \Leftarrow (x \sim L) \wedge (L \sim y)$. Тогда рассмотрим $z_1, z_2 \in \Lambda : (z_1 \sqsubset x, L) \wedge (z_2 \sqsubset L, y)$. Поскольку $\text{CR}(\sqsupset)$, найдётся λ -выражение z , такое, что $(z_1 \sqsupset z) \wedge (z_2 \sqsupset z)$. Оно искомое.

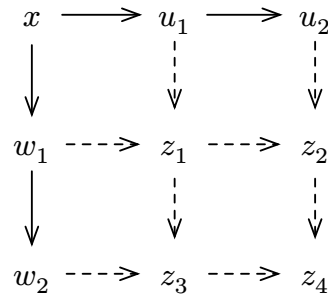
q.e.d. ■

1.6. Теорема Чёрча-Россера

Сначала мы докажем, что отношение $\xrightarrow{\beta}$ обладает свойством Чёрча-Россера.

Лемма 1.6.1. Пусть \sqsupset — бинарное отношение на множестве X и пусть $\sqsupset' = \text{Trans}(\sqsupset)$ — его транзитивное замыкание. Тогда $\text{CR}(\sqsupset) \Rightarrow \text{CR}(\sqsupset')$.

Доказательство: Пусть $x \sqsupset' x_1, x \sqsupset' x_2$. Тогда для каждого отношения возможны два случая, и все четыре можно представить на диаграмме:



q.e.d. ■

Определение 1.6.1. Рассмотрим бинарное отношение \rightsquigarrow , определённое индуктивно следующим образом:

- $M \rightsquigarrow M$;
- $M \rightsquigarrow M' \Rightarrow \lambda x. M \rightsquigarrow \lambda x. M'$;
- $M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow MN \rightsquigarrow M'N'$;
- $M \rightsquigarrow M', N \rightsquigarrow N' \Rightarrow (\lambda x. M)N \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Лемма 1.6.2. Если $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, то $M[x := N] \rightsquigarrow M'[x := N']$.

Доказательство: Индукция по определению $M \rightsquigarrow M'$.

(1) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow M \rightsquigarrow M$. Тогда требуется доказать, что $M[x := N] \rightsquigarrow M[x := N']$. Проведём индукцию по структуре M :

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
x	N	N'	ОК
y	y	y	ОК
PQ	$P[\dots]Q[\dots]$	$P[\dots']Q[\dots']$	предп. инд.

M	Правая часть	Левая часть	Комментарий
$\lambda y. P$	$\lambda y. P[...]$	$\lambda y. P[...']$	аналогично

(2) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow \lambda y. P \rightsquigarrow \lambda y. P'$, прямое следствие $P \rightsquigarrow P'$. По предположению индукции имеем $P[x := N] \rightsquigarrow P'[x := N']$, а тогда $\lambda y. P[x := N] \rightsquigarrow \lambda y. P'[x := N']$, что и требовалось доказать.

(3) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$ и $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv P[x := N]Q[x := N] \\ &\rightsquigarrow P'[x := N']Q'[x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

(4) $M \rightsquigarrow M' \Leftarrow (\lambda y. P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Тогда

$$\begin{aligned} M[x := N] &\equiv (\lambda y. P[x := N])(Q[x := N]) \\ &\rightsquigarrow P'[x := N'] [y := Q'[x := N']] \\ &\equiv P'[y := Q'] [x := N'] \\ &\equiv M'[x := N']. \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Лемма 1.6.3.

(1) $\lambda x. M \rightsquigarrow N$ влечёт $N \equiv \lambda x. M'$, где $M \rightsquigarrow M'$;

(2) $MN \rightsquigarrow L$ влечёт либо

- $L \equiv M'N'$, где $M \rightsquigarrow M'$ и $N \rightsquigarrow N'$, либо
- $M \equiv \lambda x. P$, $L \equiv P'[x := N']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $N \rightsquigarrow N'$.

| Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 1.6.4. \rightsquigarrow удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.

Доказательство: Пусть $M \rightsquigarrow M_1$, $M \rightsquigarrow M_2$. Проводим индукцию по определению $M \rightsquigarrow M_1$.

(1) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow M \equiv M_1$. Тогда положим $Z \equiv M_2$.

(2) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow (\lambda x. P)Q \rightsquigarrow P'[x := Q']$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Лемма 1.6.3 позволяет рассмотреть два подслучая:

- $M_2 \equiv (\lambda x. P'')Q''$, где $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. По предположению индукции существуют λ -выражения Z_P, Z_Q , такие, что

$$P' \rightsquigarrow Z_P, P'' \rightsquigarrow Z_P, Q' \rightsquigarrow Z_Q, Q'' \rightsquigarrow Z_Q.$$

Лемма 1.6.2 позволяет взять $Z \equiv Z_P[x := Z_Q]$ в качестве искомого (упражнение).

- $M_2 \equiv P''[x := Q'']$ — аналогично.

(3) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow PQ \rightsquigarrow P'Q'$, где $P \rightsquigarrow P'$, $Q \rightsquigarrow Q'$. Снова два подслучая:

- $M_2 \equiv P''Q''$, причём $P \rightsquigarrow P''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Тогда аналогично берём $Z \equiv Z_P[x := Z_Q]$.
- $P \equiv (\lambda x. P_1)$, $M_2 \equiv P_1''[x := Q'']$ и $P_1 \rightsquigarrow P_1''$, $Q \rightsquigarrow Q''$. Лемма 1.6.3 гарантирует, что $P' \equiv \lambda x. P_1'$, где $P_1 \rightsquigarrow P_1'$. Применяя предположение индукции, берём $Z = Z_{P_1}[x := Z_Q]$.

(4) $M \rightsquigarrow M_1 \Leftarrow \lambda x. P \rightsquigarrow \lambda x. P'$, где $P \rightsquigarrow P'$. Тогда $M_2 \equiv \lambda x. P''$. По предположению индукции возьмём $Z = \lambda x. Z_P$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.5. $\xrightarrow{\beta}$ — это транзитивное замкание \rightsquigarrow .

| Доказательство: Очевидно по определению. ■

Теорема 1.6.1. (Чёрча-Россера):

- (1) \rightarrow_{β} удовлетворяет свойству Ч.-Р.;
 (2) $M \equiv_{\beta} N \Rightarrow \exists Z : \left(M \rightarrow_{\beta} Z \right) \wedge \left(N \rightarrow_{\beta} Z \right)$.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие 1.6.1.1.

- (1) Если M имеет β -нормальную форму N , то $M \rightarrow_{\beta} N$.
 (2) M может иметь максимум одну нормальную форму.

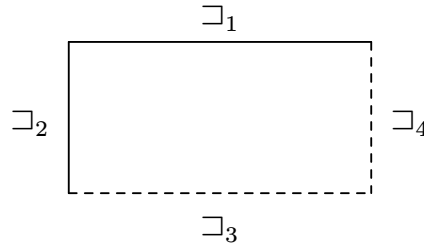
Доказательство:

- (1) Пусть $M \equiv_{\beta} N$, где N — β -нормальная форма. Тогда существует λ -выражение Z , такое, что $M \rightarrow_{\beta} Z$ и $N \rightarrow_{\beta} Z$ (Теорема 1.5.1). Однако раз N — нормальная форма, мы заключаем, что $N \equiv Z$ (Утверждение 1.5.1), и $M \rightarrow_{\beta} N$.
 (2) Пусть N_1, N_2 — β -нормальные формы выражения M . Тогда $N_1 \rightarrow_{\beta} Z$ и $N_2 \rightarrow_{\beta} Z$ для некоторого Z . Следовательно, $N_1 \equiv Z \equiv N_2$.

q.e.d. ■

Теперь мы перейдём к η -редукции.

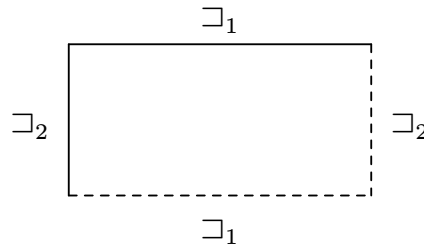
Определение 1.6.2. Пусть $\sqsubset_1, \sqsubset_2, \sqsubset_3, \sqsubset_4$ — бинарные отношения на множестве X . Следующая диаграмма,



означает « $\forall x, x_1, x_2 \in X : (x \sqsubset_1 x_1) \wedge (x \sqsubset_2 x_2), \exists z \in X : (x_2 \sqsubset_3 z) \wedge (x_1 \sqsubset_4 z)$ ».

Замечание 1.6.1. Свойство Чёрча-Россера можно переформулировать в этой нотации.

Определение 1.6.3. Пусть \sqsubset_1 и \sqsubset_2 — два бинарных отношения на X . Мы говорим, что \sqsubset_1 и \sqsubset_2 коммутируют, если



Замечание 1.6.2. Отношение \sqsubset обладает свойством Ч.-Р. $\Leftrightarrow \sqsubset$ коммутирует само с собой.

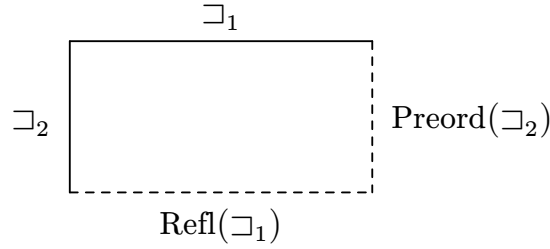
Утверждение 1.6.1. (лемма Хиндли-Росена): Пусть $\sqsubset_1, \sqsubset_2 \subset X \times X$ таковы, что

- (1) $CR(\sqsubset_1), CR(\sqsubset_2)$;
 (2) \sqsubset_1 и \sqsubset_2 коммутируют.

Тогда $Trans(\sqsubset_1 \cup \sqsubset_2)$ также обладает свойством Чёрча-Россера.

| Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 1.6.6. Пусть \sqsubset_1, \sqsubset_2 — бинарные отношения на множестве X . Допустим также, что



Тогда отношения $\text{Preord}(\sqsubset_1)$ и $\text{Preord}(\sqsubset_2)$ коммутируют.

| Доказательство: Диаграммный поиск (лень рисовать). ■

Лемма 1.6.7. $\xrightarrow[\eta]$ удовлетворяет свойству Чёрча-Россера.

Доказательство: Так как $\xrightarrow[\eta]{} = \text{Preord}(\xrightarrow[\eta]{}) = \text{Trans}(\text{Refl}(\xrightarrow[\eta]{}))$, достаточно доказать утверждение для отношения $\text{Refl}(\xrightarrow[\eta]{}) =: (\sim_\eta)$ (Лемма 1.6.1). Предположим теперь, что $M \sim_\eta M_1$ и $M \sim_\eta M_2$.

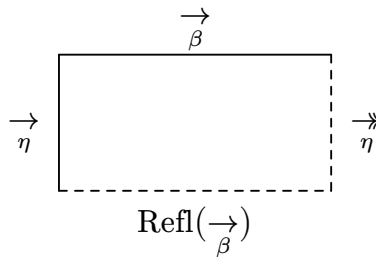
Без ограничения общности, допустим, что все три выражения M, M_1, M_2 различны (иначе очевидно). Индукция по определению $M \sim_\eta M_1$:

- (1) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow \lambda x. Px \sim_\eta P$. Тогда $M_2 = \lambda x. P'x$, где $P \sim_\eta P'$. Положим $Z \equiv P'$ и дело в шляпе.
- (2) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow KP \sim_\eta KP'$, где $P \sim_\eta P'$. Тогда если $M_2 \equiv K'P$, $K \sim_\eta K'$, то положим $Z \equiv K'P'$. Если же $M_2 \equiv KP''$, $P' \sim_\eta P''$, то воспользуемся предположением индукции: $\exists Z_P : P', P'' \sim_\eta Z_P$. Положим $Z = KZ_P$.
- (3) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow PK \sim_\eta P'K$, где $P \sim_\eta P'$. Аналогично с предыдущим случаем.
- (4) $M \sim_\eta M_1 \Leftarrow \lambda x. P \sim_\eta \lambda x. P'$, где $P \sim_\eta P'$.
 - (a) $M_2 \equiv \lambda x. P''$, $P \sim_\eta P''$. Тогда положим $Z \equiv \lambda x. Z_P$, где Z_P взято из предположения индукции.
 - (b) $P \equiv P_0x$, $M_2 \equiv P_0$. Тогда $P' \equiv P'_0x$, и мы можем положить $Z \equiv P'_0$.

q.e.d. ■

Лемма 1.6.8. $\xrightarrow[\beta]$ коммутирует с $\xrightarrow[\eta]$.

Доказательство: Лемма 1.6.6 сводит доказательство к следующей диаграмме:



Упражнение. ■

Теорема 1.6.2. (теорема Чёрча-Россера для $\beta\eta$ -редукции):

- (1) \rightarrow удовлетворяет свойству Чёрча-Россера;
- (2) $M = N \Rightarrow \exists Z : (M \rightarrow Z) \wedge (N \rightarrow Z)$.

| Доказательство: Упражнение. ■

Следствие 1.6.2.1.

- Если M имеет $\beta\eta$ -нормальную форму N , то $M \rightarrow N$;
- M может иметь максимум одну нормальную форму;
- Теория $\lambda\beta\eta$ согласованна;

- λ -выражение $\Omega = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ не имеет нормальной формы.

| Доказательство: Очевидно, применяя Утверждение 1.5.1. ■

1.7. Стандартная редукция

Определение 1.7.1.

(1) λ -выражение $M \in \Lambda$ называется *внешней нормальной формой*, если оно имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. x M_1 \dots M_m,$$

где $n, m ::= 0$.

(2) Если M имеет форму

$$M \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m, \quad n ::= 0, m ::= 1,$$

то выражение $(\lambda x. M_0) M_1$ называется *внешним редексом*.

(3) \rightarrow_h (соотв. \twoheadrightarrow_h) — редукция, в которой сокращаются только внешние редексы.

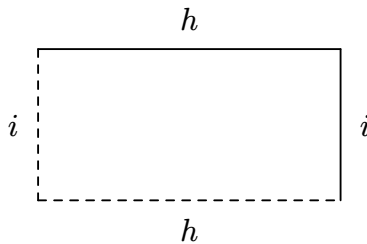
(4) Редекс Δ называется *внутренним*, если он не внешний.

(5) \rightarrow_i (соотв. \twoheadrightarrow_i) — редукция, в которой сокращаются только внутренние редексы.

Определение 1.7.2. Пусть M — λ -выражение. Редекс Δ_1 в M *левее* редекса Δ_2 , если первая « λ » в Δ_1 левее, чем первая « λ » в Δ_2 .

Лемма 1.7.1. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда существует $Z \in \Lambda$, такое, что $M \twoheadrightarrow_h Z \twoheadrightarrow_i N$.

Доказательство (эскиз): Ключ в том, что внешняя и внутренняя редукции коммутуют:



Редукция $M \twoheadrightarrow N$ представляется как

$$M \twoheadrightarrow_h M_1 \twoheadrightarrow_i M_2 \twoheadrightarrow_h M_3 \twoheadrightarrow_i \dots \twoheadrightarrow_i N.$$

Переставляя редукции, получаем искомое разбиение. ■

Определение 1.7.3. Пусть σ — это редукционная последовательность, то есть

$$\sigma : M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} M_2 \xrightarrow{\Delta_2} \dots$$

σ называется *стандартной*, если $\forall i, \forall j < i: \Delta_i$ — не результат сокращения редекса, находящегося левее Δ_j . Стандартная редукция обозначается $M \twoheadrightarrow_s N$.

Теорема 1.7.1. Пусть $M, N \in \Lambda$ и $M \twoheadrightarrow N$. Тогда $M \twoheadrightarrow_s N$.

Доказательство: Имеем $M \twoheadrightarrow_h Z \twoheadrightarrow_i N$ для какого-то $Z \in \Lambda$. Индукция по длине выражения N .

(1) $N = x \in V$. Тогда $Z \equiv x$ и доказательство завершено.

(2) $N \equiv \lambda x_1, \dots, x_n. N_0 N_1 \dots N_m$, где $n + m > 0$. Тогда Z должно иметь форму

$$\lambda x_1, \dots, x_n. Z_0 Z_1 \dots Z_m,$$

где $Z_i \twoheadrightarrow N_i$ при $0 \leq i < m$. По предположению индукции имеем $Z_i \twoheadrightarrow_s N_i$. Тогда $Z \twoheadrightarrow_s N$ и доказательство завершено. ■

1.8. Редукционные стратегии

Определение 1.8.1. (редукционная стратегия): Отображение $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ называется *редукционной стратегией*, если для любого $M \in \Lambda$ выполняется редукция

$$M \twoheadrightarrow F(M).$$

Определение 1.8.2.

(1) Пусть F — редукционная стратегия. F -редукционный путь выражения M — это последовательность

$$M, F(M), F^2(M), \dots$$

(2) F называется *нормализующей*, если для любого $M \in \Lambda$, имеющего нф, $F^n(M)$ находится в нормальной форме для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.8.3. Крайняя левая редукционная стратегия, F_l , определяется следующим образом:

- $F_l(M) = M$, если M в нормальной форме.
- $F_l(M) = M'$, если $M \xrightarrow{\Delta} M'$, где Δ — крайний левый редекс в M .

Теорема 1.8.1. (о нормализации): F_l — нормализующая стратегия.

Доказательство: Пусть выражение M имеет нормальную форму N . Тогда по теореме Чёрча-Россера имеем $M \twoheadrightarrow N$. Тогда по предыдущей теореме есть стандартная редукционная последовательность

$$\sigma : M \equiv M_0 \xrightarrow{\Delta_0} M_1 \xrightarrow{\Delta_1} \dots \xrightarrow{\Delta_{n-1}} M_n \equiv N.$$

Утверждается, что σ — это редукционный путь стратегии F_l . Допустим противное. Тогда на каком-то шагу редекс Δ_i — не крайний левый, а значит он уже не сможет сократиться в дальнейшем. Тогда N — не нормальная форма. Противоречие. ■

2. λ -представимость

2.1. Основные понятия

Определение 2.1.1. Пусть $A \equiv \lambda x, y. y(xxy)$. Комбинатор $\Theta \equiv AA$ называется *комбинатором Тьюринга*.

Упражнение Доказать, что Θ — комбинатор фиксированной точки, то есть $\Theta F \twoheadrightarrow F(\Theta F)$ для любого $F \in \Lambda$.

Определение 2.1.2.

- (1) $\text{true} \equiv \mathbf{T} \equiv \lambda x, y. x$
- (2) $\text{false} \equiv \mathbf{F} \equiv \lambda x, y. y$
- (3) Пусть $B \in \Lambda$. Тогда запись

$$\text{if } B \text{ then } M \text{ else } N$$

обозначает λ -выражение BMN .

Определение 2.1.3. Пусть $M, N \in \Lambda$. Упомянутая пара $[M, N]$ определяется как

$$[M, N] \equiv \lambda z. zMN.$$

Определим также $(P)_0 \equiv P\mathbf{T}$, $(P)_1 \equiv P\mathbf{F}$.

Упражнение Показать, что $([M, N])_0 \rightarrow M$, $([M, N])_1 \rightarrow N$. Правда ли, что $[(P)_0, (P)_1] = P$?

Определение 2.1.4. (конечные кортежи):

$$[M] \equiv M, \quad [M_0, M_1, \dots, M_{n+1}] \equiv [M_0, [M_1, \dots, M_{n+1}]],$$

$$\langle M_0, M_1, \dots, M_n \rangle \equiv \lambda z. z M_0 M_1 \dots M_n$$

Определение 2.1.5.

$$(1) \quad \pi_i^n \equiv \lambda z. z \mathbf{F}^{\sim i} \mathbf{T}, \quad 0 \leq i < n,$$

$$\pi_n^n \equiv \lambda z. z \mathbf{F}^{\sim n}$$

$$(2) \quad \mathbf{P}_i^n \equiv \lambda z. z(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n. x_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

Упражнение Показать, что

$$\pi_i^n [M_0, M_1, \dots, M_n] \rightarrow M_i, \quad \mathbf{P}_i^n \langle M_0, M_1, \dots, M_n \rangle \rightarrow M_i$$

Теорема 2.1.1. (обобщённая теорема о неподвижной точке): Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n \in \Lambda$. Тогда существуют выражения $X_1, X_2, \dots, X_n \in \Lambda$, такие, что

$$X_1 = F_1 X_1 X_2 \dots X_n,$$

$$X_2 = F_2 X_1 X_2 \dots X_n,$$

$$\vdots$$

$$X_n = F_n X_1 X_2 \dots X_n.$$

Доказательство: Определим выражения

$$M \equiv \lambda f, x. f(\pi_1^n x)(\pi_2^n x) \dots (\pi_n^n x),$$

$$F \equiv \lambda x. \langle M F_1 x, M F_2 x, \dots, M F_n x \rangle.$$

Тогда по теореме о неподвижной точке найдётся выражение $X \in \Lambda : X = F X$. Наконец, положим $X_i \equiv \pi_i^n X$. Действительно,

$$X_i \equiv \pi_i^n X = M F_i X = F_i X_1 X_2 \dots X_n,$$

q.e.d. ■

Определение 2.1.6. Пусть $M, N \in \Lambda$. Композиция $M \circ N$ определяется как $\lambda x. M(Nx)$, где $x \notin \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N)$.

Определение 2.1.7.

(1) Числа Барендрегта (или просто λ -числа) — это следующая последовательность λ -выражений:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \mathbf{I}, \quad \ulcorner n + 1 \urcorner \equiv [\mathbf{F}, \ulcorner n \urcorner]$$

Заметим, что все λ -числа — различные нормальные формы.

(2) Определим

$$\mathbf{S}^+ \equiv \lambda z. [F, z], \quad \mathbf{P}^- \equiv \lambda z. z \mathbf{F}, \quad \mathbf{Zero} \equiv \lambda z. z \mathbf{T}$$

Упражнение $\mathbf{S}^+(\ulcorner n \urcorner) = \ulcorner n + 1 \urcorner$, $\mathbf{P}^-(\ulcorner n + 1 \urcorner) = \ulcorner n \urcorner$, $\mathbf{Zero}(\ulcorner 0 \urcorner) = \mathbf{T}$, $\mathbf{Zero}(\ulcorner n + 1 \urcorner) = \mathbf{F}$

Определение 2.1.8. Пусть $P : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ — предикат на натуральных числах. Запись

$$\mu m [P(m)]$$

обозначает наименьшее число m , такое, что выполняется $P(m)$, если такое число существует. В противном случае $\mu m [P(m)]$ неопределено.

2.2. Рекурсивные функции

Определение 2.2.1.

- (1) Числовая функция — это отображение $\mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$, для некоторого $p \in \mathbb{N}$.
- (2) Числовая функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$ называется λ -представимой, если существует выражение $F \in \Lambda$, такое, что

$$\forall n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}_0 : \quad F \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, n_2, \dots, n_p) \urcorner$$

- (3) Если $\vec{n} = n_1, n_2, \dots, n_p$, то положим

$$\ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner n_1 \urcorner, \ulcorner n_2 \urcorner, \dots, \ulcorner n_p \urcorner.$$

Определение 2.2.2. (первичные функции): Функции U_i^p , S^+ , Z называются *первичными*:

$$U_i^p(n_0, n_1, \dots, n_p) = n_i, \quad 0 \leq i \leq p,$$

$$S^+(n) = n + 1, \quad Z(n) = 0.$$

Определение 2.2.3. Пусть \mathcal{A} — некий класс числовых функций.

- (1) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно суперпозиции*, если для любых $\chi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \psi_2(\vec{n}), \dots, \psi_m(\vec{n}))$$

лежит в \mathcal{A} .

- (2) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно примитивной рекурсии*, если для любых $\chi, \psi \in \mathcal{A}$, функция

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$

$$\varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

лежит в \mathcal{A} .

- (3) \mathcal{A} называется *замкнутым относительно минимизации*, если для любой функции $\chi \in \mathcal{A}$:
- $\forall \vec{n} \exists t \quad \chi(\vec{n}, t) = 0$, функция

$$\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0]$$

лежит в \mathcal{A} .

- (4) Класс \mathcal{R} *рекурсивных функций* — это наименьший класс числовых функций, который содержит все первичные функции, а также замкнут относительно суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Лемма 2.2.1. Все первичные функции λ -представимы.

| Доказательство: Очевидно. ■

Лемма 2.2.2. λ -представимые функции замкнуты относительно суперпозиции.

| Доказательство: Упражнение. ■

Лемма 2.2.3. λ -представимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.

| Доказательство: Пусть функция φ задаётся соотношениями

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n}),$$

$$\varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n}),$$

где χ и ψ λ -представлены выражениями G и H соответственно. Рассмотрим выражение

$$X \equiv \lambda f. \lambda x, \vec{y}. (\text{if } \mathbf{Zero} \ x \ \text{then} \ G\vec{y} \ \text{else} \ H(f(\mathbf{P}^-x)\vec{y})(\mathbf{P}^-x)\vec{y}).$$

λ -выражение $F \equiv \mathbf{Y}X$ представляет функцию φ (упражнение). ■

Определение 2.2.4. Пусть $P \in \Lambda$. Определим

$$\begin{aligned} H_P &\equiv \Theta(\lambda h, z. \text{if } Pz \ \text{then} \ z \ \text{else} \ h(\mathbf{S}^+z)), \\ \mu P &\equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner. \end{aligned}$$

Утверждение 2.2.1. Пусть $P \in \Lambda$ таково, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ либо $P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}$, либо $P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{F}$. Тогда:

- (1) $H_P z \rightarrow \text{if } Pz \ \text{then} \ z \ \text{else} \ H_P(\mathbf{S}^+z)$;
- (2) $\mu P = \ulcorner \mu n [P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] \urcorner$ (если минимум существует).

Доказательство:

- (1) Упражнение.
- (2) Допустим, что $\mu n [P \ulcorner n \urcorner = \mathbf{T}] = m$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} H_P \ulcorner m \urcorner &= \ulcorner m \urcorner, \\ \forall n < m : H_P \ulcorner n \urcorner &= H_P \ulcorner n + 1 \urcorner = H_P \ulcorner n + 2 \urcorner = \dots = H_P \ulcorner m \urcorner = \ulcorner m \urcorner. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\mu P \equiv H_P \ulcorner 0 \urcorner = \ulcorner m \urcorner$,

q.e.d. ■

Лемма 2.2.4. λ -представимые функции замкнуты относительно минимизации.

Доказательство: Пусть

$$\varphi(\vec{n}) = \mu t [\chi(\vec{n}, t) = 0],$$

где $G \in \Lambda$ представляет функцию χ . Определим $F \in \Lambda$ как

$$F\vec{x} = \mu(\lambda y. \mathbf{Zero} (G\vec{x}y)).$$

По предыдущему утверждению, F представляет функцию φ . ■

Следствие Все рекурсивные функции λ -представимы.

Лемма 2.2.5. Пусть φ λ -представляется выражением F . Тогда для всех $\vec{n}, m \in \mathbb{N}_0$

$$\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner$$

Доказательство:

- (\Rightarrow) Очевидно по определению.
- (\Leftarrow) Предположим, что $F \ulcorner \vec{n} \urcorner = \ulcorner m \urcorner$. Тогда $\ulcorner \varphi(\vec{n}) \urcorner = \ulcorner m \urcorner$. Так как λ -числа — это различные нормальные формы, по теореме Чёрча-Россера имеем $\varphi(\vec{n}) = m$,

q.e.d. ■

Теорема 2.2.1. (Клини): Функция $\varphi : \mathbb{N}_0^p \rightarrow \mathbb{N}_0$ рекурсивна $\Leftrightarrow \varphi$ λ -представима.

Доказательство (эскиз):

- (\Rightarrow) Очевидно.
 - (\Leftarrow)
-