Лист №2. λ-Представимость и неразрешимость

λ-исчисление, 2024

2.1. Пусть $M_1, M_2, ..., M_k$ и $N_1, N_2, ..., N_k$ — два набора λ-выражений. Покажите, что

$$\langle M_1, M_2, ..., M_k \rangle = \langle N_1, N_2, ..., N_k \rangle \iff M_1 = N_1, M_2 = N_2, ..., M_k = N_k$$

2.2. Постройте λ-выражения $A, B \in \Lambda$ таким образом, чтобы $Ax = A$ и $Bx = xB$.

2.3. Постройте выражения $F, \pi \in \Lambda^0$, такие, что:
- $\forall n \in \mathbb{N} : F \ulcorner n \urcorner xy = xy^{\sim n}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \leqslant n : \pi \ulcorner n \urcorner \ulcorner i \urcorner = \pi_i^n$

2.4.
- Постройте λ-выражение **Mult**, такое, что **Mult** $\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \ulcorner mn \urcorner$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$.
- Постройте λ-выражение **Fac**, такое, что **Fac** $\ulcorner n \urcorner = \ulcorner n! \urcorner$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

2.5. *Элементарная функция Аккермана* φ определяется следующими соотношениями:

$$\varphi(0, n) = n + 1,$$
$$\varphi(m + 1, 0) = \varphi(m, 1),$$
$$\varphi(m + 1, n + 1) = \varphi(m, \varphi(m + 1, n)).$$

Покажите, что φ рекурсивна, и найдите λ-выражение, которое её λ-представляет.

2.6. Постройте функцию предшествующего элемента для чисел Чёрча: $\mathbf{P}_c^-$ такое, что $\mathbf{P}_c^- c_{n+1} = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

2.7. Допустим, что каждый символ в упрощённой записи λ-выражения (переменная, скобка, точка, запятая, лямбда) занимает 0.5см пространства на бумаге. Найдите λ-выражение длиной менее 25см, имеющее нормальную форму длиной не менее $10^{10^{150}}$ световых лет (скорость света составляет $3 \cdot 10^{10}$ см/сек.)

2.8. Пусть

$$\pounds = \lambda a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,s,t,u,v,w,x,y,z,r.\ r(thisisafixedpointcombinator),$$
$$\$ = \pounds.$$

Покажите, что \$ — комбинатор неподвижной точки.

2.9. Докажите, что $M \in \Lambda$ — комбинатор неподвижной точки $\iff M = (\mathbf{SI})M$.

2.10. Пусть f, g — λ-выражения. Положим $X \equiv \mathbf{\Theta}(f \circ g)$. Докажите, что $g(X)$ — неподвижная точка выражения $g \circ f$.

2.11. Положим $\mathbf{Y}_M \equiv \lambda f.\ WWM$, где $W \equiv \lambda x,z.\ f(xxz)$. Докажите, что $\mathbf{Y}_M$ — комбинатор неподвижной точки для любого $M \in \Lambda$.

2.12. Докажите, что $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y}_N \Rightarrow M = N$. ($\mathbf{Y}_M$ и $\mathbf{Y}_N$ определены как в предыдущей задаче)

2.13.
- Пусть $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ — рекурсивная функция. Постройте последовательность $X_0, X_1, ...$ λ-выражений, такую, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется $X_n X_m = X_{f(n,m)}$.
- Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, и пусть $\times$ — бинарная операция на X. Постройте λ-выражения $X_1, X_2, ..., X_n$ таким образом, чтобы выполнялось $X_i X_j = X_k \iff x_i \times x_j = x_k$ при всех i, j, k.

2.14. Пусть d — числовая система. Докажите, что d адекватна тогда и только тогда, когда

$$\exists F, F^{-1} \in \Lambda : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad (F \ulcorner n \urcorner = d_n) \wedge (F^{-1} d_n = \ulcorner n \urcorner).$$

2.15. Пусть $d_0, d_1, \ldots$ — адекватная числовая система. Положим $d'_n \equiv \mathbf{YC}d_n$, где $\mathbf{C} \equiv \lambda x,y,z.\ x(zy)$. Покажите, что все рекурсивные функции одного аргумента $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ λ-представляются с помощью d'.
(подсказка: рассмотрите $F' \equiv \lambda x.\ xF$)

2.16. Пусть $f_0 \equiv \lambda x,y,z.\ y$ и $\mathbf{S}^+_f \equiv \lambda x.\ \langle x \rangle$. Покажите, что функции $\mathbf{P}^-_f \equiv \langle I \rangle$ и $\mathbf{Zero}_f \equiv \lambda x,y,z.\ x(\lambda x',y',z'.\ z')yz$ превращают $\left(f_0, \mathbf{S}^+_f\right)$ в адекватную числовую систему.

2.17. Рассмотрим последовательность $a_n \equiv \mathbf{K}^n\mathbf{I}$. Покажите, что a — **не** числовая система.

2.18. Покажите, что множество $\{M \in \Lambda \mid M = \mathbf{I}\}$ — **не** рекурсивное.

2.19. Докажите, что существует λ-выражение M, такое, что $M = \ulcorner M \urcorner$.
(подсказка: обратите внимание на доказательство теоремы Скотта-Карри о неразрешимости)

2.20. Докажите *вторую теорему о неподвижной точке:* $\forall F \in \Lambda : \exists X \in \Lambda :\ F\ulcorner X \urcorner = X$.