Итоговая работа, II вариант

λ-исчисление, 2024

На 3:

1. Дайте определение *комбинатора неподвижной точки.* Приведите примеры. Докажите, что выражение $\mathbf{Y}_M \equiv \lambda f.\ (\lambda x{,}y.\ f(xxy))(\lambda x{,}y.\ f(xxy))M$ является комбинатором неподвижной точки для любого $M \in \Lambda$.

2. Дайте определение *чисел Барендрегта* и *чисел Чёрча.* Постройте λ-выражения H и H^{-1}, которые переводят одни в другие: $H \ulcorner n \urcorner = c_n,\ \ H^{-1} c_n = \ulcorner n \urcorner$.

3. Дайте определение λ-представимости числовой функции. Определите функцию *суперпозиции* для числовых функций $\chi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$.

4. Покажите, что функция $\mathbf{A}_* \equiv \lambda x{,}y{,}z.\ x(yz)$ задаёт умножение на числах Чёрча: $\mathbf{A}_* c_n c_m = c_{nm}$.

На 4:

1. Докажите, что класс λ-представимых функций замкнут относительно минимизации.

2. Определите понятие *адекватной числовой системы.* Докажите, что числовая система $d = (d_0, \mathbf{S}_d^+)$ адекватна в том и только том случае, когда она имеет оператор предшествующего элемента $\mathbf{P}_d^-$: $\ \mathbf{P}_d^-\, d_{n+1} = d_n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

3. Докажите *обобщённую теорему о неподвижной точке:* $\forall F_1, F_2, ..., F_n \in \Lambda :$ $\exists X_1, X_2, ..., X_n \in \Lambda :$

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 X_1 X_2 ... X_n, \\ X_2 &= F_2 X_1 X_2 ... X_n, \\ &\vdots \\ X_n &= F_n X_1 X_2 ... X_n. \end{aligned}$$

На 5:

1. Докажите теорему Скотта-Карри о неразрешимости.

2. Покажите, что следующие две последовательности являются адекватными числовыми системами:
   [a] $d = (\mathbf{Y}, \lambda x.\ [x, P])$, где $P \in \Lambda$ произвольно;
   [b] $e = (\mathbf{K}, \lambda x.\ [x, \mathbf{Y}])$.
   (подсказка: для d используйте $\mathbf{Zero}_d \equiv [\mathbf{K}(\mathbf{KK}), \mathbf{I}]$)

3. Покажите, что функция $\mathrm{id} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ \mathrm{id}(n) = n$ является рекурсивной. Покажите, что всякий многочлен

$$P : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,$$
$$P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_k n^k,$$

   с коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}_0$, — рекурсивная функция.