ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...) $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3} \cdot \sin(x - \pi) = 0$ $\qquad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$

$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1)$

$2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x$

1) $\sin x = 0$

$x = \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $\qquad 30^\circ = \pi/6$

$x = \pm \pi/6 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\pi/2$, $\sin x$, x, π, $\pi/6$, $\cos x$, $0 \sim 2\pi$

$-\pi/2$, $\sin x$, 0, $\pi/2$, π, 2π, $\cos x$

14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$

S, NS, N, AN, M, K, L, A, B, C

$2AN = 3NS$

$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?

E, S, N, 3, A, 1, M, 1, B

E', S, 120°, K, 2, 3, 60°, C, L, B

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha + \beta < \pi/2$

h_2, $\pi/2$, α, $\alpha+\beta > \pi/2$, β, h_1

a, b, h_2, h_1, γ, a', b', $c = a' + b'$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\gamma = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{h_1}{b} + \frac{b'}{b}\cdot\frac{h_1}{a}$

$\sin\alpha \quad \cos\beta \quad \sin\beta \quad \cos\alpha$

(Д/З) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta < \pi$, $\alpha+\beta > \pi$, $\alpha+\beta > 3\pi/2$ ...) $3\pi/2$, 2π

Вариант 2 — формулы приведения

1. $\boxed{\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha}$

$① = ②$ $\quad \boxed{\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha}$

$\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha \qquad \sin(\alpha - \pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$, $\quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

2. sin — нечётная, cos — чётная

$\sin(-x) = -\sin x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \cos(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$-\alpha = \beta \quad \sin(\beta + \pi/2) = \cos(\beta)$

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

2π — период (360°) radian $\quad \pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega\ \text{rad}\ s^{-1}$

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha, \beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2,\ 0 < \gamma < \pi/2$

$\gamma + \beta = \beta + \alpha - \pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma + \beta + \pi/2) =$

$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$

$= \cos(\alpha - \pi/2)\cos\beta - \sin(\alpha - \pi/2)\sin\beta =$

$\sin\alpha \qquad -\cos\alpha$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$A/2 \quad t_2 = t_0 \quad t_1 = 0$

simple harmonic motion

$T = 1.8\,s$

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot(t - t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{A}{2}$

$x(t) = R\cdot\cos(\omega(t - t_1))$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3\,s$

Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во $\quad A$, $x \in A$ "x лежит в A"

2) Всё — множество $\quad 0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$, $3 = \ldots$

3) Бесконечности $\quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — „самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами.

$\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ (аксиома выделения)

св-во

$B \in A \Rightarrow B \notin B$

3) Парадокс Рассела $\quad A = \{x \mid x \notin x\}$ $\quad A \in A \Rightarrow A \notin A$?!!

$A \notin A \Rightarrow A \in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр: A, B — мн-ва

$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Предикаты и кванторы

$x \quad P(x)$ — предикат $\quad P(x) \wedge Q(x)$ — конъюнкция

$P(x) \vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\quad \forall x \in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\quad \exists x \in A: P(x) = \bigvee_{x \in A} P(x)$

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A} \neg P(x)$

$\neg(\forall x \in A\ P(x)) = \exists x \in A: \neg P(x)$

$\neg(\exists x \in A\ P(x)) = \forall x \in A\ \neg P(x)$

Опр: A, $\quad A^c = U \setminus A$ $\qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ — формулы де Моргана

—"— $\cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f)$: $\forall x \in A: \exists! y \in B: y = f(x)$

обл. отпр. $\quad$ обл. приб. $\quad$ единственный $\quad y$ н. образом x относительно f.

A, B

2) (Новое) $\quad A, B. \quad A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f \subset A \times B: \ \forall x \in A\ \exists! y \in B: (x,y) \in f \quad (y = f(x))$

Опр 1) $f: A \to B$ н. инъективной, если $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

отпр. $\quad$ обл. приб.

н. сюръективной, если $\forall y \in B\ \exists x \in A: y = f(x)$

н. биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n$

Опр: $f: A \to B$, $g: B \to A$. g н. обратной к f $(g = f^{-1})$, если

1) $\forall x \in A: \ x = g(f(x))$

2) $\forall y \in B: \ y = f(g(y))$

Теорема: $f: A \to B$. $\quad f$ — обратима $(\exists f^{-1}) \Longleftrightarrow f$ — биективна

Д-во: $\Rightarrow$: пусть $\exists$ f — обр. $\exists g: B \to A$ т.ч. 1) и 2)

1. f — сюр. $\quad y \in B \quad$ рассмотрим $x = g(y) \in A \quad f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow f$ — сюр

2. f — ин. $\quad$ пусть $x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2)$. $\quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\overset{1)}{\|} \qquad \overset{1)}{\|}$

$x_1 \qquad x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — ин.

$\Rightarrow f$ — би.

$\Leftarrow$: $\exists f$ — биект. $\quad$ Хотим $g: B \to A$: 1) и 2)

пусть $y \in B$ $\quad f$ — сюр. $\Rightarrow \exists! x \in A: y = f(x)$. $\quad g(y) := x$

f — ин. $\quad$ 1) $\forall x \in A \ \ g(f(x)) = x$ ✓

2) $\forall y \in B \ \ f(g(y)) = y$ ✓

Задача: $\exists$? A, B, C: 1) $A \cap B \neq \varnothing$

2) $B \cap C = \varnothing$

3) $(A \cap B) \setminus C = \varnothing \Longleftrightarrow (A \cap B) \cap C^c = \varnothing$

$A \cap B \subset C$ $\qquad X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$

$B \cap C$

$\cup$

$A \cap (B \cap C)$ $\qquad \{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$

$\|$ $\qquad X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

$(A \cap B) \cap C$ $\qquad Y^c = U \setminus Y$

$\|$ $\qquad X \setminus Y = X \cap Y^c$

$A \cap B$ $\qquad$ "$x \cdot (\neg y)$"

$\neq$

$\varnothing$

$B \cap C \neq \varnothing$?!!

$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A\ a \in B$ $\qquad$ 1) $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$

2) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow B \cap C \neq \varnothing$

$\left.\begin{matrix} A \subset B \\ A \neq \varnothing \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \neq \varnothing$

$A \cup B = B$

$\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A \subset U$

$\chi_A: U \to \{0,1\}$

$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, & u \notin A \\ 1, & u \in A \end{cases}$ $\qquad A \leftrightarrow \chi_A$

$\hookrightarrow A = \{u \in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B \subset U \quad \chi_A, \chi_B$

$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases} 1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1 \\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0 \end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$

$1 \quad 1 \qquad 1 = 1 \qquad 1 \text{ xor } 1 = 0$

$\chi_{A\Delta B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u) \longleftarrow$ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^c}(u) = \chi_A(u)\cdot\underbrace{\chi_{B^c}(u)}_{1-\chi_B(u)} = \chi_A(u)(1 - \chi_B(u))$

$\int_S f(x)$ $\qquad A \subset S$ $\qquad \int_A f(x) = \int_S f(x)\cdot\chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

$F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)

$A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$,

$|A| = n$

мощность

$|A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1, 2, \ldots\}|$ — ???; "∞"

$A \subset U$, $|A| = n \in \mathbb{N}$ $\qquad 2^A = P(A) = \{B \subset U \mid B \subset A\}$ — булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \ldots \ a_n$

$f: 2^A \to \{$выборов$\}$ $\quad$ 2 варианта $\qquad B \subset A$

— биект. $\qquad \varnothing \subset A$

$|2^A| = |\{$выборов$\}|$

2^n

Теорема: $A, B \subset U$, $f: A \to B$ — биективна

(A, B — кон.) $\quad$ ($\Leftrightarrow$ обратимая)

$\Rightarrow |A| = |B|$

A, B

Задача $|A| = 100$ $\qquad X = \{B \subset A \mid |B| = 43\}$ $\qquad |X| \leq |Y|$

$Y = \{B \subset A \mid |B| = 57\}$

$43 + 57 = 100$ $\qquad B \subset A: |B| = 43 \quad B \in X$

$B' = A \setminus B \quad |B'| = 57 \quad B' \in Y$

$f: X \to Y \quad f(B) = A \setminus B$ $\qquad f$ и g обратные

$g: Y \to X \quad g(B) = A \setminus B$

$|B| = 57$ $\qquad f$ — обратимая, биективная

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ $\qquad |X| = C_{100}^{43}$

$\|$

$|Y| = C_{100}^{57}$ $\qquad (C_n^k = C_n^{n-k})$

Задача $\quad A \subset U$ (кон.), $A \neq \varnothing$ $\qquad E(A) = \{B \subset A \mid |B| \vdots 2\} = E \subset 2^A$

$A = \{1,2,3\}$ $\qquad O(A) = \{B \subset A \mid |B| \not\vdots 2\}$

$E(A) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ $\quad$ (!) $|E(A)| = |O(A)|$ $\qquad E: Set \to Set$

$A \mapsto E(A)$

$a \in A$ $\qquad f: E(A) \to O(A)$ $\qquad B_1 \neq B_2 \in E(A)$

$\Rightarrow f(B_1) \neq f(B_2)$

$B \in E(A)$ $\qquad B_1, B_2, f(B_1), f(B_2)$

$|B| \vdots 2$ $\quad$ 1) $a \in B \quad |B \setminus \{a\}| \not\vdots 2$

$\|$

$|B| - 1 \qquad f(B) = B \setminus \{a\}$

2) $a \notin B \quad f(B) = B \cup \{a\} \quad |f(B)| \not\vdots 2$

Упр (!) f — сюр., ин.

или $\quad g: O(A) \to E(A)$: $\ f(g(B)) = B$, $\ g(f(B)) = B$, $\ \forall B$

$g = f'$, $\quad f': O(A) \to E(A)$ $\qquad \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad \varphi(3) = 1$

$\varphi(n) = \begin{cases} 0, & n \vdots 2 \\ 1, & n \not\vdots 2 \end{cases}$

1) $\forall B \in O(A)$ $\quad f(f'(B)) = B$ ✓

пусть $B \in O(A)$ $\quad$ 1. $a \in B$ $\quad f'(B) = B \setminus \{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B \setminus \{a\}}_{a \notin}) = (\overbrace{B \setminus \{a\}}^{C}) \cup \{a\} = B$

$f(C) = \begin{cases} C \setminus \{a\}, & a \in C \\ C \cup \{a\}, & a \notin C \end{cases}$

2. $a \notin B$ $\quad f'(B) = B \cup \{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B \cup \{a\}}_{a\in}) = (B \cup \{a\}) \setminus \{a\} = B$

2) $\forall B \in E(A)$ $\quad f'(f(B)) = B$ — упр

$\Rightarrow f'$ — обр. к f $\qquad E(A) \underset{f'}{\overset{f}{\rightleftarrows}} O(A)$

$\Rightarrow |E(A)| = |O(A)|$

Задача (!) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$

$|A| = n$ $\qquad C_n^k = |\{B \subset A \mid |B| = k\}|$

$\underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^n}_{|E(A)|} \underbrace{- C_n^1 - C_n^3 - C_n^5 - \ldots - C_n^{n-1}}_{-|O(A)|} = 0$ $\quad$ ($n \vdots 2$)

Задача $\quad (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$\|$

$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n} = \sum \alpha_j a^i b^j =$

$a^2 b^{n-2}$

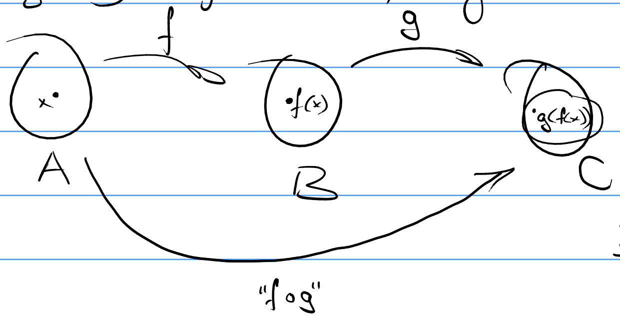
b^n

$= C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ — упр (через мощности мн-в)

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{B \subset A \mid |B| = k\}|$, $\quad |A| = n \qquad |2^A| = 2^n$

Опр (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$



композиция f и g

$\underbrace{(g \circ f)}_{h}: A \to C$

$a \in A$ $\quad \underset{g \leftarrow f}{(g\circ f)}(a) = \underset{g \leftarrow f}{g(f(a))}$

Зам "$f \circ g$" существует

Диаграммы $\to$ $f \circ g$

Алгебраич. запись $\to$ $g \circ f$

$(g(f(a)))$

$a \in A$ $\quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

Опр A, B — мн-ва. A и B Ⓝ равномощными, если $\exists f: A \to B$: f — биективна

Примеры $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $\quad f: A \to B$

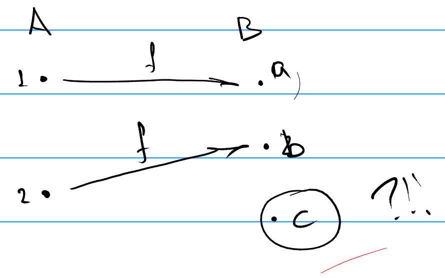
$f(1) = 2$ — ин.

— сюр. $(\forall b \in B \ \exists a \in A: b = f(a))$

$(f(A) = B)$

$\Rightarrow f$ — биект $\Rightarrow |A| = |B|$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ $\quad |A| \neq |B|$

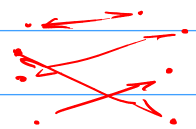


$\underset{\text{би}}{f}: A \to B$

$a = f(1)$

? $b = f(1)$?

$\Rightarrow \underset{\text{би}}{f}: A \to B$

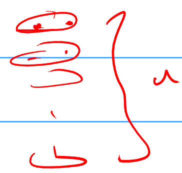


— очевидно

$\Leftarrow |A| = |B| = n$

Утв. A, B — кон. $\underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A \to B} \Leftrightarrow |A| = |B|$

числа

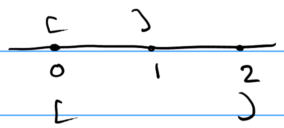


— очевидно

Д-во Упражнение

Пример $[0,1]$ равн. $[0,2]$ $\quad ([0,1] \cong [0,2])$

равномощность



$f: [0,1] \to [0,2]$

$f(x) = 2x$ $\quad x_1, x_2 \in [0,1]$ $\quad \underline{f(x_1) = f(x_2)}$

$x_1 = x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $x = y/2 \in [0,1]$ $f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ – сюр.
$\Rightarrow f$ – би.

$g : [0,2] \to [0,1]$ f и g — обратные
$g(y) = y/2$ $g = f^{-1}$

Пример: $(0,1) \cong (1, +\infty)$ $f : (0,1) \to (1,+\infty)$
$f(x) = 1/x$ ← би? обр?

Упр: f — биективна (через обратную)

$g : (1,+\infty) \to (0,1)$
$g(y) = 1/y$
$x \in (0,1)$
$g(f(x)) = g(1/x) = 1/(1/x) = x$
$y \in (1,+\infty)$ $f(g(y)) = f(1/y) = 1/(1/y) = y$
$\Rightarrow f$ и g – обратные
$\Rightarrow f$ – биективна
$\Rightarrow (0,1) \cong (1,+\infty)$

Опр A, B — мн-ва. $A^B := \{ f \mid f : B \to A \}$

$B \xrightarrow{f} A$

A, B – кон. $|A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$
$|A| = m$ $a_1, a_2, \ldots, a_m$

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$$
$$\| \quad |A^B|$$

Пример $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0,1,2,0,2,3,3,3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов A

$0,1,1,1,0,0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1},\underbrace{0,0}_{0},\underbrace{1,1}_{3},\underbrace{0,1}_{1},\underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1,0,3,1,0, \ldots$

$\varphi^{-1} : \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ φ и φ^{-1} — обратные
$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$2,0,1,3,3,0,0,1,2, \ldots$
$1,0\ 0,0\ 0,1\ 1,1\ 1,1 \longrightarrow 1,0,0,0,0,1,1,1,1, \ldots$

Опр A (мн-во) наз. счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Опр: A (н) не более чем счётным, если A конечно или счётно

Утв: A, B — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс
$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1
1) A — нбчс $\Rightarrow$ $(B \subset A \Rightarrow B$ — нбчс$)$
2) A — беск. $\Rightarrow \exists B \subset A : B$ счётно
3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, A_i — нбчс $\Rightarrow \bigcup\limits_i A_i$ — нбчс

Д-во 1) $A: a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
$\checkmark \ \checkmark \ \times \ \checkmark \ \dots$
$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \dots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
$B = \{4, 6, 8\} \subset A$
$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \dots$
$\checkmark \checkmark \checkmark$
$B = \{8, 10, 12, \dots\}$
$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \underbrace{8, 10, 12, \dots}_{B}$

2) $b_1 \in A$
$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.
$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.
$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$
$\vdots$
$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \dots b_n\}$ — беск.
$\vdots$
$b_1, b_2, b_3, \dots$, $b_k \in A, \ \forall k \in \mathbb{N}$
$B = \{b_1, b_2, \dots\}$ — счётное
$\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ A_i — нбчс (!) $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

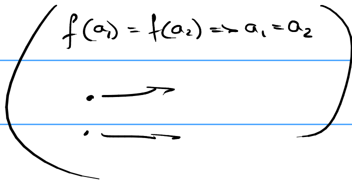
$A_1 = a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \dots$
$A_2 = a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \dots$
$A_3 \quad a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \dots$
$A_4 \quad - - - - - \dots$

1. Не берём повторения
2. Пропускаем пустые ячейки

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \dots$
$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} = \bigcup\limits_i A_i$
$\subset$ нбчс

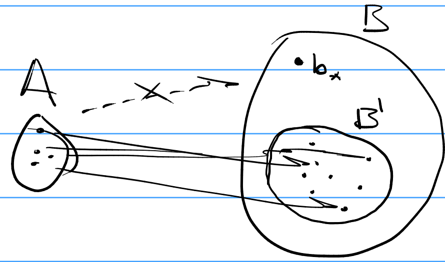
Сл-вие A, B — мн-ва, B — нбчс, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



$\Rightarrow A$ — нбчс

Д-во $B' = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



$f: A \to B'$ — биективна

1) f — инъективна ✓ (по условию)

2) f — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A: \ b = f(a)$ — по опред. B'

$f(g(b)) = f(a) = b$

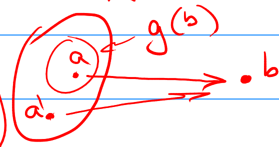
$\Rightarrow |A| = |B'|$, B' — нбчс (по T_1) $\Rightarrow A$ нбчс

Д-во $g: B \to A$

$g(b) = a \in A \mid f(a) = b$

конечно или равномощно $\mathbb{N}$

Упр: A, B — мн-ва, A — нбчс, $f: A \to B$ — сюръективна $\Rightarrow$ (!) B — нбчс.



g — инъекция

$g(b_1) = g(b_2)$

$\Downarrow$

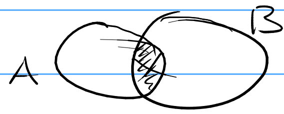
$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$

$b_1 \quad b_2$

$\Rightarrow b_1 = b_2$

Теорема 2 A — беск., B — нбчс. $\Rightarrow$ (!) $|A \cup B| = |A|$

Д-во: 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$



A: 2, 4, 6, 8, 10, … (12, 14, 16, 18, …) ✓ беск.

B: a, b, c, d, e (2, 4, 6, 8, 10)

$\cong$ A 2,4,6,8,10 …

сюр., ин. — биект. $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$A \cup B'$

Зам $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

$g(B) = \{g(b) \mid b \in B\} \subseteq A$

$= \{a \mid a = g(b), b \in B\}$

По T_1 $P \subseteq A$, P — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B)$ $\cong$

$A = P \sqcup Q = Q \sqcup P$

A — нбчс, $g(B) \subseteq A$ $\Big\} \Rightarrow g(B)$ — нбчс

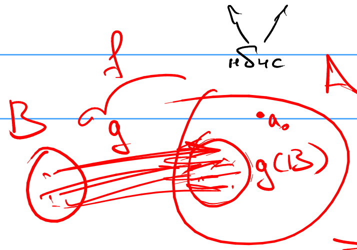
По T_1 $P \sqcup B$ — нбчс (утв. 3)

нбчс

При этом P — счётно $\Big\} \Rightarrow P \sqcup B$ — счётное, P — счётное $\Big\} \Rightarrow$

$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность



$g: B \to g(B)$ — биект.

ин. — доказали

сюр. — все $g(B)$ покрывает

$\Rightarrow B \cong g(B)$ — нбчс $\Rightarrow$ B — нбчс

$\exists\ \varphi: P \sqcup B \to P$ — биект.

$f: Q \sqcup (P \sqcup B) \to Q \sqcup P$

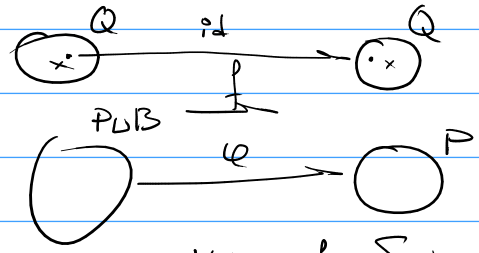
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ \varphi(x), & x \notin Q \end{cases}$$

A — беск. $\Rightarrow$ удовл.

$a_0 \in A \qquad B = A \setminus \{a_0\}$

$B \subset A \qquad \infty - 1 = \infty$

$B \neq A \qquad |A| = |B| = |A \setminus \{a_0\}|$



Упр f — биективна

$\Rightarrow |A \sqcup B| = |A|$ ■

A конечно $\Rightarrow$ не удовл.

$B \subset A,\ B \neq A$ $\Rightarrow$ в B меньше эл-тов, чем в A

$|A| \neq |B|$

Опр A ⓔ бесконечным, если $|A \sqcup \mathbb{N}| = |A|$

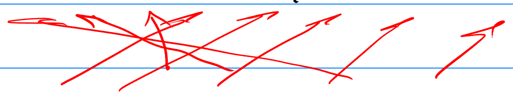
A ⓔ бесконечным, если $\exists\ B \subset A:\ B \neq A,\ |A| = |B|$

собственное подмн-во

Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)

Пример $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ $(\exists\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \ f$ — биекция$)$

$\ldots\ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ldots \qquad \mathbb{Z}$



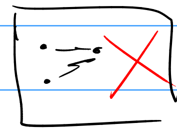
$\uparrow$

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ldots \qquad \mathbb{N}$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

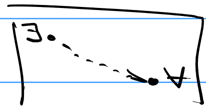
$g(n) = n$

1) g инъективна? (вложение)



— инъективность

2) g сюръективна? (покрытие)



— сюръекция

НЕТ $\Leftarrow\ \exists\ 0 \in \mathbb{Z}:\ \nexists\ n \in \mathbb{N}:\ g(n) = 0$

$g: \mathbb{N} \xhookrightarrow{\text{вложение}} \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

"$\infty \leq \infty + 1 \quad (\infty = \infty + 1)$"

ординальные числа

спойлер $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\ 2\omega, 2\omega+1, \ldots\ 3\omega, \ldots 4\omega \ldots$

$\omega:\ \omega > n\ \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \omega \not\approx \infty$

$\ldots\ \omega \cdot \omega, \ldots\ \omega^{\omega}, \ldots\ \omega^{\omega^{\omega}} \ldots \ \big|\ \varepsilon \ldots$

$\omega^2 \cong \omega$

$\frac{p}{q}$ "$\mathbb{Q}$" $\cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (по т. 1)

$\mathbb{N} \left\{ \begin{matrix} \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \sqcup \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётное} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ чётное} \end{cases}$ — инъективна

n_1, n_2 $(n_1 \neq n_2)$ 1) n_1, n_2 разной ч-ти $\Rightarrow f(n_1), f(n_2)$ имеют разные знаки $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) n_1, n_2 одной ч-ти

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$

$\Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} \neq -\frac{n_2-1}{2}$

$f(n_1) \neq f(n_2)$

— сюръективна

$(\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = a)$

$\triangleleft a \in \mathbb{Z}$ 1) $a \leq 0$. $n = \underbrace{-2a}_{\geq 0} + 1 > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{-2a+1-1}{2} = -\frac{-2a}{2} = a$

$f(n) = a$ ✓

2) $a > 0$ $n = 2a > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2a}{2} = a$ $f(n) = a$ ✓ $\Rightarrow f$ — сюръективна

$\Rightarrow f$ биективна $\Rightarrow \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ $(\infty = 2 \cdot \infty + 1)$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $(\infty^2 = \infty)$

$(2^\infty > \infty)$

$\| \ |\mathbb{R}|$

Теорема $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cup}{[0,1]}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(Расшифровка: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ ← мн-во всех функций

$\{(0,1,1,0,\ldots), (\ldots), \ldots\}$

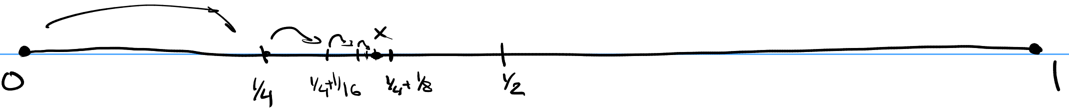
$\| \ \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$

в $[0,1]$ столько же веществ. чисел, сколько есть посл-тей из 0 и 1.

$g: \mathbb{N} \to \{0,1,2\} \leftrightarrow 0,2,1,1,0,0,0,2,0,\ldots$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \leftrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathbb{R}$

Д-во Хотим $f: [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$



$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ $x = 0 + 1/4 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$, $a_k \in \{0,1\}$

1/2

$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$\in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\| \ f(x)$

1) Инъективность $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (!)

$$\underset{(a_1,a_2,\dots)}{f(x_1)} = \underset{(b_1,b_2,\dots)}{f(x_2)}$$

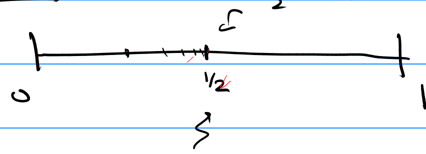
$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots) \Rightarrow a_k = b_k\ \forall k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}_{x_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \blacksquare$$

2) Сюръективность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\exists?\ x \in [0,1]$: $f(x) = (a_1, a_2, \dots)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in [0,1], \quad \le 1, \ \ge 0 \qquad \cancel{f(x) = (a_1, a_2, \dots)}$$

Нюанс $\frac12 + 0 + 0 + 0 + \dots \leftrightarrow (1, 0, 0, 0, \dots) \ne f(x)\ \forall x$



$f(1/2) \ne (1, 0, 0, \dots)$

$f(1/2) = 0 + \frac14 + \frac18 + \frac1{16} + \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ ←

"Лишние" посл-ти имеют 0 в периоде (0 начиная с нек. места)

$$(\underbrace{0,0,1,1,0,1,0,1}, \cancel{0,0,0,0,0,0,0,\dots}) \leftrightarrow (\underbrace{0,0,1,1,0,1,0,1})$$

$A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $A = \{$лишние посл-ти$\} \cong \underbrace{\{\text{кон. посл-ти из 0 и 1}\}}_{B}$

(!) $B \cong \mathbb{N}$ 1) B — бесконечно $\Rightarrow |B| \ge |\mathbb{N}|$

2) $B \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $(a_1, a_2, \dots a_n) \leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$

↖ вложение $\Rightarrow |B| \le |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \le |B| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

B — счётно

$A \cong B$ — счётно

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \overset{\overleftarrow{f}}{\cong} [0,1]$$

1,2 по Т3

Теорема 3: A беск, B - счётно $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A) \cup A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow [0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Упр разобраться в док-ве

Теорема $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($in : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – инъекция, $\cancel{bi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}}$ – ~~биекция~~)

Д-во Лемма (диагональный метод Кантора): $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ "$\infty < 2^{\infty}$"

Д-во $in : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — инъекция.

$$n \longmapsto (0,0,0,\ldots,0,\underset{\substack{n\text{-ная} \\ \text{позиция}}}{1},0,0,\ldots)$$

Допустим, что $bi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — биекция

$$\begin{array}{l|llll}
bi(1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots \\
bi(2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots \\
bi(3) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
\vdots & & & & \\
\end{array}$$

$\mathbb{N}$ (вниз), $\mathbb{N}$ (вправо)

$a \in \{0,1\}$

$\bar{a} = 1 - a$

$b_k = \overline{a_{kk}}$ $\quad b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$b: \overline{a_{11}}, \overline{a_{22}}, \overline{a_{33}}, \overline{a_{44}}, \ldots$

$b \neq a_1$

$b_1 = \overline{a_{11}} \neq a_{11}$

$b \neq a_2$

$b_2 = \overline{a_{22}} \neq a_{22}$

$\vdots$

$b \neq a_n$

$b_n = \overline{a_{nn}} \neq a_{nn}$

$b \neq bi(1)$

$\neq bi(2)$

$\vdots$

$\neq bi(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Противоречие с сюръект. bi

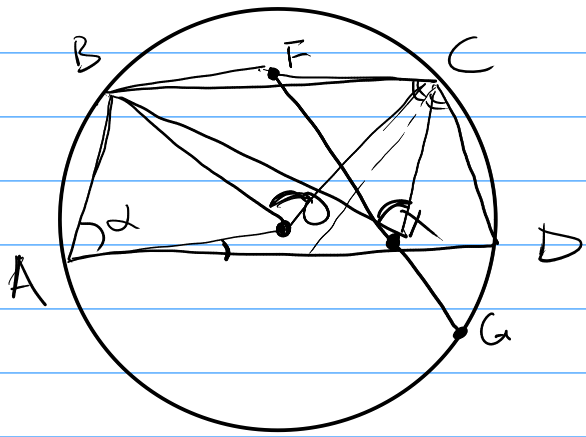
(не получается инъект. bi)

(возвращаемся к теореме)

$$|\mathbb{N}| \underset{\text{по лемме}}{<} |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]| \underset{[0,1]\subset\mathbb{R}}{\leqslant} |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

■

Следствие $\mathbb{N}, < \{0,1\}^{\mathbb{N}}, < \{0,1\}^{(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} < \; < \; < \; < \ldots$



$2\alpha = \overset{\smile}{BD} = \overset{\smile}{CA}$

$\angle BFC > \angle BOC$

$\angle BGC < \angle BOC$

$\angle BXC = \angle BOC$