ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук) $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...)

$\sin 2x + \sqrt{3}\cdot \sin(x-\pi) = 0$ $\quad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

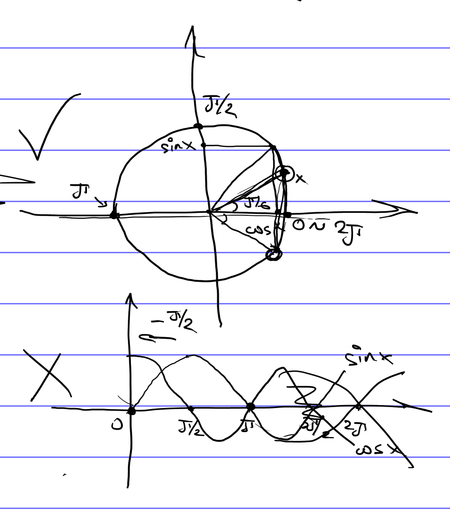
$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = $
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(потом докажем)
$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

1) $\sin x = 0$
$x = \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$
$\cos x = \sqrt{3}/2$ $\quad 30^\circ = \pi/6$
$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

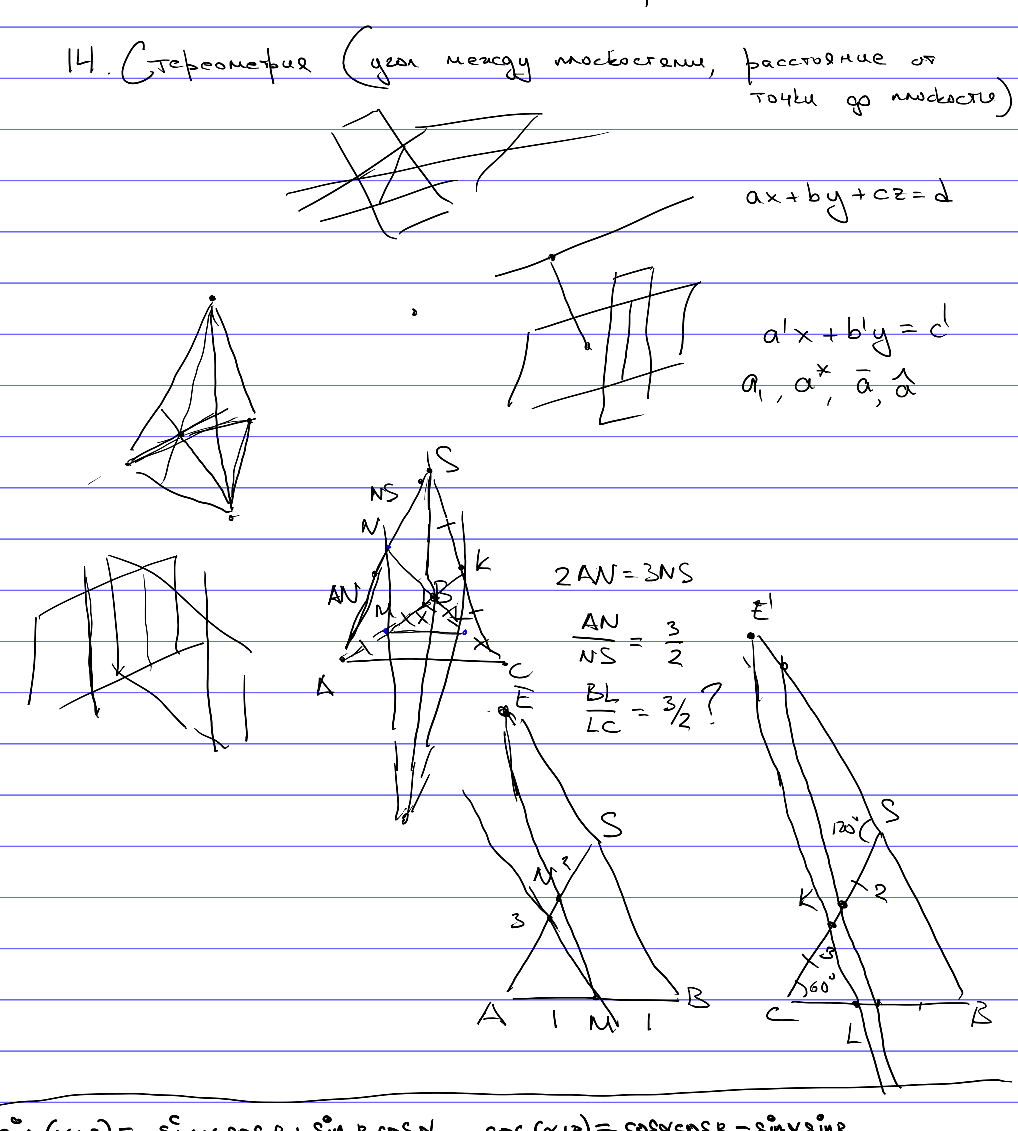


14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$



$2AN = 3NS$

$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha + \beta < \pi/2$

$\alpha+\beta > \pi/2$

$c = a' + b'$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\gamma = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \underbrace{\frac{a'}{a}}_{\sin\alpha}\cdot\underbrace{\frac{h_1}{b}}_{\cos\beta} + \underbrace{\frac{b'}{b}}_{\sin\beta}\cdot\underbrace{\frac{h_1}{a}}_{\cos\alpha}$

(Д/З) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta<\pi$, $\alpha+\beta>\pi$, $\alpha+\beta>3\pi/2$)

Вариант 2 — формулы приведения

1. $\boxed{\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha}$ $\quad$ ① = ② $\quad \boxed{\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha}$

$\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha \quad \sin(\alpha-\pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha$, $\quad \cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$

2. sin — нечётная, cos — чётная

$\sin(-x) = -\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \cos(-x) = \cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$-\alpha = \beta \quad \sin(\beta+\pi/2) = \cos(\beta)$

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ $\quad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$

2π — период (360°) $\quad$ radian $\quad \pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega\ rad\ s^{-1}$

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha,\beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2,\ 0<\gamma<\pi/2$

$\gamma + \beta = \beta + \alpha - \pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\beta+\pi/2) =$
$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$
$= \underbrace{\cos(\alpha-\pi/2)}_{\sin\alpha}\cos\beta - \underbrace{\sin(\alpha-\pi/2)}_{-\cos\alpha}\sin\beta =$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$A/2$ $\quad t_2 = t_0 \quad t_1 = 0$

simple harmonic motion

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot(t - t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = 1.8s$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$x(t) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{A}{2}$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R\cdot\cos(\omega(t-t_1))$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3s$

Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во $\quad A,\quad x\in A$ "x лежит в A"

2) Всё — множество $\quad 0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\},\ 3 = \ldots$

3) Бесконечности $\quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — „самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами. $\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n\in\mathbb{N} \mid \underbrace{n \vdots 2}_{\text{св-во}}\} = \{2,4,6,\ldots\}$ $\quad$ (аксиома выделение)

$B\in A \Rightarrow B\notin B$

3) Парадокс Рассела $\quad A = \{x \mid x\notin x\}$ $\quad A\in A \Rightarrow A\notin A$?!!
$A\notin A \Rightarrow A\in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр: A, B — мн-ва $\quad A\cup B = \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$
$A\cap B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$
$A\setminus B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$
$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Предикаты и кванторы

x $\quad P(x)$ — предикат $\quad P(x)\wedge Q(x)$ — конъюнкция
$P(x)\vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\quad \forall x\in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\quad \exists x\in A: P(x) = \bigvee_{x\in A} P(x)$

$\neg(A\wedge B) = (\neg A)\vee(\neg B)$ $\quad \neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A}\neg P(x)$

$\neg(\forall x\in A\ P(x)) = \exists x\in A: \neg P(x)$

$\neg(\exists x\in A\ P(x)) = \forall x\in A\ \neg P(x)$

Опр: A, $\quad A^c = U\setminus A$ $\quad (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$
$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ — формулы де Моргана

— " — $\cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f)$: $\forall x\in A: \exists!\, y\in B: y = f(x)$

обл. отпр. $\quad$ обл. приб. $\quad$ единственный $\quad y$ наз. образом x относительно f.

2) (Новое) $A, B,\quad A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f\subseteq A\times B: \forall x\in A\ \exists!\, y\in B: (x,y)\in f \quad (y = f(x))$

Опр 1) $f: A\to B$ наз. инъективной, если $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

отпр. $\quad$ обл. приб.

наз. сюръективной, если $\forall y\in B\ \exists x\in A: y = f(x)$

наз. биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad f(n) = n$

Опр: $f: A\to B,\ g: B\to A$. g наз. обратной к f $(g = f^{-1})$, если
1) $\forall x\in A: x = g(f(x))$
2) $\forall y\in B: y = f(g(y))$

Теорема: $f: A\to B$. f — обратима ($\exists f^{-1}$) $\Leftrightarrow$ f — биективна

Д-во: $\Rightarrow$: $\exists$ f — обр. $\exists g: B\to A$ т.ч. 1) и 2)

пусть

1. f — сюр. $\quad y\in B\ \forall x = g(y)\in A$ $\quad f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow$ f — сюр

рассмотрим

2. f — ин. $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2)$. $\quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\| 1) \qquad \| 1)$
$x_1 \qquad x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
$\Rightarrow$ f — ин.

$\Rightarrow$ f — би.

$\Leftarrow$: $\exists$ f — биект. $\quad$ Хотим $g: B\to A$: 1) и 2)

$\forall y\in B$ f — сюр. $\Rightarrow \exists!\, x\in A: y = f(x)$. $\quad g(y) := x$

f — ин.

1) $\forall x\in A\ \ g(f(x)) = x$ ✓

2) $\forall y\in B\ \ f(g(y)) = y$ ✓

Задача: $\exists$? A, B, C: $\quad$ 1) $A\cap B\neq\varnothing$
2) $B\cap C = \varnothing$
3) $(A\cap B)\setminus C = \varnothing \Leftrightarrow (A\cap B)\cap C^c = \varnothing$

$A\cap B\subseteq C$ $\quad X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$

$B\cap C$
$\cup$
$A\cap(B\cap C)$
$\|$
$(A\cap B)\cap C$
$\|$
$A\cap B$
$\neq$
$\varnothing$

$\{1,2,3,4\}\setminus\{3,4,5\} = \{1,2\}$

$X\triangle Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$Y^c = U\setminus Y$

$X\setminus Y = X\cap Y^c$

" $x\cdot(\neg y)$ "

$B\cap C\neq\varnothing$?!!

$A\subset B \Leftrightarrow \forall a\in A\ a\in B$

1) $A\subset B,\ B\subset C \Rightarrow A\subset C$

2) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$

$A\cap C\neq\varnothing \Rightarrow B\cap C\neq\varnothing$

$\left.\begin{matrix}A\subset B\\ A\neq\varnothing\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\neq\varnothing$

$A\cup B = B$

$\cup, \cap, \setminus, \triangle$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A\subset U$

$\chi_A: U\to\{0,1\}$

$\chi_A(u) = \begin{cases}0, & u\notin A\\ 1, & u\in A\end{cases}$ $\qquad A\leftrightarrow\chi_A$

$\hookrightarrow A = \{u\in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B\subset U \quad \chi_A, \chi_B$

$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases}1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1\\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0\end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$

$1 \quad 1 \qquad 1 = 1 \qquad 1$ XOR $1 = 0$

$\chi_{A\triangle B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u) \leftarrow$ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^c}(u) = \chi_A(u)\cdot\underbrace{\chi_{B^c}(u)}_{1-\chi_B(u)} = \chi_A(u)(1 - \chi_B(u))$

$\int_S f(x)$

$A\subset S$

$\int_A f(x) = \int_S f(x)\cdot\chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

$F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)

$A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$,

$|A| = n$

мощность $\quad |A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1,2,\ldots\}|$ — ???, "∞"

$A\subset U,\ |A| = n\in\mathbb{N}$ $\quad 2^A = P(A) = \{B\subset U \mid B\subset A\}$ — булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$ $\quad a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$

$f: 2^A \to \{\text{выборов}\}$ — биект. $\quad$ 2 варианта $\quad B\subset A$

$|2^A| = |\{\text{выборов}\}|$ $\quad \varnothing\subset A$

2^n

Теорема: $A, B\subset U$ (A, B — кон.) $\quad f: A\to B$ — биективна (⟺ обратимая)

$\Rightarrow |A| = |B|$

Задача $\quad |A| = 100$ $\quad X = \{B\subset A \mid |B| = 43\}$
$Y = \{B\subset A \mid |B| = 57\}$ $\quad |X| \leq |Y|$

$43 + 57 = 100$ $\quad B\subset A: |B| = 43\quad B\in X$

$B' = A\setminus B \quad |B'| = 57\quad B'\in Y$

$f: X\to Y\quad f(B) = A\setminus B$ $\quad$ f и g обратные

$g: Y\to X\quad g(B) = A\setminus B$
$|B| = 57$

f — обратимая, биективная

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ $\quad |X| = C_{100}^{43}$
$|Y| = C_{100}^{57}$ $\quad (C_n^k = C_n^{n-k})$

Задача $\quad A\subset U$ (кон.), $A\neq\varnothing$ $\quad E(A) = \{B\subset A \mid |B| \vdots 2\} = E\subset 2^A$

$A = \{1,2,3\}$ $\quad O(A) = \{B\subset A \mid |B| \not\vdots 2\}$

$E(A) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ $\quad$ (!) $|E(A)| = |O(A)|$ $\quad E: Set\to Set$
$A\mapsto E(A)$

$a\in A$ $\quad f: E(A)\to O(A)$ $\quad B_1\neq B_2\ \in E(A) \Rightarrow f(B_1)\neq f(B_2)$

$B\in E(A)$

$|B| \vdots 2$ $\quad$ 1) $a\in B$ $\quad |B\setminus\{a\}| \not\vdots 2$
$|B| - 1$ $\quad f(B) = B\setminus\{a\}$

2) $a\notin B$ $\quad f(B) = B\cup\{a\}$ $\quad |f(B)| \not\vdots 2$

Упр (!) f — сюр., ин.

или $\quad g: O(A)\to E(A): \ f(g(B)) = B,\ g(f(B)) = B,\ \forall B$

$g = f'$, $\quad f': O(A)\to E(A)$ $\quad \varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$\varphi(n) = \begin{cases}0, & n\vdots 2\\ 1, & n\not\vdots 2\end{cases}$ $\quad \varphi(3) = 1$

1) $\forall B\in O(A)$ $\quad f(f'(B)) = B$ ✓

$\forall B\in O(A)$ $\quad$ 1. $a\in B$ $\quad f'(B) = B\setminus\{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B\setminus\{a\}}_{a\notin}) = (\overbrace{B\setminus\{a\}}^{C})\cup\{a\} = B$

$f(C) = \begin{cases}C\setminus\{a\}, & a\in C\\ C\cup\{a\}, & a\notin C\end{cases}$

2. $a\notin B$ $\quad f'(B) = B\cup\{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B\cup\{a\}}_{a\in}) = (B\cup\{a\})\setminus\{a\} = B$

2) $\forall B\in E(A)\quad f'(f(B)) = B$ — упр

$\Rightarrow f'$ — обр. к f $\qquad E(A) \overset{f}{\underset{f'}{\leftrightarrows}} O(A)$

$\Rightarrow |E(A)| = |O(A)|$

Задача (!) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$

$|A| = n$ $\quad \underline{C_n^k = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|}$ $\quad$ и

$\underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^n}_{|E(A)|} \underbrace{- C_n^1 - C_n^3 - C_n^5 - \ldots - C_n^{n-1}}_{-|O(A)|} = 0$ $\quad (n \vdots 2)$

Задача $\quad (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + \ldots + C_n^{n-1}a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$\| $

$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n} = \sum \alpha_j a^i b^j =$

$a^2 b^{n-2}$

b^n

$= C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b + C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1} + C_n^n b^n$

$\sum_{k=0}^n C_n^k = \underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n}_{} = 2^n$ — упр (через мощности мн-в)

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|$, $\quad |A| = n$ $\quad |2^A| = 2^n$