ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задача с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...)

$3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3}\cdot\sin(x-\pi) = 0$ $\qquad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

1 $2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(x+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$\left(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\right)$

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

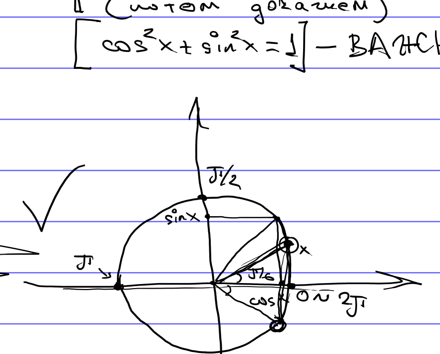
1) $\sin x = 0$

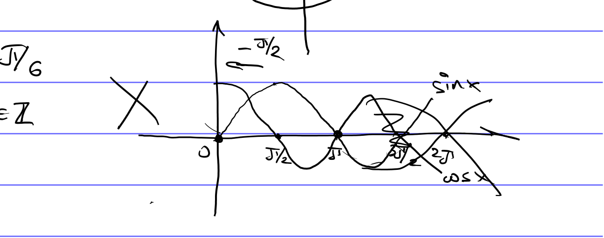
$x = \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $\quad 30^\circ = \pi/6$

$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



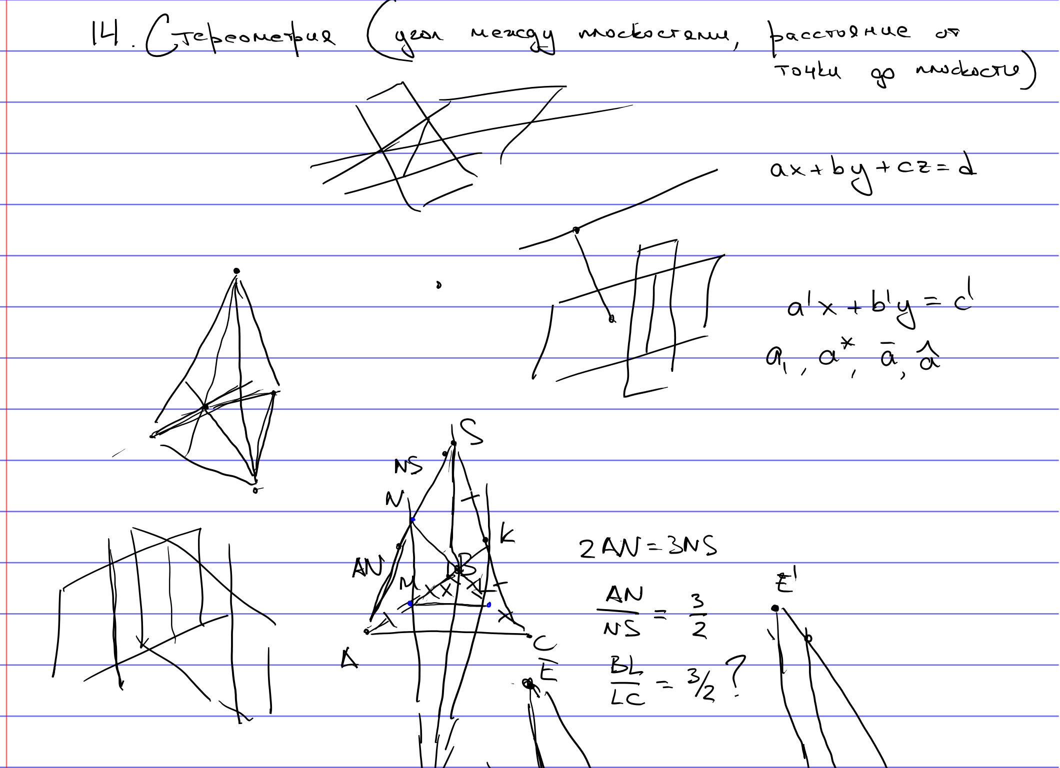


14. Стереометрия (углы между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$



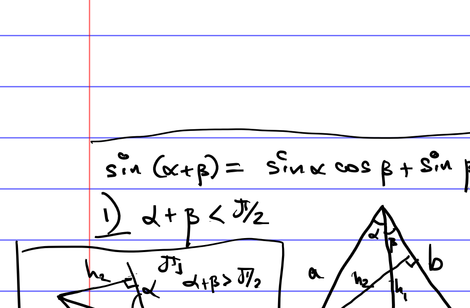
$2AN = 3NS$

$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2\ ?$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\quad\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha+\beta < \pi/2$



$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\alpha = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

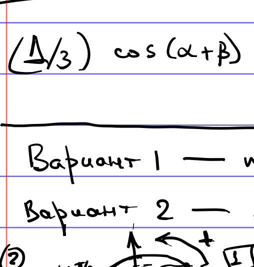
$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{h_1}{b} + \frac{b'}{b}\cdot\frac{h_1}{a}$

$\sin\alpha\ \cos\beta\ \ \sin\beta\ \cos\alpha$

(Д/з) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta<\pi$, $\alpha+\beta>\pi$, $\alpha+\beta>3\pi/2$ ...)

Вариант 2 — формулы приведения



1. $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$

① = ② $\quad \cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$

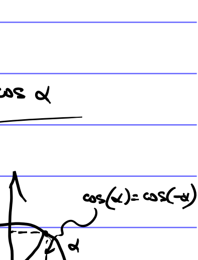
$\cos(\alpha-\pi/2) = \sin\alpha$ $\quad \sin(\alpha-\pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha$, $\quad\cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$

2. sin — нечётная, cos — чётная

$\sin(-x) = -\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad\cos(-x) = \cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$-\alpha = \beta$ $\quad\sin(\beta+\pi) = \cos(\beta)$



3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha+\pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$

2π — период (360°) radian $\quad \pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega$ rad s^{-1}

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha,\beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2$, $0<\gamma<\pi/2$

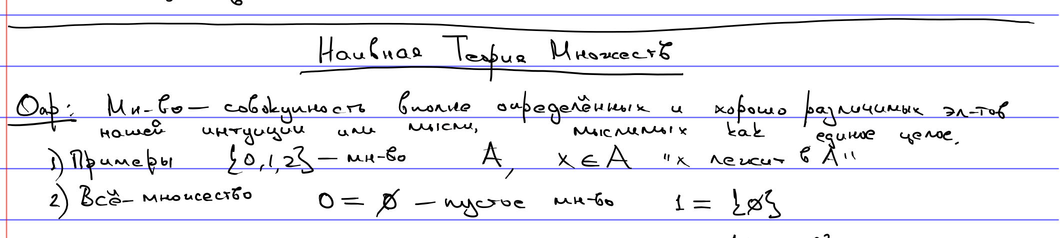
$\gamma+\beta = \beta+\alpha-\pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\beta+\pi/2) =$

$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$

$= \cos(\alpha-\pi/2)\cos\beta - \sin(\alpha-\pi/2)\sin\beta =$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



$T = 1.8s$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$x(t) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{A}{2}$

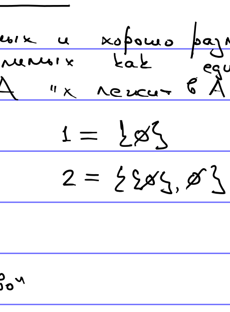
$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3s$

simple harmonic motion

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot(t-t_1)) = A\cos(\omega t)$



$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R\cos(\omega(t+t_1))$

Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое. A, $x\in A$ "x лежит в A"

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во

2) Всё множество $0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$, $3 = ...$

3) Бесконечности $|\mathbb{Q}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — "самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами.

$\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n\in\mathbb{N} \mid n\vdots 2\} = \{2,4,6,...\}$ (аксиома выделения)

св-во

3) Парадокс Рассела $A = \{x \mid x\notin x\}$ $\quad B\in A \to B\notin B$

$A\in A \Rightarrow A\notin A$?!!

$A\notin A \Rightarrow A\in A$

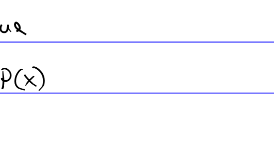
$A, A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр. A, B — мн-ва $\quad A\cup B = \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$

$A\cap B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$

$A\setminus B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



Предикаты и кванторы

x $\quad P(x)$ — предикат $\quad P(x)\wedge Q(x)$ — конъюнкция

$P(x)\vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\quad\forall x\in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\quad\exists x\in A: P(x) = \bigvee_{x\in A} P(x)$

$\neg(A\wedge B) = (\neg A)\vee(\neg B)$ $\quad\neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A}\neg P(x)$

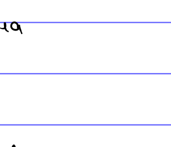
$\neg(\forall x\in A\ P(x)) = \exists x\in A: \neg P(x)$

$\neg(\exists x\in A\ P(x)) = \forall x\in A\ \neg P(x)$

Опр. A, $\quad A^C = U\setminus A$

$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$

$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$

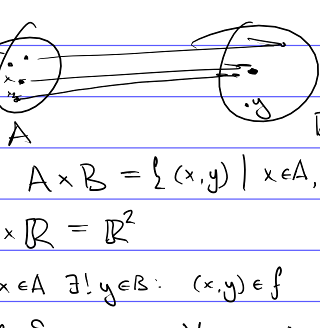


$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$ — формулы де Моргана

$\cup \leftrightarrow \cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f)$: $\forall x\in A\ \exists!\ y\in B: y = f(x)$

обл. опр. обл. знач. $\quad$ единственный $\quad y$ @ образом x относительно f.



2) (Новое) A, B $\quad A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f\in A\times B:\ \forall x\in A\ \exists!\ y\in B: (x,y)\in f$ $\quad(y = f(x))$

Опр 1) $f: A\to B$ @ инъективной, если $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

обл. опр. обл. знач.

@ сюръективной, если $\forall y\in B\ \exists x\in A: y = f(x)$

@ биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(n) = n$

Опр. $f: A\to B$, $g: B\to A$. g @ обратной к f $(g = f^{-1})$, если

1) $\forall x\in A$: $x = g(f(x))$

2) $\forall y\in B$: $y = f(g(y))$

Теорема: $f: A\to B$. f — обратима $(\exists f^{-1}) \Leftrightarrow f$ — биективна

Д-во: $\Rightarrow$ f — об. $\exists g: B\to A$ т.ч. 1) и 2)

пусть 1. f — сюр. $y\in B$ $\forall x = g(y)\in A$ $\quad f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow f$ — сюр

рассмотрим

2. f — ин. $\forall x_1, x_2\in A$: $f(x_1) = f(x_2)$. $\quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\overset{1)}{\parallel}\ x_1 \qquad \overset{1)}{\parallel}\ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — ин.

$\Rightarrow f$ — би.

$\Leftarrow$: $\exists f$ — биект. Хотим $g: B\to A$: 1) и 2)

$\forall y\in B$ f — сюр. $\Rightarrow \exists! x\in A: y = f(x)$. $\quad g(y) := x$

f — ин.

1) $\forall x\in A$ $g(f(x)) = x$ ✓

2) $\forall y\in B$ $f(g(y)) = y$ ✓

Задача: $\exists$? A, B, C: 1) $A\cap B \neq \varnothing$

2) $B\cap C = \varnothing$

3) $(A\cap B)\setminus C = \varnothing \Leftrightarrow (A\cap B)\cap C^C = \varnothing$

$A\cap B\in C$ $\quad X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$

$B\cap C$ $\quad \{1,2,3,4\}\setminus\{3,4,5\} = \{1,2\}$

$\cup$

$A\cap(B\cap C)$ $\quad X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$\parallel$

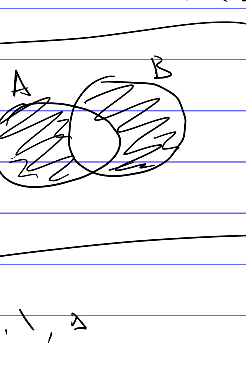
$(A\cap B)\cap C$ $\quad Y^C = U\setminus Y$

$\parallel$

$A\cap B$ $\quad X\setminus Y = X\cap Y^C$

$\#$ $\quad$ "$x\cdot(-y)$"

$\varnothing$



$B\cap C \neq \varnothing$?!!

$A\subset B \Leftrightarrow \forall a\in A\ a\in B$

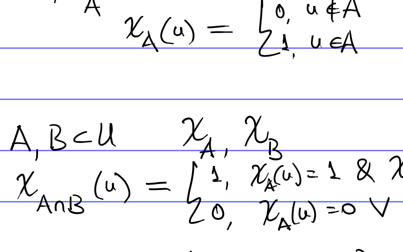
1) $A\subset B$, $B\subset C \Rightarrow A\subset C$

2) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$

$A\cap C\neq\varnothing \Rightarrow B\cap C\neq\varnothing$

$\left.\begin{matrix}A\subset B\\ A\neq\varnothing\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\neq\varnothing$

$A\cup B = B$



$\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A\subset U$

$\chi_A: U\to\{0,1\}$ $\quad A\leftrightarrow\chi_A$

$\chi_A(u) = \begin{cases}0, & u\notin A\\ 1, & u\in A\end{cases}$ $\quad\hookrightarrow A = \{u\in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B\subset U$ $\quad\chi_A, \chi_B$

$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases}1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1\\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0\end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$

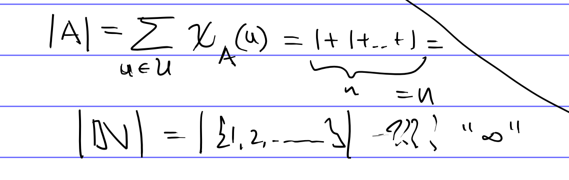
$1 \quad 1 \qquad 1 = 1 \qquad 1\ \text{xor}\ 1 = 0$

$\chi_{A\Delta B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$ $\leftarrow$ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^C}(u) = \chi_A(u)\cdot\chi_{B^C}(u) = \chi_A(u)(1 - \chi_B(u))$

$1 - \chi_B(u)$

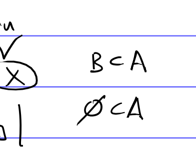
$\int_S f(x)$



$A\subset S$ $\quad\int_A f(x) = \int_S f(x)\cdot\chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана



$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

$F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)

$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,

$|A| = n$

мощность $\quad|A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u) = 1 + 1 + ... + 1 = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1, 2, ...\}|$ -??! "∞"

$A\subset U$, $|A| = n\in\mathbb{N}$ $\quad 2^A = P(A) = \{B\subset U \mid B\subset A\}$ — Булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$

$a_1\ a_2\ a_3\ ...\ a_n$

$f: 2^A \to \{выборов\}$ $\quad$ 2 вариантa $\quad B\subset A$, $\varnothing\subset A$

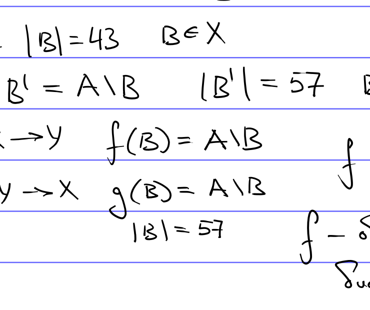
биект.

$|2^A| = |\{выборов\}|$

2^n

Теорема: $A, B\subset U$, $(A, B$ — кон.$)$ $\quad f: A\to B$ — биективна (⟺ обратимая)

$\Rightarrow |A| = |B|$



Задача $|A| = 100$ $\quad X = \{B\subset A \mid |B| = 43\}$

$Y = \{B\subset A \mid |B| = 57\}$ $\quad|X| \leq |Y|$

$43 + 57 = 100$ $\quad B\subset A: |B| = 43$ $\quad B\in X$

$B' = A\setminus B$ $\quad|B'| = 57$ $\quad B'\in Y$

$f: X\to Y$ $\quad f(B) = A\setminus B$ $\quad f$ и g обратные

$g: Y\to X$ $\quad g(B) = A\setminus B$ $\quad f$ — обратимая, биективная

$|B| = 57$

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)$ $\quad|X| = C_{100}^{43}$

$|Y| = C_{100}^{57}$ $\quad(C_n^k = C_n^{n-k})$