ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...) $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3} \cdot \sin(x - \pi) = 0$ $\quad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$

$\left(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\right)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x$

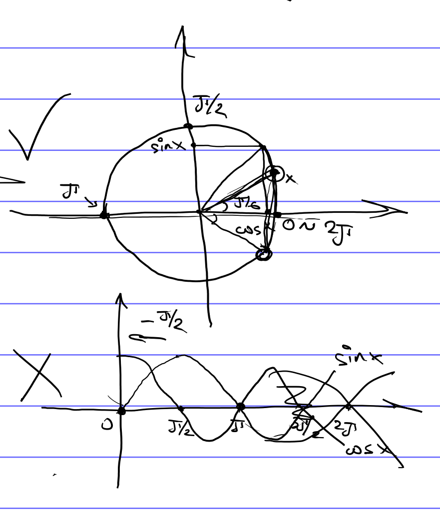
1) $\sin x = 0$

$x = \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $\quad 30^\circ = \pi/6$

$x = \pm \pi/6 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$



14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

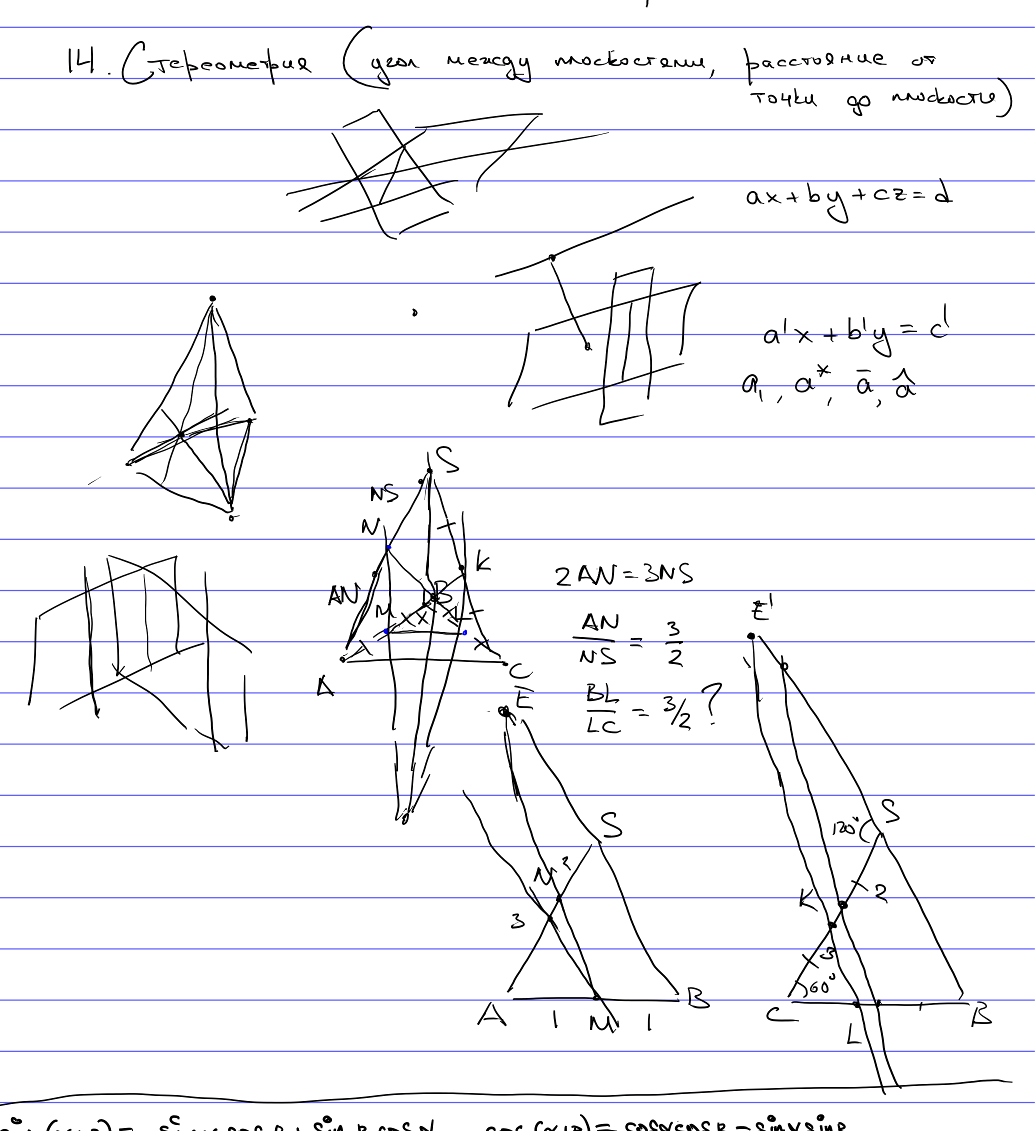
$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$

$2AN = 3NS$

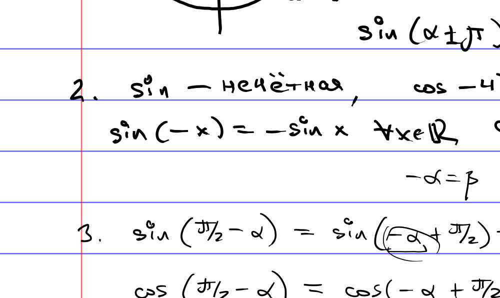
$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha + \beta < \pi/2$



$c = a' + b'$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\alpha = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{h_1}{b} + \frac{b'}{b}\cdot\frac{h_1}{a}$

(1/3) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — терерис. картинки ($\alpha+\beta < \pi$, $\alpha+\beta > \pi$, $\alpha+\beta > 3\pi/2$)

Вариант 2 — формулы приведения

$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha \qquad \sin(\alpha - \pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

2. $\sin$ — нечётная, $\cos$ — чётная

$\sin(-x) = -\sin x\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$-\alpha = \beta \quad \sin(\beta + \pi/2) = \cos(\beta)$

3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

2π — период (360°) radian $\pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega$ rad s^{-1}

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha, \beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2, \quad 0 < \gamma < \pi/2$

$\gamma + \beta = \beta + \alpha - \pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma + \beta + \pi/2) = \cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta = \cos(\alpha - \pi/2)\cos\beta - \sin(\alpha - \pi/2)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$A/2 \quad t_2 = t_0 \quad t_1 = 0$

simple harmonic motion

$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = 1.8s$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{A}{2}$

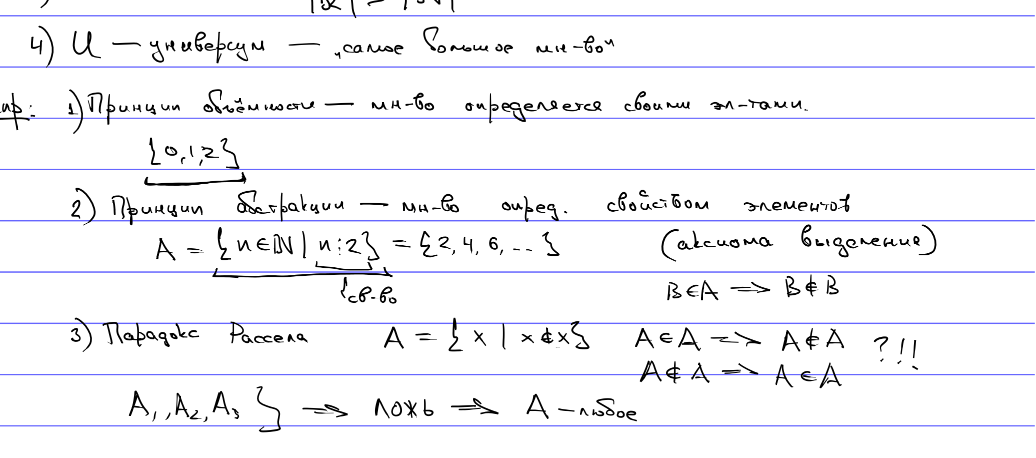
$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R \cdot \cos(\omega(t - t_1))$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3s$



Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во $\quad A, \quad x \in A$ "x лежит в A"

2) Всё — множество $\quad 0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \quad 3 = \ldots$

3) Бесконечности $\quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — „самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами. $\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ (аксиома выделения)

$B \in A \Rightarrow B \notin B$

3) Парадокс Рассела $\quad A = \{x \mid x \notin x\} \quad A \in A \Rightarrow A \notin A$?!! $\quad A \notin A \Rightarrow A \in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

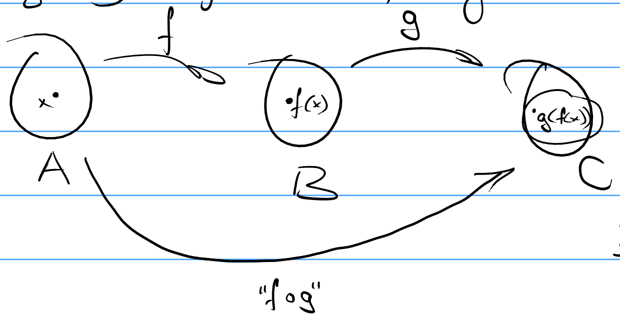
Опр (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$

h — композиция f и g

$\underbrace{(g \circ f)}_{h}: A \to C$

$a \in A \quad (g\circ f)(a) = g(f(a))$

$g \to f \qquad g \to f$



Зам "$f \circ g$" существует

Диаграммы $\to$ $f \circ g$

Алгебраич. запись $\to$ $g \circ f$ $(g(f(a)))$

$a \in A \quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

Опр A, B — мн-ва. A и B н. равномощными, если $\exists f: A \to B$: f — биективна

Примеры $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

$f: A \to B$

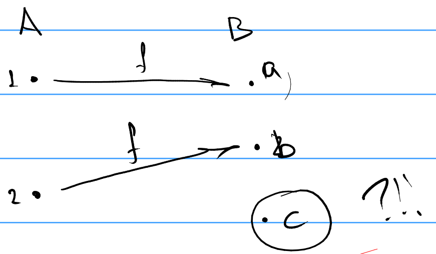
$f(1) = 2$ — ин.

— сюр. $(\forall b \in B\ \exists a \in A: b = f(a))$

$(f(A) = B)$

$\Rightarrow f$ - биект $\Rightarrow |A| = |B|$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ $\quad |A| \neq |B|$

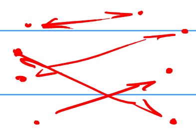


$\underset{\text{би}}{f}: A \to B$

$a = f(1)$

? $b = f(1)$?

$\Rightarrow \underset{\text{би}}{f}: A \to B$



— очевидно

$\Leftarrow |A| = |B| = n$

Утв. A, B — кон. $\underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A \to B} \Leftrightarrow |A| = |B|$

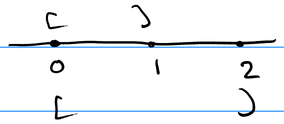
числа

n

— очевидно

Д-во Упражнение

Пример $[0,1]$ равн. $[0,2]$ $\quad ([0,1] \cong [0,2])$ — равномощность



$f: [0,1] \to [0,2]$

$f(x) = 2x$

$x_1, x_2 \in [0,1] \quad \underline{f(x_1) = f(x_2)}$

$x_1 = x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $\quad x = y/2 \in [0,1]$ $\quad f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ – сюр.

$\Rightarrow f$ – би.

$g: [0,2] \to [0,1]$ $\qquad f$ и g — обратные

$g(y) = y/2$ $\qquad g = f^{-1}$

Пример: $(0,1) \cong (1, +\infty)$ $\qquad f: (0,1) \to (1,+\infty)$

$f(x) = 1/x$ ← би? обр?

Упр: f — биективна (через обратную)

$g: (1,+\infty) \to (0,1)$

$g(y) = 1/y$

$x \in (0,1)$

$g(f(x)) = g(1/x) = 1/(1/x) = x$

$y \in (1,+\infty)$ $\quad f(g(y)) = f(1/y) = 1/(1/y) = y$

$\Rightarrow f$ и g – обратные

$\Rightarrow f$ – биективна

$\Rightarrow (0,1) \cong (1,+\infty)$

Опр A, B — мн-ва. $\qquad A^B := \{ f \mid f: B \to A \}$

$A \xleftarrow{f} B$

A, B - кон. $\qquad |A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $\quad b_1, b_2, \ldots, b_n$

$|A| = m$ $\quad a_1, a_2, \ldots, a_m$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$

$\| $

$|A^B|$

Пример $\qquad \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0, 1, 2, 0, 2, 3, 3, 3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов A

$0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \underbrace{1,1}_{3}, \underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$

$\varphi^{-1}: \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad \varphi$ и φ^{-1} — обратные

$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{2}_{1,0}, \underbrace{0}_{0,0}, \underbrace{1}_{0,1}, \underbrace{3}_{1,1}, \underbrace{3}_{1,1}, 0, 0, 1, 2, \ldots \longrightarrow 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$

Опр A (мн-во) $\circledast$ $\underline{\text{счётным}}$, если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Опр: A (н) не более чем счётным, если A конечно или счётно

Утв: A, B — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс
$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1

1) A — нбчс $\Rightarrow$ $(B \subset A \Rightarrow B$ — нбчс$)$
2) A — беск. $\Rightarrow$ $\exists\, B \subset A : B$ счётно
3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, A_i — нбчс $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_i A_i$ — нбчс

Д-во 1) $A: a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
$\quad\;\; ✓ \;\; ✓ \;\; \times \;\; ✓ \ldots$

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
$B = \{4, 6, 8\} \subset A$
$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \ldots$
$B = \{8, 10, 12, \ldots\}$
$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \underbrace{8, 10, 12, \ldots}_{B}$

2) $b_1 \in A$
$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.
$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.
$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$
$\vdots$
$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ — беск.
$\vdots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots \quad , \quad b_k \in A, \; \forall k \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счётное
$\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ A_i — нбчс (!) $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

$A_1 = a_{11}\; a_{12}\; a_{13}\; a_{14}$
$A_2 = a_{21}\; a_{22}\; a_{23} \ldots$
$A_3 \quad a_{31}\; a_{32}\; a_{33} \ldots$
$A_4 \quad - - - -$

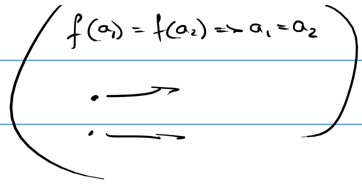
1. Не берём повторения
2. Пропускаем пустые ячейки

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \bigcup\limits_i A_i$
$\subset$ нбчс

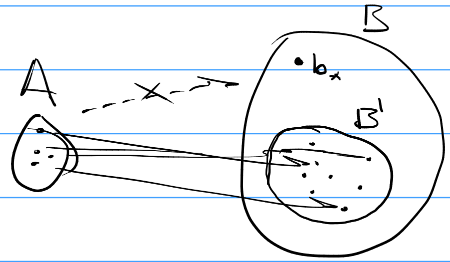
Сл-вие A, B — мн-ва, B — НБЧС, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



$\Rightarrow A$ — НБЧС

Д-во $B' = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



$f: A \to B'$ — биективна

1) f — инъективна ✓ (по условию)

2) f — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A: \ b = f(a)$ — по опред. B'

$f(g(b)) = f(a) = b$

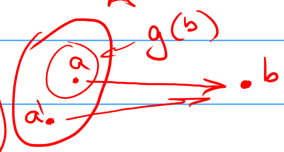
$\Rightarrow |A| = |B'|$
B' — НБЧС (по T_1) $\Big] \Rightarrow A$ НБЧС

Д-во $g: B \to A$

$g(b) = a \in A \mid f(a) = b$

конечно или равномощно $\mathbb{N}$

Упр: A, B — мн-ва, A — НБЧС, $f: A \to B$ — сюръективна
$\Rightarrow (!)$ B — НБЧС.

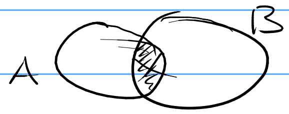


g — инъекция

$g(b_1) = g(b_2)$
$\Downarrow$
$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$
$\| \qquad \|$
$b_1 \qquad b_2$
$\Rightarrow b_1 = b_2$

Теорема 2 A — беск., B — НБЧС $\Rightarrow (!)$ $|A \cup B| = |A|$

Д-во: 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$



A:	2, 4, 6, 8, 10, ... (12, 14, 16, 18, ...)
B:	a, b, c, d, e (2, 4, 6, 8, 10)

✓ — беск.

$\cong$ A 2, 4, 6, 8, 10 ...

сюр. ин. } — биект. $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$
$\| $
$A \cup B'$

Зам $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

$g(B) = \{g(b) \mid b \in B\}$
$\| \qquad \cap$
$\qquad A$
$\{a \mid a = g(b), b \in B\}$

По T_1 $P \subseteq A$, P — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B)$ $\cong$

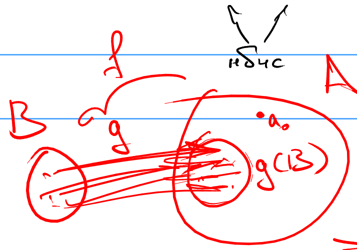
$A = P \sqcup Q = Q \sqcup P$

A — НБЧС, $g(B) \subseteq A$ $\Big\} \Rightarrow g(B)$ — НБЧС

По T_1 $P \sqcup B$ — НБЧС (утв. 3)
НБЧС
При этом P — счётно $\Big\} \Rightarrow$ $P \sqcup B$ — счётное, P — счётное $\Big\} \Rightarrow$

$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность



$g: B \to g(B)$ — биект.

ин. — доказали
сюр. — все $g(B)$ покрывает

$\Rightarrow B \cong g(B)$ — НБЧС $\Rightarrow$ B — НБЧС

$\exists\ \varphi : P\sqcup B \to P$ — биект.

$f : Q\sqcup(P\sqcup B) \to Q\sqcup P$

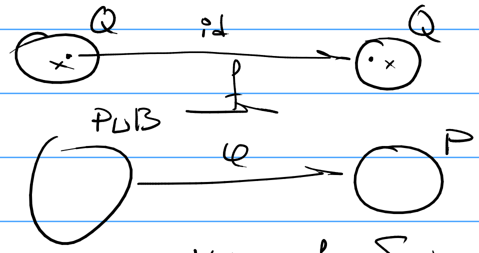
$f(x) = \begin{cases} x, & x\in Q \\ \varphi(x), & x\notin Q \end{cases}$

A — беск. $\Rightarrow$ удовл.

$a_0\in A \qquad B = A\setminus\{a_0\}$

$B\subset A \qquad \infty - 1 = \infty$

$B\neq A \qquad |A| = |B| = |A\setminus\{a_0\}|$



Упр f — биективна

$\Rightarrow |A\sqcup B| = |A|$ ■

A конечно $\Rightarrow$ не удовл.
$B\subset A,\ B\neq A$ $\Rightarrow$ в B меньше эл-тов, чем в A
$|A|\neq|B|$

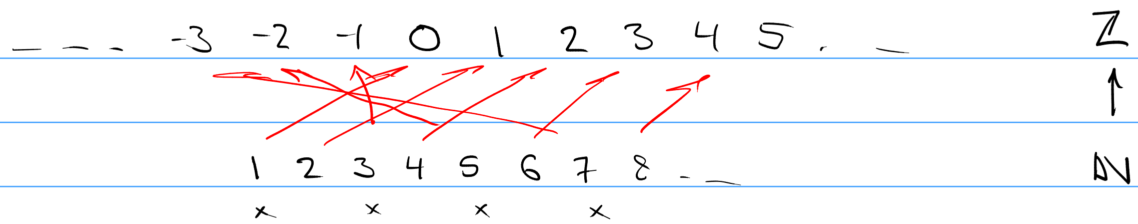
Опр A @ бесконечным, если $|A\sqcup\mathbb{N}| = |A|$

A @ бесконечным, если $\exists\, B\subset A : B\neq A,\ |A| = |B|$

собственное подмн-во

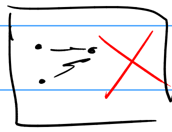
Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)

Пример $\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}$ ($\exists\, f : \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ f — биекция)



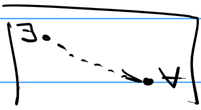
$g : \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$
$g(n) = n$

1) g инъективна? (вложение)



— инъективность

2) g сюръективна? (покрытие)



— сюръекция

НЕТ $\Leftarrow\ \exists\, 0\in\mathbb{Z} : \nexists\, n\in\mathbb{N} : g(n) = 0$

$g : \mathbb{N} \xhookrightarrow{\text{вложение}} \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}|\leq|\mathbb{Z}|$

"$\infty \leq \infty + 1$ $(\infty = \infty + 1)$"

ординальные числа

Кантор $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots 3\omega \ldots 4\omega \ldots$

$\omega : \omega > n\ \forall n\in\mathbb{N} \quad \omega \not\approx \infty$

$\ldots\ \omega\cdot\omega, \ldots\ \omega^{\omega}, \ldots\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}} \ldots \ \Big|\ \varepsilon \ldots$

$\omega^2 \cong \omega$

$\frac{p}{q}$ "$\mathbb{Q}$" $\cong \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (по т. 1)

$\mathbb{N}\left\{\begin{matrix}\mathbb{N}\\ \mathbb{N}\\ \mathbb{N}\\ \vdots\end{matrix}\right\} \bigsqcup \cong \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётное} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ чётное} \end{cases}$ — инъективна

n_1, n_2 $(n_1 \neq n_2)$ 1) n_1, n_2 разной ч-ти $\Rightarrow f(n_1), f(n_2)$ имеют разные знаки $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) n_1, n_2 одной ч-ти $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$ $\Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} \neq -\frac{n_2-1}{2}$ $f(n_1) \neq f(n_2)$

— сюръективна

$(\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = a)$

$\forall a \in \mathbb{Z}$ 1) $a \leq 0$. $n = \underbrace{-2a}_{\geq 0} + 1 > 0 \in \mathbb{N}$

$f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{-2a+1-1}{2} = -\frac{-2a}{2} = a$

$f(n) = a$ ✓

2) $a > 0$ $n = 2a > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2a}{2} = a$ $f(n) = a$ ✓ $\Rightarrow f$ — сюръективна

$\Rightarrow f$ биективна $\Rightarrow \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ $(\infty = 2 \cdot \infty + 1)$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $(\infty^2 = \infty)$

$(2^\infty > \infty)$

$\quad \| $

$\ |\mathbb{R}|$

<u>Теорема</u> $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cup}{[0,1]}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(Расшифровка: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ ← мн-во всех функций

$\| \wr$

в $[0,1]$ столько же вещест. чисел, сколько есть посл-тей из 0 и 1. $\{(0,1,1,0,\dots),(\dots),\dots\}$

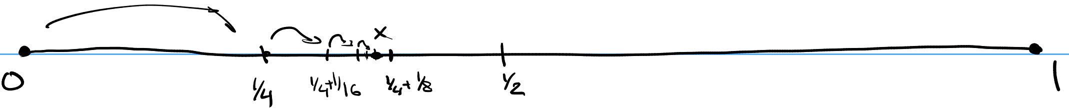
$\|$

$\{(a_1,a_2,a_3,a_4,\dots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$

$g: \mathbb{N} \to \{0,1,2\} \leftrightarrow 0,2,1,1,0,0,0,2,0,\dots$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \leftrightarrow x_1, x_2, x_3, \dots \in \mathbb{R}$

<u>Д-во</u> Хотим $f: [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$



$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ $x = 0 + \underset{1/2}{1/4} + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$, $a_k \in \{0,1\}$

$(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$\underset{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}{\cap}$ $\| \ f(x)$

1) Инъективность $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (!)

$$\underset{(a_1,a_2,\dots)}{f(x_1)} = \underset{(b_1,b_2,\dots)}{f(x_2)}$$

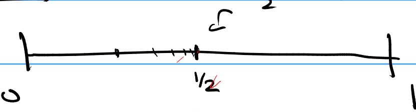
$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots) \Rightarrow a_k = b_k \ \forall k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}_{x_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \blacksquare$$

2) Сюръективность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\exists ? \, x \in [0,1]:$ $f(x) = (a_1, a_2, \dots)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in [0,1], \quad \text{(} 0 \le x \le 1 \text{)} \quad \cancel{f(x) = (a_1, a_2, \dots)}$$

Нюанс $\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \dots \leftrightarrow (1, 0, 0, 0, \dots) \neq f(x) \ \forall x$



$$f(1/2) \neq (1, 0, 0, \dots)$$

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1, \dots) = f(1/2) \leftarrow$$

"Лишние" посл-ти имеют 0 в периоде (0 начиная с нек. места)

$$(\underbrace{0,0,1,1,0,1,0,1}, \cancel{0,0,0,0,0,0,0,(0)}) \leftrightarrow (\underbrace{0,0,1,1,0,1,0,1})$$

$A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $A = \{\text{лишние посл-ти}\} \cong \underbrace{\{\text{кон. посл-ти из 0 и 1}\}}_{B}$

(!) $B \cong \mathbb{N}$ 1) B – бесконечно $\Rightarrow |B| \ge |\mathbb{N}|$

2) $B \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $(a_1, a_2, \dots a_n) \leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$

вложение $\Rightarrow |B| \le |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \le |B| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

B — счетно

$A \cong B$ — счётно

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \overset{\overleftarrow{f}}{\cong} [0,1]$$

112 по Т3

Теорема 3: A беск, B - счётно $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A) \cup A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow [0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Упр разобраться в док-ве

Теорема $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($in : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – инъекция, ~~$bi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – биекция~~)

Д-во **Лемма** (диагональный метод Кантора): $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$

«$\infty < 2^{\infty}$»

Д-во $in : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — инъекция.

$$n \mapsto (0,0,0,\dots,0,\underset{\text{n-ная позиция}}{1},0,0,\dots)$$

Допустим, что $bi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — биекция

$$\begin{array}{llllll}
bi(1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
bi(2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
bi(3) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

$a \in \{0,1\}$

$\bar{a} = 1 - a$

$b_k = \overline{a_{kk}}$ $\qquad b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$b : \overline{a_{11}}, \overline{a_{22}}, \overline{a_{33}}, \overline{a_{44}}, \dots$

$b \neq a_1$

$b_1 = \overline{a_{11}} \neq a_{11}$

$b \neq a_2$

$b_2 = \overline{a_{22}} \neq a_{22}$

$\vdots$

$b \neq a_n$

$b_n = \overline{a_{nn}} \neq a_{nn}$

$b \neq bi(1)$

$\neq bi(2)$

$\vdots$

$\neq bi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Противоречие с сюръект. bi

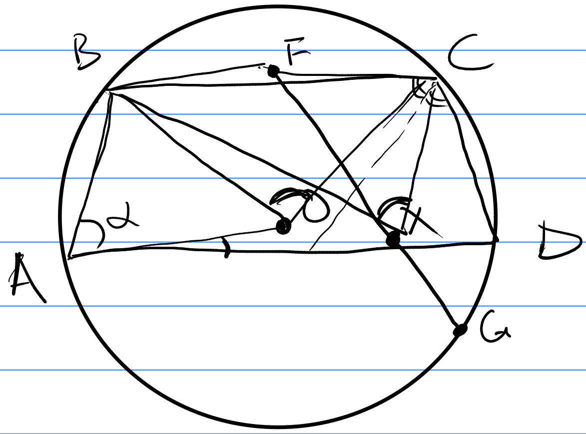
(не пользуемся инъект. bi)

(возвращаемся к теореме)

$$|\mathbb{N}| \underset{\text{по лемме}}{<} |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]| \underset{[0,1] \subset \mathbb{R}}{\leqslant} |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

∎

Следствие $\mathbb{N}, < \{0,1\}^{\mathbb{N}} < \{0,1\}^{(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} < < < < \dots$



$2\alpha = \overset{\smile}{BD} = \overset{\smile}{CA}$

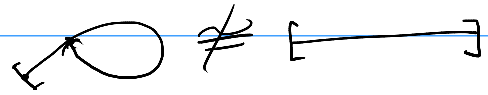
$\angle BFC > \angle BOC$
$\angle BGC < \angle BOC$
$\angle BXC = \angle BOC$

Топология

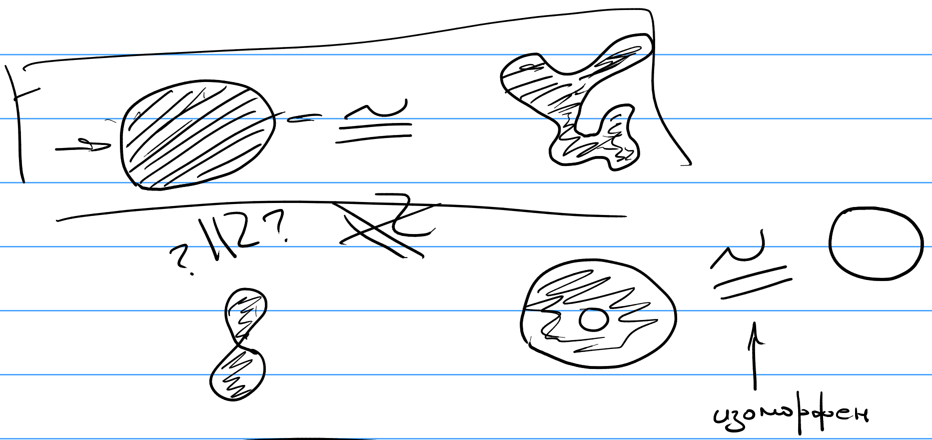
Идея 1: Размер не имеет значения

$[0, 1] \cong [0, 2]$ (Top)

Идея 2: Непрерывность



$f: A \to B$ не непрерывно



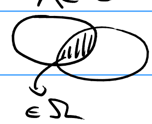
A^B

$|2^X| = 2^{|X|}$ (X - кон.)

Опр X – множество, $X \neq \varnothing$. $\Omega \subset 2^X$ (булеан – мн-во всех подмн-в)

Ω ⓝ топологией на X, если:

① $\varnothing, X \in \Omega$ ② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$

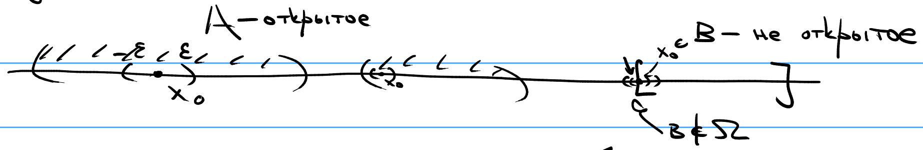


③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega$

(в частности, $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cup B \in \Omega$)
$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$

В таком случае мн-ва $A \in \Omega$ (н) открытыми.

Пример: $\mathbb{R}$



$$\Omega = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x_0 \in A \ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)}_{} \subset A\}$$

$O_\varepsilon(x_0)$ — ε – окрестность точки x_0

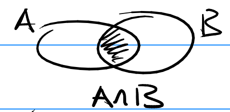
Задача $X = \mathbb{R}$, $\Omega' = \{\varnothing\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ бесконечно}\} \subset 2^{\mathbb{R}}$

(!) Правда ли, что Ω' — топология?

① $\varnothing, \mathbb{R} \in \Omega'$ ✓

② $A, B \in \Omega' \Rightarrow A \cap B \in \Omega'$ ✗ $\quad A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$

③ $\mathcal{A} \subset \Omega' \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega'$



$A, B \in \Omega'$

1) $A = \varnothing \vee B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2) A, B — бесконечные 2.1) $A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2.2) $A \cap B \neq \varnothing$

Ω' — не топология

$A = (-\infty, 1]$

$B = [1, +\infty)$ $\quad A \cap B = \{1\}$ ✗

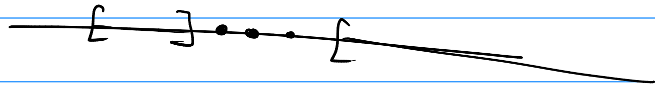
Опр X — мн-во, $\mho \subset 2^X$ (н) системой замкнутых мн-в, если

① $\varnothing, X \in \mho$

② $A, B \in \mho \Rightarrow A \cup B \in \mho$

③ $\mathcal{A} \subset \mho \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mho$

$\mathbb{R}$



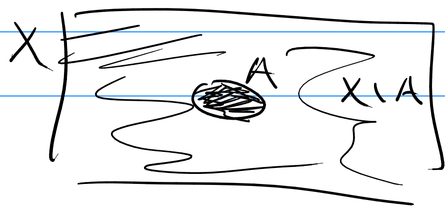
Свойство $(\Omega \longleftrightarrow \mho)$

$\forall (X, \Omega)$. $\mho := \{X \setminus A \mid A \in \Omega\}$ — сист. замк. мн-в

$\forall (X, \mho)$. $\Omega := \{X \setminus A \mid A \in \mho\}$ — топология

Д-во упражнение

(проверить аксиомы)



Задача $X = [0, +\infty)$ $\Omega = \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$

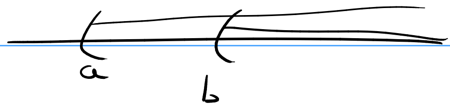
Правда ли, что Ω — топология?

① $\varnothing, X \in \Omega$ ✓ (по опр.)

② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$? ✓

$A = (a, +\infty)$, $B = (b, +\infty)$

$A \cap B = (\max(a, b), +\infty)$



③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \cup \mathcal{A} \in \Omega$ — упр.

---

1. a) $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3}$ $\Rightarrow$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$

$\Rightarrow$ $4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{array}\right.$

$2\cos x(2\sin x - 1) + \sqrt{3}(2\sin x - 1)$

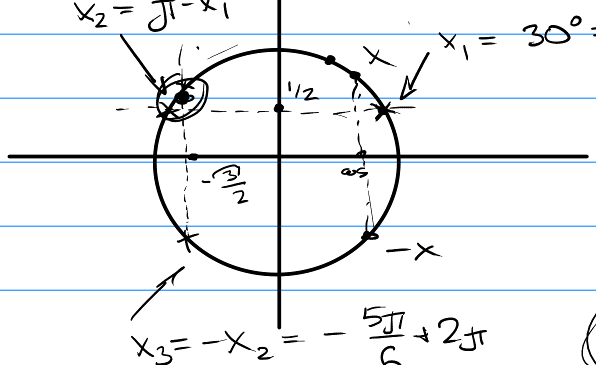
$= (2\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$\frac{5\pi}{6}$

$x_2 = \pi - x_1 =$

$x_1 = 30° = \pi/6$



$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(180° - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\parallel$

$\frac{5\pi}{6}$

$x_3 = -x_2 + 2\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$[0, 2\pi)$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x) = \cos(-x)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

① $A + \alpha := \{x + \alpha \mid x \in A\}$

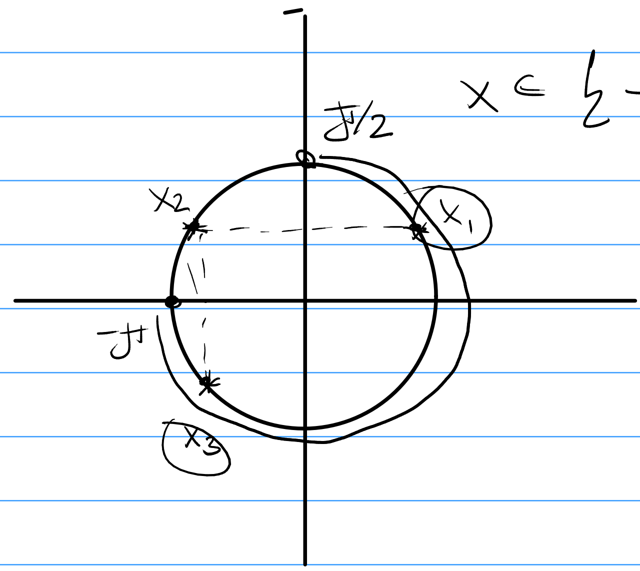
$[0, 1) + 6 = [6, 7)$

② $A + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + 2\pi k)$

$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\{\pi/6, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\} + 2\pi k\right)$ — мат. запись

$x = \pi/6 + 2\pi k \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ — ЕГЭ

б)



$x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

$x = -\frac{5\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{\pi}{6}$

---

2. $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0$

$f_a(x) = a^x, \quad a > 0. \qquad g_a(x) = \log_a x = f_a^{-1}(x)$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(a^x) = x$

Свойства экспоненты

1. $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$
2. $a^1 = a \quad \forall a > 0$
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

($0^0 = ?$ <u>неопределено</u>)

(e^x можно опред. через эти 3 св-ва)

Свойства логарифма $\qquad \log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x$

1. $0 = \log_a 1 \quad \forall a > 0$
2. $1 = \log_a a \quad \forall a > 0$
3. $x + y = \log_a (a^x \cdot a^y)$

$u = a^x, \quad v = a^y$

$x = \log_a u \quad y = \log_a v$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$\forall u, v > 0$

4. Забьём
5. Забьём

$$2 \underbrace{\log_2^2 (2 \cos x)}_{\overset{③}{=} (\log_2 2 + \log_2 (\cos x))^2} - 9 \underbrace{\log_2 (2 \cos x)}_{\overset{③}{=} \log_2 2 + \log_2 (\cos x)} + 4 = 0$$

$\log_2 2 \overset{②}{=} 1$

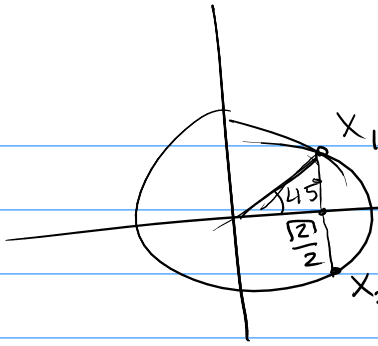
$$2 (\log_2 (\cos x) + 1)^2 - 9 (\log_2 (\cos x) + 1) + 4 = 0$$

$$2 \log_2^2 (\cos x) + 4 \log_2 (\cos x) + 2 - 9 \log_2 (\cos x) - 9 + 4 = 0$$

$$2 \log_2^2 (\cos x) - 5 \log_2 (\cos x) - 3 = 0$$

$$(2 \log_2 (\cos x) + 1) \cdot (\log_2 (\cos x) - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 (\cos x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \log_2 (\cos x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 2^3 > 1 \ \times \end{array}\right.$$



$x_1 = 45° = \pi/4$. $\quad x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$

$x_2 = -x_1 + 2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{7\pi}{4}$

Ответ: $x \in \{\pi/4,\ 7\pi/4\} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

или

$x = \pi/4 + 2\pi k \ \vee\ x = 7\pi/4 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

$\quad\quad\quad \parallel$

$-\pi/4 + 2\pi k$

$\quad\quad\quad \parallel$

$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi k = \ldots$

3. $\dfrac{2\sin^2 x + \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0 \iff$

$\dfrac{a}{b} = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x = 0 \iff \sin x\,(2\sin x + 1) = 0 \\ 2\cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Downarrow$

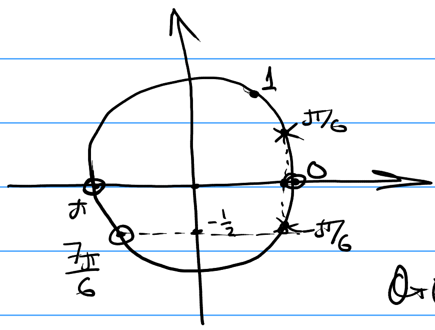
$x \neq \pi/6,\ -\pi/6$
$+ 2\pi k$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\sin x = -1 \end{array}\right.$

$\Updownarrow$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

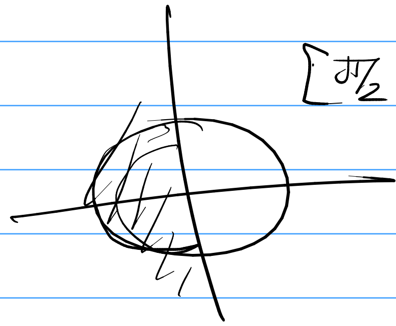


Ответ: $x \in \{0,\ \pi,\ \frac{7\pi}{6}\} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

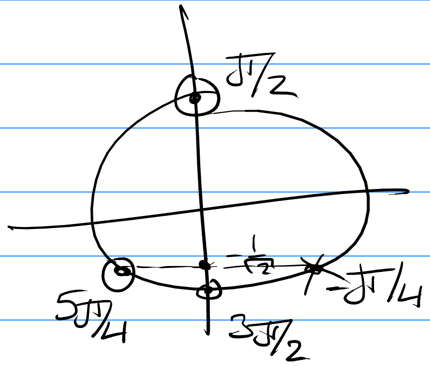
4. $(\sqrt{2}\sin x+1)\sqrt{-5\cos x}=0 \Leftrightarrow$

ОДЗ: $-5\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq 0$

ОДЗ: $\left[\pi/2,\ 3\pi/2\right]+2\pi k$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos x=0\end{array}\right.$



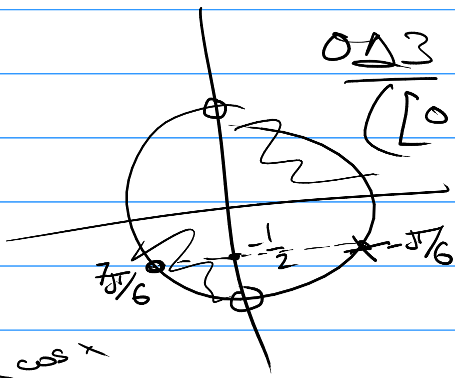
Ответ: $x\in\{\pi/2,\ 5\pi/4,\ 3\pi/2\}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

5. $(\cos x-\sin 2x)(1+\sqrt{\operatorname{tg} x})=0 \Leftrightarrow$

ОДЗ: $\operatorname{tg} x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\cdot\cos x\geq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\sin 2x\\ \underbrace{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}_{\geq 1}=0\end{array}\right.$

ОДЗ: $\left([0,\ \pi/2)\cup[\pi,\ 3\pi/2)\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$



$\cos x=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$1=2\sin x$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

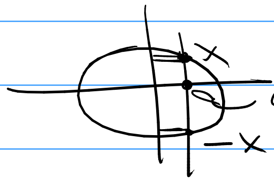
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

Ответ: $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

6. $\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x + \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2} \Leftrightarrow$

ОДЗ: $\mathbb{R}$



$\cos(-x) = \cos x$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$= \sin(\bar\alpha + \bar\beta) + \sin(\bar\alpha - \bar\beta) =$

$= \sin\bar\alpha\cos\bar\beta + \cancel{\sin\bar\beta\cos\bar\alpha} +$

$+ \sin\bar\alpha\cos\bar\beta - \cancel{\sin\bar\beta\cos\bar\alpha} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\bar\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\bar\beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

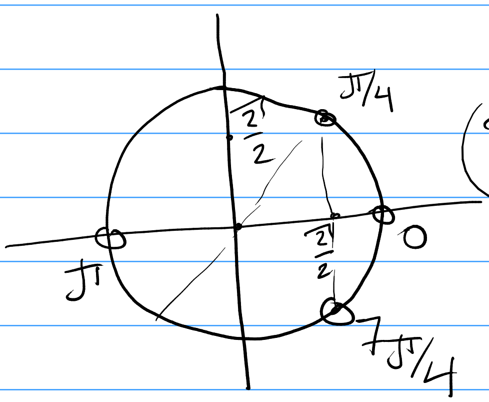
$\alpha = \bar\alpha + \bar\beta$

$\beta = \bar\alpha - \bar\beta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin 4x} + \sin x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin 4x} - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 1 = \sqrt{2}\cdot\cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$



$0.110110011\ldots = \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.0110110011\ldots$ ✓

$1/\sqrt{2} = ???$

Ответ: $x \in \{0, \pi/4, \pi, 7\pi/4\} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

7. $36^{\sin 2x} = \underbrace{6^{2\sin x}}$ $\qquad a^p = b^q \Leftrightarrow c^{p'} = c^{q'}$

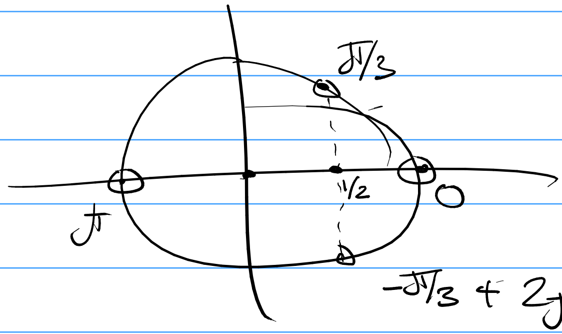
$(6^2)^{\sin x}$

$\shortparallel$

$36^{\sin x} \Leftrightarrow$

$(a>0, a\neq 1) \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad \underset{\underset{2\sin x\cos x}{\shortparallel}}{\sin 2x} = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$



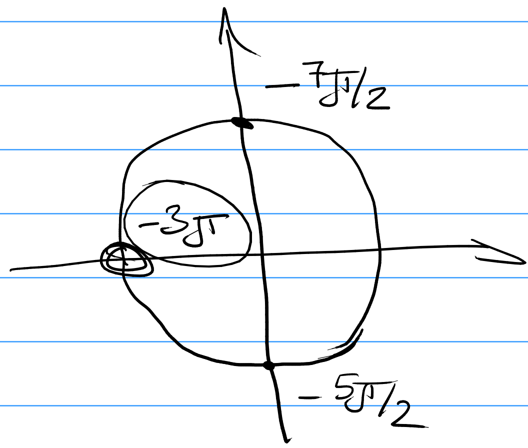
$-\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3$

Ответ: $x \in \{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3\} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in [-7\pi/2, -5\pi/2]$

2

$-7\pi/2 + 4\pi = \pi/2$



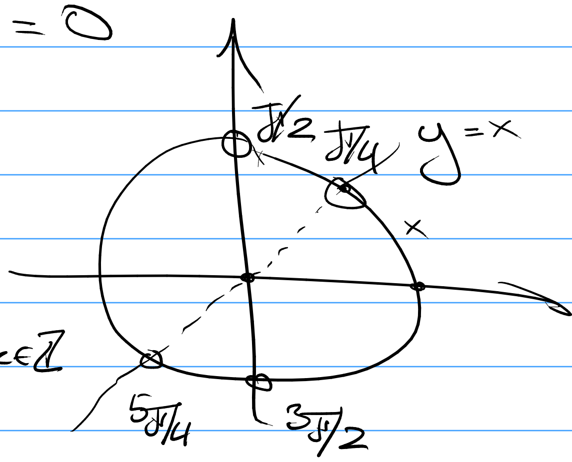
8. $2\sin^2 x - 2\underbrace{\cos 2x}_{\parallel} - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x =$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x - \cancel{2}\sin x\cos x = 0$

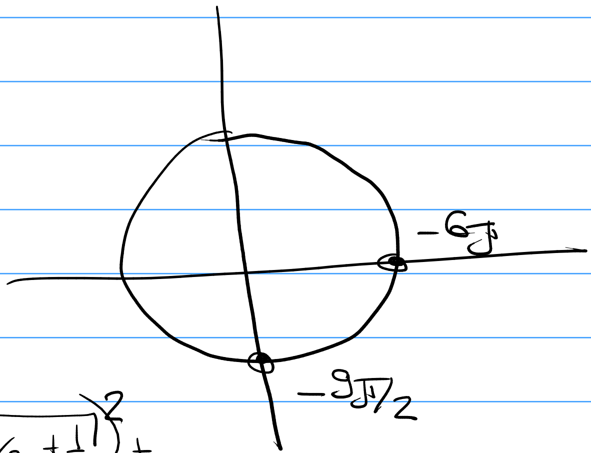
$\cos x(\cos x - \sin x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right.$$



Ответ: $x \in \{\pi/4, \pi/2\} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $x \in [-6\pi, -9\pi/2]$



9. $3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 4 = \left(\sqrt{-x^2 - x/2 + \frac{1}{2}}\right)^2 + x^2 + x/2 + 5/2$

ОДЗ: $-x^2 - x/2 + 1/2 \geq 0$

$2x^2 + x - 1 \leq 0$

$2(x - \frac{1}{2})(x+1) \leq 0$

ОДЗ $[-1, 1/2]$

$$3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 4 = 3$$

$$3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\shortparallel$$

$$3^1 \cdot 3^{2x} - 4\cdot 3^x + 1 \longleftarrow a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\shortparallel$$

$$3\cdot (3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 1 \longleftarrow a^{pq} = (a^p)^q$$

$y = 3^x$ $\quad 3y^2 - 4y + 1 = 0, \quad y > 0$

$$(3y^2 - 3y) - (y-1) = 0$$

$$3y(y-1) - (y-1) = 0$$

$$(3y-1)(y-1) = 0$$

$$y = 1 \vee y = 1/3$$

$$3^x = 1 \qquad 3^x = 1/3$$

$$x = 0 \qquad x = -1.$$

✓

δ) $x \in [\log_2 \frac{1}{6}, \log_2 \frac{2}{3}]$?

$\wedge \quad \wedge \vee \qquad -1$ ✓

$-1 \quad 0 \quad -1 \qquad 0$ ✗

10. $2\log_4^2(\sin x) - x^2 + 21 = \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 + 7\log_4(\sin x)$

<u>ODZ</u>: $-5 \le x \le 5 \qquad x \in [-5, 5]$

$$2\log_4^2(\sin x) \cancel{-x^2} + 21 = 25 \cancel{-x^2} + 7\log_4(\sin x)$$

$y = \log_4(\sin x)$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$y = 4 \vee y = -1/2$$

1) $y = 4 \Leftarrow \log_4(\sin x) = 4$

$\sin x = 4^4 = 256$ X

2) $\log_4(\sin x) = -1/2$

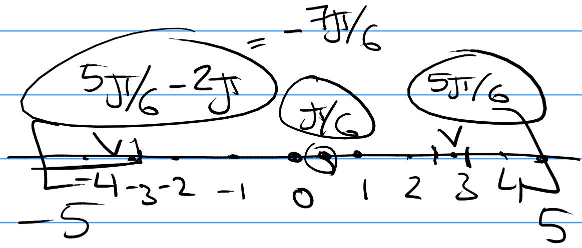
$4^{\log_4(\sin x)} = 4^{-1/2}$ $\qquad \log_4 a = b :$

$\qquad 4^b = a$

$\sin x = 1/2$

$x = \pi/6 + 2\pi k \ \vee \ x = 5\pi/6 + 2\pi k$

$\pi > 3 \qquad 2\pi > 6$



$3 < \pi < 4$

$1/2 < \pi/6 < 2/3$

$\cancel{\pi <} \quad 2\pi < 7$

$5/2 < 5\pi/6 < 10/3$

$-2\pi > -7$

$\quad\ \| \qquad\qquad\quad \|$

$2 + 1/2 \qquad 3 + 1/3$

$5\pi/6 > 2$

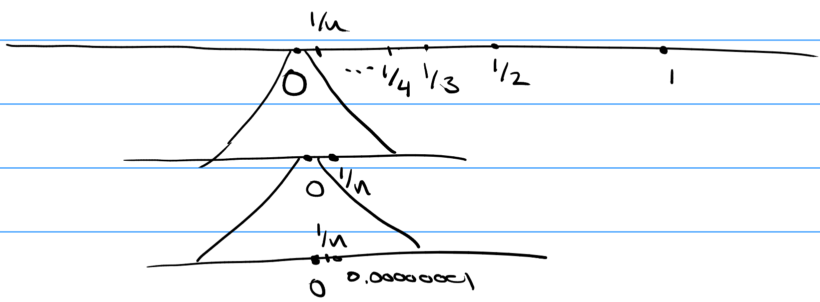
$5\pi/6 - 2\pi > -5$

Пределы

1. Пределы последовательностей

$(a_n) \in \mathbb{R} \qquad a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \in \mathbb{R} \qquad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_n = a(n)$

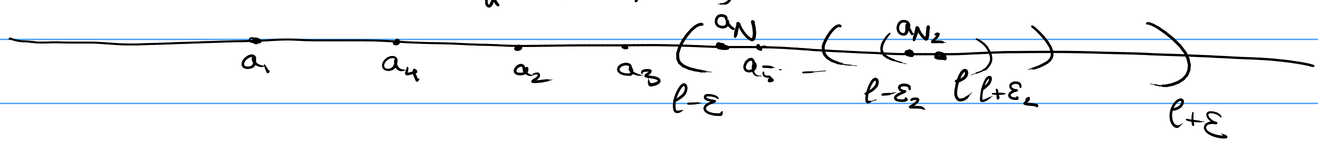


$a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$

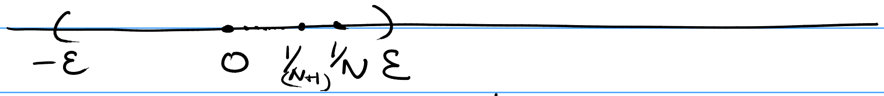
Опр: $(a_n) \in \mathbb{R}$. $\ell \in \mathbb{R}$ н пределом (a_n) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:$

$n\ge N \Rightarrow |a_n-\ell|<\varepsilon$

$a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$



Пример $a_n=\frac{1}{n}$ $\ell=0$ — предел $(\frac{1}{n})$ $\left(\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$



$\varepsilon = \frac{1}{1000}$

$\frac{1}{\varepsilon} = 1000$

$\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil = 1000$

$\forall\ \varepsilon>0.$

$a_N = \frac{1}{N} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{1}{\varepsilon}$

$N = \lceil \frac{1}{\varepsilon}\rceil + 1 > \lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil \ge \frac{1}{\varepsilon}$

$N>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N}<\varepsilon$

(!) $\forall n\ge N$ $\frac{1}{n}<\varepsilon$

$n\ge N \Rightarrow \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Примеры:

1) $a_n = 1-\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\quad |a_n-1| = |\cancel{1}-\frac{1}{2^n}-\cancel{1}| = |-\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{n} \to 0$, > 0

$n\to\infty$ означает что n становится сколь угодно большим

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: n\ge N \Rightarrow \frac{1}{2^n}<\varepsilon$

$N = \lceil\log_2\frac{1}{\varepsilon}\rceil+1$

2) $a_n = 5+\frac{2-1/n^3}{6+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{16}{3}$

$N > \lceil \log_2\frac{1}{\varepsilon}\rceil \ge \log_2\frac{1}{\varepsilon}$

$2^N > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad n\ge N \Rightarrow \frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2^N}<\varepsilon$

$\frac{1}{2^N}<\varepsilon$ $\quad a_n\to 1.$

Утв: $a_n \to l \in \mathbb{R}$, $b_n \to k \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) $(a_n + b_n) \to (l+k)$
2) $(a_n - b_n) \to (l-k)$
3) $(a_n b_n) \to lk$
4) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{k}$ (при условии, что $k \neq 0$)

Д-во: 1) (!) $\underbrace{(a_n+b_n)}_{c_n} \to l+k$ — это значит

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ |(a_n+b_n)-(l+k)| < \varepsilon$ — хотим

$\sphericalangle\ \varepsilon > 0$ Знаем что $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

$\Rightarrow \varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2} \ \exists N_a \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_a \ \underline{|a_n - l| < \varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2}}$

$b_n \to k$

$\Rightarrow \varepsilon_b = \varepsilon/2 \ \exists N_b \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_b \ |b_n - k| < \varepsilon_b = \varepsilon/2$

$N = \max\{N_a, N_b\}$

$\sphericalangle\ n \geq N \Rightarrow n \geq N_a,\ n \geq N_b \Rightarrow |b_n - k| < \varepsilon/2$

$\Downarrow$

$|a_n - l| < \varepsilon/2$

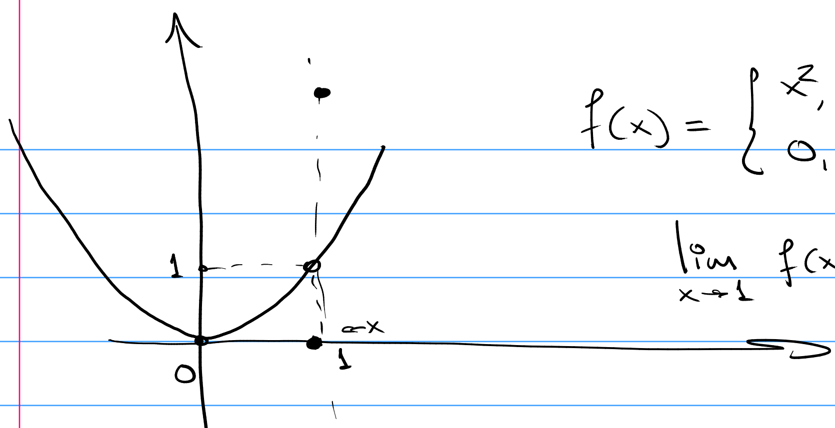
$$\underbrace{|(a_n+b_n)-(l+k)|}_{} = |(a_n - l) + (b_n - k)| \leq \underset{\varepsilon/2}{\underset{\wedge}{|a_n - l|}} + \underset{\varepsilon/2}{\underset{\wedge}{|b_n - k|}} < \underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon/2 + \varepsilon/2}}$$

Тогда $(a_n + b_n) \to (l+k)$ $\blacksquare$

2. Предел функции

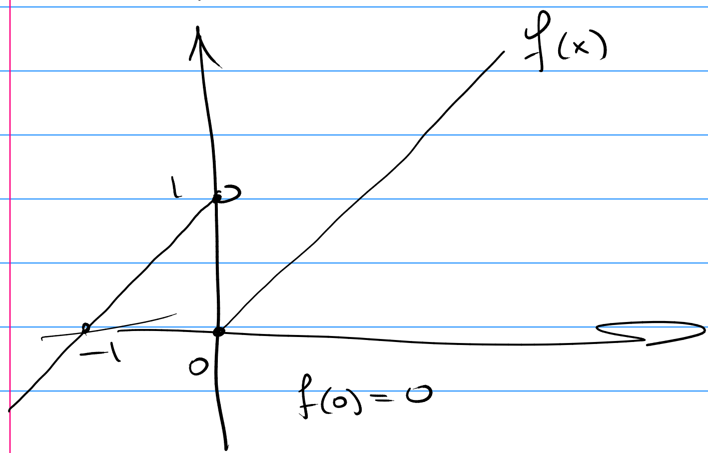
? $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Опр: $l \in \mathbb{R}$ @ пределом $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Longleftrightarrow$ $\forall a_n \to x_0,\ f(a_n) \to l$.



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ $\qquad f(1) = 0$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$f(0) = 0$

<u>Теорема.</u> $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$, $\quad g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} k$ Тогда

1) $(f(x)+g(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} l+k$

— и — $f(x)g(x)$

— и — $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $k \neq 0$)

<u>Теорема</u> $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$, $\quad h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$,

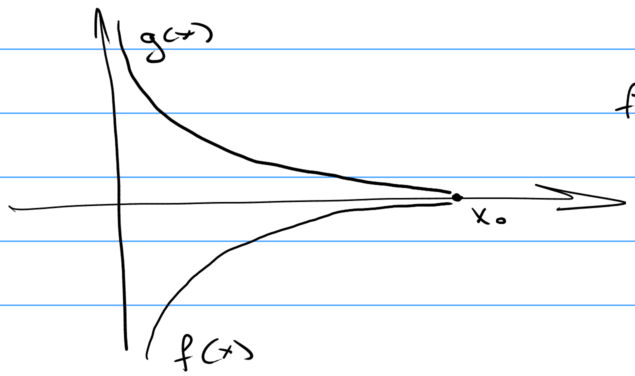
$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $\quad f(x) \le g(x) \le h(x)$

Тогда $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ (теорема о двух милиционерах)

<u>Теорема:</u> $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$, $\quad g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} k$

$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $\quad f(x) \le g(x)$.

Тогда $l \le k$.



$f(x) < 0 < g(x) \quad \forall x$

но при этом

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Нет строгого нер-ва.

Задача

$$\frac{x+1}{x^2-1} \quad (x \to -1) \qquad \frac{0}{0} \; ???$$

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Теорема: $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \overbrace{a_n}^{\neq 0} x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + \underbrace{b_m}_{\neq 0} x^m}$ — рациональная функция (частное двух многочл.)

Тогда:

1) $n = m$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m} = \dfrac{a_n}{b_n}$

2) $n > m$ Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot \operatorname{sign} \dfrac{a_n}{b_n}$

$$\operatorname{sign} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -1, & \frac{a_n}{b_n} < 0 \\ 1, & \frac{a_n}{b_n} > 0 \end{cases}$$

3) $n < m$ Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Д-во

1) $(x \to +\infty) \quad x > 0$

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} = \frac{\overbrace{a_0/x^n}^{\to 0} + \overbrace{a_1/x^{n-1}}^{\to 0} + \ldots + \overbrace{a_{n-1}/x}^{\to 0} + a_n}{\underbrace{b_0/x^n}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{b_{n-1}/x}_{\to 0} + b_n} \to \frac{a_n}{b_n}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x^k} \to 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n-k}}{x^k} \to 0 \quad (\forall k > 0)$$

2) $n > m$

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{\overbrace{a_0/x^m}^{\to 0} + \overbrace{a_1/x^{m-1}}^{\to 0} + \ldots + \overbrace{\frac{a_{m-1}}{x}}^{\to 0} + \overbrace{a_m}^{\to a_m} + a_{m+1}x + \ldots + a_n \cdot x^{n-m}}{\underbrace{\underbrace{b_0/x^m}_{\to 0} + \underbrace{b_1/x^{m-1}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{b_{m-1}}{x}}_{\to 0} + b_m}_{\to b_m}}$$

$$a_{m+1} x^1 + a_{m+2} x^2 + \ldots + a_n x^{n-m} =$$

$$= \underbrace{x^{n-m}}_{\to +\infty \; (n>m)} \left(\underbrace{\frac{a_{m+1}}{x^{n-m-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_{m+2}}{x^{n-m-2}}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\to 0} + \underbrace{a_n}_{\to a_n} \right)$$

$$\to a_n \cdot (+\infty) = \operatorname{sign} a_n \cdot (+\infty)$$

$$f(x) \longrightarrow \frac{\operatorname{sign} a_n \cdot +\infty}{b_m} = \frac{\operatorname{sign} a_n}{\operatorname{sign} b_m} \cdot (+\infty) = \operatorname{sign} \frac{a_n}{b_m} \cdot (+\infty)$$

$$\frac{-x^2+5x-20000}{-x+1000000} \longrightarrow +\infty$$

3) $n < m$

$$f(x) = \frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\dots+b_mx^m} = \frac{1}{\underbrace{\frac{b_0+b_1x+\dots+b_mx^m}{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}}_{g(x)}}$$

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$g(x) \longrightarrow \pm\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2} = \frac{2}{3} \qquad (x \to +\infty)$$

$$2 \cdot (-1)^2 - 3(-1) - 5 = 2+3-5 = 0$$

$$\frac{2x^2-3x-5}{x+1} \xrightarrow[x \to -1]{} ?$$

$$x+1 \to 0$$

$$2x^2-3x-5 = 2(x-x_1)(x-x_2), \quad x_1 = -1$$

$$= 2(x+1)(x-x_2)$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & 2x+2 \\ -(2x^2+2x) & x - 5/2 \\ \hline -5x-5 & \\ -(-5x-5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \frac{2\cancel{(x+1)}(x-5/2)}{\cancel{x+1}} \to 2(-1-5/2) = -2-5 = -7$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = \frac{2(4-x^2)}{x^2+4x-12} = \frac{2\cancel{(2-x)}(2+x)}{\cancel{(x-2)}(x+6)} = -\frac{2(2+x)}{x+6}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x-12 & x-2 \\ -\ x^2-2x & \overline{x+6} \\ \hline 6x-12 & \\ -\ 6x-12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\downarrow x\to 2$

$$-\frac{8}{8}=-1$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5(x-3)} = \qquad (x\to 3)$$

$$= \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{хотим}} = \underbrace{(a-b)(a+b)}_{\text{имеем}}$$

$$= \frac{x+6-(10x-21)}{5(x-3)\underbrace{(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}} = \frac{-9x+27}{5(x-3)(\ldots)} = -\frac{9}{5}\cdot\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\ldots)} =$$

$$= -\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{(\ldots)} \xrightarrow[x\to 3]{} -\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{6} = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} \qquad (x\to -2)$$

$$\| $$

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)\cdot(\sqrt{x+6}+2)}{\underbrace{x+6-4}_{\cancel{x+2}}} =$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x+2 \\ -\ x^2+2x & \overline{x-1} \\ \hline -x-2 & \\ -\ -x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= (x-1)(\sqrt{x+6}+2) \xrightarrow[x\to -2]{} -12.$$