ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук) $\quad 3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...)

$\sin 2x + \sqrt{3}\cdot\sin(x-\pi) = 0 \qquad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1)$

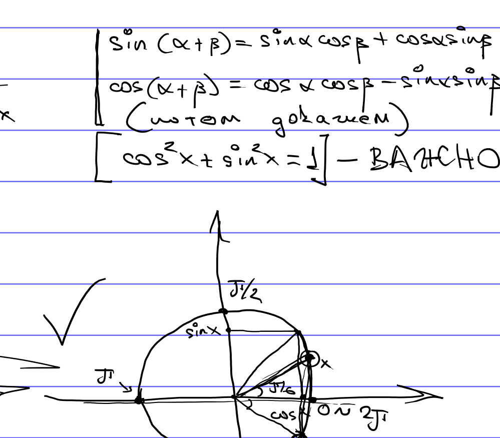
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

1) $\sin x = 0$
$x = \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$
$\cos x = \sqrt{3}/2 \qquad 30^\circ = \pi/6$
$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

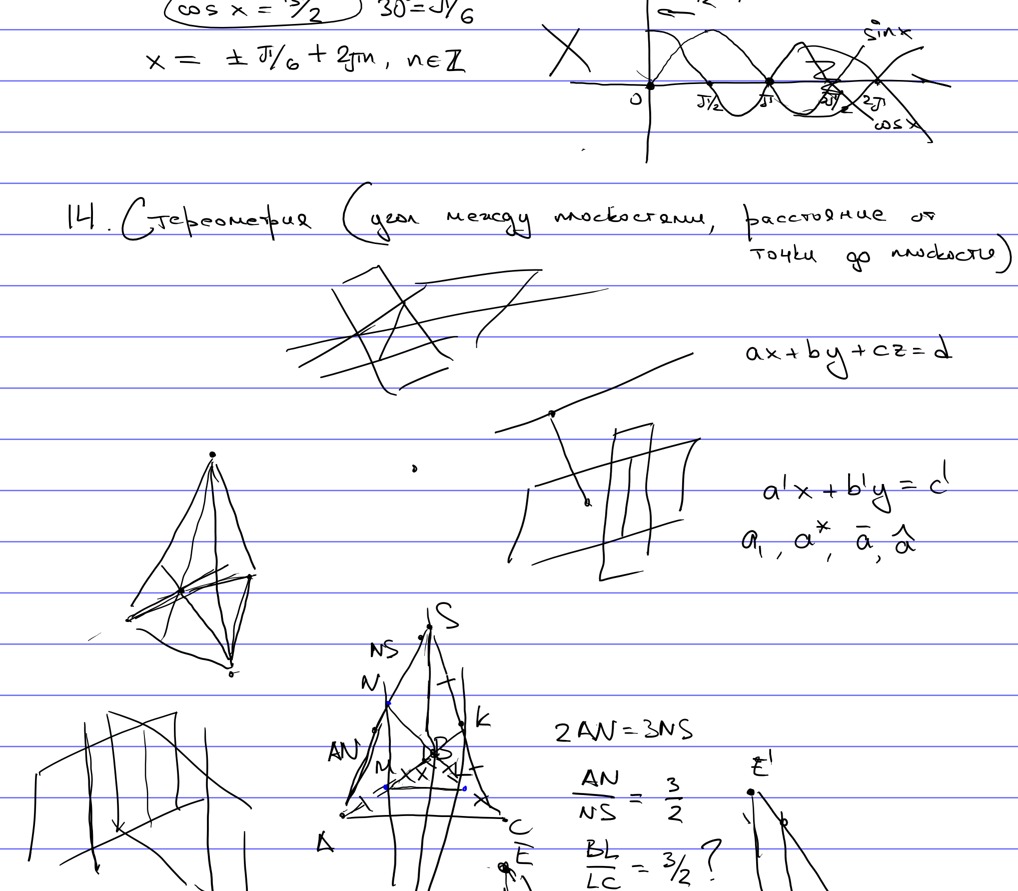
$ax + by + cz = d$

$a'x + b'y = c'$
$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$

$2AN = 3NS$

$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2\ ?$



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha+\beta < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\alpha = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

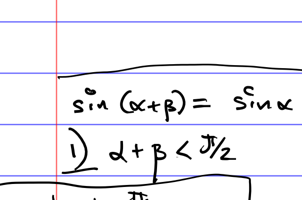
$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{h_1}{b} + \frac{b'}{b}\cdot\frac{h_1}{a}$
$\qquad \sin\alpha\ \ \cos\beta\ \ \sin\beta\ \ \cos\alpha$

(Д/з) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta<\pi,\ \alpha+\beta>\pi,\ \alpha+\beta>3\pi/2$ ...)

Вариант 2 — формулы приведения



1. $\boxed{\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha}$
$\boxed{\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha}$

$\cos(\alpha-\pi/2) = \sin\alpha \qquad \sin(\alpha-\pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$

2. sin — нечётная, cos — чётная
$\sin(-x) = -\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cos(-x) = \cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$
$-\alpha = \beta \qquad \sin(\beta+\pi/2) = \cos(\beta)$

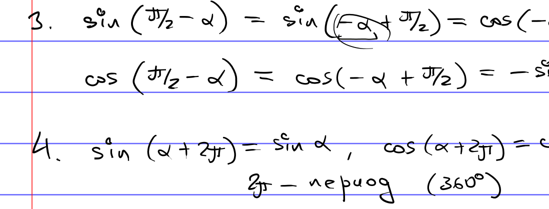
$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$
2π — период (360°) radian $\quad \pi \to \pi$ rad
$\omega\ s^{-1} \to \omega$ rad s^{-1}

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\alpha,\beta > 0$
б.о.о. $\alpha > \pi/2 \qquad \alpha = \gamma + \pi/2,\ 0<\gamma<\pi/2$
$\gamma+\beta = \beta+\alpha-\pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\beta+\pi/2) =$
$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$
$= \cos(\alpha-\pi/2)\cos\beta - \sin(\alpha-\pi/2)\sin\beta =$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



$A/2 \quad t_2 = t_0 \quad t_1 = 0$

simple harmonic motion

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot(t-t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = 1.8s$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R\cdot\cos(\omega(t-t_1))$

$x(t) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{A}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3s$

Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во $\quad A, \quad x\in A$ "x лежит в A"

2) Всё — множество $\quad 0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$
$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\},\ 3 = ...$

3) Бесконечности $\quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — „самое большое мн-во"

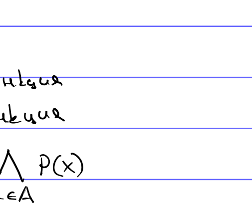
Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами.
$\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов
$A = \{n\in\mathbb{N}\mid n \vdots 2\} = \{2,4,6,...\}$ (аксиома выделение)
св-во $\qquad B\in A \Rightarrow B\notin B$

3) Парадокс Рассела $\quad A = \{x \mid x\notin x\} \quad A\in A \Rightarrow A\notin A$?!!
$A\notin A \Rightarrow A\in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр: A, B — мн-ва
$A\cup B = \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$
$A\cap B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$
$A\setminus B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$
$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



Предикаты и кванторы

$P(x)$ — предикат $\qquad P(x)\wedge Q(x)$ — конъюнкция
$P(x)\vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\qquad \forall x\in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\qquad \exists x\in A: P(x) = \bigvee_{x\in A} P(x)$

$\neg(A\wedge B) = (\neg A)\vee(\neg B) \qquad \neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A}\neg P(x)$

$\neg(\forall x\in A\ P(x)) = \exists x\in A: \neg P(x)$

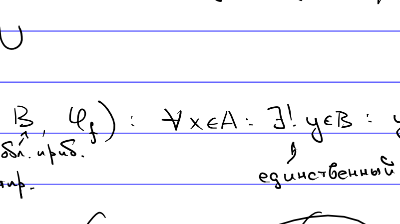
$\neg(\exists x\in A\ P(x)) = \forall x\in A\ \neg P(x)$

Опр: $A, \quad A^C = U\setminus A$

$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$
$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$ — формулы де Моргана
$-\!\!\shortparallel\!\!-\ \ \cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f): \forall x\in A: \exists!\ y\in B: y = f(x)$
обл. отпр. обл. приб. $\qquad$ единственный $\quad y$ наз. образом x относительно f.



2) (Новое) $A, B. \quad A\times B = \{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$
$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$f\subseteq A\times B: \forall x\in A\ \exists!\ y\in B: (x,y)\in f \quad (y = f(x))$

Опр 1) $f: A\to B$ наз. инъективной, если $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
отпр. обл. приб.
наз. сюръективной, если $\forall y\in B\ \exists x\in A: y = f(x)$
наз. биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad f(n) = n$

Опр: $f: A\to B,\ g: B\to A.\ g$ наз. обратной к f $(g = f^{-1})$, если
1) $\forall x\in A: x = g(f(x))$
2) $\forall y\in B: y = f(g(y))$

Теорема: $f: A\to B$. f — обратима ($\exists f^{-1}$) $\Leftrightarrow$ f — биективна

Д-во: $\Rightarrow$: пусть f — обр. $\exists g: B\to A$ т.ч. 1) и 2)
1. f — сюр. $y\in B \quad \forall x = g(y)\in A$ рассмотрим $\quad f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow f$ — сюр
2. f — ин. $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2). \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\qquad x_1 \qquad x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ — ин.
$\Rightarrow f$ — би.

$\Leftarrow$: $\exists f$ — биект. Хотим $g: B\to A$: 1) и 2)
$\forall y\in B \quad f$ — сюр. $\Rightarrow \exists!\ x\in A: y = f(x). \quad g(y) := x$
f — ин. $\qquad$ 1) $\forall x\in A \quad g(f(x)) = x$ ✓
2) $\forall y\in B \quad f(g(y)) = y$ ✓

∎

Задача: $\exists?\ A, B, C$: 1) $A\cap B\neq\varnothing$
2) $B\cap C = \varnothing$
3) $(A\cap B)\setminus C = \varnothing \Leftrightarrow (A\cap B)\cap C^C = \varnothing$

$A\cap B\in C \qquad X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$

$\{1,2,3,4\}\setminus\{3,4,5\} = \{1,2\}$

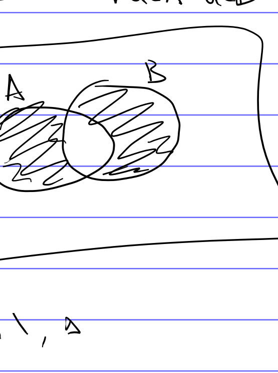
$X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$Y^C = U\setminus Y$

$X\setminus Y = X\cap Y^C$

"$x\cdot(\neg y)$"

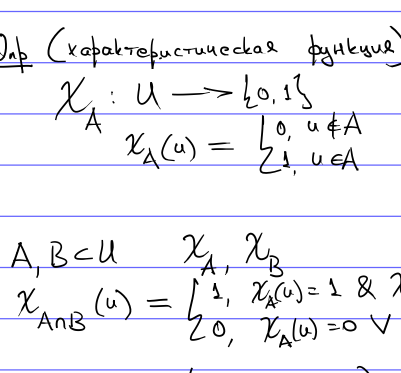
$B\cap C$
$\cup$
$A\cap(B\cap C)$
$\shortparallel$
$(A\cap B)\cap C$
$\shortparallel$
$A\cap B$
$\neq$
$\varnothing$



$B\cap C\neq\varnothing$?!!

$A\subset B \Leftrightarrow \forall a\in A\ a\in B$

1) $A\subset B,\ B\subset C \Rightarrow A\subset C$
2) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$
$A\cap C\neq\varnothing \Rightarrow B\cap C\neq\varnothing$
$\left.\begin{matrix}A\subset B\\ A\neq\varnothing\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\neq\varnothing$
$A\cup B = B$



$\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A\subset U$

$\chi_A: U\to\{0,1\}$

$\chi_A(u) = \begin{cases}0, & u\notin A\\ 1, & u\in A\end{cases} \qquad A\leftrightarrow\chi_A$

$\to A = \{u\in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B\subset U \quad \chi_A, \chi_B$

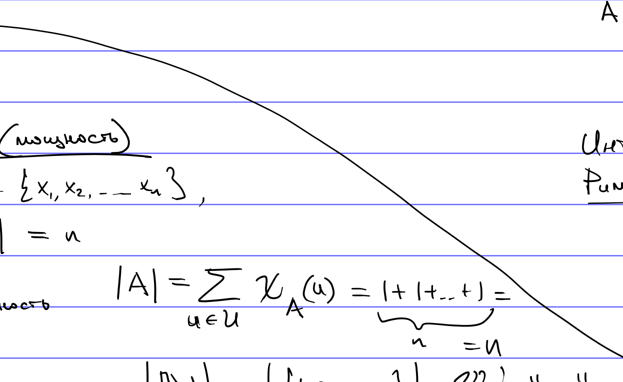
$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases}1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1\\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0\end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$
$\qquad 1 \quad 1 \qquad 1 = 1 \qquad 1 \text{ xor } 1 = 0$

$\chi_{A\Delta B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u) \leftarrow$ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^C}(u) = \chi_A(u)\cdot\underbrace{\chi_{B^C}(u)}_{1-\chi_B(u)} = \chi_A(u)(1-\chi_B(u))$

$\int_S f(x)$



$A\subset S$

$\int_A f(x) = \int_S f(x)\cdot\chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)
$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,
$|A| = n$
мощность

$|A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u) = \underbrace{1+1+...+1}_{n} = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1,2,...\}|$ — ???; "∞"

$A\subset U, \quad |A| = n\in\mathbb{N} \qquad 2^A = P(A) = \{B\subset U \mid B\subset A\}$ — булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$

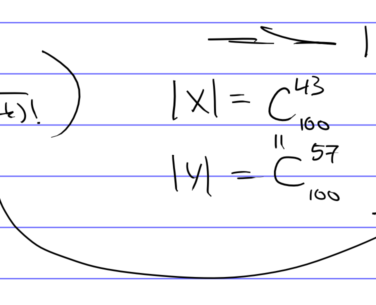
$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad ... \quad a_n$

$f: 2^A \to \{\text{выборов}\}$ — биект. $\qquad$ 2 варианта $\qquad B\subset A$
$\varnothing\subset A$

$|2^A| = |\{\text{выборов}\}|$

$\overset{\shortparallel}{2^n}$

Теорема: $A, B\subset U$ (A, B — кон.) $\quad f: A\to B$ — биективна ($\Leftrightarrow$ обратимая)
$\Rightarrow |A| = |B|$



Задача $|A| = 100 \qquad X = \{B\subset A \mid |B| = 43\} \qquad |X| \leq |Y|$
$Y = \{B\subset A \mid |B| = 57\}$

$43 + 57 = 100 \qquad B\subset A: |B| = 43 \quad B\in X$
$B' = A\setminus B \quad |B'| = 57 \quad B'\in Y$

$f: X\to Y \quad f(B) = A\setminus B$
$g: Y\to X \quad g(B) = A\setminus B$
$|B| = 57$

f и g обратные

f — обратимая, биективная

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \qquad |X| = C_{100}^{43}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad |Y| = C_{100}^{57} \qquad (C_n^k = C_n^{n-k})$

Задача $A\subset U$ кон., $A\neq\varnothing \qquad E(A) = \{B\subset A \mid |B| \vdots 2\} = E\subset 2^A$
$O(A) = \{B\subset A \mid |B| \not\vdots 2\}$

$A = \{1,2,3\}$

$E(A) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ $\quad$ (!) $|E(A)| = |O(A)|$ $\qquad E: Set\to Set$
$A \mapsto E(A)$

$a\in A \qquad f: E(A)\to O(A) \qquad B_1\neq B_2 \in E(A)$
$\Rightarrow f(B_1)\neq f(B_2)$

$B\in E(A)$
$|B| \vdots 2 \qquad$ 1) $a\in B \quad |B\setminus\{a\}| \not\vdots 2$
$\qquad |B| - 1 \qquad f(B) = B\setminus\{a\}$

2) $a\notin B \quad f(B) = B\cup\{a\} \quad |f(B)| \not\vdots 2$

Упр (!) f — сюр., ин.
или $\quad g: O(A)\to E(A): \quad f(g(B)) = B, \quad g(f(B)) = B, \quad \forall B$

$g = f', \quad f': O(A)\to E(A)$

$\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$\varphi(n) = \begin{cases}0, & n\vdots 2\\ 1, & n\not\vdots 2\end{cases} \qquad \varphi(3) = 1$

1) $\forall B\in O(A) \quad f(f'(B)) = B$ ✓
$\forall B\in O(A) \qquad$ 1. $a\in B \quad f'(B) = B\setminus\{a\}$
$f(f'(B)) = f(B\setminus\{a\}) = \overbrace{(B\setminus\{a\})}^{C}\cup\{a\} = B$
$a\notin$

$f(C) = \begin{cases}C\setminus\{a\}, & a\in C\\ C\cup\{a\}, & a\notin C\end{cases}$

2. $a\notin B \quad f'(B) = B\cup\{a\}$
$f(f'(B)) = f(B\cup\{a\}) = (B\cup\{a\})\setminus\{a\} = B$
$a\in$

2) $\forall B\in E(A) \quad f'(f(B)) = B$ — упр

$\Rightarrow f'$ — обр. к $f \qquad E(A) \overset{f}{\underset{f'}{\leftrightarrows}} O(A)$

$\Rightarrow |E(A)| = |O(A)|$

Задача (!) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$

$|A| = n \qquad C_n^k = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|$

$\underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + ... + C_n^n}_{|E(A)|} \underbrace{- C_n^1 - C_n^3 - C_n^5 - ... - C_n^{n-1}}_{-|O(A)|} = 0 \qquad (n\vdots 2)$

Задача $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + ... + C_n^{n-1}a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$

$\shortparallel$

$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot...\cdot(a+b)}_{n} = \sum_j \alpha_j a^i b^j =$

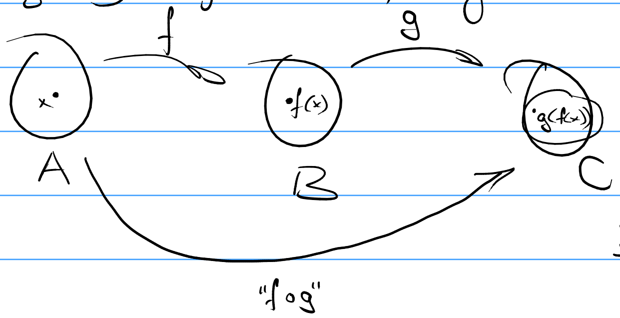
$a^2 b^{n-2}$
$\to b^n$

$= C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b + C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + ... + C_n^{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1} + C_n^n\cdot b^n$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n}$] — упр (через мощности мн-в)

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|, \quad |A| = n \qquad |2^A| = 2^n$

Опр (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$



h — композиция f и g

$\overbrace{(g \circ f)}^{h}: A \to C$

$a \in A \quad \underset{g \leftarrow f}{(g \circ f)(a)} = \underset{g \leftarrow f}{g(f(a))}$

Зам "$f \circ g$" существует

Диаграммы $\to$ $f \circ g$

Алгебраич. запись $\to$ $g \circ f$

$(g(f(a)))$

$a \in A \quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

Опр A, B — мн-ва. A и B наз. равномощными, если $\exists f: A \to B$: f — биективна

Примеры $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

$f: A \to B$

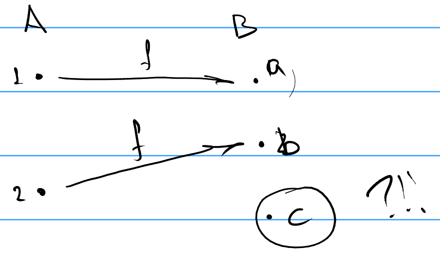
$f(1) = 2$ — ин.

— сюр. $(\forall b \in B \ \exists a \in A: b = f(a))$

$(f(A) = B)$

$\Rightarrow f$ - биект $\Rightarrow |A| = |B|$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ $\quad |A| \neq |B|$



$\underset{\text{би}}{f}: A \to B$

$a = f(1)$

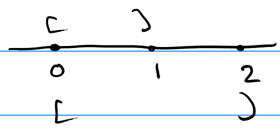
? $b = f(1)$?

Утв. A, B — кон. $\underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A \to B} \Leftrightarrow |A| = |B|$

числа

Д-во Упражнение

Пример $[0,1]$ равн. $[0,2]$ $\quad ([0,1] \cong [0,2])$ — равномощность



$f: [0,1] \to [0,2]$

$f(x) = 2x$ $\quad x_1, x_2 \in [0,1]$ $\quad \underline{f(x_1) = f(x_2)}$

$x_1 = x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $\quad x = y/2 \in [0,1]$ $\quad f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ – сюр.

$\Rightarrow f$ – би.

$g : [0,2] \to [0,1]$ $\qquad f$ и g — обратные

$g(y) = y/2$ $\qquad g = f^{-1}$

<u>Пример:</u> $(0,1) \cong (1, +\infty)$ $\qquad f : (0,1) \to (1,+\infty)$

$f(x) = 1/x$

<u>Упр:</u> f — биективна (через обратную)

<u>Опр</u> A, B — мн-ва. $\qquad A^B := \{ f \mid f : B \to A \}$

$B \xrightarrow{f} A$

A, B - кон. $\qquad |A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $\quad b_1, b_2, \ldots, b_n$

$|A| = m$ $\quad a_1, a_2, \ldots, a_m$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = |A^B|$

<u>Пример</u> $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0, 1, 2, 0, 2, 3, 3, 3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов A

$0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \underbrace{1,1}_{3}, \underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$

$\varphi^{-1} : \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad \varphi$ и φ^{-1} — обратные

$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{2}_{1,0}, \underbrace{0}_{0,0}, \underbrace{1}_{0,1}, \underbrace{3}_{1,1}, \underbrace{3}_{1,1}, 0, 0, 1, 2, \ldots \longrightarrow 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$

<u>Опр</u> $\underset{\text{мн-во}}{A}$ наз. $\underline{\text{счётным,}}$ если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Оп: A (н) не более чем счётным, если A конечно или счётно

Утв: A, B — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс

$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1

1) A — нбчс $\Rightarrow$ $(B \subset A \Rightarrow B$ — нбчс$)$

2) A — беск. $\Rightarrow$ $\exists B \subset A$: B счётно

3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, A_i — нбчс $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_i A_i$ — нбчс

Д-во 1) A: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$\checkmark \quad \checkmark \quad \times \quad \checkmark \ \ldots$

$\rightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$B = \{4, 6, 8\} \subset A$

$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \ldots$

$B = \{8, 10, 12, \ldots\}$

$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \underbrace{8, 10, 12, \ldots}_{B}$

2) $b_1 \in A$

$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.

$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.

$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$

$\vdots$

$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ — беск.

$\vdots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots$, $b_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счётное $\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ A_i — нбчс (!) $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

$A_1 = a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}$

$A_2 = a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \ldots$

$A_3 \quad a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ \ldots$

A_4

1. Не берём повторения

2. Пропускаем пустые ячейки

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \bigcup\limits_i A_i$

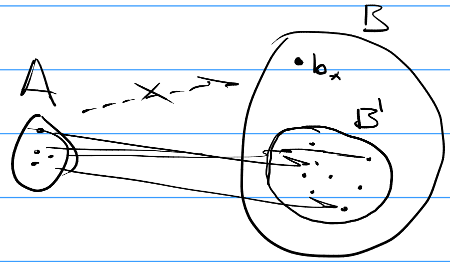
$\subset$ нбчс

<u>Сл-вие</u> A, B — мн-ва, <u>B</u> — нбчс, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow A$ — нбчс

<u>Д-во</u> $B' = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



$f: A \to B'$ — биективна

1) f — инъективна ✓ (по условию)

2) f — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A : b = f(a)$ — по опред. B'

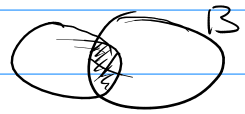
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |A| = |B'| \\ B' \text{ — нбчс (по } T_1) \end{array}\right] \Rightarrow A \text{ нбчс} \quad \blacksquare$$

<u>Упр</u>: A, B — мн-ва, A — нбчс, $f: A \to B$ — сюръективна

$\Rightarrow (!)$ B — нбчс.

<u>Теорема 2</u> A — беск., B — нбчс. $\Rightarrow (!)$ $|A \cup B| = |A|$

<u>Д-во</u>: 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$



A: 2, 4, 6, 8, 10, ... ✓ — беск.

12, 14, 16, 18, ...

B: a, b, c, d, e

2, 4, 6, 8, 10

≀≀ A 2, 4, 6, 8, 10 ...

сюр. ин.) — биект. $\Rightarrow$ $|A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$A \cup B = A \cup B'$

<u>Зам</u> $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

По T_1 $P \subseteq A$, P — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B)$ ≀≀

$A = P \sqcup Q \quad = Q \sqcup P$

По T_1 $P \sqcup B$ — <u>нбчс</u> (утв. 3)

нбчс

При этом P — счётно $\Big\} \Rightarrow$ $P \sqcup B$ — счётное, P — счётное $\Big\} \Rightarrow$

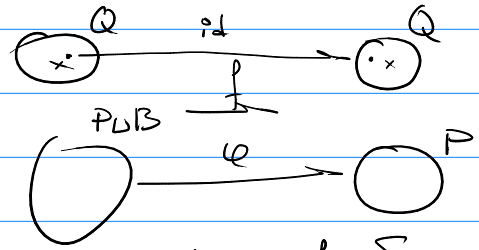
$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность

$\exists\ \varphi: P \sqcup B \to P$ — биект.

$f: Q \sqcup (P \sqcup B) \to Q \sqcup P$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ \varphi(x), & x \notin Q \end{cases}$$



Упр f — биективна

$\Rightarrow |A \sqcup B| = |A|$ ■

Опр A наз. бесконечным, если $|A \cup \mathbb{N}| = |A|$

A наз. бесконечным, если $\exists\ B \subset A:\ B \neq A,\ |A| = |B|$

собственное подмн-во

Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)