ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...) $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3}\cdot\sin(x-\pi) = 0$ $5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

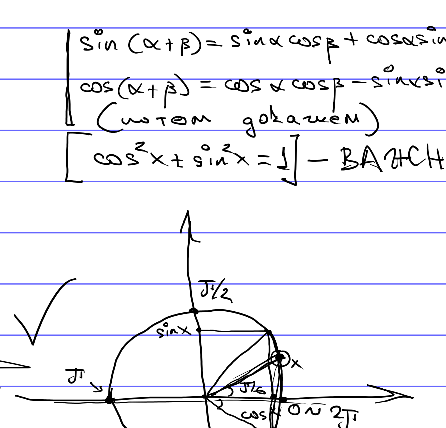
1) $\sin x = 0$

$x = \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $30^0 = \pi/6$

$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

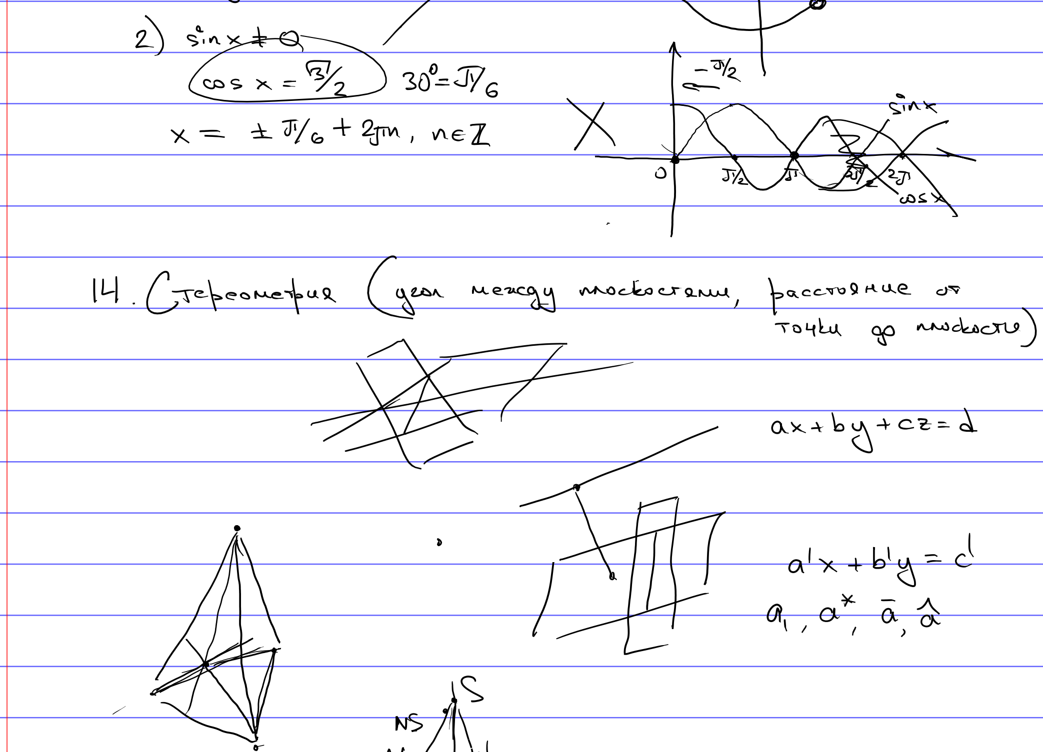
$a'x + b'y = c'$

$a_1, a^*, \bar{a}, \hat{a}$

$2AN = 3NS$

$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha + \beta < \pi/2$ $\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

...

Вариант 1 — ...

Вариант 2 — ...

...

Понятия Теории Множеств

...

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n\in\mathbb{N} \mid n:2\} = \{2,4,6,\dots\}$ (аксиома выделения)

$B\in A \Rightarrow B\notin B$

3) Парадокс Рассела $A = \{x \mid x\notin x\}$ $A\in A \Rightarrow A\notin A$?!! $A\notin A \Rightarrow A\in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow$ A — любое

Опр: A, B — мн-ва $A\cup B = \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$

$A\cap B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$

$A\setminus B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Предикаты и кванторы

x $P(x)$ — предикат $P(x)\wedge Q(x)$ — конъюнкция

$P(x)\vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\forall x\in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\exists x\in A: P(x) = \bigvee_{x\in A} P(x)$

$\neg(A\wedge B) = (\neg A)\vee(\neg B)$ $\neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A}\neg P(x)$

$\neg(\forall x\in A\ P(x)) = \exists x\in A\ \neg P(x)$

$\neg(\exists x\in A\ P(x)) = \forall x\in A\ \neg P(x)$

Опр: A, $A^C = U\setminus A$ $(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$ $(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$ — формулы де Моргана

— " — $\cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi)$: $\forall x\in A\ \exists!\ y\in B: y = f(x)$

обл. опр. обл. зн. единственный y @ образом x относительно f.

2) (Новое)   A, B. $A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f\subseteq A\times B$: $\forall x\in A\ \exists!\ y\in B: (x,y)\in f$ $(y = f(x))$

Опр 1) $f: A\to B$ @ инъективной, если $\forall x_1, x_2\in A$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

@ сюръективной, если $\forall y\in B\ \exists x\in A: y = f(x)$

@ биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(n) = n$

Опр: $f: A\to B$, $g: B\to A$. g @ обратной к f $(g = f^{-1})$, если

1) $\forall x\in A$: $x = g(f(x))$

2) $\forall y\in B$: $y = f(g(y))$

Теорема: $f: A\to B$. f — обратима $(\exists f^{-1}) \Longleftrightarrow$ f — биективна

Д-во: $\Rightarrow$ пусть f — обр. $\exists g: B\to A$ т.ч. 1) и 2)

1. f — сюр. $y\in B$ рассмотрим $x = g(y)\in A$ $f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow$ f — сюр

2. f — ин. $\forall x_1, x_2\in A$: $f(x_1) = f(x_2)$. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f — ин.

$\Rightarrow$ f — би.

$\Leftarrow$: $\exists$ f — биект. Хотим $g: B\to A$: 1) и 2)

$\forall y\in B$ f — сюр. $\Rightarrow \exists! x\in A: y = f(x)$. $g(y) := x$

f — ин.   1) $\forall x\in A$ $g(f(x)) = x$ ✓

2) $\forall y\in B$ $f(g(y)) = y$ ✓

Задача: $\exists$? A, B, C: 1) $A\cap B\neq\varnothing$

2) $B\cap C = \varnothing$

3) $(A\cap B)\setminus C = \varnothing \Longleftrightarrow (A\cap B)\cap C^C = \varnothing$

$A\cap B\subset C$ $X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$

$\{1,2,3,4\}\setminus\{3,4,5\} = \{1,2\}$

$B\cap C \supseteq A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C = A\cap B \neq \varnothing$

$X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$Y^C = U\setminus Y$

$X\setminus Y = X\cap Y^C$ "$x\cdot(-y)$"

$B\cap C\neq\varnothing$?!!

$A\subset B \Longleftrightarrow \forall a\in A\ a\in B$ 1) $A\subset B, B\subset C \Rightarrow A\subset C$

2) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$

$A\cap C\neq\varnothing \Rightarrow B\cap C\neq\varnothing$

$A\subset B, A\neq\varnothing \} \Rightarrow B\neq\varnothing$

$A\cup B = B$

$\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A\subset U$

$\chi_A: U\to\{0,1\}$ $\chi_A(u) = \begin{cases}0, & u\notin A\\ 1, & u\in A\end{cases}$ $A \longleftrightarrow \chi_A$ $A = \{u\in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B\subset U$ χ_A, χ_B

$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases}1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1\\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0\end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$ 1 xor 1 = 0

$\chi_{A\Delta B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$ ⟵ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^C}(u) = \chi_A(u)\cdot\underbrace{\chi_{B^C}(u)}_{1-\chi_B(u)} = \chi_A(u)(1-\chi_B(u))$

$\int_S f(x)$ $A\subset S$

...

Опр (мощность)

...

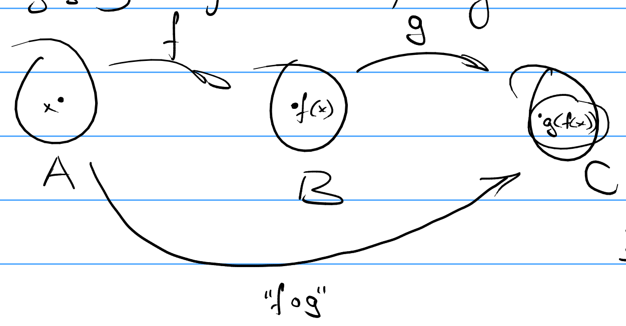
Задача

...

Теорема

...

Опр (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$



h — композиция f и g

$h = (g\circ f): A \to C$

$a\in A$ $\quad (g\circ f)(a) = g(f(a))$

$g \to f \qquad g \to f$

Зам "$f\circ g$" существует

Диаграммы $\to$ $f\circ g$

Алгебраич. запись $\to$ $g\circ f$ $\quad (g(f(a)))$

$a\in A$ $\quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

Опр A, B — мн-ва. A и B н. равномощными, если $\exists f: A\to B$: f — биективна

Примеры $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ $\quad f: A\to B$

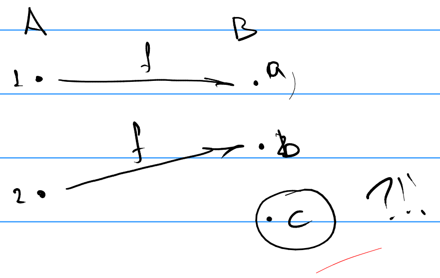
$f(1)=2$ — ин.

— сюр. $(\forall b\in B\ \exists a\in A: b=f(a))$

$(f(A)=B)$

$\Rightarrow f$ — биект $\Rightarrow |A|=|B|$

$A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$ $\quad |A|\neq|B|$

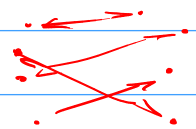


$\underset{\text{би}}{f}: A\to B$

$a=f(1)$

? $b=f(1)$?

$\Rightarrow \underset{\text{би}}{f}: A\to B$



— очевидно

$\Leftarrow |A|=|B|=n$

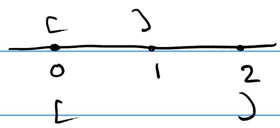
Утв. A, B — кон. $\quad \underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A\to B} \Leftrightarrow |A|=|B|$

числа

— очевидно

Д-во Упражнение

Пример $[0,1]$ равн. $[0,2]$ $\quad ([0,1] \cong [0,2])$ — равномощность



$f: [0,1] \to [0,2]$

$f(x) = 2x$

$x_1, x_2 \in [0,1]$ $\quad \underline{f(x_1)=f(x_2)}$

$x_1=x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1=x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $\quad x = y/2 \in [0,1]$ $\quad f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ — сюр.

$\Rightarrow f$ — би.

$g: [0,2] \to [0,1]$ $\qquad f$ и g — обратные

$g(y) = y/2$ $\qquad g = f^{-1}$

Пример: $(0,1) \cong (1, +\infty)$ $\qquad f: (0,1) \to (1, +\infty)$

$f(x) = 1/x$ ← би? обр?

Упр: f — биективна (через обратную)

$g: (1,+\infty) \to (0,1)$

$g(y) = 1/y$

$x \in (0,1)$

$g(f(x)) = g(1/x) = 1/(1/x) = x$

$y \in (1,+\infty)$ $\quad f(g(y)) = f(1/y) = 1/(1/y) = y$

$\Rightarrow f$ и g — обратные

$\Rightarrow f$ — биективна

$\Rightarrow (0,1) \cong (1,+\infty)$

Опр A, B — мн-ва. $\qquad A^B := \{ f \mid f: B \to A \}$

$A \xleftarrow{f} B$

A, B — кон. $\qquad |A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $\quad b_1 \cdot$ $\qquad \cdot a_1$

$|A| = m$ $\quad b_2 \cdot$ $\qquad \cdot a_2$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$b_n \cdot$ $\qquad \cdot a_m$

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$$

$$\| \quad |A^B|$$

Пример $\qquad \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0, 1, 2, 0, 2, 3, 3, 3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов A

$0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \underbrace{1,1}_{3}, \underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$

$\varphi^{-1}: \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad \varphi$ и φ^{-1} — обратные

$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{2}_{1,0}, \underbrace{0}_{0,0}, \underbrace{1}_{0,1}, \underbrace{3}_{1,1}, \underbrace{3}_{1,1}, 0, 0, 1, 2, \ldots \longrightarrow 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$

Опр A (мн-во) наз. $\underline{\text{счётным}}$, если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Опр: A (н) не более чем счётным, если A конечно или счётно

Утв: A, B — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс
$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1

1) A — нбчс $\Rightarrow$ $\left(B \subset A \Rightarrow B \text{ — нбчс}\right)$

2) A — беск. $\Rightarrow$ $\exists\, B \subset A$: B счётно

3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, A_i — нбчс $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_{i} A_i$ — нбчс

Д-во 1) A: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
$\quad\;\; \checkmark \;\; \checkmark \;\; \times \;\; \checkmark \;\ldots$

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
$B = \{4, 6, 8\} \subset A$

$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \ldots$
$\quad \checkmark \checkmark \checkmark$

$B = \{8, 10, 12, \ldots\}$

$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, 8, 10, 12, \ldots$
$\qquad\qquad \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark$
$\qquad\qquad B$

2) $b_1 \in A$
$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.
$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.
$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$
$\vdots$
$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ — беск.
$\vdots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots$, $b_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счётное
$\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ A_i — нбчс (!) $\bigcup\limits_{i} A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

$A_1 = a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14}$
$A_2 = a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \; \ldots$
$A_3 \;\;\; a_{31} \; a_{32} \; a_{33} \; \ldots$
$A_4 \;\;\; \ldots$

1. Не берём повторения
2. Пропускаем пустые ячейки

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$

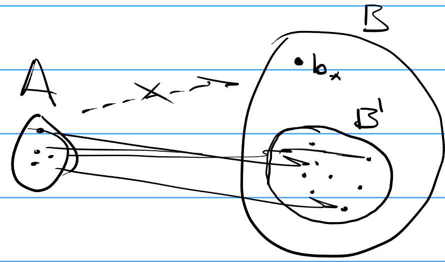
$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \bigcup\limits_{i} A_i$
$\subset$ нбчс

Сл-вие A, B — мн-ва, B — н/бс, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow A$ — н/бс

Д-во $B' = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



$f: A \to B'$ — биективна

1) f — инъективна ✓ (по условию)

2) f — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A : b = f(a)$ — по опред. B'

$\Rightarrow |A| = |B'|$, B' — н/бс (по T_1) $\Rightarrow A$ н/бс

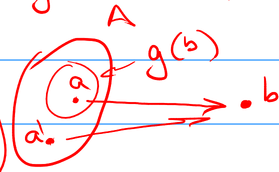
$f(g(b)) = f(a) = b$

Д-во $g: B \to A$

$g(b) = a \in A \mid f(a) = b$

конечно или равномощно $\mathbb{N}$

Утв: A, B — мн-ва, A — н/бс, $f: A \to B$ — сюръективна $\Rightarrow (!)$ B — н/бс.



g — инъекция

$g(b_1) = g(b_2)$

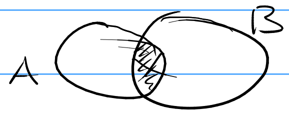
$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$

$b_1 = b_2$

$\Rightarrow b_1 = b_2$

Теорема 2 A — беск., B — н/бс. $\Rightarrow (!)$ $|A \cup B| = |A|$

Д-во: 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$



A: 2, 4, 6, 8, 10, ... (12, 14, 16, 18, ...)

B: a, b, c, d, e (2, 4, 6, 8, 10)

✓ беск.

$\wr\wr$ A 2,4,6,8,10 ...

сюр. ин. $\}$ — биект. $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \ A \cup B'$

Зам $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

$g(B) = \{g(b) \mid b \in B\} \subseteq A$

$\| \ \{a \mid a = g(b), b \in B\}$

По T_1 $P \subseteq A$, P — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B)$ $\wr\wr$

$A = P \sqcup Q = Q \sqcup P$

A — н/бс, $g(B) \subseteq A$ $\Rightarrow g(B)$ — н/бс

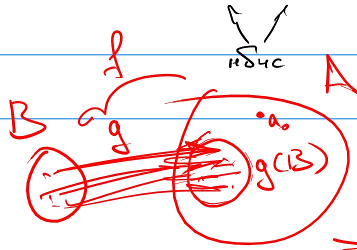
По T_1 $P \sqcup B$ — н/бс (утв. 3)

н/бс

При этом P — счётно $\Big\} \Rightarrow$ $P \sqcup B$ — счётное, P — счётное $\Big\} \Rightarrow$

$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность



$g: B \to g(B)$ — биект.

ин. — доказали

сюр. — все $g(B)$ покрывает

$\Rightarrow B \cong g(B)$ — н/бс $\Rightarrow$ B — н/бс

$\exists\ \varphi: P \sqcup B \to P$ — биект. $\qquad f: Q \sqcup (P \sqcup B) \to Q \sqcup P$

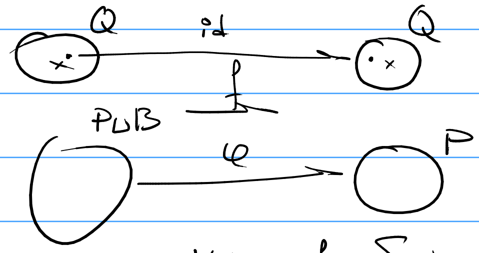
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ \varphi(x), & x \notin Q \end{cases}$$

A — беск. $\Rightarrow$ удовл.

$a_0 \in A \qquad B = A \setminus \{a_0\}$

$B \subset A \qquad \infty - 1 = \infty$

$B \neq A \qquad |A| = |B| = |A \setminus \{a_0\}|$



Упр f — биективна

$\Rightarrow |A \sqcup B| = |A|$ ■ $\qquad A$ конечно $\Rightarrow$ не удовл.

$B \subset A,\ B \neq A$ $\Rightarrow$ в B меньше эл-тов, чем в A $\qquad |A| \neq |B|$

Опр A — бесконечным, если $|A \sqcup \mathbb{N}| = |A|$

A — бесконечным, если $\exists B \subset A: B \neq A,\ |A| = |B|$

B — собственное подмн-во

Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)

Пример $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ $(\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \ f$ - биекция$)$

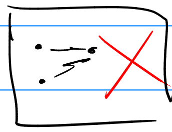
$\ldots\ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ldots \qquad \mathbb{Z}$

$\uparrow$

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ldots \qquad \mathbb{N}$

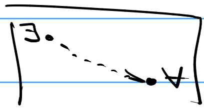
$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad$ 1) g инъективна? (вложение)

$g(n) = n$



— инъективность

2) g сюръективна? (покрытие)



— сюръекти

НЕТ $\Leftarrow \exists 0 \in \mathbb{Z}: \nexists n \in \mathbb{N}: g(n) = 0$

$g: \mathbb{N} \xhookrightarrow{\text{вложение}} \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

"$\infty \leq \infty + 1 \quad (\infty = \infty + 1)$"

ординальные числа $\qquad$ смотр $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots 3\omega \ldots 4\omega \ldots$

$\omega: \omega > n\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \omega \not\approx \infty$

$\ldots\ \omega \cdot \omega, \ldots\ \omega^{\omega}, \ldots\ \underbrace{\omega^{\omega^{\omega}}}_{\omega} \ldots \quad \Big|\ \ \varepsilon \ldots$

$\omega^2 \cong \omega$

$\frac{p}{q}$ "$\mathbb{Q}$" $\cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (по т. 1)

$$\mathbb{N} \left\{ \begin{matrix} \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \bigcup \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётное} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ чётное} \end{cases}$$

— инъективна

n_1, n_2 $(n_1 \neq n_2)$

1) n_1, n_2 разной ч-ти $\Rightarrow f(n_1), f(n_2)$ имеют разные знаки $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) n_1, n_2 одной ч-ти $n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$ $\Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} \neq -\frac{n_2-1}{2}$ $f(n_1) \neq f(n_2)$

— сюръективна

$(\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = a)$

$\measuredangle\, a \in \mathbb{Z}$ 1) $a \leq 0$. $n = \underbrace{-2a}_{\geq 0} + 1 > 0$, $\in \mathbb{N}$

$$f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{-2a+1-1}{2} = -\frac{-2a}{2} = a$$

$f(n) = a$ ✓

2) $a > 0$ $n = 2a > 0$, $\in \mathbb{N}$

$f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2a}{2} = a$ $f(n) = a$ ✓ $\Rightarrow f$ — сюръективна

$\Rightarrow f$ биективна $\Rightarrow \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ $(\infty = 2 \cdot \infty + 1)$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $(\infty^2 = \infty)$

$(2^\infty > \infty)$

$2^\infty = |\mathbb{R}|$

<u>Теорема</u> $\underset{\cap \mathbb{R}}{[0,1]} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(Расшифровка: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ ← мн-во всех функций

$= \{(0,1,1,0,\ldots), (\ldots), \ldots\}$

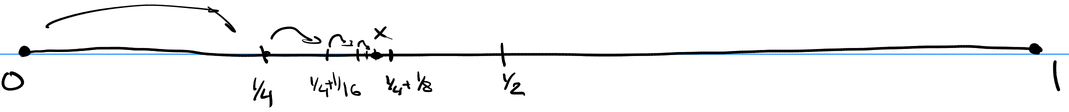
$= \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$

в $[0,1]$ столько же веществ. чисел, сколько есть посл-тей из 0 и 1.

$g: \mathbb{N} \to \{0,1,2\} \leftrightarrow 0,2,1,1,0,0,0,2,0,\ldots$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \leftrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathbb{R}$

<u>Д-во</u> Хотим $f: [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$



$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

$x = \underset{1/2}{0} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}$, $a_k \in \{0,1\}$

$\downarrow$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = f(x)$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1) Инъективность $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (!)

$$\underset{(a_1,a_2,\dots)}{f(x_1)} = \underset{(b_1,b_2,\dots)}{f(x_2)}$$

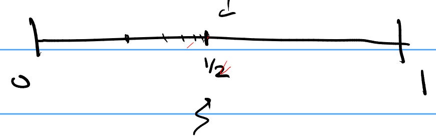
$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots) \Rightarrow a_k = b_k \ \forall k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}_{x_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \blacksquare$$

2) Сюръективность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\exists ?\ x \in [0,1]:$
$f(x) = (a_1, a_2, \dots)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in [0,1], \quad (0 \le x \le 1) \quad \cancel{f(x) = (a_1, a_2, \dots)}$$

__Нюанс__ $\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \dots \leftrightarrow (1, 0, 0, 0, \dots) \neq f(x) \ \forall x$



$f(1/2) \neq (1, 0, 0, \dots)$

$f(1/2) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1, \dots) \leftarrow$

"Лишние" посл-ти имеют 0 в периоде (0 начиная с нек. места)

$$(\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1}, \cancel{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (0)}) \leftrightarrow (\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1})$$

$A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $A = \{\text{лишние посл-ти}\} \cong \underbrace{\{\text{кон. посл-ти из 0 и 1}\}}_{B}$

(!) $B \cong \mathbb{N}$ 1) B — бесконечно
$\Rightarrow |B| \ge |\mathbb{N}|$

2) $B \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $(a_1, a_2, \dots a_n) \leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$

вложение $\Rightarrow |B| \le |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \le |B| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

B — счетно

$A \cong B$ — счётно

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \overset{\overleftarrow{f}}{\cong} [0,1]$$

1|2 по Т3

Теорема 3: A беск, B - счётно $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A) \cup A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow [0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Упр разобраться в док-ве

Теорема $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($in : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – инъекция, ~~$bi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – биекция~~)

Д-во Лемма (диагональный метод Кантора): $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ "$\infty < 2^{\infty}$"

Д-во $in : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — инъекция.

$$n \mapsto (0,0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$$

n-ная позиция

Допустим, что $bi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — биекция

$$\begin{array}{ll} bi(1) & a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \ldots \\ bi(2) & a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24} \ldots \\ bi(3) & a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34} \\ \vdots & \end{array}$$

$\mathbb{N}$ $\downarrow$, $\mathbb{N}$ $\rightarrow$

$a \in \{0,1\}$

$\bar{a} = 1 - a$

$b_k = \overline{a_{kk}}$ $\quad b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$b: \overline{a_{11}}, \overline{a_{22}}, \overline{a_{33}}, \overline{a_{44}}, \ldots$

$b \neq a_1$

$b_1 = \overline{a_{11}} \neq a_{11}$

$b \neq a_2$

$b_2 = \overline{a_{22}} \neq a_{22}$

$\vdots$

$b \neq a_n$

$b_n = \overline{a_{nn}} \neq a_{nn}$

$b \neq bi(1)$

$\neq bi(2)$

$\vdots$

$\neq bi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Противоречие с сюръект. bi

(не получается инъект. bi)

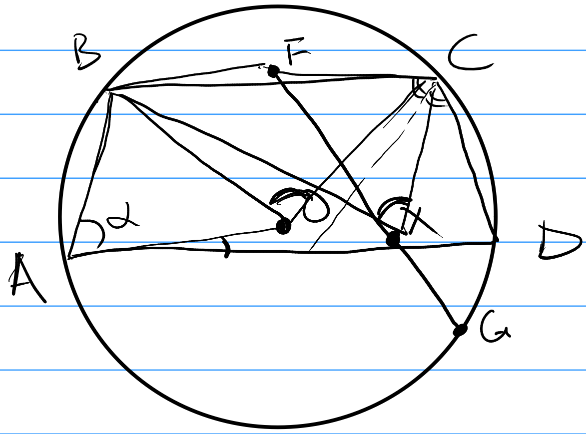
(возвращаемся к теореме)

$$|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]| \leq |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

по лемме; $[0,1] \subset \mathbb{R}$

$\blacksquare$

Следствие $\mathbb{N}, < \{0,1\}^{\mathbb{N}} < \{0,1\}^{(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} < < < < \ldots$



$2\alpha = \overset{\smile}{BD} = \overset{\smile}{CA}$

$\angle BFC > \angle BOC$

$\angle BGC < \angle BOC$

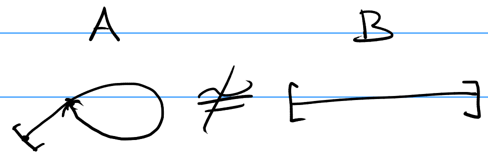
$\angle BXC = \angle BOC$

Топология

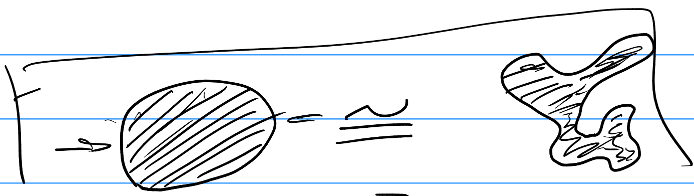
Идея 1: Размер не имеет значения

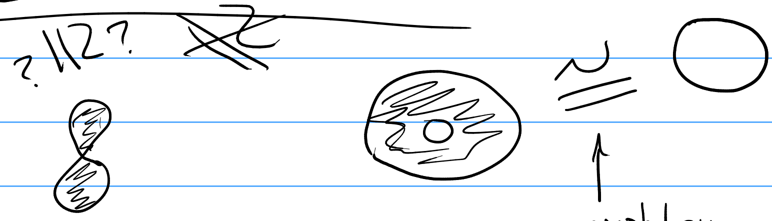
$[0,1] \cong [0,2]$ (Top)

Идея 2: Непрерывность



$f: A \to B$ не непрерывно





изоморфен

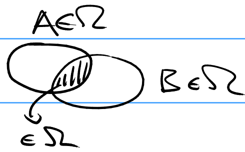
A^B

$|2^X| = 2^{|X|}$ (X - кон.)

Опр X — множество, $X \neq \varnothing$. $\Omega \subset 2^X$ (булеан — мн-во всех подмн-в)

Ω — топологией на X, если:

① $\varnothing, X \in \Omega$ ② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$



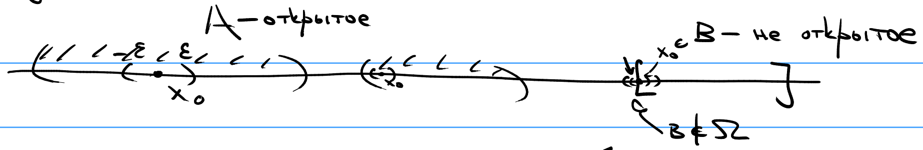
③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega$

(в частности, $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cup B \in \Omega$)

$A \cup B = \bigcup\{A, B\}$

В таком случае мн-ва $A \in \Omega$ Ⓝ открытыми.

Пример: $\mathbb{R}$



$$\Omega = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x_0 \in A \ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)}_{} \subset A\}$$

$\longleftrightarrow$ $O_\varepsilon(x_0)$ — ε — окрестность точки x_0

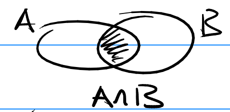
Задача $X = \mathbb{R}$, $\Omega' = \{\varnothing\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ бесконечно$\} \subset 2^{\mathbb{R}}$

(!) Правда ли, что Ω' — топология?

① $\varnothing, \mathbb{R} \in \Omega'$ ✓

② $A, B \in \Omega' \Rightarrow A \cap B \in \Omega'$ ✗ $\quad A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$

③ $\mathcal{A} \subset \Omega' \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega'$



$A, B \in \Omega'$

1) $A = \varnothing \vee B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2) A, B — бесконечные 2.1) $A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2.2) $A \cap B \neq \varnothing$

Ω' — не топология

$A = (-\infty, 1]$

$B = [1, +\infty)$ $\quad A \cap B = \{1\}$ ✗

Опр X — мн-во, $\mho \subset 2^X$ Ⓝ системой замкнутых мн-в, если

① $\varnothing, X \in \mho$ $\quad \mathbb{R}$

② $A, B \in \mho \Rightarrow A \cup B \in \mho$

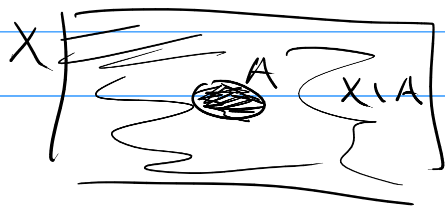
③ $\mathcal{A} \subset \mho \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mho$

Свойство $(\Omega \longleftrightarrow \mho)$

$\forall (X, \Omega)$. $\mho := \{X \setminus A \mid A \in \Omega\}$ — сист. замк. мн-в

$\forall (X, \mho)$. $\Omega := \{X \setminus A \mid A \in \mho\}$ — топология

Д-во упражнение (проверить аксиомы)



Задача $X = [0, +\infty)$ $\Omega = \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$

Правда ли, что Ω — топология?

① $\emptyset, X \in \Omega$ ✓ (по опр.)

② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$? ✓

$A = (a, +\infty)$, $B = (b, +\infty)$

$A \cap B = (\max(a, b), +\infty)$

a b

③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \cup \mathcal{A} \in \Omega$ — упр.

---

1. a) $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3}$ $\Rightarrow$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$

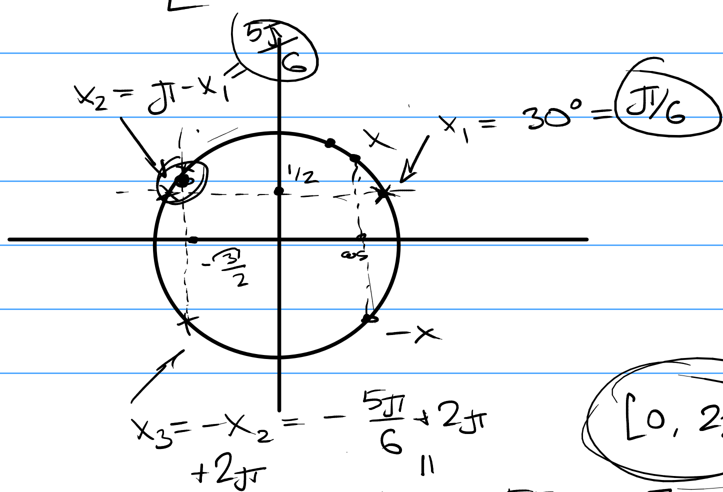
$\Rightarrow$ $4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{array}\right.$

$2\cos x\,(2\sin x - 1) + \sqrt{3}\,(2\sin x - 1)$

$= (2\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$



$= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$[0, 2\pi)$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(180° - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{5\pi}{6}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \cos(-x)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

① $A + \alpha := \{x + \alpha \mid x \in A\}$

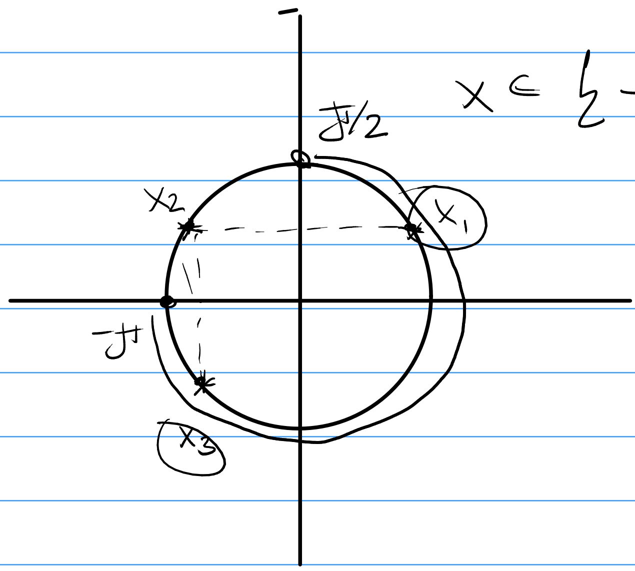
$[0, 1) + 6 = [6, 7)$

② $A + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + 2\pi k)$

$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\{\pi/6, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\} + 2\pi k\right)$ — мат. запись

$x = \pi/6 + 2\pi k \ \vee\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \ \vee\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ — ЕГЭ

б)



$x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

$x = -\frac{5\pi}{6} \ \vee\ x = \frac{\pi}{6}$

---

2. $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0$

$f_a(x) = a^x, \quad a > 0. \qquad g_a(x) = \log_a x = f_a^{-1}(x)$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(a^x) = x$

Свойства экспоненты

1. $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$
2. $a^1 = a \quad \forall a > 0$
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

($0^0 = ?$ неопределено)

(e^x можно опред. через эти 3 св-ва)

Свойства логарифма $\quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a x} = x$

1. $0 = \log_a 1 \quad \forall a > 0$
2. $1 = \log_a a \quad \forall a > 0$
3. $x + y = \log_a (a^x \cdot a^y)$

$u = a^x, \quad v = a^y$

$x = \log_a u \quad y = \log_a v$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$\forall u, v > 0$

4. Забьём
5. Забьём

$$2 \underbrace{\log_2^2 (2\cos x)}_{\overset{③}{=} \left(\underbrace{\log_2 2}_{\overset{②}{=} 1} + \log_2 (\cos x)\right)^2} - 9 \underbrace{\log_2 (2\cos x)}_{\overset{③}{=} \underbrace{\log_2 2}_{\overset{②}{=} 1} + \log_2 (\cos x)} + 4 = 0$$

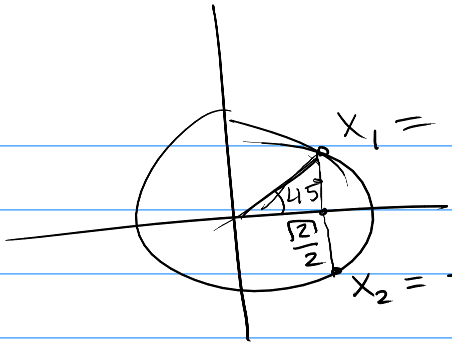
$$2 (\log_2 (\cos x) + 1)^2 - 9 (\log_2 (\cos x) + 1) + 4 = 0$$

$$2 \log_2^2 (\cos x) + 4 \log_2 (\cos x) + 2 - 9 \log_2 (\cos x) - 9 + 4 = 0$$

$$2 \log_2^2 (\cos x) - 5 \log_2 (\cos x) - 3 = 0$$

$$(2 \log_2 (\cos x) + 1) \cdot (\log_2 (\cos x) - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 (\cos x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \log_2 (\cos x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 2^3 > 1 \; \times \end{array}\right.$$



$x_1 = 45° = \pi/4$. $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$

$x_2 = -x_1 + 2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Ответ: $x \in \{\pi/4, 7\pi/4\} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

или

$x = \pi/4 + 2\pi k \vee x = 7\pi/4 + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$.

$\quad\quad \| $

$-\pi/4 + 2\pi k$

$\quad\quad \| $

$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi k = \ldots$

3. $\frac{2\sin^2 x + \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0 \iff$

$\frac{a}{b} = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x = 0 \iff \sin x(2\sin x + 1) = 0 \\ 2\cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\sin x = -1 \end{array} \right.$

$\Updownarrow$

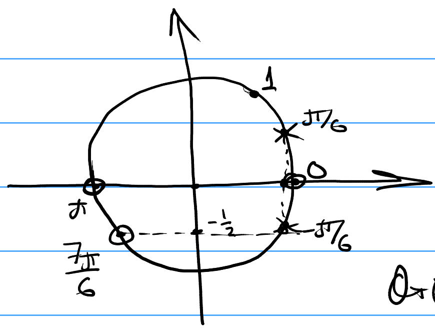
$\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Downarrow$

$x \neq \pi/6, -\pi/6 + 2\pi k$

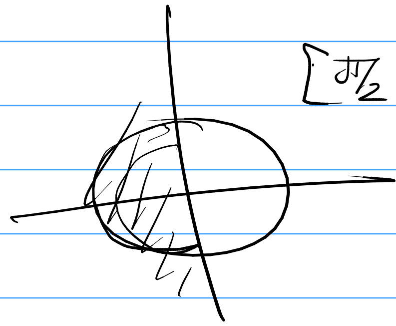


Ответ: $x \in \{0, \pi, \frac{7\pi}{6}\} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

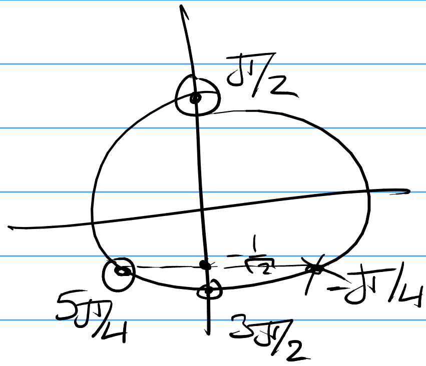
4. $(\sqrt{2}\sin x+1)\sqrt{-5\cos x}=0 \Leftrightarrow$

ОДЗ: $-5\cos x\geq 0 \Leftrightarrow \cos x\leq 0$

ОДЗ: $[\pi/2,\ 3\pi/2]+2\pi k$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos x=0\end{array}\right.$



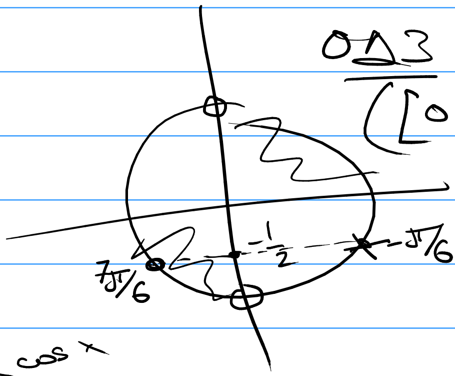
Ответ: $x\in\{\pi/2,\ 5\pi/4,\ 3\pi/2\}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$

5. $(\cos x-\sin 2x)(1+\sqrt{\operatorname{tg} x})=0 \Leftrightarrow$

ОДЗ: $\operatorname{tg} x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\cdot\cos x\geq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\sin 2x\\ \underbrace{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}_{\geq 1}=0 \quad \times\end{array}\right.$

ОДЗ: $([0,\ \pi/2)\cup[\pi,\ 3\pi/2))+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$



$\cos x=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$1=2\sin x$

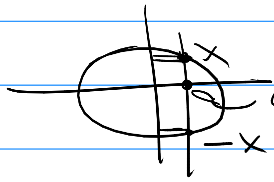
$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

Ответ: $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

6. $\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x + \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2} \Leftrightarrow$

ОДЗ: $\mathbb{R}$



$\cos(-x) = \cos x$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$= \sin(\bar\alpha+\bar\beta) + \sin(\bar\alpha-\bar\beta) =$

$= \sin\bar\alpha\cos\bar\beta + \cancel{\sin\bar\beta\cos\bar\alpha} +$

$+ \sin\bar\alpha\cos\bar\beta - \cancel{\sin\bar\beta\cos\bar\alpha} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\bar\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\bar\beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

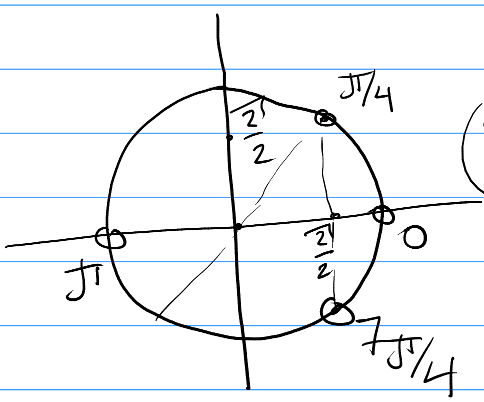
$\alpha = \bar\alpha + \bar\beta$

$\beta = \bar\alpha - \bar\beta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin 4x} + \sin x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin 4x} - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 1 = \sqrt{2}\cdot\cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$



$0.110110011\ldots = \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.0110110011\ldots$ ✓

$1/\sqrt{2} = ???$

Ответ: $x \in \{0, \pi/4, \pi, 7\pi/4\} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

7. $36^{\sin 2x} = \underbrace{6^{2\sin x}}$ $\qquad a^p = b^q \Leftrightarrow c^{p'} = c^{q'}$

$(6^2)^{\sin x}$

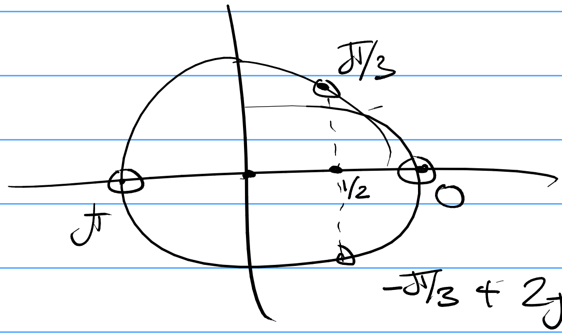
$\parallel$

$36^{\sin x}$ $\Leftrightarrow$

$(a>0, a\neq 1)$ $\quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$



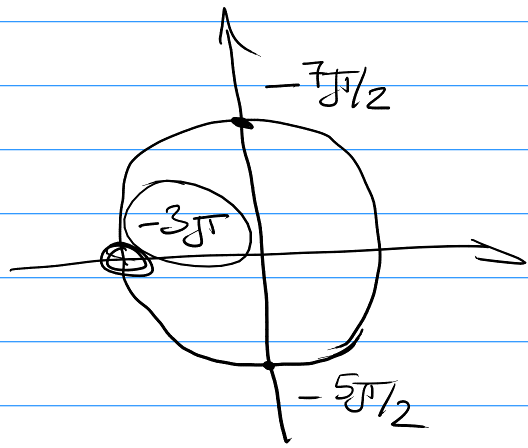
$-\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3$

Ответ: $x \in \{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3\} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in [-7\pi/2, -5\pi/2]$

2

$-7\pi/2 + 4\pi = \pi/2$



8. $2\sin^2 x - 2\underbrace{\cos 2x}_{||} - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

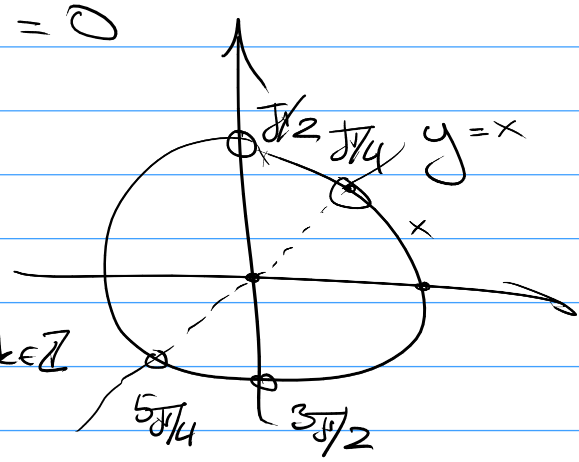
$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x - \cancel{2}\sin x \cos x = 0$

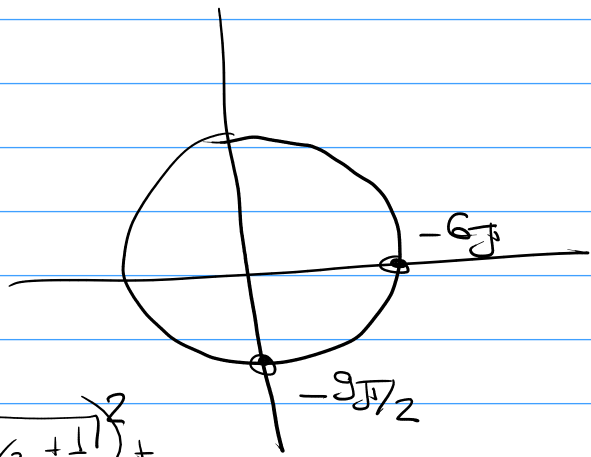
$\cos x(\cos x - \sin x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right.$



Ответ: $x \in \{\pi/4, \pi/2\} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

б) $x \in [-6\pi, -9\pi/2]$



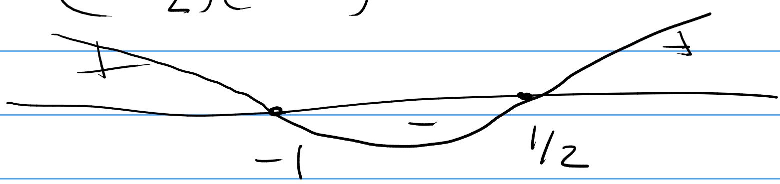
9. $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 4 = \left(\sqrt{-x^2 - x/2 + \frac{1}{2}}\right)^2 + x^2 + x/2 + 5/2$

ОДЗ: $-x^2 - x/2 + 1/2 \geq 0$

$2x^2 + x - 1 \leq 0$

$2(x - \frac{1}{2})(x+1) \leq 0$

ОДЗ $[-1, 1/2]$



$$3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 4 = 3$$

$$3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\parallel$$

$$3^1 \cdot 3^{2x} - 4\cdot 3^x + 1 \longleftarrow a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\parallel$$

$$3\cdot (3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 1 \longleftarrow a^{pq} = (a^p)^q$$

$y = 3^x$ $\quad 3y^2 - 4y + 1 = 0, \quad y > 0$

$$(3y^2 - 3y) - (y-1) = 0$$

$$3y(y-1) - (y-1) = 0$$

$$(3y-1)(y-1) = 0$$

$$y = 1 \lor y = 1/3$$

$$3^x = 1 \qquad 3^x = 1/3$$

$$x = 0 \qquad x = -1.$$

✓

б) $x \in \left[\log_2 \frac{1}{6}, \log_2 \frac{2}{3}\right]$?

$$\begin{array}{ccccc} \wedge & & \wedge & \vee & \\ -1 & & 0 & -1 & \end{array}$$

-1 ✓

0 ✗

10. $2\log_4^2(\sin x) - x^2 + 21 = \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 + 7\log_4(\sin x)$

<u>ОДЗ</u>: $-5 \le x \le 5 \qquad x \in [-5, 5]$

$$2\log_4^2(\sin x) \cancel{-x^2} + 21 = 25 \cancel{-x^2} + 7\log_4(\sin x)$$

$y = \log_4(\sin x)$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$y = 4 \lor y = -1/2$$

1) $y = 4 \Leftarrow \log_4(\sin x) = 4$

$$\sin x = 4^4 = 256$$

2) $\log_4(\sin x) = -1/2$

$$4^{\log_4(\sin x)} = 4^{-1/2}$$

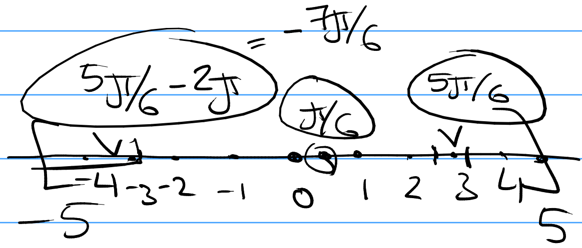
$$\sin x = 1/2$$

$\log_4 a = b :$

$4^b = a$

$$x = \pi/6 + 2\pi k \ \vee \ x = 5\pi/6 + 2\pi k$$

$\pi > 3 \quad 2\pi > 6$



$3 < \pi < 4$

$1/2 < \pi/6 < 2/3$

$5/2 < 5\pi/6 < 10/3$

$5/2 = 2 + 1/2 \qquad 10/3 = 3 + 1/3$

$\cancel{\pi <}$ $2\pi < 7$

$-2\pi > -7$

$5\pi/6 > 2$

$5\pi/6 - 2\pi > -5$