ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн....) $\to$ $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3}\cdot\sin(x-\pi) = 0$ $\qquad 5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x$

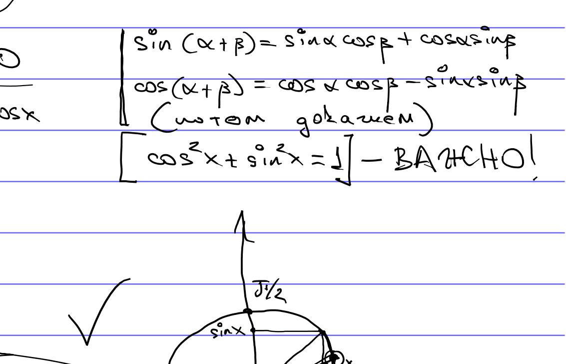
1) $\sin x = 0$

$x = \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $\qquad 30^\circ = \pi/6$

$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

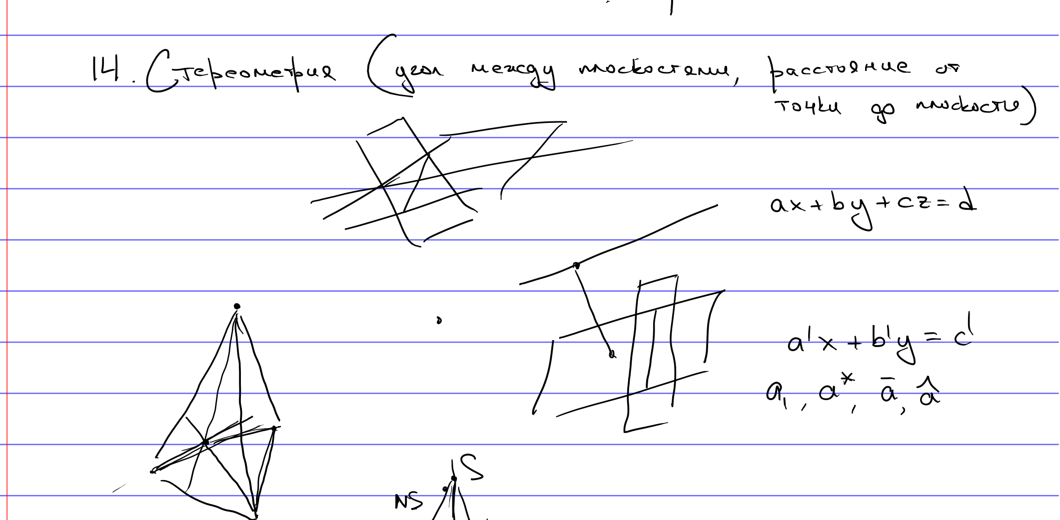
$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$

$2AN = 3NS$

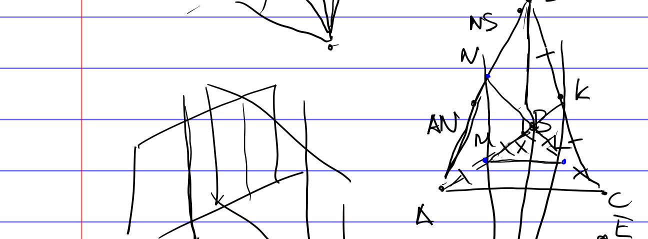
$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha+\beta < \pi/2$



$c = a' + b'$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\gamma = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

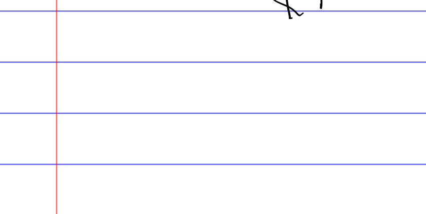
$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{h_1}{b} + \frac{b'}{b}\cdot\frac{h_1}{a}$

$\sin\alpha \quad \cos\beta \quad \sin\beta \quad \cos\alpha$

(Д/З) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta<\pi,\ \alpha+\beta>\pi,\ \alpha+\beta>3\pi/2$)

Вариант 2 — формулы приведения



1. $\boxed{\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha}$

$① = ②$ $\boxed{\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha}$

$\cos(\alpha-\pi/2) = \sin\alpha \qquad \sin(\alpha-\pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$

2. $\sin$ — нечётная, $\cos$ — чётная

$\sin(-x) = -\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cos(-x) = \cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$-\alpha = \beta \qquad \sin(\beta+\pi/2) = \cos(\beta)$

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

3. $\sin(\pi/2-\alpha) = \sin(-\alpha+\pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2-\alpha) = \cos(-\alpha+\pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

4. $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$

$2\pi$ — период ($360^\circ$) $\qquad$ radian $\qquad \pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega$ rad $s^{-1}$

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha,\beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2,\ 0<\gamma<\pi/2$

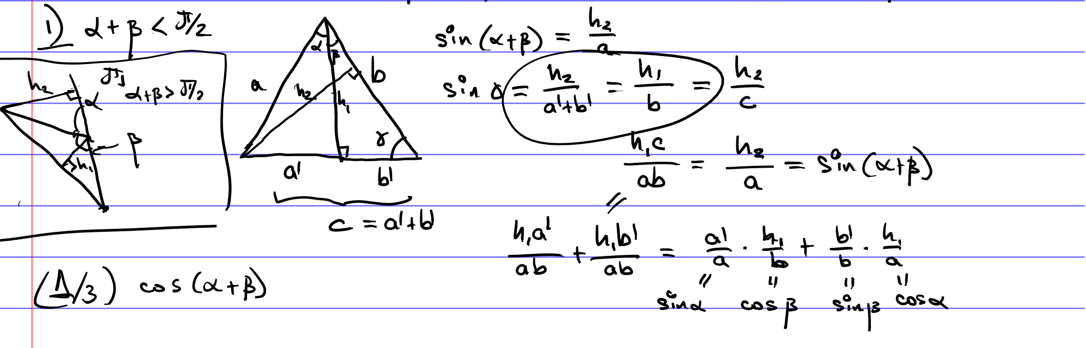
$\gamma + \beta = \beta + \alpha - \pi/2 < \pi/2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\beta+\pi/2) =$

$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$

$= \cos(\alpha-\pi/2)\cos\beta - \sin(\alpha-\pi/2)\sin\beta =$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



$A/2 \quad t_2 = t_0 \quad t_1 = 0$

simple harmonic motion

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot(t-t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = 1.8\,s$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R\cdot\cos(\omega(t-t_1))$

$x(t) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{A}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}\cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3\,s$

## Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во $\quad A,\ x\in A$ "x лежит в A"

2) Всё — множество $\quad 0 = \varnothing$ — пустое мн-во $\quad 1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\},\varnothing\},\ 3 = \ldots$

3) Бесконечности $\quad |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

4) $U$ — универсум — „самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами.

$\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n\in\mathbb{N} \mid \underbrace{n \vdots 2}_{\text{св-во}}\} = \{2,4,6,\ldots\}$ (аксиома выделение)

$B\in A \Rightarrow B\notin B$

3) Парадокс Рассела $\quad A = \{x \mid x\notin x\} \quad A\in A \Rightarrow A\notin A$ ?!!

$A\notin A \Rightarrow A\in A$

$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр: $A, B$ — мн-ва $\quad A\cup B = \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$

$A\cap B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$

$A\setminus B = \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Предикаты и кванторы

$x \quad P(x)$ — предикат $\qquad P(x)\wedge Q(x)$ — конъюнкция

$P(x)\vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\qquad \forall x\in A: P(x) = \bigwedge_{x\in A} P(x)$

$\exists$ — квантор существования $\qquad \exists x\in A: P(x) = \bigvee_{x\in A} P(x)$

$\neg(A\wedge B) = (\neg A)\vee(\neg B) \qquad \neg\left(\bigwedge_{x\in A} P(x)\right) = \bigvee_{x\in A}\neg P(x)$

$\neg(\forall x\in A\ P(x)) = \exists x\in A: \neg P(x)$

$\neg(\exists x\in A\ P(x)) = \forall x\in A\ \neg P(x)$

Опр: $A,\quad A^C = U\setminus A$ $\qquad (A\cap B)^C = A^C\cup B^C$

$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$ — формулы де Моргана

— " — $\cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f): \forall x\in A: \exists!\, y\in B: y = f(x)$

обл. отпр. $\quad$ обл. приб.

единственный $\quad y$ — образом $x$ относительно $f$.

2) (Новое) $A, B.\quad A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f\subset A\times B: \forall x\in A\ \exists!\, y\in B: (x,y)\in f \quad (y = f(x))$

Опр 1) $f: A\to B$ — инъективной, если $\forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

отпр. $\quad$ обл. приб.

— сюръективной, если $\forall y\in B\ \exists x\in A: y = f(x)$

— биективной, если $f$ — ин. и $f$ — сюр.

$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad f(n) = n$

Опр: $f: A\to B,\ g: B\to A.$ $g$ — обратной к $f$ ($g = f^{-1}$), если

1) $\forall x\in A: x = g(f(x))$

2) $\forall y\in B: y = f(g(y))$

Теорема: $f: A\to B.$ $f$ — обратима ($\exists f^{-1}$) $\Leftrightarrow$ $f$ — биективна

Д-во: $\Rightarrow$: $\exists$ $f$ — об. $\exists g: B\to A$ т.ч. 1) и 2)

пусть

1. $f$ — сюр. $\quad y\in B \quad \forall x = g(y)\in A \quad f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow f$ — сюр

рассмотрим

2. $f$ — ин. $\quad \forall x_1, x_2\in A: f(x_1) = f(x_2).\quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$x_1 \qquad x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — ин.

$\Rightarrow f$ — би.

$\Leftarrow$: $\exists f$ — биект. $\quad$ Хотим $g: B\to A$: 1) и 2)

$\forall y\in B \quad f$ — сюр. $\Rightarrow \exists! x\in A: y = f(x).\quad g(y) := x$

$f$ — ин.

1) $\forall x\in A \quad g(f(x)) = x$ ✓

2) $\forall y\in B \quad f(g(y)) = y$ ✓

■

Задача: $\exists$? $A, B, C$: $\quad$ 1) $A\cap B \neq \varnothing$

2) $B\cap C = \varnothing$

3) $(A\cap B)\setminus C = \varnothing \Leftrightarrow (A\cap B)\cap C^C = \varnothing$

$A\cap B\in C \qquad X\setminus Y = \{x\in X \mid x\notin Y\}$

$B\cap C$

$\cup$

$A\cap(B\cap C)$

$\|$

$(A\cap B)\cap C$

$\|$

$A\cap B$

$\neq$

$\varnothing$

$\{1,2,3,4\}\setminus\{3,4,5\} = \{1,2\}$

$X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

$Y^C = U\setminus Y$

$X\setminus Y = X\cap Y^C$

"$x\cdot(-y)$"

$B\cap C \neq \varnothing$ ?!!

$A\subset B \Leftrightarrow \forall a\in A\ a\in B$

1) $A\subset B,\ B\subset C \Rightarrow A\subset C$

2) $A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$

$A\cap C\neq\varnothing \Rightarrow B\cap C\neq\varnothing$

$\left.\begin{matrix}A\subset B\\ A\neq\varnothing\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\neq\varnothing$

$A\cup B = B$

$\cup, \cap, \setminus, \Delta$

Опр (характеристическая функция) $U$ — универсум, $A\subset U$

$\chi_A: U\to\{0,1\}$

$\chi_A(u) = \begin{cases}0, & u\notin A\\ 1, & u\in A\end{cases} \qquad A \leftrightarrow \chi_A$

$A = \{u\in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B\subset U \quad \chi_A, \chi_B$

$\chi_{A\cap B}(u) = \begin{cases}1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1\\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0\end{cases} = \chi_A(u)\cdot\chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u)\cdot\chi_B(u))$

$1 \quad 1 \qquad 1 = 1 \qquad 1 \text{ XOR } 1 = 0$

$\chi_{A\Delta B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2\cdot\chi_A(u)\cdot\chi_B(u) \leftarrow$ XOR

$\chi_{A\setminus B}(u) = \chi_{A\cap B^C}(u) = \chi_A(u)\cdot\underbrace{\chi_{B^C}(u)}_{1-\chi_B(u)} = \chi_A(u)(1-\chi_B(u))$

$\int_S f(x)$ $\qquad A\subset S$

$\int_A f(x) = \int_S f(x)\cdot\chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$

$F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)

$A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\},$

$|A| = n$

мощность $\qquad |A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1,2,\ldots\}|$ — ???, "$\infty$"

$A\subset U,\ |A| = n\in\mathbb{N} \qquad 2^A = P(A) = \{B\subset U \mid B\subset A\}$ — булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \ldots \ a_n$

2 варианта

$B\subset A$

$\varnothing\subset A$

$f: 2^A \to \{$выборов$\}$

биект.

$|2^A| = |\{$выборов$\}|$

$2^n$

Теорема: $A, B\subset U.$ $f: A\to B$ — биективна

($A, B$ — кон.) $\qquad$ ($\Leftrightarrow$ обратимая)

$\Rightarrow |A| = |B|$

Задача $|A| = 100 \qquad X = \{B\subset A \mid |B| = 43\}$

$Y = \{B\subset A \mid |B| = 57\}$ $\qquad |X| \leq |Y|$

$43 + 57 = 100 \qquad B\subset A: |B| = 43 \quad B\in X$

$B' = A\setminus B \quad |B'| = 57 \quad B'\in Y$

$f: X\to Y \quad f(B) = A\setminus B$ $\qquad f$ и $g$ обратные

$g: Y\to X \quad g(B) = A\setminus B$

$|B| = 57$

$f$ — обратимая, биективная

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \qquad |X| = C_{100}^{43}$

$|Y| = C_{100}^{57} \qquad (C_n^k = C_n^{n-k})$

Задача $A\subset U,\ A\neq\varnothing$ $\qquad E(A) = \{B\subset A \mid |B| \vdots 2\} = E\subset 2^A$

кон.

$O(A) = \{B\subset A \mid |B| \not\vdots 2\}$

$A = \{1,2,3\}$

$E(A) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ $\quad$ (!) $|E(A)| = |O(A)|$ $\qquad E: Set \to Set$

$A \mapsto E(A)$

$a\in A \qquad f: E(A)\to O(A) \qquad B_1\neq B_2\ \in E(A)$

$\Rightarrow f(B_1)\neq f(B_2)$

$B\in E(A)$

$|B| \vdots 2 \quad$ 1) $a\in B \quad |B\setminus\{a\}| \not\vdots 2$

$|B| - 1 \qquad f(B) = B\setminus\{a\}$

2) $a\notin B \quad f(B) = B\cup\{a\} \quad |f(B)| \not\vdots 2$

Упр (!) $f$ — сюр., ин.

или $\quad g: O(A)\to E(A): \quad f(g(B)) = B, \quad g(f(B)) = B, \quad \forall B$

$g = f', \quad f': O(A)\to E(A)$ $\qquad \varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$\varphi(n) = \begin{cases}0, & n\vdots 2\\ 1, & n\not\vdots 2\end{cases} \qquad \varphi(3) = 1$

1) $\forall B\in O(A) \quad f(f'(B)) = B$ ✓

$\forall B\in O(A) \quad$ 1. $a\in B \quad f'(B) = B\setminus\{a\}$

$f(f'(B)) = f(B\setminus\{a\}) = (B\setminus\{a\})\cup\{a\} = B$

$a\notin B\setminus\{a\}$

$f(C) = \begin{cases}C\setminus\{a\}, & a\in C\\ C\cup\{a\}, & a\notin C\end{cases}$

2. $a\notin B \quad f'(B) = B\cup\{a\}$

$f(f'(B)) = f(B\cup\{a\}) = (B\cup\{a\})\setminus\{a\} = B$

$a\in$

2) $\forall B\in E(A) \quad f'(f(B)) = B$ — упр

$\Rightarrow f'$ — обр. к $f$ $\qquad E(A) \underset{f'}{\overset{f}{\rightleftarrows}} O(A)$

$\Rightarrow |E(A)| = |O(A)|$

Задача (!) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$

$|A| = n \qquad \underbrace{C_n^k = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|}$

$\underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^n}_{|E(A)|} - \underbrace{C_n^1 - C_n^3 - C_n^5 - \ldots - C_n^{n-1}}_{-|O(A)|} = 0$

$n \vdots 2$

Задача $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + \ldots + C_n^{n-1}a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n} = \sum \alpha_j a^i b^j =$

$a^2 b^{n-2}$

$= C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b + C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1} + C_n^n\cdot b^n$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n}_{} = 2^n$ — упр (через мощности мн-в)

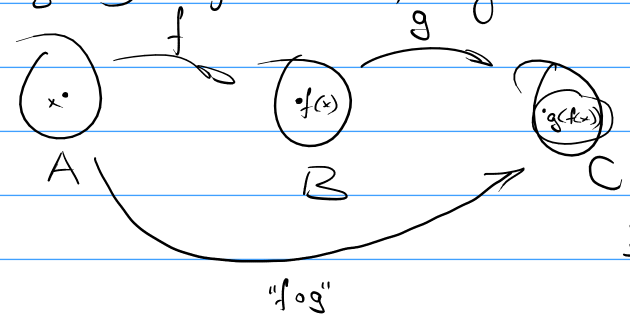
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{B\subset A \mid |B| = k\}|, \quad |A| = n \qquad |2^A| = 2^n$

**Опр** (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$

композиция $f$ и $g$

$\overbrace{(g\circ f)}^{h}: A \to C$

$a \in A \quad \underset{g\circ f}{(g\circ f)(a)} = \underset{g\circ f}{\overline{g(f(a))}}$




**Зам** "$f\circ g$" существует

Диаграммы $\to f\circ g$

Алгебраич. запись $\to g\circ f$

$(g(f(a)))$

$\underline{a\in A}$ $\quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

**Опр** $A, B$ — мн-ва. $A$ и $B$ н. равномощными, если $\exists f: A \to B$: $f$ — биективна

**Примеры** $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ $\quad f: A\to B$

$f(1)=2$ — ин.

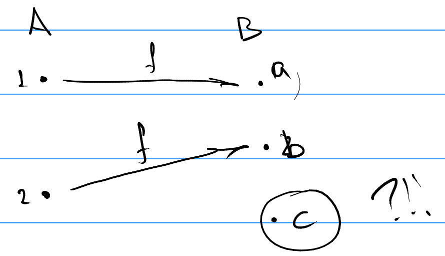
— сюр. $(\forall b\in B\ \exists a\in A: b=f(a))$

$(f(A)=B)$

$\Rightarrow f$ - биект $\Rightarrow |A|=|B|$

$A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$ $\quad |A|\neq|B|$

$\underset{\text{би}}{f}: A\to B$




$a = f(1)$

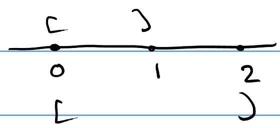
? $b=f(1)$ ?

**Утв.** $A, B$ — кон. $\underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A\to B} \Leftrightarrow |A| = |B|$

числа

**Д-во** Упражнение

**Пример** $[0,1]$ равн. $[0,2]$ $\quad ([0,1]\cong[0,2])$ равномощность




$f: [0,1] \to [0,2]$

$f(x) = 2x$ $\quad x_1, x_2 \in [0,1]$ $\quad \underline{f(x_1)=f(x_2)}$

$x_1 = x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $\quad x = y/2 \in [0,1]$ $\quad f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ — сюр.

$\Rightarrow f$ — би.

$g : [0,2] \to [0,1]$ $\qquad f$ и $g$ — обратные

$g(y) = y/2$ $\qquad g = f^{-1}$

Пример: $(0,1) \cong (1, +\infty)$ $\qquad f : (0,1) \to (1, +\infty)$

$f(x) = 1/x$

Упр: $f$ — биективна (через обратную)

Опр $A, B$ — мн-ва. $\quad A^B := \{ f \mid f : B \to A \}$

$\{ B \xrightarrow{f} A$

$A, B$ - кон. $\qquad |A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $\quad b_1, b_2, \ldots, b_n$ $\qquad a_1, a_2, \ldots, a_m$

$|A| = m$

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$$

$$m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = |A^B|$$

Пример $\quad \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0, 1, 2, 0, 2, 3, 3, 3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов $A$

$0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \underbrace{1,1}_{3}, \underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$

$\varphi^{-1} : \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad \varphi$ и $\varphi^{-1}$ — обратные

$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{2}_{1,0}, \underbrace{0}_{0,0}, \underbrace{1}_{0,1}, \underbrace{3}_{1,1}, \underbrace{3}_{1,1}, 0, 0, 1, 2, \ldots \longrightarrow 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$

Опр $\underset{\text{мн-во}}{A}$ наз. $\underbrace{\text{счётным}}$, если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots \}$

Опр: $A$ (н) не более чем счётным, если $A$ конечно или счётно

Утв: $A, B$ — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс

$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1

1) $A$ – нбчс $\Rightarrow$ $(B \subset A \Rightarrow B$ – нбчс$)$

2) $A$ – беск. $\Rightarrow$ $\exists\, B \subset A$ : $B$ счётно

3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, $A_i$ – нбчс $\Rightarrow$ $\bigcup_i A_i$ – нбчс

Д-во 1) $A$: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$\checkmark \ \checkmark \ \times \ \checkmark \ \ldots$

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$B = \{4, 6, 8\} \subset A$

$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \ldots$

$\checkmark \checkmark \checkmark$

$B = \{8, 10, 12, \ldots\}$

$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \underbrace{8, 10, 12, \ldots}_{B}$

2) $b_1 \in A$

$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.

$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.

$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$

$\vdots$

$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ — беск.

$\vdots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots$ , $b_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счётное

$\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ $A_i$ – нбчс (!) $\bigcup_i A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

$$\begin{array}{lcl}
A_1 & = & a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ldots \\
A_2 & = & a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \ldots \\
A_3 & & a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ \ldots \\
A_4 & & \ldots
\end{array}$$

1. Не берём повторения

2. Пропускаем пустые ячейки

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \bigcup_i A_i$

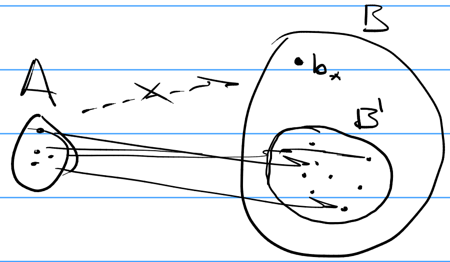
$\subset$ нбчс

**Сл-вие** $A, B$ — мн-ва, $B$ — нбчс, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow A$ — нбчс

**Д-во** $B' = f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$




$f: A \to B'$ — биективна

1) $f$ — инъективна ✓ (по условию)

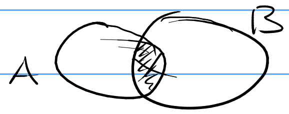
2) $f$ — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A: \ b = f(a)$ — по опред. $B'$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |A| = |B'| \\ B' \text{ — нбчс (по } T_1) \end{array}\right] \Rightarrow A$ нбчс ■

**Упр:** $A, B$ — мн-ва, $A$ — нбчс, $f: A \to B$ — сюръективна
$\Rightarrow (!)$ $B$ — нбчс.

**Теорема 2** $A$ — бесч., $B$ — нбчс. $\Rightarrow (!)$ $|A \cup B| = |A|$

**Д-во:** 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$




A: 2, 4, 6, 8, 10, … ✓ — бесч.
12, 14, 16, 18, …

B: a, b, c, d, e
2, 4, 6, 8, 10

$\wr\wr$ A 2,4,6,8,10 …

сюр. + ин. — биект. $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$
$\parallel$
$A \cup B'$

**Зам** $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

По $T_1$ $P \subseteq A$, $P$ — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B)$ $\wr\wr$

$A = P \sqcup Q \quad = Q \sqcup P$

По $T_1'$ $P \sqcup B$ — нбчс (утв. 3)
нбчс
При этом $P$ — счётно $\Big\} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} P \sqcup B \text{ — счётное} \\ P \text{ — счётное} \end{array}\right\} \Rightarrow$

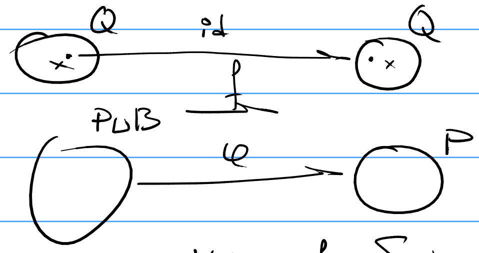
$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность

$\exists\ \varphi: P \sqcup B \to P$ — биект.

$f: Q \sqcup (P \sqcup B) \to Q \sqcup P$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ \varphi(x), & x \notin Q \end{cases}$$




Упр $f$ — биективна

$\Rightarrow |A \sqcup B| = |A|$ ■

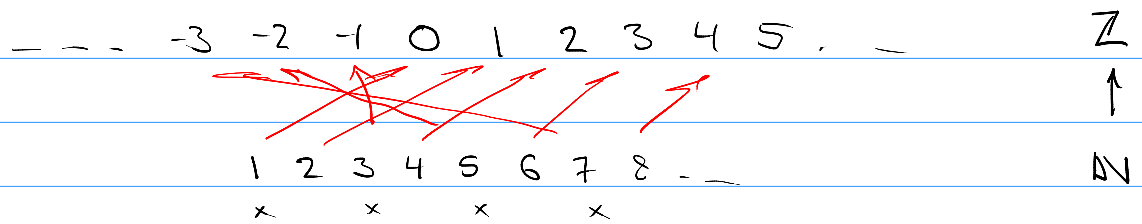
Опр $A$ ⓔ бесконечным, если $|A \sqcup \mathbb{N}| = |A|$

$A$ ⓔ бесконечным, если $\exists\, B \subset A: B \neq A,\ |A| = |B|$

собственное подмн-во

Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)

Пример $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ ($f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f$-биекция)




$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$g(n) = n$

1) $g$ инъективна? (вложение) — инъективность

2) $g$ сюръективна? (покрытие) — сюръекти

НЕТ $\Leftarrow \exists\, 0 \in \mathbb{Z}: \nexists\, n \in \mathbb{N}: g(n) = 0$

$g: \mathbb{N} \xhookrightarrow{\text{вложение}} \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

"$\infty \leq \infty + 1$ ($\infty = \infty + 1$)"

ординальные числа

спойлер $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots 3\omega, \ldots 4\omega \ldots$

$\omega: \omega > n\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \omega \not\approx \infty$

$\ldots \omega \cdot \omega, \ldots \omega^{\omega} \ldots \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}_{\omega} \ldots \mid \varepsilon \ldots$

$\omega^2 \cong \omega$

"$\frac{p}{q}$" $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (по т. 1)

$\mathbb{N} \left\{ \begin{matrix} \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \bigcup \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётное} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ чётное} \end{cases}$ — инъективна

$n_1, n_2$ $(n_1 \neq n_2)$

1) $n_1, n_2$ разной ч-ти $\Rightarrow f(n_1), f(n_2)$ имеют разные знаки $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) $n_1, n_2$ одной ч-ти

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$

$\Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} \neq -\frac{n_2-1}{2}$

$f(n_1) \neq f(n_2)$

— сюръективна

$(\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = a)$

$\triangleleft\ a \in \mathbb{Z}$ 1) $a \leq 0$. $n = \underbrace{-2a}_{\geq 0} + 1 > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{-2a+1-1}{2} = -\frac{-2a}{2} = a$

$f(n) = a$ ✓

2) $a > 0$ $n = 2a > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2a}{2} = a$ $f(n) = a$ ✓ $\Rightarrow f$ — сюръективна

$\Rightarrow f$ биективна $\Rightarrow \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ $(\infty = 2 \cdot \infty + 1)$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $(\infty^2 = \infty)$

$(2^\infty > \infty)$

$\|$

$|\mathbb{R}|$

<u>Теорема</u> $\overset{\mathbb{R}}{\overset{\cup}{[0,1]}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(Расшифровка: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ ← мн-во всех функций

$\|$

$\{(0,1,1,0,\dots),(\dots),\dots\}$

$\|$

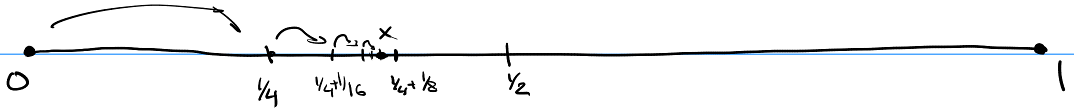
$\{(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$

в $[0,1]$ столько же веществ. чисел, сколько есть посл-тей из 0 и 1.

$g : \mathbb{N} \to \{0,1,2\} \leftrightarrow 0,2,1,1,0,0,0,2,0,\dots$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \leftrightarrow x_1, x_2, x_3, \dots \in \mathbb{R}$

<u>Д-во</u> Хотим $f : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$




$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

$x = \underset{1/2}{0} + 1/4 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}$, $a_k \in \{0,1\}$

$(a_1, a_2, a_3, \dots)$

$\overset{\cap}{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ $\overset{\|}{f(x)}$

1) Инъективность $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (!)

$$\underset{(a_1,a_2,\dots)}{f(x_1)} = \underset{(b_1,b_2,\dots)}{f(x_2)}$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots) \Rightarrow a_k = b_k \ \forall k$$

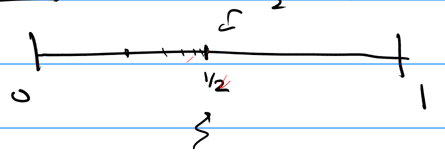
$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}_{x_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \blacksquare$$

2) Сюръективность $\quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad \exists ?\ x \in [0,1]$ :

$$f(x) = (a_1, a_2, \dots)$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in [0,1], \quad 0 \le x \le 1, \qquad \cancel{f(x) = (a_1, a_2, \dots)}$$

Нюанс $\quad \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \dots \leftrightarrow (1, 0, 0, 0, \dots) \neq f(x) \ \forall x$



$$f(1/2) \neq (1, 0, 0, \dots)$$

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1, \dots) = f(1/2)$$

"Лишние" посл-ти имеют 0 в периоде (0 начиная с нек. места)

$$(\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \leftrightarrow (\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1})$$

$A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad A = \{$лишние посл-ти$\} \cong \underbrace{\{\text{кон. посл-ти из 0 и 1}\}}_{B}$

(!) $B \cong \mathbb{N}$ $\quad$ 1) $B$ – бесконечно

$$\Rightarrow |B| \geq |\mathbb{N}|$$

2) $B \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad (a_1, a_2, \dots a_n) \leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$

вложение $\Rightarrow |B| \le |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \le |B| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

$B$ – счетно

$A \cong B$ – счётно

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \overset{\overleftarrow{f}}{\cong} [0,1]$

1, 2 и по Т3

Теорема 3: $A$ беск, $B$ – счётно $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A) \cup A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow [0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Упр. разобраться в док-ве