ЕГЭ

1) Тестовая часть (лёгкая) (12 штук)

2) Задачи с длинным решением (7 штук)

13. Уравнение (тригон., степенное, логарифм., смешанн. ...) $3^{\sin x} - \log_x 7 = 2x$

$\sin 2x + \sqrt{3} \cdot \sin(x - \pi) = 0$ $5^x - 2^{2x} = 1$

ОДЗ: $\mathbb{R}$

$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(потом докажем)

$[\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$ — ВАЖНО!

$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

$(\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1)$

$2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x$

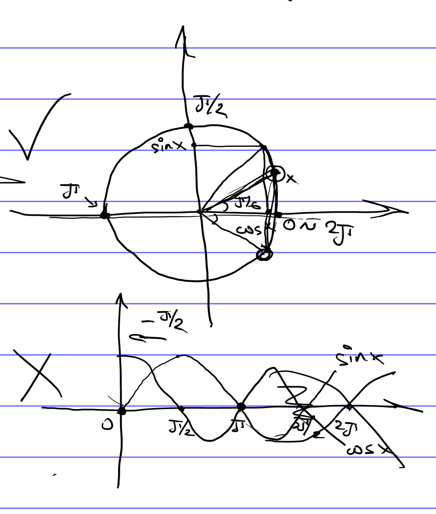
1) $\sin x = 0$

$x = \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x \neq 0$

$\cos x = \sqrt{3}/2$ $30^\circ = \pi/6$

$x = \pm\pi/6 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$



14. Стереометрия (угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости)

$ax + by + cz = d$

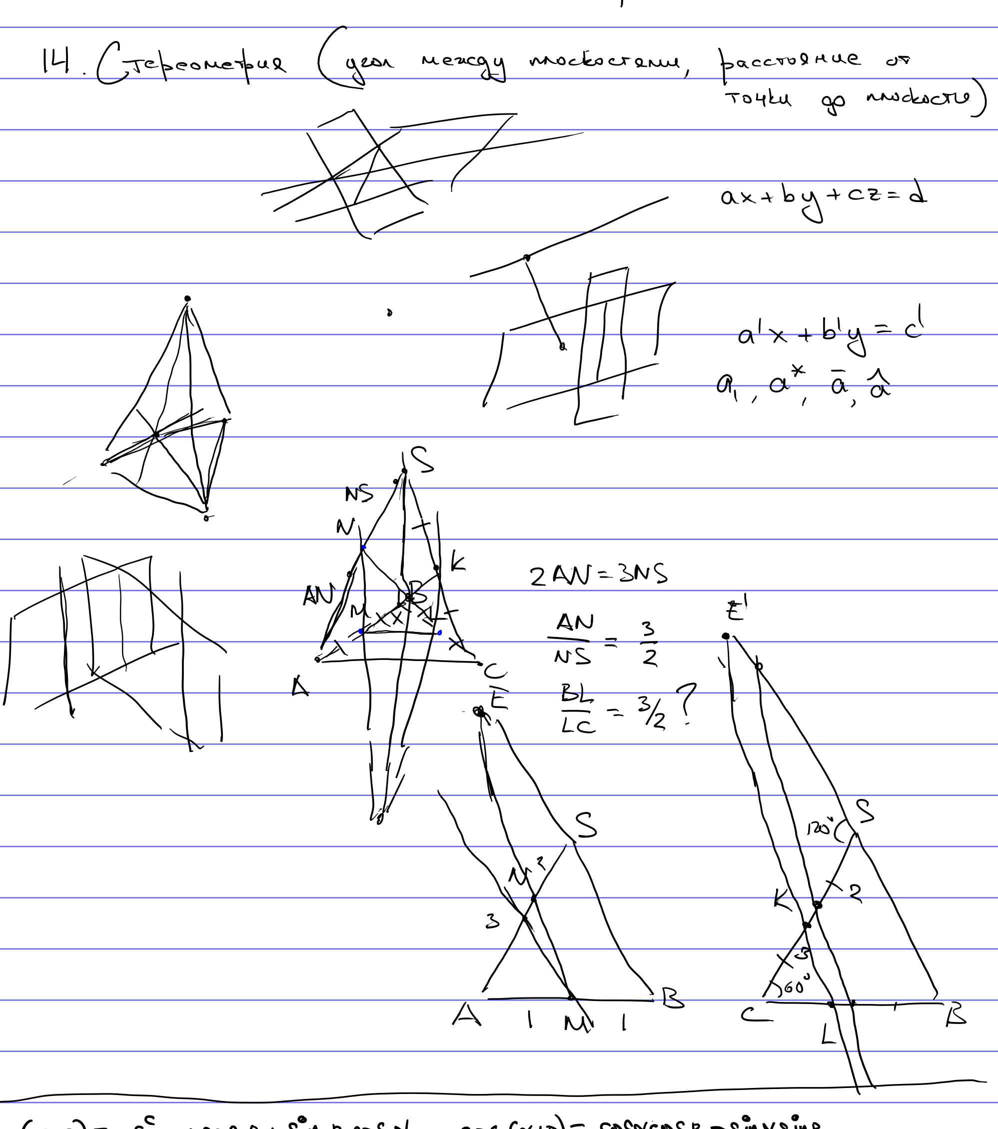
$a'x + b'y = c'$

$a_1,\ a^*,\ \bar{a},\ \hat{a}$

$2AN = 3NS$

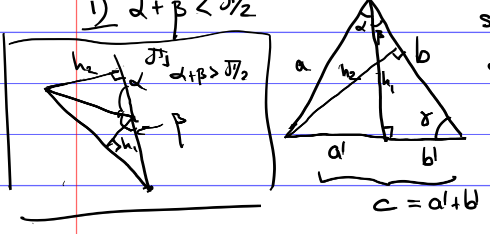
$\frac{AN}{NS} = \frac{3}{2}$

$\frac{BL}{LC} = 3/2$?



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1) $\alpha + \beta < \pi/2$



$c = a' + b'$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_2}{a}$

$\sin\gamma = \frac{h_2}{a'+b'} = \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{c}$

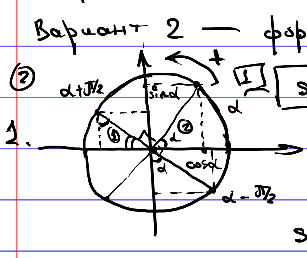
$\frac{h_1 c}{ab} = \frac{h_2}{a} = \sin(\alpha+\beta)$

$\frac{h_1 a'}{ab} + \frac{h_1 b'}{ab} = \underbrace{\frac{a'}{a}}_{\sin\alpha} \cdot \underbrace{\frac{h_1}{b}}_{\cos\beta} + \underbrace{\frac{b'}{b}}_{\sin\beta} \cdot \underbrace{\frac{h_1}{a}}_{\cos\alpha}$

(Д/З) $\cos(\alpha+\beta)$

Вариант 1 — перерис. картинки ($\alpha+\beta < \pi$, $\alpha+\beta > \pi$, $\alpha+\beta > 3\pi/2$)

Вариант 2 — формулы приведения



1. $\boxed{\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha}$

$\boxed{\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha}$

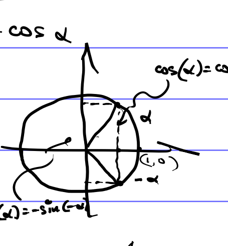
$\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha$ $\sin(\alpha - \pi/2) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

2. sin — нечётная, cos — чётная

$\sin(-x) = -\sin x\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$-\alpha = \beta$ $\sin(\beta + \pi/2) = \cos(\beta)$

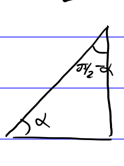


$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

3. $\sin(\pi/2 - \alpha) = \sin(-\alpha + \pi/2) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi/2) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$



4. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

2π — период (360°) radian $\pi \to \pi$ rad

$\omega\ s^{-1} \to \omega\ rad\ s^{-1}$

$\pi/2 < \alpha+\beta < \pi$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha, \beta > 0$

б.о.о. $\alpha > \pi/2$

$\alpha = \gamma + \pi/2,\ 0 < \gamma < \pi/2$

$\gamma + \beta = \beta + \alpha - \pi/2 < \pi/2$

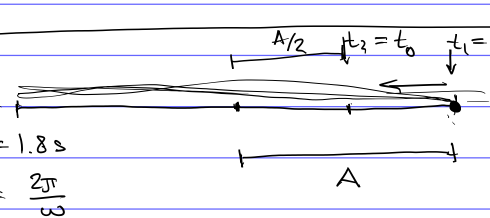
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma + \beta + \pi/2) =$

$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta =$

$= \underbrace{\cos(\alpha - \pi/2)}_{\sin\alpha}\cos\beta - \underbrace{\sin(\alpha - \pi/2)}_{-\cos\alpha}\sin\beta =$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$A/2$ $t_2 = t_0$ $t_1 = 0$

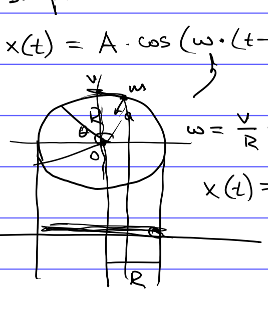


simple harmonic motion

$T = 1.8s$

$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_1)) = A\cos(\omega t)$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

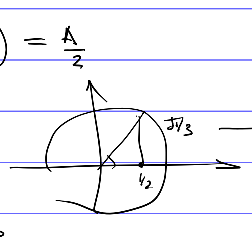


$\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$x(t) = R\cos(\omega(t - t_1))$

$x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{A}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot t = \pi/3$

$t_0 = \frac{T}{6} = 0.3s$

Наивная Теория Множеств

Опр: Мн-во — совокупность вполне определённых и хорошо различимых эл-тов нашей интуиции или мысли, мыслимых как единое целое.

1) Примеры $\{0,1,2\}$ — мн-во A, $x \in A$ "x лежит в A"

2) Всё множество $0 = \varnothing$ — пустое мн-во $1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$, $3 = \ldots$

3) Бесконечности $|\mathbb{Q}| > |\mathbb{N}|$

4) U — универсум — „самое большое мн-во"

Опр: 1) Принцип объёмности — мн-во определяется своими эл-тами.

$\{0,1,2\}$

2) Принцип абстракции — мн-во опред. свойством элементов

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n \vdots 2}_{\text{св-во}}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ (аксиома выделения)

$B \in A \Rightarrow B \notin B$

3) Парадокс Рассела $A = \{x \mid x \notin x\}$ $A \in A \Rightarrow A \notin A$?!!

$A \notin A \Rightarrow A \in A$

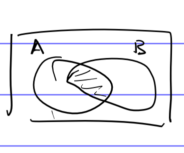
$A_1, A_2, A_3 \} \Rightarrow$ ложь $\Rightarrow A$ — любое

Опр: A, B — мн-ва $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Предикаты и кванторы

x $P(x)$ — предикат $P(x) \wedge Q(x)$ — конъюнкция

$P(x) \vee Q(x)$ — дизъюнкция

$\forall$ — квантор всеобщности $\forall x \in A: P(x) = \bigwedge_{x \in A} P(x)$

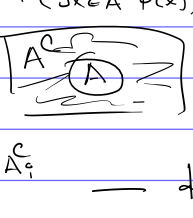
$\exists$ — квантор существования $\exists x \in A: P(x) = \bigvee_{x \in A} P(x)$

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ $\neg\left(\bigwedge_{x \in A} P(x)\right) = \bigvee_{x \in A} \neg P(x)$

$\neg(\forall x \in A\ P(x)) = \exists x \in A: \neg P(x)$

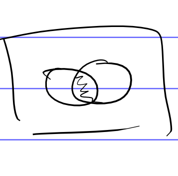
$\neg(\exists x \in A\ P(x)) = \forall x \in A\ \neg P(x)$

Опр: A, $A^C = U \setminus A$



$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$



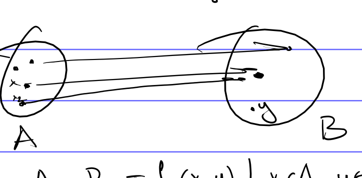
$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C$ — формулы де Моргана

— " — $\cap = \cup$

Опр (функция) 1) $f = (A, B, \varphi_f)$: $\forall x \in A: \exists! y \in B: y = f(x)$

обл. отпр., обл. приб.

единственный y наз. образом x относительно f.



2) (Новое) A, B. $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f \subseteq A \times B: \forall x \in A\ \exists! y \in B: (x,y) \in f$ $(y = f(x))$

Опр 1) $f: A \to B$ (отпр., обл. приб.) наз. инъективной, если $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

наз. сюръективной, если $\forall y \in B\ \exists x \in A: y = f(x)$

наз. биективной, если f — ин. и f — сюр.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n$

Опр: $f: A \to B$, $g: B \to A$. g наз. обратной к f $(g = f^{-1})$, если

1) $\forall x \in A: x = g(f(x))$

2) $\forall y \in B: y = f(g(y))$

Теорема: $f: A \to B$. f — обратима $(\exists f^{-1}) \Longleftrightarrow f$ — биективна

Д-во: $\Rightarrow$: $\exists$ f — обр. $\exists g: B \to A$ т.ч. 1) и 2)

пусть

1. f — сюр. $y \in B$ $\forall x = g(y) \in A$ $f(x) = f(g(y)) \overset{2)}{=} y \Rightarrow f$ — сюр

рассмотрим

2. f — ин. $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2)$. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, $g(f(x_1)) \overset{1)}{=} x_1$, $g(f(x_2)) \overset{1)}{=} x_2$ $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ — ин.

$\Rightarrow f$ — би.

$\Leftarrow$: $\exists f$ — биект. Хотим $g: B \to A$: 1) и 2)

$\forall y \in B$ f — сюр. $\Rightarrow \exists! x \in A: y = f(x)$. $g(y) := x$

f — ин.

1) $\forall x \in A$ $g(f(x)) = x$ ✓

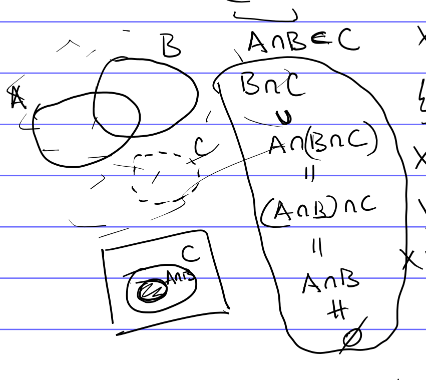
2) $\forall y \in B$ $f(g(y)) = y$ ✓

Задача: $\exists$? A, B, C: 1) $A \cap B \neq \varnothing$

2) $B \cap C = \varnothing$

3) $(A \cap B) \setminus C = \varnothing \Longleftrightarrow (A \cap B) \cap C^C = \varnothing$

$A \cap B \in C$ $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$



$B \cap C \cup A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \neq \varnothing$

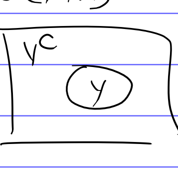
$\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$

$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

$Y^C = U \setminus Y$

$X \setminus Y = X \cap Y^C$

"$x \cdot (\neg y)$"



$B \cap C \neq \varnothing$?!!

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall a \in A\ a \in B$

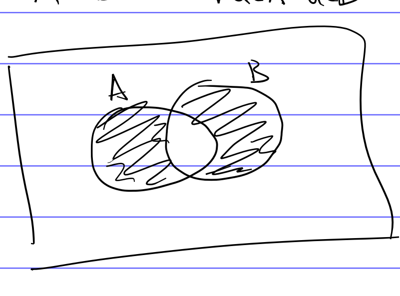
1) $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

2) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow B \cap C \neq \varnothing$

$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ A \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow B \neq \varnothing$

$A \cup B = B$



$\cup, \cap, \setminus, \triangle$

Опр (характеристическая функция) U — универсум, $A \subset U$

$\chi_A: U \to \{0, 1\}$

$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, & u \notin A \\ 1, & u \in A \end{cases}$ $A \leftrightarrow \chi_A$

$\hookrightarrow A = \{u \in U \mid \chi_A(u) = 1\}$

$A, B \subset U$ χ_A, χ_B

$\chi_{A \cap B}(u) = \begin{cases} 1, & \chi_A(u) = 1\ \&\ \chi_B(u) = 1 \\ 0, & \chi_A(u) = 0 \vee \chi_B(u) = 0 \end{cases} = \chi_A(u) \cdot \chi_B(u)$

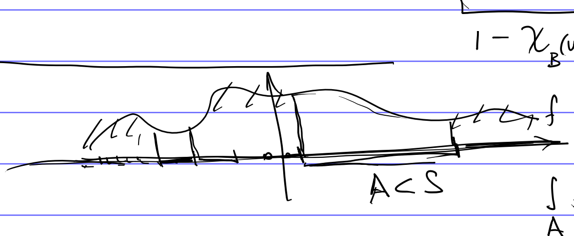
$\chi_{A \cup B}(u) = (\chi_A(u) + \chi_B(u)) - (\chi_A(u) \cdot \chi_B(u))$

$1 \quad 1 \quad 1 = 1$ 1 xor $1 = 0$

$\chi_{A \triangle B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - 2 \cdot \chi_A(u) \cdot \chi_B(u) \Longleftarrow$ XOR

$\chi_{A \setminus B}(u) = \chi_{A \cap B^C}(u) = \chi_A(u) \cdot \underbrace{\chi_{B^C}(u)}_{1 - \chi_B(u)} = \chi_A(u)(1 - \chi_B(u))$

$\int_S f(x)$

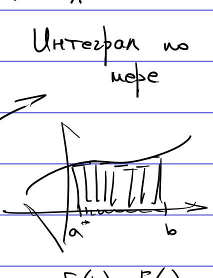


$A \subset S$

$\int_A f(x) = \int_S f(x) \cdot \chi_A(x)$

Интеграл по мере

Интеграл Римана



$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$

Опр (мощность)

$A = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$,

$|A| = n$

мощность

$|A| = \sum_{u \in U} \chi_A(u) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n$

$|\mathbb{N}| = |\{1, 2, \ldots\}|$ — ??! "∞"

$A \subset U$, $|A| = n \in \mathbb{N}$ $2^A = P(A) = \{B \subset U \mid B \subset A\}$ — булеан

Задача: (!) $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$ $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$

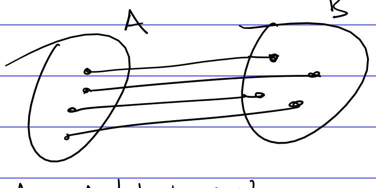
$f: 2^A \to \{\text{выборов}\}$ — биект. 2 варианта $B \subset A$

$\varnothing \subset A$

$|2^A| = |\{\text{выборов}\}| = 2^n$

Теорема: $A, B \subset U$, (A, B — кон.) $f: A \to B$ — биективна ($\Leftrightarrow$ обратимая)

$\Rightarrow |A| = |B|$



Задача $|A| = 100$ $X = \{B \subset A \mid |B| = 43\}$ $|X| \lessgtr |Y|$

$Y = \{B \subset A \mid |B| = 57\}$

$43 + 57 = 100$ $B \subset A: |B| = 43$ $B \in X$

$B' = A \setminus B$ $|B'| = 57$ $B' \in Y$

$f: X \to Y$ $f(B) = A \setminus B$ f и g обратные

$g: Y \to X$ $g(B) = A \setminus B$, $|B| = 57$

f — обратимая, биективная

$\Rightarrow |X| = |Y|$

$\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ $|X| = C_{100}^{43}$

$|Y| = C_{100}^{57}$ $(C_n^k = C_n^{n-k})$

Задача $A \subset U$ (кон.), $A \neq \varnothing$ $E(A) = \{B \subset A \mid |B| \vdots 2\} = E \subset 2^A$

$A = \{1, 2, 3\}$ $O(A) = \{B \subset A \mid |B| \not\vdots 2\}$

$E(A) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ (!) $|E(A)| = |O(A)|$ $E: Set \to Set$

$A \mapsto E(A)$

$a \in A$ $f: E(A) \to O(A)$ $B_1 \neq B_2 \in E(A) \Rightarrow f(B_1) \neq f(B_2)$

$B \in E(A)$

$|B| \vdots 2$ 1) $a \in B$ $|B \setminus \{a\}| \not\vdots 2$, $|B \setminus \{a\}| = |B| - 1$ $f(B) = B \setminus \{a\}$

2) $a \notin B$ $f(B) = B \cup \{a\}$ $|f(B)| \not\vdots 2$

Упр (!) f — сюр., ин.

или $g: O(A) \to E(A)$: $f(g(B)) = B$, $g(f(B)) = B$, $\forall B$

$g = f'$, $f': O(A) \to E(A)$ $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\varphi(3) = 1$

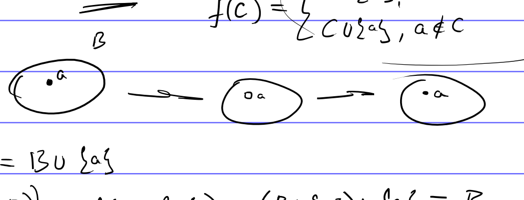
$\varphi(n) = \begin{cases} 0, & n \vdots 2 \\ 1, & n \not\vdots 2 \end{cases}$

1) $\forall B \in O(A)$ $f(f'(B)) = B$ ✓

$\forall B \in O(A)$ 1. $a \in B$ $f'(B) = B \setminus \{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B \setminus \{a\}}_{a \notin}) = (\underbrace{B \setminus \{a\}}_{C}) \cup \{a\} = B$

$f(C) = \begin{cases} C \setminus \{a\}, & a \in C \\ C \cup \{a\}, & a \notin C \end{cases}$



2. $a \notin B$ $f'(B) = B \cup \{a\}$

$f(f'(B)) = f(\underbrace{B \cup \{a\}}_{a \in}) = (B \cup \{a\}) \setminus \{a\} = B$

2) $\forall B \in E(A)$ $f'(f(B)) = B$ — упр

$\Rightarrow f'$ — обр. к f $E(A) \underset{f'}{\overset{f}{\rightleftarrows}} O(A)$

$\Rightarrow |E(A)| = |O(A)|$

Задача (!) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$

$|A| = n$ $C_n^k = |\{B \subset A \mid |B| = k\}|$

$\underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^n}_{|E(A)|} \underbrace{- C_n^1 - C_n^3 - C_n^5 - \ldots - C_n^{n-1}}_{-|O(A)|} = 0$ $(n \vdots 2)$

Задача $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

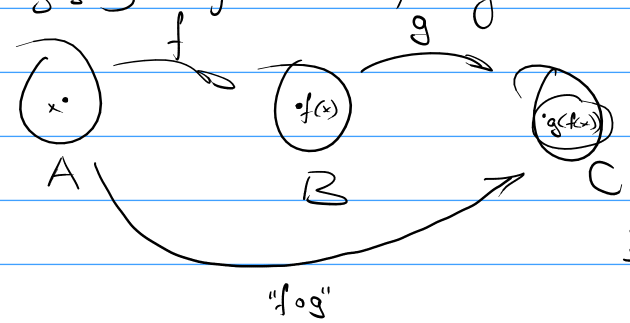
$\underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n} = \sum \alpha_j a^i b^j =$

$= C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n}$ — упр (через мощности мн-в)

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{B \subset A \mid |B| = k\}|$, $|A| = n$ $|2^A| = 2^n$

Опр (композиция): $f: A \to B$, $g: B \to C$



h — композиция f и g

$\underbrace{(g \circ f)}_{h}: A \to C$

$a \in A \quad \underset{g \to f}{(g \circ f)(a)} = \underset{g \to f}{\overline{g(f(a))}}$

Зам "$f \circ g$" существует

Диаграммы $\to$ $f \circ g$

Алгебраич. запись $\to$ $g \circ f$ $\quad (g(f(a)))$

$\underline{a \in A}$ $\quad f(g(a))$ — не имеет смысла в общем случае

Опр A, B — мн-ва. A и B (н) равномощными, если $\exists f: A \to B$: f — биективна

Примеры $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $\quad f: A \to B$

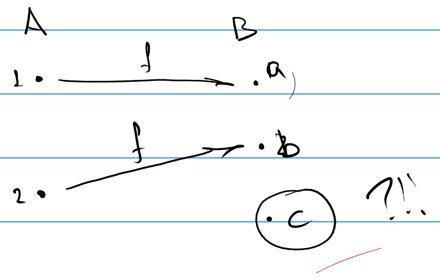
$f(1) = 2$ — ин.

— сюр. $(\forall b \in B \; \exists a \in A: b = f(a))$

$(f(A) = B)$

$\Rightarrow f$ - биект $\Rightarrow |A| = |B|$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ $\quad |A| \neq |B|$

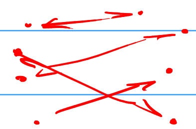


$\underset{\text{би}}{f}: A \to B$

$a = f(1)$

? $b = f(1)$?

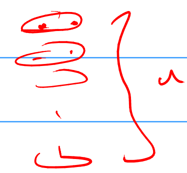
$\Rightarrow \underset{\text{би}}{f}: A \to B$



— очевидно

$\Leftarrow |A| = |B| = n$

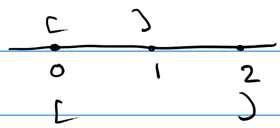
Утв. A, B — кон. $\quad \underbrace{A \text{ равномощно } B}_{\exists \underset{\text{би}}{f}: A \to B} \Leftrightarrow \underbrace{|A| = |B|}_{\text{числа}}$



— очевидно

Д-во Упражнение

Пример $[0, 1]$ равн. $[0, 2]$ $\quad ([0, 1] \cong [0, 2])$ — равномощность



$f: [0, 1] \to [0, 2]$

$f(x) = 2x$

$x_1, x_2 \in [0, 1]$ $\quad \underline{f(x_1) = f(x_2)}$

$x_1 = x_2$?

$\Downarrow$

$\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ — инъект.

$y \in [0,2]$ $x = y/2 \in [0,1]$ $f(x) = f(y/2) = 2 \cdot y/2 = y \Rightarrow f$ – сюр.
$\Rightarrow f$ – би.

$g: [0,2] \to [0,1]$
$g(y) = y/2$

f и g — обратные
$g = f^{-1}$

Пример: $(0,1) \cong (1, +\infty)$

$f: (0,1) \to (1,+\infty)$
$f(x) = 1/x$ ← би? обр?

$g: (1,+\infty) \to (0,1)$
$g(y) = 1/y$
$x \in (0,1)$
$g(f(x)) = g(1/x) = 1/(1/x) = \underline{\underline{x}}$

$y \in (1,+\infty)$ $f(g(y)) = f(1/y) = 1/(1/y) = y$

$\Rightarrow f$ и g – обратные
$\Rightarrow f$ – биективна
$\Rightarrow (0,1) \cong (1,+\infty)$

Упр: f – биективна (через обратную)

Опр A, B – мн-ва. $A^B := \{ f \mid f: B \to A \}$

$B \xrightarrow{f} A$

A, B – кон. $|A^B| = |A|^{|B|}$

$|B| = n$ $b_1, b_2, \dots, b_n$
$|A| = m$ $a_1, a_2, \dots, a_m$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ штук}} = m^n = |A|^{|B|}$

$\| \quad |A^B|$

Пример $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$0, 1, 2, 0, 2, 3, 3, 3, \ldots \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \ldots$

$f \in A^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow$ посл-ть из эл-тов A

$0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
$(\in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}})$

$\varphi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \underbrace{1,1}_{3}, \underbrace{0,1}_{1}, \underbrace{0,0}_{0}, \ldots \longrightarrow 1, 0, 3, 1, 0, \ldots$

$\varphi^{-1}: \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

φ и φ^{-1} — обратные
$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

$\underbrace{2}_{1,0}, \underbrace{0}_{0,0}, \underbrace{1}_{0,1}, \underbrace{3}_{1,1}, \underbrace{3}_{1,1}, 0, 0, 1, 2, \ldots \longrightarrow 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$

Опр $\underset{\text{мн-во}}{A}$ (н) $\underline{\text{счётным}}$, если $A \cong \mathbb{N}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Опр: A (н) не более чем счётным, если A конечно или счётно

Утв: A, B — нбчс $\Rightarrow$ $A \cap B$ — нбчс

$A \cup B$ — нбчс

Теорема 1

1) A – нбчс $\Rightarrow$ $(B \subset A \Rightarrow B$ – нбчс$)$

2) A – беск. $\Rightarrow$ $\exists\, B \subset A : B$ счётно

3) $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{A}$ нбчс, A_i – нбчс $\Rightarrow$ $\bigcup\limits_i A_i$ – нбчс

Д-во 1) A: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
$\quad\quad\checkmark \;\; \checkmark \;\; \times \;\; \checkmark \ldots$

$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$ — $B \subset A$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$B = \{4, 6, 8\} \subset A$

$\cancel{2}, 4, 6, 8, \times \times \times \times \ldots$
$\quad\checkmark \checkmark \checkmark$

$B = \{8, 10, 12, \ldots\}$

$\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \underbrace{8, 10, 12, \ldots}_{B}$

2) $b_1 \in A$

$b_2 \in A \setminus \{b_1\}$ — беск.

$b_3 \in A \setminus \{b_1, b_2\}$ — беск.

$b_4 \in A \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$

$\vdots$

$b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ — беск.

$\vdots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots$, $b_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счётное

$\subset A$

3) $\mathcal{A}$ — нбчс, $\forall A_i \in \mathcal{A}$ A_i — нбчс (!) $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup \mathcal{A}$ — нбчс.

$$\begin{array}{lcllll}
A_1 & = & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots \\
A_2 & = & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
A_3 & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
A_4 & & \ldots & & &
\end{array}$$

1. Не берём повторения
2. Пропускаем пустые ячейки

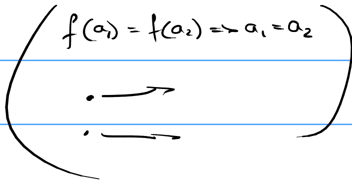
$\longrightarrow b_1, b_2, b_3, \ldots$

$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \bigcup\limits_i A_i$

$\subset$ нбчс

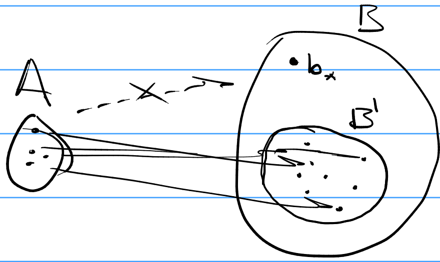
Сл-вие A, B — мн-ва, B — нбчс, $f: A \to B$ — инъективна (вложение)

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



$\Rightarrow$ A — нбчс

Д-во $B' = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



$f: A \to B'$ — биективна

1) f — инъективна ✓ (по условию)

2) f — сюръективна $\forall b \in B' \ \exists a \in A: \ b = f(a)$ — по опред. B'

$\Rightarrow |A| = |B'|$, B' — нбчс (по T_1) $\Rightarrow$ A нбчс

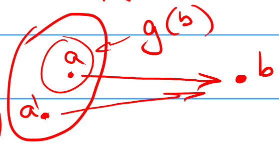
конечно или равномощно $\mathbb{N}$

Утв: A, B — мн-ва, A — нбчс, $f: A \to B$ — сюръективна $\Rightarrow$ (!) B — нбчс.

$f(g(b)) = f(a) = b$

Д-во $g: B \to A$

$g(b) = a \in A \mid f(a) = b$



g — инъекция

$g(b_1) = g(b_2)$

$\Downarrow$

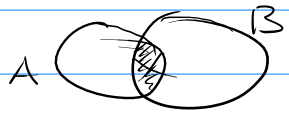
$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$

$b_1 \quad b_2$

$\Rightarrow b_1 = b_2$

Теорема 2 A — беск., B — нбчс. $\Rightarrow$ (!) $|A \cup B| = |A|$

Д-во: 1) Можно считать, что $A \cap B = \varnothing$



A: 2, 4, 6, 8, 10, ... (12, 14, 16, 18, ...)

B: a, b, c, d, e (2, 4, 6, 8, 10)

✓ беск.

$\cong$ A 2,4,6,8,10 ...

сюр. ин. — биект. $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$B' = B \setminus (A \cap B)$

$|A \cup B'| = |A| \Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$\overset{\|}{A \cup B'}$

Зам $A \cup B = A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение

$g(B) = \{g(b) \mid b \in B\} \subseteq A$

$= \{a \mid a = g(b), b \in B\}$

По T_1 $P \subseteq A$, P — счётное $Q = A \setminus P$

$A \sqcup B = P \sqcup Q \sqcup B = Q \sqcup (P \sqcup B) \ \cong$

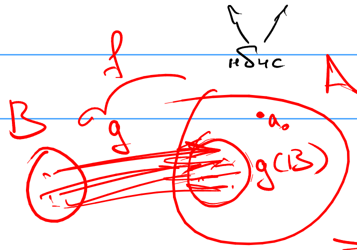
$A = P \sqcup Q = Q \sqcup P$

A — нбчс, $g(B) \subseteq A$ } $\Rightarrow$ g(B) — нбчс

По T_1 $P \sqcup B$ — нбчс (утв. 3)
нбчс
При этом P — счётно } $\Rightarrow$ $P \sqcup B$ — счётное, P — счётное } $\Rightarrow$

$|P \sqcup B| = |\mathbb{N}| = |P| \Rightarrow |P \sqcup B| = |P|$

счётность



$g: B \to g(B)$ — биект.

ин. — доказали

сюр. — все g(B) покрывает

$\Rightarrow B \cong g(B)$ — нбчс $\Rightarrow$ B — нбчс

$\exists\ \varphi: P\sqcup B \to P$ — биект. $\qquad f: Q\sqcup(P\sqcup B) \to Q\sqcup P$

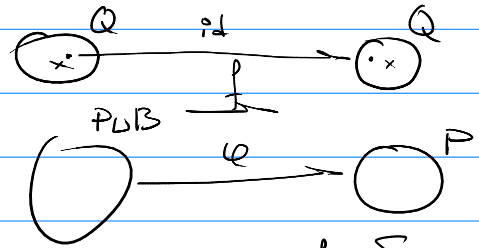
$$f(x) = \begin{cases} x, & x\in Q \\ \varphi(x), & x\notin Q \end{cases}$$

A — беск. $\Rightarrow$ удовл.

$a_0 \in A \qquad B = A\setminus\{a_0\}$

$B\subset A \qquad \infty - 1 = \infty$

$B \neq A \qquad |A| = |B| = |A\setminus\{a_0\}|$



Упр f — биективна

$\Rightarrow |A\sqcup B| = |A|$ ■

A конечно $\Rightarrow$ не удовл.

$B\subset A,\ B\neq A$ $\Rightarrow$ в B меньше эл-тов, чем в A

$|A| \neq |B|$

Опр A @ бесконечным, если $|A\sqcup \mathbb{N}| = |A|$

A @ бесконечным, если $\exists B\subset A:\ B\neq A,\ |A| = |B|$

собственное подмн-во

Упр Док-ть, что второе опр. работает (беск. мн-ва удовл., а конечные нет)

Пример $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ ($\exists f: \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ f-биекция)

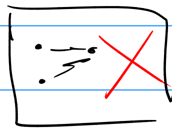
$\ldots\ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ldots \qquad \mathbb{Z}$

$\uparrow$

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ldots \qquad \mathbb{N}$

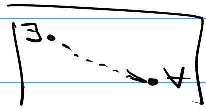
$g: \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ $\qquad$ 1) g инъективна? (вложение)

$g(n) = n$



— инъективность

2) g сюръективна? (покрытие)



— сюръекция

НЕТ $\Leftarrow\ \exists\, 0\in\mathbb{Z}:\ \nexists\, n\in\mathbb{N}:\ g(n) = 0$

$g: \mathbb{N} \xhookrightarrow{\text{вложение}} \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

"$\infty \leq \infty + 1$ $\quad (\infty = \infty + 1)$"

ординальные числа $\qquad$ Кантор $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\ 2\omega, 2\omega+1, \ldots\ 3\omega \ldots 4\omega \ldots$

$\omega:\ \omega > n\ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \omega \not\approx \infty$

$\ldots\ \omega\cdot\omega, \ldots\ \omega^{\omega}, \ldots\ \omega^{\omega^{\omega}} \ldots \ \Big|\ \varepsilon \ldots$

$\omega^2 \cong \omega$

$\frac{p}{q}$ "$\mathbb{Q}$" $\cong \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (по т. 1)

$\mathbb{N}\left\{\begin{matrix}\mathbb{N}\\ \mathbb{N}\\ \mathbb{N}\\ \vdots\end{matrix}\right\} \bigcup \cong \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ нечётное} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ чётное} \end{cases}$ — инъективна

n_1, n_2 $(n_1 \neq n_2)$

1) n_1, n_2 разной ч-ти $\Rightarrow f(n_1), f(n_2)$ имеют разные знаки $f(n_1) \neq f(n_2)$

2) n_1, n_2 одной ч-ти

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$

$\Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} \neq -\frac{n_2-1}{2}$

$f(n_1) \neq f(n_2)$

— сюръективна

$(\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = a)$

Д $a \in \mathbb{Z}$ 1) $a \leq 0$. $n = \underbrace{-2a}_{\geq 0}+1 > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = -\frac{n-1}{2} = -\frac{-2a+1-1}{2} = -\frac{-2a}{2} = a$

$f(n) = a$ ✓

2) $a > 0$ $n = 2a > 0$ $\in \mathbb{N}$

$f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2a}{2} = a$ $f(n) = a$ ✓ $\Rightarrow f$ — сюръективна

$\Rightarrow f$ биективна $\Rightarrow \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ $(\infty = 2 \cdot \infty + 1)$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $(\infty^2 = \infty)$

$(2^\infty > \infty)$

$\| \quad |\mathbb{R}|$

Теорема $\underset{\cup}{\overset{\mathbb{R}}{}}[0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(Расшифровка: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ ← мн-во всех функций

$\cong$

$\{(0,1,1,0,\ldots), (\ldots), \ldots\}$

$=$

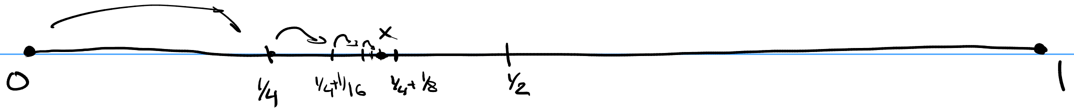
$\{(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$

в $[0,1]$ столько же веществ. чисел, сколько есть посл-тей из 0 и 1.

$g: \mathbb{N} \to \{0,1,2\} \leftrightarrow 0,2,1,1,0,0,0,2,0,\ldots$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \leftrightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathbb{R}$

Д-во Хотим $f: [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$



$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

$x = 0 + 1/4 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}$, $a_k \in \{0,1\}$

1/2

$\downarrow$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = f(x)$

$\cap$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1) Инъективность $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (!)

$$\underset{(a_1, a_2, \dots)}{f(x_1)} = \underset{(b_1, b_2, \dots)}{f(x_2)}$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots) \Rightarrow a_k = b_k \ \forall k$$

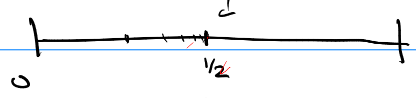
$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}_{x_1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}}_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \blacksquare$$

2) Сюръективность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\exists?\ x \in [0,1]$:

$f(x) = (a_1, a_2, \dots)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in [0,1], \qquad 0 \le x \le 1, \qquad \cancel{f(x) = (a_1, a_2, \dots)}$$

Нюанс $\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \dots \leftrightarrow (1, 0, 0, 0, \dots) \neq f(x) \ \forall x$



$$f(1/2) \neq (1, 0, 0, \dots)$$

$$0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1, \dots) \leftarrow$$

"Лишние" посл-ти имеют 0 в периоде (0 начиная с нек. места)

$$(\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1}, \cancel{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots}) \leftrightarrow (\underbrace{0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1})$$

$A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad A = \{$лишние посл-ти$\} \cong \underbrace{\{\text{кон. посл-ти из 0 и 1}\}}_{B}$

(!) $B \cong \mathbb{N}$ $\quad$ 1) B — бесконечно

$\Rightarrow |B| \ge |\mathbb{N}|$

2) $B \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$

вложение $\Rightarrow |B| \le |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \le |B| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

B — счетно

$A \cong B$ — счётно

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \overset{\overleftarrow{f}}{\cong} [0,1]$$

112 $\swarrow$ по Т3

Теорема 3: A беск, B - счётно $\Rightarrow |A \cup B| = |A|$

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A) \cup A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow [0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Упр разобраться в док-ве

Теорема $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($in : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — инъекция, ~~$bi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — биекция~~)

Д-во Лемма (диагональный метод Кантора): $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ "$\infty < 2^{\infty}$"

Д-во $in : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — инъекция.

$$n \mapsto (0,0,0,\ldots,0,\underset{\substack{n\text{-ная}\\\text{позиция}}}{1},0,0,\ldots)$$

Допустим, что $bi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — биекция

$$\begin{array}{llllll} bi(1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ bi(2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ bi(3) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

$\mathbb{N}$ (по вертикали), $\mathbb{N}$ (по горизонтали)

$a \in \{0,1\}$

$\bar{a} = 1 - a$

$b_k = \overline{a_{kk}}$ $\quad b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$b: \overline{a_{11}}, \overline{a_{22}}, \overline{a_{33}}, \overline{a_{44}}, \ldots$

$b \neq a_1$

$b_1 = \overline{a_{11}} \neq a_{11}$

$b \neq a_2$

$b_2 = \overline{a_{22}} \neq a_{22}$

$\vdots$

$b \neq a_n$

$b_n = \overline{a_{nn}} \neq a_{nn}$

$b \neq bi(1)$

$\neq bi(2)$

$\vdots$

$\neq bi(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

Противоречие с сюръект. bi

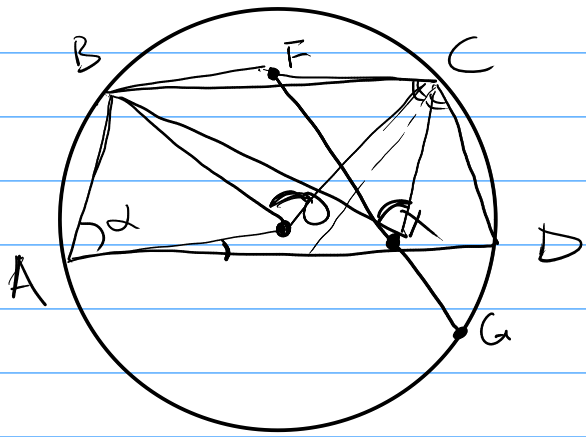
(не получается инъект. bi)

(возвращаемся к теореме)

$$|\mathbb{N}| \underset{\text{по лемме}}{<} |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]| \underset{[0,1] \subset \mathbb{R}}{\leq} |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

■

Следствие $\mathbb{N} < \{0,1\}^{\mathbb{N}} < \{0,1\}^{(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} < \ < \ < \ < \ \ldots$



$2\alpha = \overset{\smile}{BD} = \overset{\smile}{CA}$

$\angle BFC > \angle BOC$

$\angle BGC < \angle BOC$

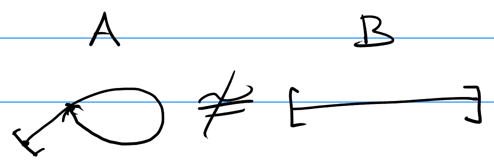
$\angle BXC = \angle BOC$

Топология

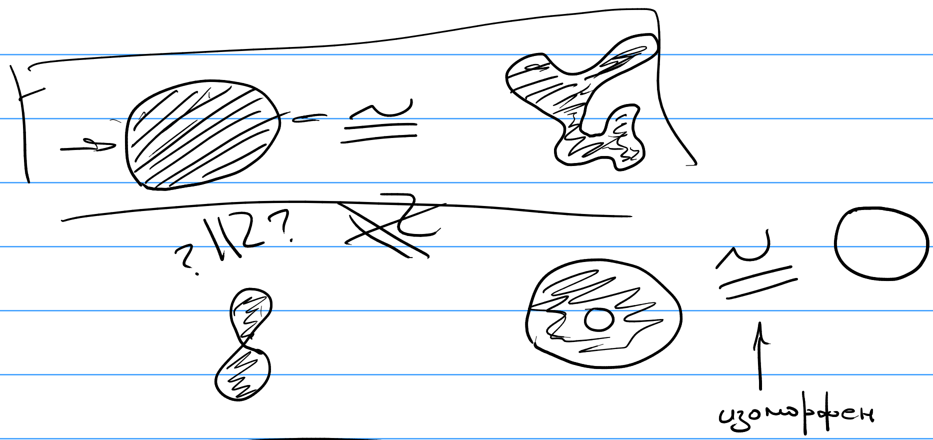
Идея 1: Размер не имеет значения

$[0,1] \cong [0,2]$ (Top)

Идея 2: Непрерывность



$f: A \to B$ не непрерывно



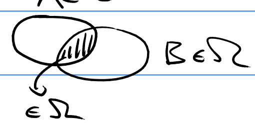
A^B

$|2^X| = 2^{|X|}$ (X - кон.)

Опр X — множество, $X \neq \varnothing$. $\Omega \subset 2^X$ (булеан – мн-во всех подмн-в)

Ω ⓝ топологией на X, если:

① $\varnothing, X \in \Omega$ ② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$



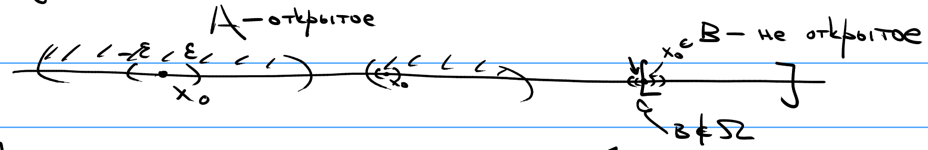
③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega$

(в частности, $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cup B \in \Omega$)

$\phantom{(в частности, A, B \in \Omega \Rightarrow {}} \overset{\shortparallel}{\bigcup\{A,B\}}$

В таком случае мн-ва $A \in \Omega$ (н) открытыми.

Пример: $\mathbb{R}$



$$\Omega = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x_0 \in A\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} \subset A\}$$

$(\ ) \longleftrightarrow [\ ]$ $\quad O_\varepsilon(x_0)$ — ε – окрестность точки x_0

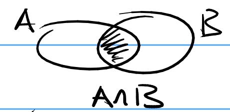
Задача $X = \mathbb{R}$, $\Omega' = \{\varnothing\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ бесконечно}\} \subset 2^{\mathbb{R}}$

(!) Правда ли, что Ω' – топология?

① $\varnothing, \mathbb{R} \in \Omega'$ ✓

② $A, B \in \Omega' \Rightarrow A \cap B \in \Omega'$ ✗ $\qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \ \&\ x \in B\}$

③ $\mathcal{A} \subset \Omega' \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega'$



$\to A, B \in \Omega'$

1) $A = \varnothing \vee B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2) A, B – бесконечные 2.1) $A \cap B = \varnothing \in \Omega'$ ✓

2.2) $A \cap B \neq \varnothing$

Ω' — не топология

$A = (-\infty, 1]$

$B = [1, +\infty)$ $\qquad A \cap B = \{1\}$ ✗

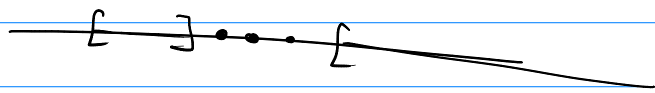
Опр X — мн-во, $\mho \subset 2^X$ (н) системой замкнутых мн-в, если

① $\varnothing, X \in \mho$

② $A, B \in \mho \Rightarrow A \cup B \in \mho$

③ $\mathcal{A} \subset \mho \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mho$

$\mathbb{R}$



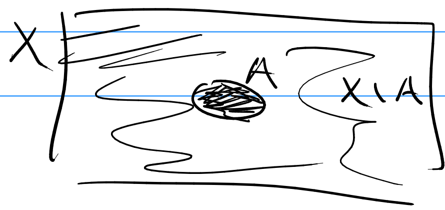
Свойство $(\Omega \longleftrightarrow \mho)$

$\forall (X, \Omega)$. $\mho := \{X \setminus A \mid A \in \Omega\}$ — сист. замк. мн-в

$\forall (X, \mho)$. $\Omega := \{X \setminus A \mid A \in \mho\}$ — топология

Д-во упражнение

(проверить аксиомы)



<u>Задача</u> $X = [0, +\infty)$ $\quad \Omega = \{(a, +\infty) \mid a \geq 0\} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$

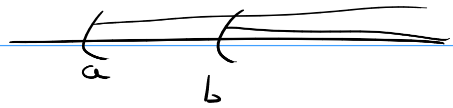
Правда ли, что Ω — топология?

① $\varnothing, X \in \Omega$ ✓ (по опр.)

② $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$? √

$A = (a, +\infty)$, $B = (b, +\infty)$

$A \cap B = (\max(a, b), +\infty)$



③ $\mathcal{A} \subset \Omega \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Omega$ — упр.