数学.

I $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 9x^2 + y^2 - 2$.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 18x = 0$ ①

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0$ ②

②より. $2y(x+1) = 0$. $y = 0$, または. $x = -1$

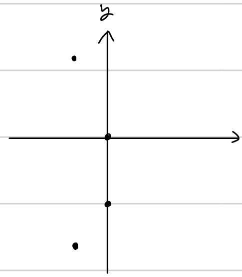
(i) $y = 0$ のとき.

①は. $6x^2 + 18x = 0$ $x(x+3) = 0$.

$x = 0, -3$.

(ii) $x = -1$ のとき.

①は. $6 + y^2 - 18 = 0$ $y^2 = 12$. $y = \pm 2\sqrt{3}$.



従って. $(x,y) = (0,0), (0,-3), (-1, 2\sqrt{3}), (-1, -2\sqrt{3})$.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 18$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2$. より.

ヘッシアンは. $H(x,y) = 12(2x+3)(x+1) - 4y^2$ である.

(i) $H(0,0) > 0$, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} > 0$ より. $(0,0)$で 極小値. -2

(ii) $H(0,-3) = 36 - 36 = 0$ でヘッシアンで 判定できない.

y軸上で $(0,-3)$ から a 動かすと.

$f(0,-3+a) = (-3+a)^2 - 2$ で. $a > 0$ で $f(0,3+a) < 0$, $a < 0$ で $f(0,3+a) > 0$ より. $(0,-3)$で 極値 をとらない.

(iii) $H(-1, 2\sqrt{3}) < 0$ より. 極値をとらない

(iv) $H(-1, -2\sqrt{3}) < 0$ より. 極値をとらない.

従って. $(0,0)$ で 極小値 -2 をとる.

2

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right)\cdot dx$

$\tan^{-1}x$ でも良い.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ について. $x=\tan\theta$ とおくと. $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$x : 0 \to \infty$

$\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$ より.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2} = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$ なので.

求める値は. $\frac{1}{2}(\pi+1)$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x-y \leqq 2,\ 0 \leqq x+y \leqq 3\}$

$x-y=u$, $x+y=v$ とおくと.

Dは $E = \{(u,v) \mid 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 3\}$ に移る.

$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{-u+v}{2}$ より.

$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}$.

従って. $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\cdot dxdy = \frac{1}{2}\iint_E u\cdot e^v\cdot dudv$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^2 u\cdot du \cdot \int_0^3 e^v\cdot dv$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^2 \cdot \left[e^v\right]_0^3$

$= e^3 - 1$

3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$ について. $A\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つ.

(1) $-2-5t = 3$

$t = -1$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

従って. $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$

最小の固有値 $\lambda = 1$ について.

$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より. 固有ベクトル $a\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$

求めるのは. $a = 1$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ A. $x = 0,\ y = -1$ //

$\boxed{4}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3x + e^{-x}$ … ⊛

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ … ① について. 特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を解いて.

$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ より. $\lambda = 2, 3$ だから.

$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ （A, B：任意定数）.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3x$ … ② について

1つの解を. $y = ax + b$ とすると.

$-5a + 6ax + 6b = 3x$.

$a = \dfrac{1}{2}$, $6b = \dfrac{5}{2}$ $\therefore b = \dfrac{5}{12}$ より. $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}$ を ② の特解としてとれる.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^{-x}$ … ③ について.

1つの解を. $y = ce^{-x}$ とすると.

$c \cdot e^{-x} + 5ce^{-x} + 6ce^{-x} = e^{-x}$

$12c = 1$ $c = \dfrac{1}{12}$ より. $y = \dfrac{1}{12}e^{-x}$ を ③ の特解としてとれる.

従って. ⊛ の一般解は、$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{1}{12}e^{-x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}$

$\dfrac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x} - \dfrac{1}{12}e^{-x} + \dfrac{1}{2}$

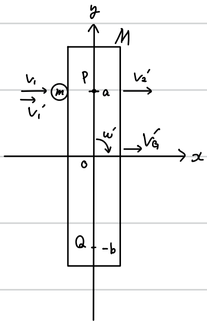
条件 $y(0) = 0$, $\dfrac{dy}{dt}(0) = 0$ より. $\begin{cases} A + B + \dfrac{1}{12} + \dfrac{5}{12} = 0 \\ 2A + 3B - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{2} = 0. \end{cases}$ $\quad A + B = -\dfrac{1}{2}$, $\quad 2A + 3B = -\dfrac{5}{12}$

よって. $\underline{y = -\dfrac{13}{12}e^{2x} + \dfrac{7}{12}e^{3x} + \dfrac{1}{12}e^{-x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}}$ //

$\left(\begin{array}{l} B = -\dfrac{5}{12} + 1 = \dfrac{7}{12} \\ A = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{12} = -\dfrac{13}{12} \end{array} \right.$

物理

1



ボール：$v_1 \to v_1'$

P：$0 \to v_2'$

バットの重心Gを通る軸まわりの回転の慣性モーメントをI_G，角速度ω'

[1] 衝突後のP点

(1) $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - 0} = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1}$

(2) ボールとバットの重心について、運動量保存則を適用して.

$$mv_1 = mv_1' + Mv_G'$$

(3) 衝突前後で角運動量は保存されるので.

$$mv_1 \cdot a = mv_1' a + I_G \omega'$$

(4) $a\omega' = v_2' - v_G'$ より.

$$\omega' = \frac{1}{a}(v_2' - v_G') \quad \text{従って.}$$

$$mv_1 = mv_1' + Mv_G'$$

$$mv_1 = mv_1' + \frac{I_G}{a^2}\left(v_2' - v_G'\right)$$

よって. $M \cdot v_G' = \dfrac{I_G}{a^2}v_2' - \dfrac{I_G}{a^2}v_G'$

$$\left(\frac{Ma^2 + I_G}{a^2}\right)v_G' = \frac{I_G}{a^2}v_2'$$

$$v_G' = \frac{I_G}{Ma^2 + I_G} \cdot v_2'$$

従って. $mv_1 = mv_1' + \dfrac{MI_G}{Ma^2 + I_G}v_2'$

$$= mv_1' + m_r v_2'$$

ここで. $e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1}$ より. $v_2' = v_1' + ev_1$ だから.

$mv_1 = mv_1' + m_r(v_1' + ev_1)$

$(m+m_r)v_1' = (m - em_r)v_1$

$v_1' = \frac{m - em_r}{m + m_r} v_1$ //

[2]

(1) 衝突間の力積を無視すれば. 運動量保存が成り立ち.

$mv_1 = mv_1' + Mv_G'$, $v_G' = \frac{m}{M}(v_1 - v_1')$

よって. 並進運動による移動距離は. $\frac{m}{M}(v_1 - v_1')\Delta t$.

同様に回転運動について.

$mv_1 a = mv_1' a + I_G \cdot \omega'$, $\omega' = \frac{ma}{I_G}(v_1 - v_1')$

よって. 回転運動による移動距離は. $b\omega'\Delta t = \frac{mab}{I_G}(v_1 - v_1')\Delta t$

(2) Qは動かないので.

$\frac{m}{M}(v_1 - v_1')\Delta t = \frac{mab}{I_G}(v_1 - v_1') \cdot \Delta t$

$\frac{1}{M} = \frac{ab}{I_G}$

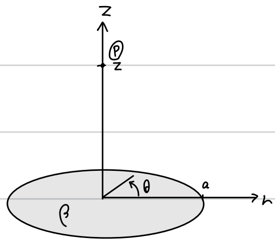
$b = \frac{I_G}{Ma}$

(3) 動かないので. 加速度は 0.

従って. Qに働く力の大きさは0.

2

[1]



(1) $dQ = \beta\, r \cdot dr \cdot d\theta$

(2) $dE_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\beta \cdot r\, dr \cdot d\theta}{r^2+z^2} \cdot \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$

$= \dfrac{\beta \cdot z \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}{4\pi\varepsilon_0\, (r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

(3) $E_z = \displaystyle\int_0^a \frac{\beta \cdot z \cdot r \cdot dr \cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0\,(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta z}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dr = \frac{\beta z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^a$

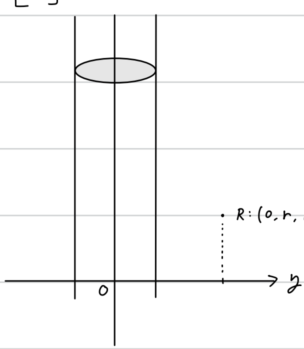
$= \dfrac{\beta}{2\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

(4) $V_0 = -\displaystyle\int_\infty^0 \frac{\beta}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \cdot dz$

$= \left[\dfrac{\beta}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)\right]_\infty^0$

$= \dfrac{\beta a}{2\varepsilon_0}$

[2]



(1) 電界は、円柱導体が無限に長いことを考慮して、$E_z = 0$.

(2) ガウスの法則より、

円柱外部で、$E = \dfrac{L\rho}{2\pi r L \varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{2\pi r \varepsilon_0}$

円柱内部は、導体なので、$E = 0$

(3)