# 数学

1 $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2y - y^3 + 11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x$.

(1) $f_x = 2x^2 + 6xy + 22x + 6y - 12 = 0$ … ①

$f_y = 3x^2 - 3y^2 + 6x + 6y = 0$ … ②

①より. $x^2 + 3xy + 11x + 3y - 6 = 0$. … ①′

②より. $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$

$(x+y)(x-y) + 2(x+y) = 0$.

$(x+y)(x-y+2) = 0$. $x = -y$ または. $x = y-2$.

(i) $x = -y$ のとき. ①′より.

$y^2 - 3y^2 - 11y + 3y - 6 = 0$.

$-2y^2 - 8y - 6 = 0$, $y^2 + 4y + 3 = 0$. $(y+1)(y+3) = 0$. $y = -1, -3$

$(x,y) = (1,-1), (3,-3)$.

(ii) $x = y-2$ のとき. ①′より.

$y^2 - 4y + 4 + 3y^2 - 6y + 11y - 22 + 3y - 6 = 0$.

$4y^2 + 4y - 24 = 0$. $y^2 + y - 6 = 0$. $(y+3)(y-2) = 0$ $y = -3, 2$.

$(x,y) = (-5,-3), (0,2)$

従って. 条件を満たすのは.

$(x,y) = (-5,-3), (0,2), (1,-1), (3,-3)$

(2) $f_{xx} = 4x+6y+22$, $f_{yy} = -6y+6$, $f_{xy} = 6x+6$

より、ヘッシアンは、$H(x,y) = 12(2x+3y+11)(1-y) - 36(x+1)^2$

$H(-5,-3) = 12\cdot(-8)\cdot 2 - 36\cdot 16 < 0$ より、$(-5,-3)$ で極値をとらない。

$H(0,2) = 12\cdot 17\cdot(-1) - 36 < 0$ より、$(0,2)$ で極値をとらない。

$-\frac{18}{3}$

$\frac{2}{3} - 3 + 1 + 11 - 6 + 3 - 12 =$

$240$ $-144$

$H(1,-1) = 12\cdot 10\cdot 2 - 36\cdot 4 = 96 > 0$, $f_{xx}(1,-1) = 20 > 0$ より、極小値 $-\frac{16}{3}$ をとる。

$32$

$H(3,-3) = 12\cdot 8\cdot 4 - 36\cdot 16 < 0$ より 極値をとらない。

従って、$(1,-1)$ で極小値 $-\frac{16}{3}$ をとる。

② $z = -x^2-2y$ と $z = y^2-3$ で囲まれた体積。

2つの曲面の交線は、$-x^2-2y = y^2-3$ を満たす。

整理して、$x^2+y^2+2y = 3$

$x^2+(y+1)^2 = 4$.

この交線の内部領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+(y+1)^2 \leqq 4\}$ で体積を持つ。

よって、$V = \iint_D (-x^2-2y-y^2+3)\cdot dx\,dy$

$= -\iint_D \{x^2+(y+1)^2-4\}\cdot dx\,dy$.

$x = r\cos\theta$, $y+1 = r\sin\theta$ とすると、$D$は、$E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移り、

$V = -\iint_E (r^3-4r)\cdot dr\cdot d\theta$

$= -2\pi\int_0^2 (r^3-4r)\cdot dr$

$= -2\pi\left[\frac{1}{4}r^4 - 2r^2\right]_0^2$

$= -2\pi(4-8)$

$= 8\pi$

3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Aの固有値・固有ベクトルを求める.

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)+4 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$. $\lambda = -1, 2$.

$A+E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より. $\lambda=-1$ の固有ベクトルは. $a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$

$A-2E = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より. $\lambda=2$ の固有ベクトルは. $b\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$

従って. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ ととれば. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ と対角化できる. $P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ だから.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ -(-1)^n & -4\cdot 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4\cdot(-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ -4(-1)^n + 4\cdot 2^n & -(-1)^n + 4\cdot 2^n \end{pmatrix}$$ //

4 $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 5\sin x$. … ※

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ … ① について. 特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+5=0$ を解く.

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

従って. ①の一般解は. $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. $(A, B$は任意定数$)$

※の1つの解を. $y = a\cos x + b\sin x$ とおくと.

$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$. なので ※に代入して.

$(-a+2b+5a)\cos x + (-b-2a+5b) = 5\sin x$.

$4a+2b=0$ $8a+4b=0$

$-2a+4b=5$ $-10a=5$. $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ より. ※の1つの解として. $y = -\frac{1}{2}\cos x + \sin x$ がとれる.

従って. ※の一般解は. $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos x + \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + \frac{1}{2}\sin x + \cos x.$$

条件 $y(0)=0,\ \frac{dy}{dx}(0)=1$ より.

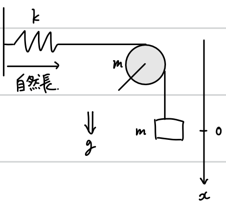
$$\begin{cases} A-\frac{1}{2}=0 & \therefore A=\frac{1}{2} \\ -A+2B+1=1 & \therefore B=\frac{A}{2}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

従って. 条件を満たす ⊗ の解は.

$$y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)-\frac{1}{2}\cos x+\sin x.$$

# 物理.

## 1 力学.




(1) 定滑車の密度は. $\frac{m}{\pi a^2}$ だから.

$$I_0=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{m}{\pi a^2}\cdot r^2\times r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{2m}{a^2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}ma^2$$

(2) 物体の運動方程式は. $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=mg-kx$

(3) 運動方程式 $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=mg-kx$ を解く.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{mg}{k}\right)$$

これは. 単振動の式なので.

$$x-\frac{mg}{k}=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$x=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{mg}{k}$$

共.tで微分して. $\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

条件 $x(0)=0$, $\frac{dx}{dt}(0)=0$ より.

$$A=-\frac{mg}{k},\quad B=0$$

従って. $x(t)=\frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

(4) 物体の速度は $\frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = \sqrt{\frac{m}{k}}g\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

よって 速度の大きさ $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ の最大値は $\sqrt{\frac{m}{k}}g$ である.

従って $E_1 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{m}{k}\cdot g^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$

また 糸のすべりがないので 角速度 $\omega$ を用いて $\frac{dx}{dt} = a\omega$ が成り立つ.

従って $E_2 = \frac{1}{2}I_0\cdot\left(\frac{\sqrt{\frac{m}{k}}g}{a}\right)^2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2}ma^2\cdot\frac{m}{k}g^2 = \frac{(mg)^2}{4k}$

[2].

(1) 物体について 運動方程式をたてると.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - C\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = mg \quad \cdots (*)$$

$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = 0 \cdots ①$ について 特性方程式 $m\lambda^2 + C\lambda + k = 0$ を解くと.

$\lambda = \frac{-C \pm \sqrt{C^2-4mk}}{2m}$ である.

臨界減衰において $C^2-4mk=0$ だから 負を除いて $C = 2\sqrt{mk}$

(2) (1)に続いて 臨界減衰を考える.

(1)より ①の一般解は $x = Ae^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Bt\cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ (A, B: 任意定数)

(*)の1つの解として $x = \frac{mg}{k}$ をとれるので.

(*)の一般解は $x = Ae^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Bt\cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{mg}{k}$ (A, B: 任意定数).

tで微分して $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}}Ae^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} - \sqrt{\frac{k}{m}}B\cdot t\cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

条件 $x(0)=0$, $\frac{dx}{dt}(0)=0$ より.

$$\begin{cases} A + \frac{mg}{k} = 0. & \therefore A = -\frac{mg}{k} \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}A + B = 0 & \therefore B = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\left(-\frac{mg}{k}\right) = -\sqrt{\frac{m}{k}}g \end{cases}$$

従って. $x(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right) - \sqrt{\frac{m}{k}}g \cdot t \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

また $\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{m}{k}}g\, e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} - \sqrt{\frac{m}{k}}g \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + g \cdot t \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} = gt \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^\infty \left(-c \cdot \frac{dx(t)}{dt}\right) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt \\
&= -2\sqrt{mk} \int_0^\infty \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 dt \\
&= -2\sqrt{mk} \int_0^\infty g^2 \cdot t^2 \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t} \cdot dt \\
&= -2\sqrt{mk}\, g^2 \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t} \cdot dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t} \cdot dt &= \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\, t^2 \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right]_0^\infty}_{0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\infty 2t \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t} \cdot dt \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot t \cdot e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right]_0^\infty}_{0} + \frac{m}{2k} \int_0^\infty e^{-2\sqrt{\frac{k}{m}}t} \cdot dt \\
&= \frac{m}{2k}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot e^{-2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}t}\right]_0^\infty \\
&= \frac{m}{4k}\sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned}
$$

従って. $W = -2 \cdot \sqrt{mk} \cdot g^2 \cdot \frac{m}{4k}\sqrt{\frac{m}{k}}$

$= -\frac{(mg)^2}{2k}$

---

(答えから逆に考えうる別解).

時間が十分経過すると. 物体位置は. $x = \frac{mg}{k}$ となる.

位置エネルギーの基準を $x = 0$ にとる.

$t = 0$ のときの力学的エネルギー $E_1$ は. $E_1 = 0 + 0 = 0$

$t \to \infty$ のときの力学的エネルギー $E_2$ は. $E_2 = -mg \cdot \frac{mg}{k} + \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 0 = -\frac{(mg)^2}{2k}$

物体の受ける非保存力は. $-c \cdot \frac{dx}{dt}$ のみで.

力学的エネルギーの変化がその間に受けた非保存力のした仕事に等しいことを利用して.

$W = E_2 - E_1 = -\frac{(mg)^2}{2k}$

2 電磁気

[1]

(1) 同心の半径$r$の仮想球面$S$について.

電束に関するガウスの法則より

$$\varepsilon \cdot 4\pi r^2 E(r) = Q.$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}$$

(2) $V = -\int_{R_{out}}^{R_{in}} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} \cdot dr$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_{out}}^{R_{in}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}}\right)$$

(3) $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon. \frac{R_{in} \cdot R_{out}}{R_{out} - R_{in}}$

[2]

(4) (1)と同様に考えて.

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} & \text{ア} \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} & \text{イ} \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} & \text{ウ} \end{cases}$$

(5) 極板間の電位差$V$は.

$$V = -\int_{R_{out}}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} dr - \int_{R_1}^{R_{in}} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{out}}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}}\right) - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right\}.$$

(6) $C' = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon \cdot \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}}\right) - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \right\}^{-1}$

(7) $\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{out}}\right) - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ だから.

$C > C'$ である. (前提知識ありきの解答).