$\boxed{1}$

(1) 3つの面で囲まれた領域は

$x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $x \geqq 0$ を満たす

これを領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ として定義すると

求める体積は $V = \iint_D x \cdot dxdy$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると

Dは領域 $E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$ に移るので

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2\cos\theta \cdot dr \cdot d\theta = \frac{1}{3}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

(2) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ より

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}$ である

チェインルールより

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$ となる

ここで $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}$ を代入して

$\frac{\partial f}{\partial r} = -\sin\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ なので

$f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ は r を含まない関数となる

$\boxed{2}$

(1) $x_{n+1} = \frac{9}{10} \times x_n + \frac{1}{5} y_n$

$y_{n+1} = \frac{4}{5} \times y_n + \frac{1}{10} \times x_n$. だから.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(2) $$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{9}{10} - \lambda & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8-10\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \cdot (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7-10\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}(1-\lambda)(7-10\lambda)$$

(3). Aの固有値は. $\lambda = 1, \frac{7}{10}$. それぞれ固有ベクトルを求める.

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より.

$\lambda = 1$ の固有ベクトルは. $a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$.

$$A - \frac{7}{10}E = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より.

$\lambda = \frac{7}{10}$ の固有ベクトルは. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$

従って、$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のようにとれば良い。

逆行列 P^{-1} は、$P^{-1} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ である。

(4). (3) の P を用いて、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$ となる。

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix}$ より、

$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$\left(\frac{7}{10}\right)^n = a$ として進める。

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+a & 2-2a \\ 1-a & 1+2a \end{pmatrix}$.

$A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(\frac{7}{10}\right)^n & 2-2\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n \\ 1-\left(\frac{7}{10}\right)^n & 1+2\left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix}$.

(5) $n \to \infty$ としたとき、$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ となる

行列より、$n \to \infty$ としたとき、$x_n : y_n = 2 : 1$ になる。