$\boxed{1}$

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots$

$= 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{1!} + \dfrac{n-1}{2!} + \cdots + \dfrac{2}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{1!} + \dfrac{n}{2!} + \cdots + \dfrac{n}{n!}\right) - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) - \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}}{n}$

$\alpha = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n!} = 0 \longrightarrow 0$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$

$= e - 1$

$1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$

(3) 怪しい.

数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$を. $a_n = b_n + \alpha$ となるように定義する.

すると. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ なので. このとき. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = 0$ が成り立つと分かっている. 危険

従って. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha + \dfrac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right) = \alpha$ となり. 性質(A)が証明できる.

? $\varepsilon > 0$に対し. Nが存在して. $n \geqq N$のとき. $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.

$M = |a_1 - \alpha| + \cdots + |a_N - \alpha|$ とおき.

$N' > \dfrac{2M}{\varepsilon}$, $N' > N$となるN'をとると. $n \geqq N'$に対して.

$\left|\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| \leqq \dfrac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n}$

$\leqq \dfrac{M}{n} + \dfrac{(n-N)\frac{\varepsilon}{2}}{n}$

$< \dfrac{M}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$< \varepsilon$

従って. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$

2

(i) (A)より、$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ は零ベクトルではなく、

(B)より、$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ の任意の組について、内積が0なので、

直交する。従って、1次独立である。

(ii) $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v_j}$.

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \vec{v_j}, \vec{v_i} \rangle$$

ここで、(B)の条件から、$j \neq i$ のとき、$\langle \vec{v_j}, \vec{v_i} \rangle = 0$ であり、

(A)より、$j = i$ のとき $\langle \vec{v_j}, \vec{v_i} \rangle = 1$ なので、

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \vec{v_j}, \vec{v_i} \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

(iii) VがWの部分空間であることを証明する。

① Vに零ベクトルは含まれている。

和や積について閉じているのは自明なので、VはWの部分空間である。

(iv) $V \neq W$ で、$\vec{w} \notin V$ かつ $\vec{w} \in W$ を満たす $\vec{w}$ について、

$\vec{w}$ はVに含まれないので、Vに含まれる任意のベクトル $\vec{v}$ と線型独立である。

(A)より、$\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ は零ベクトルでないので $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ は全て $\vec{w}$ と線型独立。

(i)より、$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ は線型独立なので、$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}, \vec{w}$ は1次独立である。