数学

$\boxed{1}$ $f(x,y) = -x^3 + 6xy - 8y^3$

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 6y = 0 \quad \cdots ①$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x - 24y^2 = 0 \quad \cdots ②$

①より $y = \frac{1}{2}x^2$，また $6x - 6x^4 = 0$ より $x(1 - x^3) = 0$.

従って 条件を満たすのは $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -48y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$ より

ヘッシアンは $H(x,y) = 36(8xy - 1)$

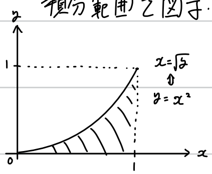
$H(0,0) < 0$ より $(0,0)$ で極値をとらない.

$-1 + 3 - 1 =$

$H(1, \frac{1}{2}) = 108 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{1}{2}) = -6 < 0$ より 極大値 1 をとる.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx \cdot dy$

積分範囲を図示する.



これより 積分順序を変えて

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{x^3} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e - 1)$$

3

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & -1\\-1 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ を解いて.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-2 & -2 & -1 & 1\\-1 & -3 & 3 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & -2 & 4 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & -2 & 0 & -10\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -7\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

従って. $a=-7$, $b=5$, $c=3$. また. $d=a-b-c=-15$.

4 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=3e^{-3x}$ … ⊛

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$ … ① について 特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+9=0$. を解く.

$(\lambda+3)^2=0$ より. $\lambda=-3$.(重解).

従って. ① の一般解は. $y=Ae^{-3x}+Bxe^{-3x}$ (A, B は任意定数).

次に ⊛ の1つの解を. $y=(ax^2+bx)e^{-3x}$ と予想する.

結果的に $y=ax^2e^{-3x}$ と予想する方が良かった.

$$\frac{dy}{dx}=(2ax+b)e^{-3x}-3(ax^2+bx)e^{-3x}=(-3ax^2+(2a-3b)x+b)e^{-3x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-6ax+2a-3b)e^{-3x}-3(-3ax^2+(2a-3b)x+b)e^{-3x}$$

$$=(9ax^2+(-6a-6a+9b)x+2a-3b-3b)e^{-3x}$$

$$=(9ax^2+(-12a+9b)x+2a-6b)e^{-3x}$$

これらを ⊛ に 代入して.

$$\left\{x^2\left(\underbrace{9a+6\cdot(-3a)+9\cdot a}_{0}\right)+x\left(\underbrace{-12a+9b+6(2a-3b)+9b}_{0}\right)+(2a-6b+6b)\right\}e^{-3x}=3e^{-3x}.$$

これを満たすのは. $a=\frac{3}{2}$, bは任意.

従って特解として $y=\frac{3}{2}x^2e^{-3x}$ がとれるので

㊍ の一般解は $y=\left(\frac{3}{2}x^2+Bx+A\right)e^{-3x}$ （A, Bは任意）

これを微分して $\frac{dy}{dx}=(3x+B)e^{-3x}-3\left(\frac{3}{2}x^2+Bx+A\right)e^{-3x}$

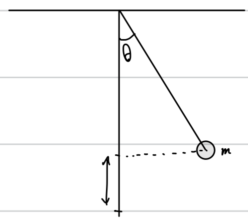
条件 $y(0)=1$, $\frac{dy}{dx}(0)=1$ より $\begin{cases} A=1 \\ B-3A=1 \end{cases}$ $\therefore B=4$

従って $y=\left(\frac{3}{2}x^2+4x+1\right)e^{-3x}$

物理

[1]

[1]



(1) $x_{oG}=\frac{\frac{1}{2}m+Lm}{m+m}=\frac{\frac{3}{2}mL}{2m}=\frac{3}{4}L$

(2) 棒の線密度は $\frac{m}{L}$ だから 棒の慣性モーメント I' は

$$I_0'=\int_0^L \frac{m}{L}\cdot x^2\,dx=\frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

質点の慣性モーメントは mL^2 だから $I_0=\frac{4}{3}mL^2$

(3)

(3-1) 求める速さを v とおく

質点の力学的エネルギー保存が成り立つので

最下点を位置エネルギーの基準にとれば

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+mg(L-L\cos\theta)$$

$$v^2=2gL(1-\cos\theta)$$

負を除いて $v=\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$

(3-2) 物体の回転運動方程式は.

$$I_0 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot \frac{L}{2}\sin\theta - mg \cdot L\sin\theta.$$

$I_0 = \frac{4}{3}mL^2$ だから. $\frac{4}{3}mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta$

(3-3) $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似して. $\frac{4}{3}mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{2}mgL\,\theta$ を解く.

整理して. $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{9g}{8L}\theta$

これは単振動の式だから. $\theta = A\cos\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\,t + B\sin\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\,t$ (A, B : 任意定数)

微分して. $\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\left(-A\sin\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\,t + B\cos\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\,t\right)$

条件 $\theta(0) = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ より. $A = \theta_0$, $B = 0$.

従って. $\theta(t) = \theta_0\cos\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\,t$

[2]

(1) 棒の慣性モーメントは.

$\cancel{\frac{28}{64}}$ $\frac{7}{16}$

$$\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{m}{L}x^2 \cdot dx + \int_0^{\frac{3}{4}L}\frac{m}{L}\cdot x^2 \cdot dx = \frac{m}{L}\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{L}{4}} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{4}L}\right\} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{64} + \frac{27}{64}L^3\right) = \frac{7}{48}mL^2$$

質点の慣性モーメントは. $m\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = \frac{9}{16}mL^2$ だから. $I_0' = \left(\frac{7}{48} + \frac{9}{16}\right)mL^2 = \frac{17}{24}mL^2$

別 平行軸の定理.

Gまわりの慣性モーメント I_G は. $I_G = I_0 - 2m\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = \frac{4}{3}mL^2 - \frac{9}{8}mL^2 = \frac{32-27}{24}mL^2 = \frac{5}{24}mL^2$

よって. O′まわりの慣性モーメント I_0' は. $I_0' = I_G + 2m\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{5}{24}mL^2 + \frac{1}{2}mL^2 = \frac{17}{24}mL^2$ で一致する.

(2) 回転運動方程式は. $I_0'\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\cdot\frac{L}{4}\sin\theta - mg\cdot\frac{3}{4}L\sin\theta = -mgL\sin\theta$

$I_0' = \frac{17}{24}mL^2$ だから. $\frac{17}{24}mL^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta.$

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$と近似して、式を整理すると、$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{24g}{17L}\theta$

これは単振動の式なので、角振動数ωは、$\omega = 2\sqrt{\dfrac{6g}{17L}}$と分かる。

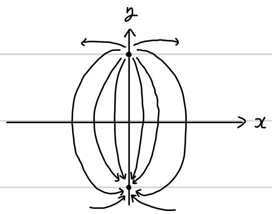
よって、$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \dfrac{\sqrt{17L}}{2\sqrt{6g}} = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{17L}{6g}}$

2.

[1].

(1) ア：$-Q$ 、イ：0 、ウ：$-d$ （鏡像法）.

(2) 電気力線の図示.（自信なし）



(3) 鏡像法より、電荷に作用する力は、$-Q$[C]の電荷を$(x,z)=(0,-d)$[m]の位置においたとき働く力と等しい。

従って、求める力はクーロンの法則より

大きさ：$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q^2}{4d^2} = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$ [N]

向き：Y軸負の向き、

[2].

(1) 導体板A, Bの側面が十分小さいと見て、電荷量を無視する。

A_1：$\dfrac{Q}{2}$[C]、A_2：$\dfrac{Q}{2}$[C]、B_1：$-Q$[C]、B_2：0[C].（自信なし）.

(2) 導体板Aを全て含む(Bは含まない) 底面積L^2の長方体表面S_0について.

ガウスの法則を適用して、Aの作る電界の強さは. $E_A = \frac{Q}{2L^2\varepsilon_0}$ [N/C] と求まる.

導体板Bも同様にして. Bの作る電界の強さは. $E_B = \frac{Q}{2L^2\varepsilon_0}$ [N/C] である.

AとBの電荷は正負が異なるので. 電界は極板間で強め合い. 求める電界の強さは. $E = \frac{Q}{L^2\varepsilon_0}$ [N/C]

(3). 極板間距離が d [m], $\frac{d}{2}$ [m] のときの Aの電位を V_1, V_2 とすると.

$V_1 = \frac{Q}{L^2\varepsilon_0} \cdot d$ [V]. , $V_2 = \frac{Q}{L^2\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{2}$ [V].

従って. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$倍となる.