$\boxed{1}$

(1) $\varphi(x,y)=x^2+y^2-4$ とおく.

ラグランジュの未定乗数法を用いる.

まず. $\varphi(x,y)$ の特異点 (つまり. $\nabla\varphi=\vec{0}$ かつ. $\varphi(x,y)=0$) の有無を調べる.

$\nabla\varphi(x,y)=(2x,\ 2y)$ で $\nabla\varphi=\vec{0}$ を満たすのは. $(x,y)=(0,0)$ だが.

$\varphi(0,0)\neq 0$ なので. 特異点はない.

次に $\nabla f=\lambda\nabla\varphi$ かつ $\varphi(x,y)=0$ となる点を求める.

$\nabla f=(4+2y,\ 2x)$ であるから.

$$\begin{cases} 4+2y=\lambda\cdot 2x & ① \\ 2x=\lambda\cdot 2y & ② \\ x^2+y^2-4=0 & ③ \end{cases}$$

と連立方程式をたてる.

①, ② から λ を払って. $\dfrac{4+2y}{2x}=\dfrac{x}{y}$.

$$2y+y^2=x^2$$

③ より. $2y+y^2+y^2-4=0$.

$$2(y^2+y-2)=0$$

$(y+2)(y-1)=0$. $y=1,\ -2$.

$y=1$ で $x^2=3$.

$y=-2$ で $x^2=0$.

従って. 条件つき極値となりうる点は $(x,y)=(\sqrt{3},1),\ (-\sqrt{3},1),\ (0,-2)$

$x^2+y^2=4$ は閉曲線なので、

以上の3点のいずれかで $f(x,y)$ は最大・最小となる。

$f(\sqrt{3}, 1) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. ← 最大

$f(-\sqrt{3}, 1) = -4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$ ← 最小.

$f(0, -2) = 0$.

(2) $V = \iint_D (x^2+xy)\, dxdy$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$

(2-1)

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて極座標変換すると、

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left(r^3\cos^2\theta + r^3 \sin\theta\cos\theta \right) \cdot dr \right\} \cdot d\theta.$$

(2-2)

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \left(\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta \right) \right]_0^1 \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sin\theta\cos\theta \right) \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

2

(1) $\vec{p} = \dfrac{\vec{a}^T \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$

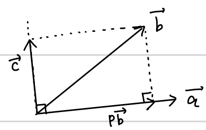
(1-1) $\vec{p} = \dfrac{\vec{a}^T \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \vec{a} \dfrac{\vec{a}^T \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} = \dfrac{\vec{a}\vec{a}^T}{\|\vec{a}\|^2} \vec{b}$

$\therefore P = \dfrac{\vec{a}\vec{a}^T}{\|\vec{a}\|^2}$

(1-2) $P^2 = \dfrac{\vec{a}\vec{a}^T\vec{a}\vec{a}^T}{\|\vec{a}\|^4} = \dfrac{\vec{a}\|\vec{a}\|^2\vec{a}^T}{\|\vec{a}\|^4} = \dfrac{\vec{a}\vec{a}^T}{\|\vec{a}\|^2} = P$

(1-3) $\vec{c} = (I - P)\vec{b}$

$= \vec{b} - P\vec{b}$



(2) 斜影 $\vec{q} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n}$

$A = (\vec{a_1} \quad \vec{a_2} \quad \cdots \quad \vec{a_n})$

$\vec{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$ として. $\vec{q} = A\vec{x}$

(2-1)

$(\vec{b} - \vec{q})^T \vec{a_i} = 0$

$(\vec{b} - A\vec{x})^T A = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$

(2-2)

転置をとって. $\{(\vec{b} - A\vec{x})^T A\}^T = \vec{0}$

$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$

$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$

$\underline{\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}}$ //