数学　1:12　[1],[3],[4],[5]　2019, H31

[1]　17分

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 12 & 3 \\ -6 & -7-\lambda & -2 \\ 3 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 12 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \\ 3 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 12 & -21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -6-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & -21 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\{(\lambda-10)(\lambda+6)+63\} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$.

$|A-\lambda E| = 0$ より. 固有値は. $\lambda = 1$ (重解), 3.

(2) Aの最大固有値は3.

$A-3E = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 21 & 36 & 9 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

従って. 固有ベクトルとして. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

(3).

$A-E = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ -6 & -8 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より.

$\lambda=1$ の固有ベクトルは. $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(a, b \neq 0)$

従って. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ ととると. $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -7 & -12 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & -12 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ だから.

$$\vec{a_n} = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & -12 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \cdot 3^n \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 \cdot 3^n + 9 \\ 0 \\ 21 \cdot 3^n - 21 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 飛

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & a-3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & a+11 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \check{z} & \check{w} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & a+11 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a+11=0$ のとき、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(C_1, C_2$ は任意$)$.

$a+11 \neq 0$ のとき、 $A \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(C_3$ は任意$)$.

従って. $a=-11$ のとき. $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ で最大となり. $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ を基底としてとれる.

(2) $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ として.

$\left(f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2})\ f(\vec{e_3})\ f(\vec{e_4})\right)=A$ であることから. $f(\vec{e_1}),\dots,f(\vec{e_4})$ の一次関係を調べる.

$$A\to\begin{pmatrix}3&0&-5&-1\\0&3&-7&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ で. 行基本変形で各列の一次関係は変化しないので.

$f(\vec{e_1}),\ f(\vec{e_2})$ を $\mathrm{Im}\,f$ の基底としてとれる. 従って. $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

(3). 少なくとも.

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\-1&1&1\\p&q&2\\2&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2p+q+2\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}f\ \cdots ①$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\-1&1&1\\p&q&2\\2&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\\-p+4q+4\\-8\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}f\ \cdots ②$$ が成り立つ必要がある.

① を満たす $\vec{u}\in\mathrm{Ker}f$ を $\vec{u}=x\begin{pmatrix}5\\7\\3\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\end{pmatrix}$ とすると.

$$\left(\begin{array}{cc|c}5&1&0\\7&-1&0\\3&0&2p+q+2\\0&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2p+q+3\\0&0&0\end{array}\right)$$ より. $x=0,\ y=0,\ 2p+q+3=0$ が分かる.

$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\qquad \frac{14}{3}$

② を満たす $\vec{u}\in\mathrm{Ker}f$ と同様におくと.

$$\left(\begin{array}{cc|c}5&1&-3\\7&-1&7\\3&0&-p+4q+4\\0&3&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}3&0&1\\7&-1&7\\3&0&-p+4q+4\\0&1&-\frac{8}{3}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}3&0&1\\7&0&\frac{14}{3}\\3&0&-p+4q+4\\0&1&-\frac{8}{3}\end{array}\right)$$ より. $x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{8}{3},\ -p+4q+4=1$ が分かる.

従って. $\begin{cases}2p+q=-3\\-p+4q=-3\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&-3\\-1&4&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&1&-3\\0&9&-9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&1&-3\\0&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&-1\end{array}\right).$$

従って. $\underline{p=-1,\ q=-1}$.

$\boxed{3}$. 17分.

$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$

(1) Sの接平面の方程式は. $\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\alpha, \sin\alpha)(x-\cos\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\alpha, \sin\alpha)(y-\sin\alpha) + (z-f(1)) = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であるから.

$f'(1) \cdot \cos\alpha(x-\cos\alpha) + f'(1) \cdot \sin\alpha(y-\sin\alpha) + z - f(1) = 0$.

$(x,y,z) = (0,0,z_0)$において. この式を満たすので.

$-f'(1) + z_0 - f(1) = 0$. $\therefore z_0 = f(1) + f'(1)$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{y}{r}$ だから、

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \{f'(r)\}^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{r^2} = \{f'(r)\}^2$ 従って. rの関数として表される.

(3).

$I = \iint_D u(x,y)\,dxdy$

$= \iint_D f(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot dxdy$.

$= \iint_D (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \cdot dxdy$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$とおくと. Dは$E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$に移り. 極座標変換となるので.

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \cdot e^{-r^2} \cdot dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r^3 \cdot e^{-r^2} \cdot dr$

$\int r^3 \cdot e^{-r^2} \cdot dr = -\frac{r^2}{2}e^{-r^2} + \int r\, e^{-r^2} \cdot dr = -\frac{r^2}{2} \cdot e^{-r^2} - \frac{1}{2}e^{-r^2} + C$ (C:積分定数)より.

$I = 2\pi\left[-\frac{r^2}{2}e^{-r^2} - \frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1 = 2\pi\left(-\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + 0 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\pi\left(1 - \frac{2}{e}\right)}$ //

$\boxed{4}$. 22分.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2-1 = (y+1)(y-1)$.

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)}\frac{dy}{dx} = 1.$$

$$\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

両辺を x で積分して.

$$\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + C \quad (C:\text{積分定数}).$$

$$\frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1} = A\cdot e^{x} \quad (A:\text{任意定数}).$$

初期条件 $y(0)=0$ より. $-1 = A$.

従って. $1 - \dfrac{2}{y+1} = -e^{x}$

$$\frac{2}{y+1} = e^{x}+1$$

$$y+1 = \frac{2}{e^{x}+1} \qquad \therefore y = \frac{1-e^{x}}{e^{x}+1}$$

(2)

(i) $\dfrac{dy}{dx} + 2y\cos x = \cos x$.

両辺. $e^{2\sin x}$ をかけて.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2\sin x}\cdot y\right) = \cos x\cdot e^{2\sin x}$$

x で積分して. $e^{2\sin x}\cdot y = \dfrac{1}{2}e^{2\sin x} + C$ $(C:\text{積分定数})$.

$$y = \frac{1}{2} + C\cdot e^{-2\sin x} \quad (C:\text{任意定数})$$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2=\cos 3x \cdots ※$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2=0 \cdots ①$の一般解は.

特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+2=0$ を解いて. $\lambda=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm i$ より.

$y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ (A, B: 任意定数).

次に ※の1つの解を. $y=a\cos 3x+b\sin 3x$ とおくと.

$\dfrac{dy}{dx}=3b\cos 3x-3a\sin x,$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-9a\cos 3x-9b\sin 3x$. だから.

$(a+3b-9a)\cos 3x+(b-3a-9b)\sin 3x=\cos 3x.$

$$\begin{cases}-8a+3b=1\\ -3a-8b=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}-8 & 3 & 1\\ -3 & -8 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}24 & -9 & -3\\ -24 & -64 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-8 & 3 & 1\\ 0 & -73 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-8 & 0 & \frac{64}{73}\\ 0 & 1 & \frac{3}{73}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{8}{73}\\ 0 & 1 & \frac{3}{73}\end{pmatrix}$$

従って. ※の一般解は. $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)-\dfrac{8}{73}\cos 3x+\dfrac{3}{73}\sin 3x.$

$\boxed{5}$ 16分

(1). $f(z)=\dfrac{1}{az^2-i(a^2+1)z-a}$

$az^2-i(a^2+1)z-a=0$ の解は. $z=\dfrac{i(a^2+1)\pm\sqrt{-(a^2+1)^2+4a^2}}{2a}=\dfrac{i(a^2+1)\pm\sqrt{-\overset{\overset{(a^2-1)^2}{a^4-2a^2+1}}{a^4+2a^2-1}}}{2a}=\dfrac{i(a^2+1)\pm i(a^2-1)}{2a}$

つまり. $z=\dfrac{2a^2}{2a}i,\ \dfrac{2i}{2a}=ai,\ \dfrac{i}{a}$

$f(z)=\dfrac{1}{a(z-ai)(z-\frac{i}{a})}$

$\mathrm{Res}[ai]=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ai-\frac{i}{a}}=\dfrac{1}{ai(a^2-1)}$

$\mathrm{Res}\left[\dfrac{i}{a}\right]=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{\frac{i}{a}-ai}=\dfrac{1}{ai(1-a^2)}$

(2) $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}$

$z = e^{i\theta}$ とおくと. $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2zi}$, $dz = i \cdot e^{i\theta} d\theta$ より. $d\theta = \frac{dz}{i \cdot z}$ とおき. $|z|=1$を経路にとる.複素積分に変わる.

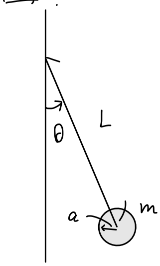
$I(a) = \oint \frac{\frac{dz}{iz}}{a^2 - \cancel{2}a \cdot \frac{z^2-1}{\cancel{2}zi} + 1} = \oint \frac{dz}{a^2 zi - az^2 + a + zi} = -\oint \frac{dz}{az^2 - i(a^2+1)z - a}$

$|z|=1$ 内に含まれる極は. $z = ai$ で. $Res[ai] = \frac{1}{ai(a^2-1)}$ だから.

$I(a) = - \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{ai(a^2-1)} = \frac{2\pi}{a(1-a^2)}$ //

物理.

$\boxed{1}$.



(1) $mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta$

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ として良いので. $mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta$ //

(2) $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$

これは.単振動を表す方程式なので. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ //

(3). 平行軸の定理より

$I = mL^2 + I_G$ //

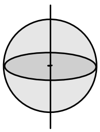
(4) $I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta$.

また $\sin\theta \fallingdotseq \theta$として. $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta$ //

(5). $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta$ と変形して.

(2)と同様に. $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$ //

(6). 半径r. 厚さdz, 密度$\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ の円板の中心軸まわりの慣性モーメントdI_Gは



$$dI_G = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{3m}{4\pi a^3} \times ds \times s\,d\theta \times dz \times s^2$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3m}{4\pi a^3}\, dz \times \int_0^{r} s^3 \cdot ds$$

$$= \frac{3m}{2a^3} \cdot dz \times \left[\frac{1}{4}s^4\right]_0^{r}$$

$$= \frac{3m}{8a^3} r^4 \cdot dz.$$

これを球に応用すれば. $r = \sqrt{a^2 - z^2}$, $z: -a \to a$ の積分となって.

$$I_G = \int_{-a}^{a} \frac{3m}{8a^3} \cdot (a^2 - z^2)^2 \cdot dz$$

$$= \frac{3m}{8a^3} \times 2\int_0^{a} (a^4 - 2a^2 z^2 + z^4) \cdot dz$$

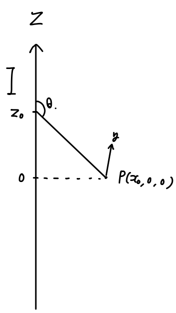
$$= \frac{3m}{4a^3}\left[a^4 z - \frac{2a^2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^{a}$$

$$= \frac{3m}{4a^3}\left(a^5 - \frac{2}{3}a^5 + \frac{1}{5}a^5\right) \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$= \frac{3m}{4} \times \frac{8}{15}a^2 = \underline{\frac{2}{5}ma^2}$$

(表すだけだから、公式から書くだけでも良さそう).

2.



(1)

(1-a) $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x_0^2 + z_0^2} \times \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & dz \\ x_0 & 0 & z_0 \end{vmatrix}.$$

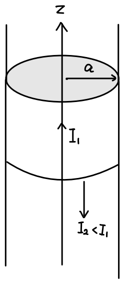
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\ (x_0^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(0,\ x_0 dz,\ 0 \right)$$

(1-b). 磁束密度のx軸方向, z軸方向成分は0.

y軸方向の成分は. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I \cdot x_0}{4\pi\ (x_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} \times 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}$$

従って. $\vec{B} = \left(0,\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x_0},\ 0\right).$



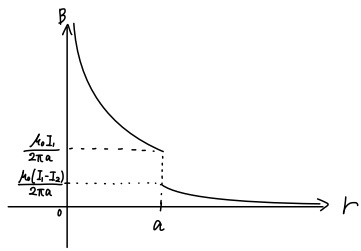
(2)

(2-a). z軸と中心とする半径 r ($0<r<a$) の円を
z軸正の向きから見て反時計回りに回る経路をとる.

z軸から r 離れた点では,どこでも磁場の大きさ・向きに対称性があるから.

(2-b) 内部 : $B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

外部 : $B = \dfrac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi r}$



3