数学.

$\boxed{1}$

(1) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$

xで偏微分して.

$$\frac{1}{y} - \frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) = \frac{z}{x^2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{yz - x^2}{x^2 y}}{\frac{z^2 - xy}{xz^2}} = \frac{z^2(yz - x^2)}{xy(z^2 - xy)}$$

yで偏微分して.

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{xz - y^2}{y^2 z}}{\frac{z^2 - xy}{xz^2}} = \frac{xz(xz - y^2)}{y^2(z^2 - xy)}$$

(2) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\}\cdot dx$$

$$= \left[\log\left|1 - \frac{1}{x+1}\right|\right]_1^\infty$$

$$= 0 - \log\frac{1}{2}$$

$$= \log 2$$

$\boxed{2}$

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ について.

$a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(i) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき.

$(b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(ii) $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき.

$(b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

従って. $(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の 4組.

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について.

(2-1) 固有多項式 $|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & d \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & d \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\{(\lambda-3)(\lambda-1) - d\}$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3+d}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - d)$

$= (1-\lambda)\{\lambda - (2+\sqrt{4-3+d})\}\{\lambda - (2-\sqrt{4-3+d})\}$

(2-2)

Bの固有値が重複しないなら、3つの線型独立な固有ベクトルがとれ、

Bは対角化可能である。

Bの固有値が重複するのは、

① $d=-1$ のとき、$\lambda=1,\ 2$（重解）

② $d=0$ のとき、$\lambda=1$（重解），3 である。

それぞれについて調べる。

①の場合、

$$B-2E=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

従って、$\lambda=2$ の固有ベクトルとして $a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(a\neq0)$ がとれるが、

固有値全体で線型独立な固有ベクトルを3つ持たないので、Bは対角化不可。

②の場合、

$$B-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

従って、$\lambda=1$ の固有ベクトルとして $b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(b\neq0)$ がとれるが、

①と同様に、Bは対角化不可。

よって、求める d は、$\underline{d=-1,\ 0}$ //