

# Regelungstechnik

## Zusammenfassung

Andreas Ming / [Quelldateien](#)

## Inhaltsverzeichnis

### Kurzfassung

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| Linear Algebra . . . . .      | 2 |
| Determinante . . . . .        | 2 |
| Inverse Matrix . . . . .      | 2 |
| Signal & System . . . . .     | 2 |
| Endwertsatz . . . . .         | 2 |
| Anfangswertsatz . . . . .     | 3 |
| Z-Transformation . . . . .    | 3 |
| Transformationen . . . . .    | 3 |
| Laplace . . . . .             | 3 |
| Z-Transformation . . . . .    | 3 |
| Euler Approximation . . . . . | 3 |

### Systeme

|   |   |
|---|---|
| Grundlegende Systeme . . . . .  | 3 |
| Regler System . . . . .   | 3 |
| Geschlossenes System . . . . .  | 3 |
| Offenes System . . . . .  | 3 |
| Vorsteuerung . . . . .  | 3 |
| Minimalphasiges System . . . . .  | 3 |
| Führungsverhalten . . . . .   | 4 |
| Merkmale . . . . .  | 4 |
| Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrößen . . . . . | 4 |
| Störverhalten . . . . .   | 4 |
| Merkmale . . . . .  | 4 |

### Darstellungsarten

|   |   |
|---|---|
| Blockdiagrammalgebra . . . . .              | 5 |
| Verkettung . . . . .                        | 5 |
| Parallel . . . . .                          | 5 |
| Rückkopplung . . . . .                      | 5 |
| Regel von Mason . . . . .                   | 5 |
| Zustandsraumdarstellung . . . . .           | 6 |
| Autonomes, zeitinvariantes System . . . . . | 6 |
| Allgemeine Systeme . . . . .                | 6 |
| Lineares Zustandsraummodell . . . . .       | 6 |
| Übertragungsfunktion . . . . .              | 7 |

### Dynamik

|  |   |
|--|---|
| Lösen von Differential Gleichungen . . . . . | 7 |
| Gleichgewichtslage . . . . .                 | 7 |
| Testfunktion Sprungantwort . . . . .         | 7 |

### Stabilität

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| Allgemein . . . . .         | 7 |
| Linearer Systeme . . . . .  | 8 |
| Linearisierung . . . . .    | 8 |
| Hurwitz-Kriterium . . . . . | 8 |

|   |    |
|---|----|
| Nyquist . . . . .                             | 9  |
| Allgemein – Variante Winkeländerung . . . . . | 9  |
| Allgemein – Variante Umläufe . . . . .        | 9  |
| Einfach – Variante Links liegen . . . . .     | 10 |
| Einfach – Variante Umläufe . . . . .          | 10 |
| Stabilitätsreserve / Robustheit . . . . .     | 10 |

### Prozess

|  |    |
|--|----|
| Modellierung . . . . .                   | 11 |
| Identifikation . . . . .                 | 11 |
| Methode der kleinsten Quadrate . . . . . | 11 |

### Regelung

|   |    |
|---|----|
| Sensitivitätsfunktionen . . . . .               | 12 |
| ‘Gang of Four’ . . . . .                        | 12 |
| Anforderungen . . . . .                         | 12 |
| Stabilität . . . . .                            | 12 |
| Stationäre Genauigkeit . . . . .                | 12 |
| Schnelligkeit . . . . .                         | 13 |
| Dämpfung . . . . .                              | 13 |
| Eigenschaften . . . . .                         | 13 |
| Robustheit . . . . .                            | 13 |
| Dynamik . . . . .                               | 13 |
| Modularität . . . . .                           | 13 |
| Genauigkeit . . . . .                           | 13 |
| Herausforderungen . . . . .                     | 14 |
| Steuerung . . . . .                             | 14 |
| P-Regler . . . . .                              | 14 |
| PI-Regler . . . . .                             | 14 |
| PD-Regler . . . . .                             | 14 |
| Filter D-Anteil . . . . .                       | 14 |
| PID-Regler . . . . .                            | 14 |
| Proportional $k_p$ . . . . .                    | 15 |
| Integral $k_i, T_i$ . . . . .                   | 15 |
| Differential $k_d, T_d$ . . . . .               | 15 |
| Auslegung anhand . . . . .                      | 16 |
| ... Modelle geringer Ordnung . . . . .          | 16 |
| ... Bodediagramm . . . . .                      | 16 |
| ... Einstellregeln im Zeitbereich . . . . .     | 17 |
| ... Einstellregeln im Frequenzbereich . . . . . | 17 |
| Stellgrößen-Sättigung . . . . .                 | 17 |
| Windup . . . . .                                | 17 |
| Anti-Windup . . . . .                           | 17 |

### Loop Shaping

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| Lag & Lead Kompensatoren . . . . .  | 18 |
| Lead ( $a < b$ ) . . . . .          | 18 |
| Lag ( $a > b$ ) . . . . .           | 18 |
| Grenzen des Loop-Shapings . . . . . | 18 |

### Diskretisierung

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| Entwurf Regler . . . . .              | 19 |
| 1) kontinuierlicher Prozess . . . . . | 19 |
| 2) zeitdiskreter Regler . . . . .     | 19 |
| Relation z & s Ebene . . . . .        | 20 |

### Unstetiger Regler

|                          |    |
|--------------------------|----|
| Ohne Hysterese . . . . . | 20 |
| Mit Hysterese . . . . .  | 21 |
| Zustandsraum . . . . .   | 21 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Struktur</b>   | <b>21</b> |
| Steuerungen . . . . .   | 22        |
| Vorfilter . . . . .   | 22        |
| Vorsteuerung . . . . .  | 22        |
| Störgrößenaufschaltung . . . . .                              | 22        |
| Kombination . . . . .   | 22        |
| <b>MATLAB</b>   | <b>22</b> |
| Vektoren . . . . .  | 22        |
| Plotting . . . . .  | 23        |
| XY-Graph . . . . .  | 23        |
| XYY-Graph . . . . .   | 23        |
| Transferfunktion <code>tf(...)</code> . . . . .               | 23        |
| PID-Regler <code>pidstd</code> . . . . .                      | 24        |
| Bode-Diagramm <code>bode</code> . . . . .                     | 24        |
| Nyquist-Diagramm <code>nyquist</code> . . . . .               | 24        |
| Sprungantwort <code>step</code> . . . . .                     | 24        |
| Impulsantwort <code>impulse</code> . . . . .                  | 24        |
| Pol-Nullstellen-Diagramm <code>pzmap</code> . . . . .         | 25        |
| Margin <code>margin(tf)</code> . . . . .                      | 25        |
| Zustandsraumdarstellung <code>ss()</code> . . . . .           | 25        |
| Reglersimulator <code>Sisotool(tf(...))</code> . . . . .      | 25        |
| Linear system simulation <code>lsim(sys,t,x)</code> . . . . . | 25        |
| Weitere Befehle . . . . .                                     | 26        |
| <code>minreal</code> . . . . .                                | 26        |
| <b>Anleitungen / Vorgehen</b>                                 | <b>26</b> |
| Modellierung dynamischer Systeme . . . . .                    | 26        |
| Stabilitätsbestimmung . . . . .                               | 26        |
| Parameter Identifikation . . . . .                            | 26        |
| <b>Linearität &amp; Zeitinvarianzen</b>                       | <b>26</b> |
| LTI-Systeme . . . . .   | 26        |
| Zeitinvarianz . . . . .                                       | 26        |
| Linearität . . . . .  | 26        |
| Linearisierung . . . . .                                      | 27        |
| Zustandsraumdarstellung . . . . .                             | 27        |
| Differentialgleichung . . . . .                               | 27        |
| <b>Übertragungselemente</b>                                   | <b>28</b> |
| Elementare Glieder . . . . .                                  | 28        |
| Elementare Funktionen . . . . .                               | 28        |
| Polüberschuss $n_{pe}$ . . . . .                              | 28        |
| Bezeichnete Glieder . . . . .                                 | 29        |
| P-Glied . . . . .   | 29        |
| I-Glied . . . . .   | 29        |
| PT1-Glied . . . . .   | 29        |
| PT2-Glied . . . . .   | 29        |
| IT-Glied . . . . .  | 29        |
| DT1-Glied . . . . .   | 29        |
| <b>Anderes Zeug</b>   | <b>33</b> |
| <b>Glossar</b>  | <b>33</b> |

**Kurzfassung****Linear Algebra****Determinante****2 × 2-Matrix**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**3 × 3-Matrix**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

**Inverse Matrix**

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

**2 × 2-Matrix**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**3 × 3-Matrix**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

**Signal & System**

! Gültigkeit End- & Anfangswertsatz

End- & Anfangswertsatz gilt nur bei stabilen Systemen.

**Endwertsatz****Laplace**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

falls  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  existiert

**Z-Transformation**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$$

falls  $X(z)$  nur Pole mit  $|z| < 1$  oder bei  $z = 1$

## Anfangswertsatz

### Laplace

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

falls  $x(0^+)$  existiert

### Z-Transformation

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

### Transformationen

### Laplace

| Signal $u(t)$            | $\circ \bullet U(s)$         |
|--------------------------|------------------------------|
| $\delta(t)$              | 1                            |
| $t$                      | $\frac{1}{s^2}$              |
| $\sin(at)$               | $\frac{a}{s^2+a^2}$          |
| $e^{-\alpha t} \sin(at)$ | $\frac{a}{(s+\alpha)^2+a^2}$ |

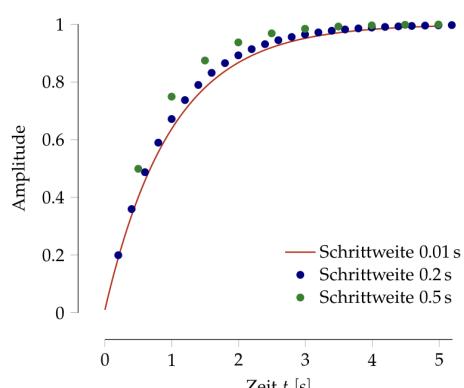
| Signal $u(t)$            | $\circ \bullet U(s)$                |
|--------------------------|-------------------------------------|
| $\sigma(t)$              | $\frac{1}{s}$                       |
| $e^{\alpha t}$           | $\frac{1}{s-\alpha}$                |
| $\cos(at)$               | $\frac{s}{s^2+a^2}$                 |
| $e^{-\alpha t} \cos(at)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+a^2}$ |

### Z-Transformation

| Signal $u[k]$ | $\circ \sim \bullet U(z)$ |
|---------------|---------------------------|
| $\delta[k]$   | 1                         |
| $\sigma[k]$   | $\frac{z}{z-1}$           |
| $k$           | $\frac{z}{(z-1)^2}$       |

| Signal $u[k]$  | $\circ \sim \bullet U(z)$ |
|----------------|---------------------------|
| $\delta[k-m]$  | $z^{-m}$                  |
| $a^k$          | $\frac{z}{z-a}$           |
| $\frac{1}{k!}$ | $e^{1/z}$                 |

### Euler Approximation



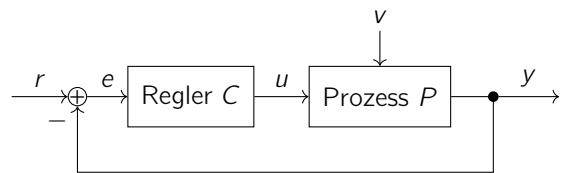
$$x(t+h) \approx x(t) + h \frac{dx}{dt} = x(t) + h \cdot f(x(t), u(t))$$

$$x[k+1] \approx x[k] + h \cdot f(x[k], u[k])$$

## Systeme

### Grundlegende Systeme

#### Regler System



$r$ : Führungsgröße (Soll-Wert)

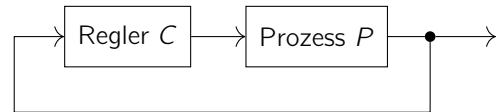
$e$ : Regelfehler

$u$ : Stell-/Steuergröße

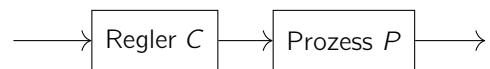
$y$ : Regelgröße (Ist-Wert)

$v$ : Störgröße

#### Geschlossenes System



#### Offenes System

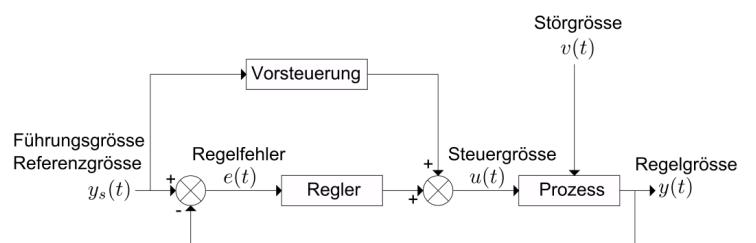


! Schleifenübertragungsfunktion

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

#### Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).



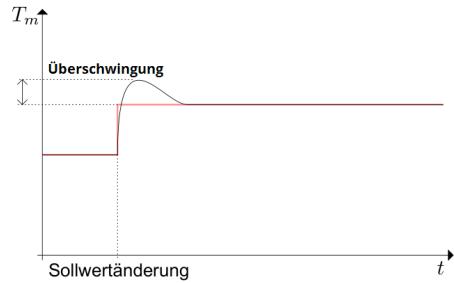
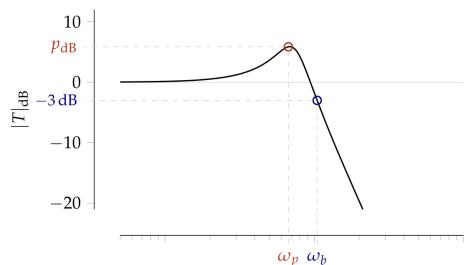
#### Minimalphasiges System

Liegen keine Pole oder Nullstellen in der rechten Halbebene, so spricht man von **minimalphasigen Systemen**. Amplituden- und Phasengang stehen in einer direkten Beziehung zueinander. Es gilt **nur bei minimalphasigen Systemen**:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d \log |G|}{d \log \omega}$$

Pro 20dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung  $+90^\circ$ , respektive  $-90^\circ$ .

## Führungsverhalten



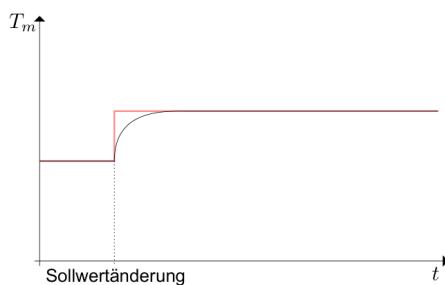
$$G_{yr} = T = \frac{PC}{1 + PC} \quad \text{und} \quad G_{ur} = CS = \frac{C}{1 + PC}$$

### Merkmale

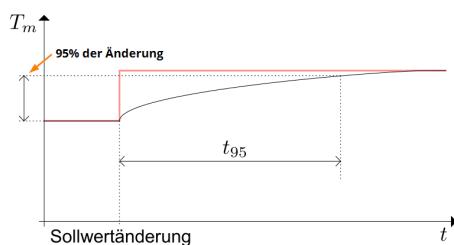
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- Stabilität
- Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit
- Überschwingen
- Schnelles Erreichen des stationären Wertes

### Gutes Führungsverhalten



### Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes



### Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrößen

Der bleibende Fehler bei sich langsam oder nicht ändernden Führungssgrößen ergibt sich anhand des Verlaufs der Übertragungsfunktion bei tiefen Frequenzen.

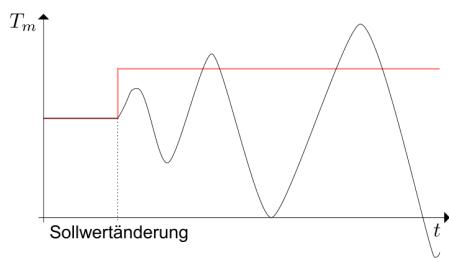
G\_{yr} \approx 1 - e\_0 - e\_1 \cdot s - e\_2 \cdot s^2 - \dots
$$e = e_0 \cdot r + e_1 \cdot \dot{r} + e_2 \cdot \ddot{r} + \dots$$

| Typ     | $r$       | $e$                                   |
|---------|-----------|---------------------------------------|
| Sprung  | $s_0$     | $e_0 s_0$                             |
| Rampe   | $v_0 t$   | $e_0 v_0 t + e_1 v_0$                 |
| Parabel | $a_0 t^2$ | $e_0 a_0 t^2 + e_1 2a_0 t + e_2 2a_0$ |

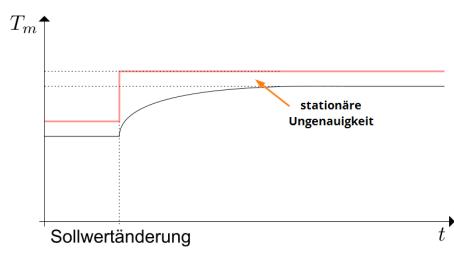
### i Stationärer Fehler

Bei Rampe:  $e_0 = 0$       Bei Parabel  $e_0 = e_1 = 0$

### Instabilität



### Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit



### Störverhalten

$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

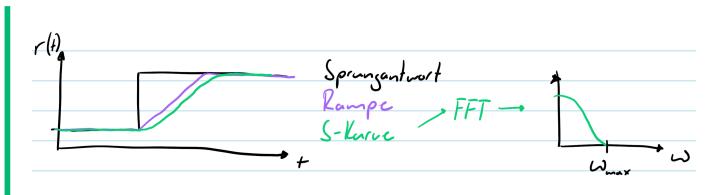
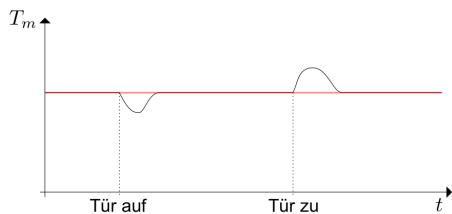
### Merkmale

Das Störverhalten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

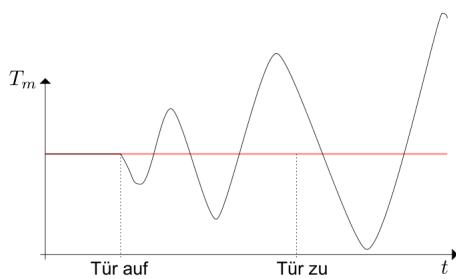
- Stabilität
- Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit
- Überschwingen
- Schnelles Erreichen des stationären Wertes.

### Gutes Störverhalten

### Überschwingen



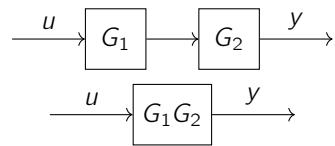
## Instabilität



## Darstellungsarten

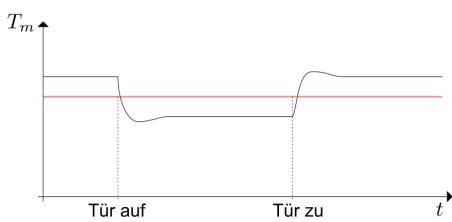
### Blockdiagrammalgebra

#### Verkettung

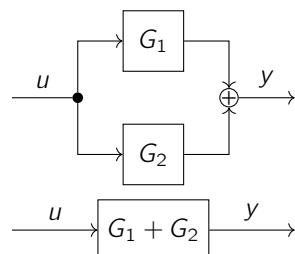


$$y = G_2(G_1 \cdot u) = (G_1 G_2) \cdot u$$

## Stationärer Fehler / Ungenauigkeit

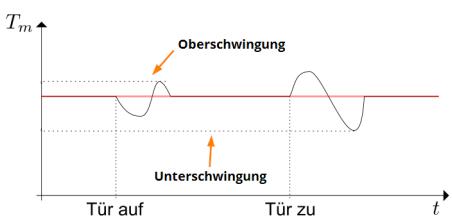


#### Parallel

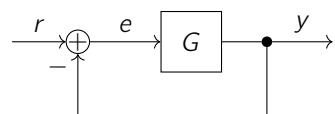


$$y = G_1 \cdot u + G_2 \cdot u = (G_1 + G_2) \cdot u$$

## Überschwingen



#### Rückkopplung

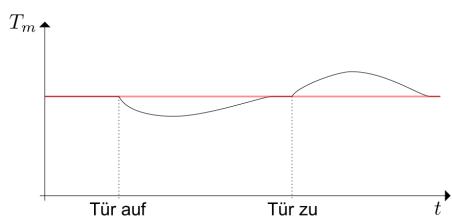


$$\frac{r}{y} = G \cdot e = G(r - y)$$

$$(1 + G) \cdot y = G \cdot r$$

$$y = \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{G_{yr}} \cdot r$$

## Langsames Erreichen des stationären Wertes



$$\frac{r}{y} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

### Besseres Frequenzverhalten

Um besseres Frequenzverhalten zu erreichen, sollte mit der Führungsgrösse anstelle einer Rampe eine S-Kurve gefahren werden

### Regel von Mason

$$G_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$P_k = \text{Vorwärtspfad } k$

$\Delta = 1 - \sum \text{ aller Loops}$

+  $\sum \text{ aller Produkte 2er Loops, die sich nicht berühren}$

-  $\sum \text{ aller Produkte 3er Loops, die sich nicht berühren}$

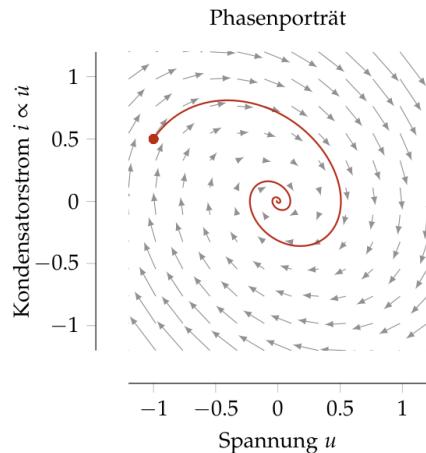
+ ...

$\Delta_k = 1 - \sum \text{ aller Loops, die } P_k \text{ nicht berühren}$

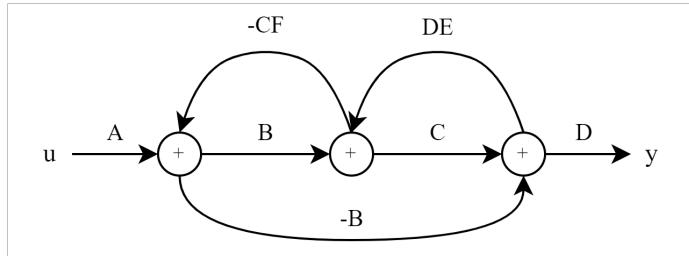
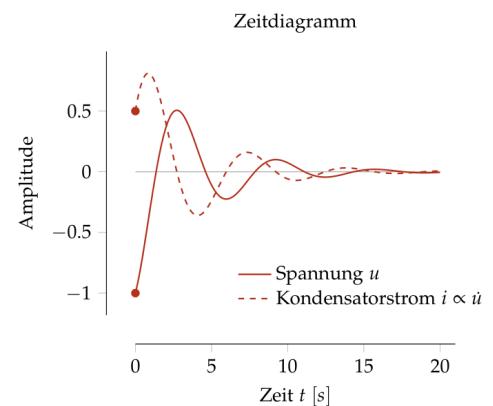
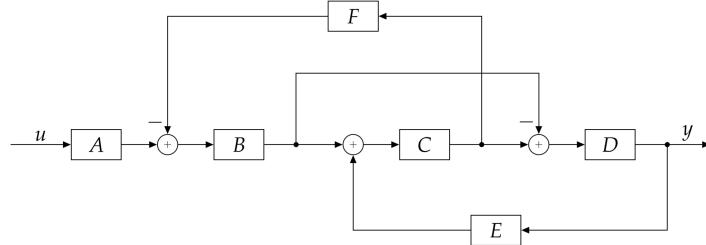
+  $\sum \text{ aller Produkte 2er Loops, die } P_k \& \text{ sich nicht berühren}$

-  $\sum \text{ aller Produkte 3er Loops, die } P_k \& \text{ sich nicht berühren}$

+ ...



### Beispiel



### Autonomes, zeitinvariantes System

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)} \quad x$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

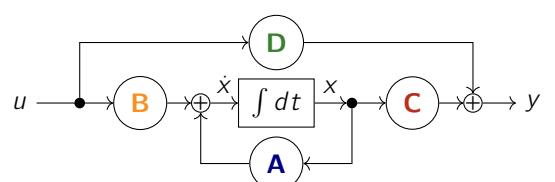
### Allgemeine Systeme

$$\boxed{\begin{array}{l} u \rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{array}} \quad y$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

### Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.



### Zustandsraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträts* kann das System visualisiert werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträt den zeitlichen Verlauf verfolgen.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- $A$  : beschreibt Dynamik  
 $B$  : beschreibt Steuereinfluss  
 $C$  : beschreibt Messung  
 $D$  : beschreibt Durchgriff

Die Antwort setzt aus einem *zeitabhängigen* und einem *konstanten* Teil zusammen.

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{zeitabhängig}} - CA^{-1}B + D \quad t > 0$$

Das System strebt gegen Wert  $-CA^{-1}B + D$  wenn  $A$  asymptotisch stabil ist  $\rightarrow$  der *zeitabhängige* Teil strebt, falls  $A$  asymptotisch stabil ist, der Gleichgewichtslage  $x = 0$  zu. Der *konstante* Teil entspricht dem Wert bei  $\omega \rightarrow 0$  und damit der *Gleichspannungsverstärkung*.

## Übertragungsfunktion

Wird als Eingangssignal  $u$

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

gegeben, ergibt sich folgendes Ausgangssignal

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)e^{st}}_{\text{stationär } y_s}$$

### Hinweis

Ist  $A$  stabil, so geht der transiente Anteil  $y_t$  asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion.

## Dynamik

### Lösen von Differential Gleichungen

#### ! Lösung einer Differentialgleichung

$$x(t_0) = x_0 \quad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

### Gleichgewichtslage

Eine Gleichgewichtslage ist ein Zustand in dem das System stabil ist. Dies ist auch bekannt als *stationäres* Verhalten und weist keine Veränderungen auf mit der Zeit.

$x_e$  ist eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  falls:

$$F(x_e) = 0 \rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_e} = 0$$

### Testfunktion Sprungantwort

Anhand folgender Funktion kann die Sprungantwort eines Systems angegeben werden.

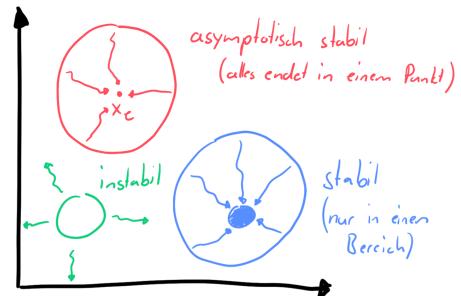
## Stabilität

### Allgemein

Die Stabilität ist in drei Zustände eingeteilt.

- **stabil**, falls alle Zustände in der Nähe der Gleichgewichtslage  $x_e$  zu Lösungen führen.
- **asymptotisch stabil**, falls alle Zustände in der Nähe von  $x_e$  nach langer Zeit ( $t \rightarrow \infty$ ) in  $x_e$  enden.
- **instabil**, falls der Zustand nie eine Gleichgewichtslage erreicht.

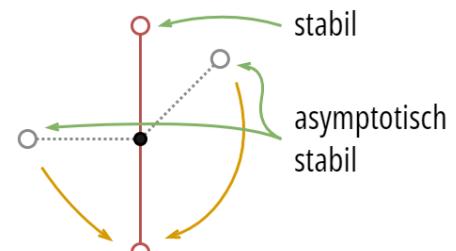
Stabilität ist im Allgemeinen eine *lokale* Eigenschaft innerhalb eines Bereiches des Zustandsraums!



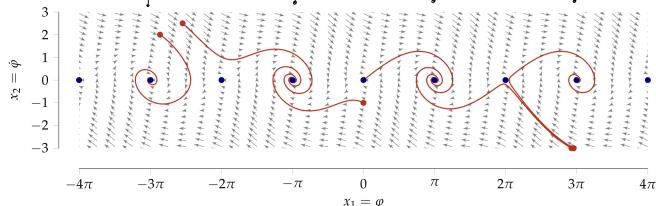
### Beispiel

Ein Pendel, welches die gesamte Rotationsachse (360°, rundherum) ausnützen kann, hat zwei Gleichgewichtslagen:

- **stabile** Position oben
- **asymptotische stabile** Positionen, welche immer nach unten verlaufen.

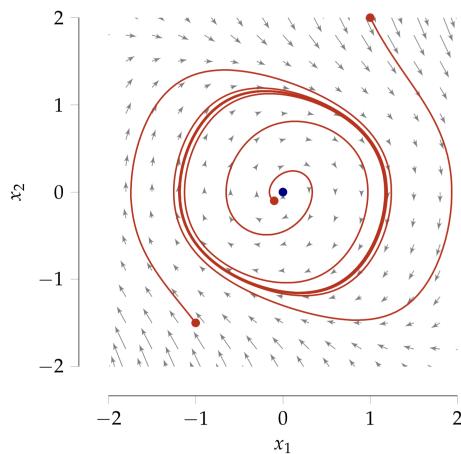


Das zugehörige Phasendiagramm

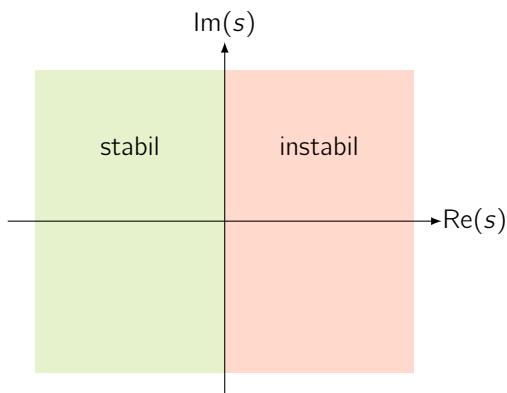


### ⚠️ Zykliges Verhalten

Systeme mit zyklischen Verhalten (*Grenzzyklen*) weisen ein einschwingen auf. Dies meist unabhängig vom Startpunkt, jedoch gibt es meist einen Punkt an dem ein System nicht zu schwingen beginnt (→ *rauschen nötig*)



## Linearer Systeme

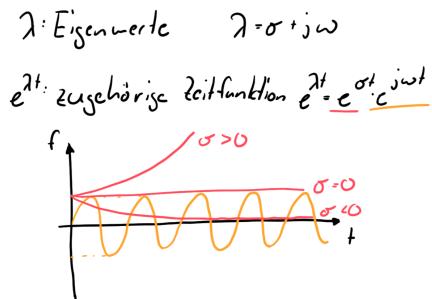


Polstellen eines linearen Systems ( $\frac{dx}{dt} = Ax$  &  $x(0) = x_0$ ) können mit dem *charakteristischen Polynoms* berechnet werden.

### ❗️ charakteristisches Polynom

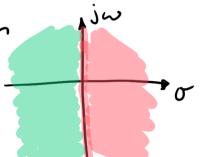
Die Nullstellen von  $\lambda$  werden mit der Dynamik-Matrix  $A$  berechnet. Diese entsprechen dem Nennerpolynom  $C(sI - A)^{-1}$

$$\lambda(A) := \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$



### Anforderungen für Stabilität:

Alle Eigenwerte  $\lambda$  müssen auf der linken Halbebene liegen.



### 🔥 Gültigkeit

Stabilität linearer Systeme ist nur von  $A$  abhängig, nicht vom Anfangswert  $x_0$ . Dies gilt Global!  
Ebenfalls sind stabile lineare Systeme **global** gültig.

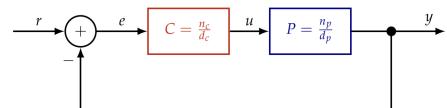
## Linearisierung

Ist das linearisierte System asymptotisch stabil, so ist das nicht-lineare System in der **Umgebung der Gleichgewichtslage** ebenfalls asymptotisch stabil.

## Hurwitz-Kriterium

### 🔥 Vorsicht

**GESCHLOSSENER KREIS VERWENDEN!**



$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{n_p \cdot n_c}{d_p \cdot d_c + n_p \cdot n_c}$$

$$C = \frac{n_c}{d_c} \quad P = \frac{n_p}{d_p}$$

$n_c$  : Zähler (*numerator*) des Reglers  $C$

$d_c$  : Nenner (*denominator*) des Reglers  $C$

$n_p$  : Zähler (*numerator*) des Prozess  $P$

$d_p$  : Nenner (*denominator*) des Prozess  $P$

$$\lambda = d_p \cdot d_c + n_p \cdot n_c$$

### ! Hurwitz-Kriterium

Die Polstellen-Gleichung  $\lambda(s)$  mit  $a_0 > 0$  hat dann, und nur dann, ausschliesslich Lösungen mit negativen reellen Teilen, falls alle *Nordwestlichen* Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrix positiv sind:

$$\det H_n > 0$$

$$\lambda(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

### Tipp

- Bei  $n \leq 2$  genügt die Bedingung, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen.
- $\det H_n = a_n \cdot \det H_{n-1}$  – Wird nicht immer verwendet (nur bei letzter Determinante  $n$ ).
- Fehlt ein Koeffizient oder ist dieser negativ, so ist die Bedingung nicht erfüllt

$$s^3 + 2s^2 + 10 \rightarrow \text{instabil, da } 0 \cdot s$$

### Was mit Hurwitz nicht möglich ist

Das Hurwitz-Kriterium beschreibt keine *Robustheit* der Stabilität und erlangt keine Einsicht, wie der Regler  $C = \frac{n_c}{d_c}$  gewählt werden sollte.

### Beispiel

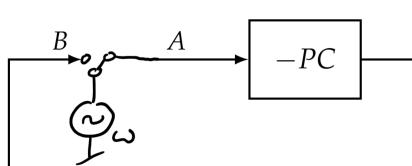
$$\lambda = 8s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2 = a_0s^4 + a_1s^3 + \cdots + a_4$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det H_1 &= 2 > 0 & \checkmark \\ \det H_2 &= 2 - 24 = -22 > 0 & \times \end{aligned}$$

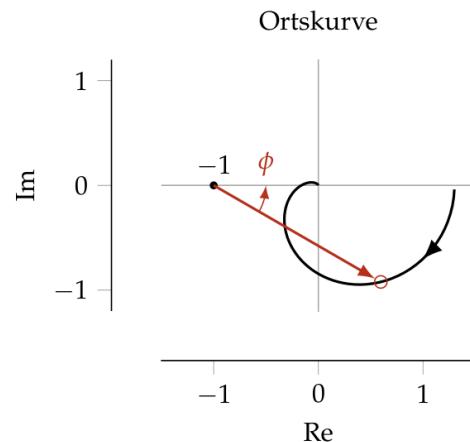
### Nyquist

Wenn  $L(s) = -1$ , so kann eine stationäre Schwingung eingestellt werden!



$$B = -P(s)C(s) \cdot A \Rightarrow P(s)C(s) = -1$$

### Allgemein – Variante Winkeländerung



$$\Delta\phi = a\frac{\pi}{2} + r\pi \hat{=} a \cdot 90^\circ + r \cdot 180^\circ$$

$a$ : Anzahl Pole auf der *Im*-Achse

$r$ : Anzahl Pole rechts der *Im*-Achse

Nur bei  $\Delta\phi \geq 0^\circ$  ist der *geschlossene Kreis* **stabil**.

### ! Offen stabile Systeme

Systeme, welche offen stabil sind, müssen der Bedingung  $\Delta\phi = 0$  genügen.

Das Kriterium ist ebenfalls anwendbar, wenn die Ortskurve experimentell ermittelt wurde.

### i Totzeit

Die Bedingung gilt auch für Systeme mit Totzeit

### Allgemein – Variante Umläufe

Das System  $G_{yr}$  ist stabil wenn  $P = U$

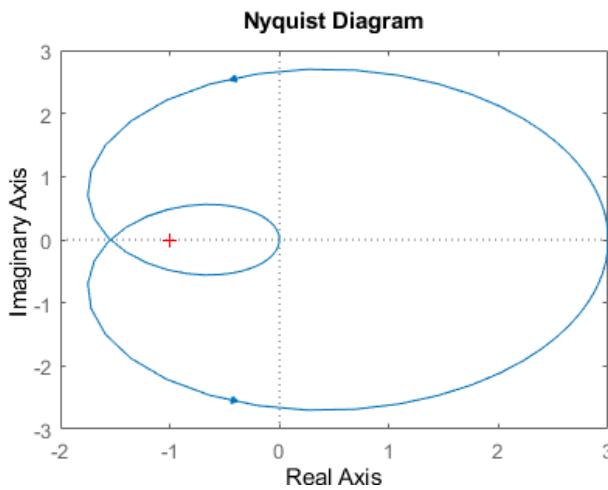
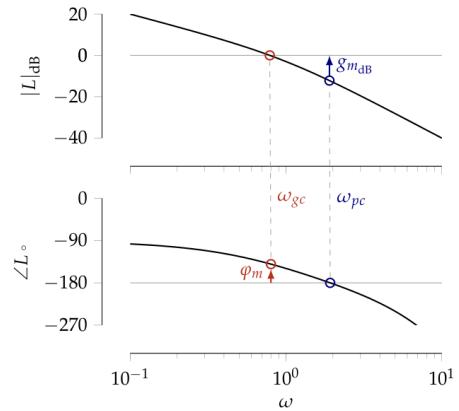
$P$  : Anzahl instabiler Polstellen von  $L(s)$

$U$  : Anzahl Umläufe der Nyquist-Kurve  $L(j\omega)$  mit  $\omega \in [-\infty, \infty]$

$\hookrightarrow$  um den Punkt  $(-1, 0)$  im Gegenuhrzeigersinn

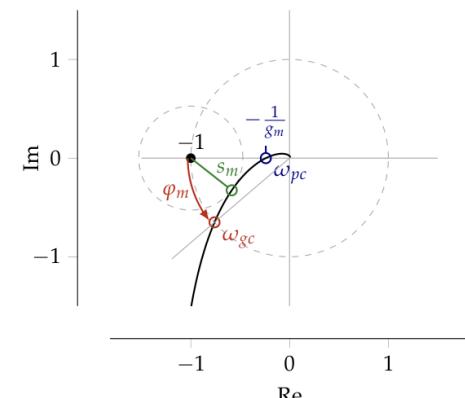
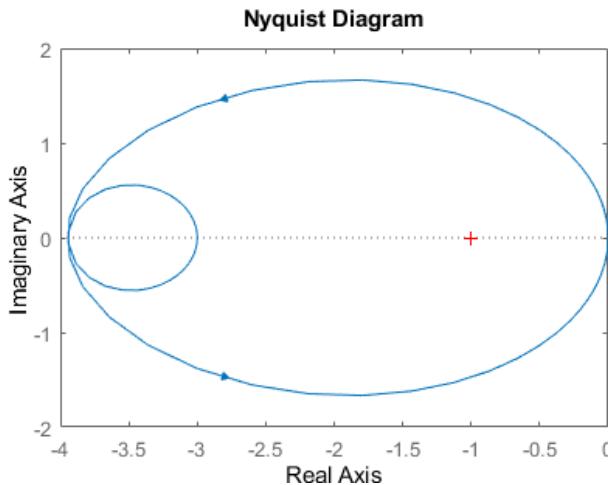
### Beispiel

$$L(s) = \frac{9(s+2)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$

**Stabilitätsreserve / Robustheit**

→  $P = U = 2$  : stabil

$$L(s) = \frac{18(s-1)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$

**Phasenreserve  $\varphi_m$** 

Eintritt in den Einheitskreis → gain crossover

$$\omega_{gc} : |L(j\omega_{gc})| = 1$$

Abstand zu  $-1$  wird mit Phasenreserve  $\varphi_m$  ausgedrückt

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

**Amplitudenreserve  $g_m$** 

Überschreiten der negativen Re-Achse → phase crossover

$$\omega_{pc} : \angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$$

Abstand zu  $-1$  wird durch die Amplitudenreserve  $g_m$  ausgedrückt.

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$

Wird die Achse nicht überschritten, so ist  $g_m \rightarrow \infty$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

→  $P = 2, U = 1$  : instabil

**Einfach – Variante Links liegen**

Für Systeme mit maximal zwei instabilen Polen im Ursprung (aber keinen weiteren instabilen Polen) genügt die Bedingung, dass der Punkt  $(-1, 0)$  links liegen gelassen wird, wenn entlang der Ortskurve  $\omega : 0 \rightarrow \infty$  verfahren wird.

**Einfach – Variante Umläufe**

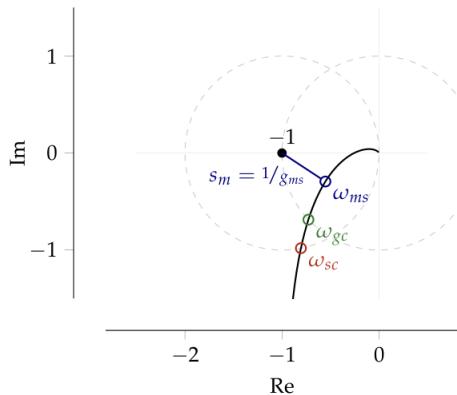
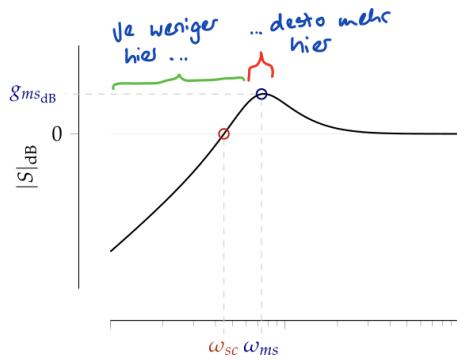
Das System  $G_{yr}$  ist stabil, wenn die Nyquist Kurve  $L(j\omega)$  mit  $\omega \in [0, \infty]$  den Punkt  $(-1, 0)$  nicht umläuft.

## Stabilitätsreserve $s_m$

Kleinester Abstand zum Punkt  $-1$

Der Wert kann von der Ortskurve abgelesen werden oder entspricht dem Maximum der Sensitivitätsfunktion  $S$ .

$$\omega_{ms} = \operatorname{argmax}_{\omega} |S(j\omega)| \quad s_m = \frac{1}{|S(j\omega_{ms})|} = \frac{1}{g_{ms}}$$



## Praxiswerte

Folgende Werte dienen als *Boilerplate* für die Reglerauslegung

$$\begin{aligned}\varphi_m &\approx 30^\circ - 60^\circ \\ g_m &\approx 2 - 5 \\ s_m &\approx 0.5 - 0.8 \\ \omega_{gc} &\approx \frac{1}{\tau} : \tau \text{ von Sprungantwort}\end{aligned}$$

## Prozess



## Modellierung

### ! Vereinfachung

Modelle repräsentieren immer eine Vereinfachung des eigentlichen Systems und fokussiert daher immer auf ein Teil des Systems.

Beispiel: Die Modellierung des Tempomats konzentriert sich mehr auf die Geschwindigkeit des Fahrzeugs als auf die Auswirkungen eines Atombombeneinschlags auf das Fahrzeug.

## Identifikation

...welche Klasse – Ausgehend von einem LTI-System sind der Grad von Zähler- und Nennerpolynom festzulegen. Zudem sind allfällige Totzeiten zu berücksichtigen.

...welche Eingangssignale – Das zu testende System muss hinreichend mit einem Signal angeregt werden → Diracstöße, Sprungfunktionen, Rampen und harmonische Funktionen

...was meint 'gleichwertig' – Da Ein- & Ausgangsgrößen beobachtet werden, kann  $y$  des zu testenden Systems und  $\hat{y}$  des zu vergleichenden Modells verglichen werden. Mit dem resultierenden Fehler  $\epsilon = y - \hat{y}$  können Grenzen festgelegt werden.

...wie kann ein Modell gefunden werden – Trial & Error mit Sprungantwort und Bodediagramm.

## Methode der kleinsten Quadrate

Mit dieser Methode können Parameter anhand Messwerten bestimmt werden.

$$\underbrace{y[k] + a_1y[k-1] + a_2y[k-2] + \dots + a_ny[k-n]}_{A(z^{-1})y} = \underbrace{b_1u[k-1] + \dots + b_nu[k-n]}_{B(z^{-1})u}$$

$$\beta^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

$$\epsilon = A(z^{-1})y - B(z^{-1})u = \underbrace{y}_{\text{Gemessen}} - \underbrace{\Phi\beta}_{\text{Modell}}$$

$$y = \begin{pmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[n+N] \end{pmatrix}$$

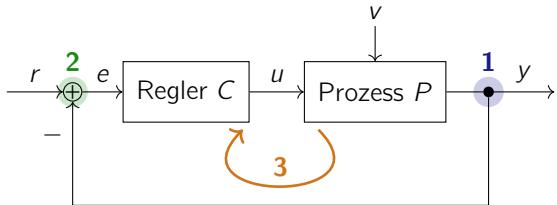
$$\Phi = \begin{pmatrix} -y[n] & -y[n-1] & \dots & -y[1] & u[n] & u[n-1] & \dots & u[1] \\ -y[n+1] & -y[n] & \dots & -y[2] & u[n+1] & u[n] & \dots & u[2] \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y[N+n-1] & -y[N+n-2] & \dots & -y[N] & u[N+n-1] & u[N+n-2] & \dots & u[N] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

# Regelung

## Feedback Control

Ziel eines Reglers ist die Angleichung einer Regelgrösse  $y$  an eine Führungsgrösse  $r$ , sodass idealerweise  $y = r$ .

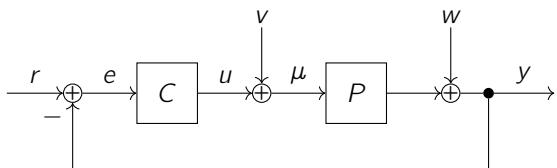


### Merkmale einer Regelung

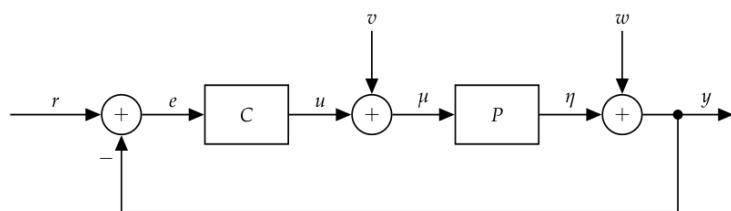
Folgende Merkmale **muss** eine Regelung aufweisen, ansonsten ist es keine Regelung.

1. Erfassung (Messen) der Regelgrösse
2. Vergleich von Regel- und Führungsgrösse
3. Geschlossener Wirkungskreis

## Sensitivitätsfunktionen



### 'Gang of Four'



| $y$               | $u$                | $e$               | $\mu$             | $\eta$             |
|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| $\frac{PC}{1+PC}$ | $\frac{C}{1+PC}$   | $\frac{1}{1+PC}$  | $\frac{C}{1+PC}$  | $\frac{PC}{1+PC}$  |
| $\frac{P}{1+PC}$  | $\frac{-PC}{1+PC}$ | $\frac{-P}{1+PC}$ | $\frac{1}{1+PC}$  | $\frac{P}{1+PC}$   |
| $\frac{1}{1+PC}$  | $\frac{-C}{1+PC}$  | $\frac{-1}{1+PC}$ | $\frac{-C}{1+PC}$ | $\frac{-PC}{1+PC}$ |

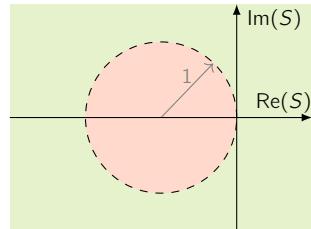
Das Verhalten der Regelung kann durch die folgenden vier Sensitivitätsfunktionen beschrieben werden.

### Sensitivity Function

$$G_{er} = S = \frac{1}{1 + PC}$$

### i Bedeutung

Sensitivitäts-Übergangsfrequenz  $\omega_{sc}$  kennzeichnet den Übergang von Dämpfung zur Verstärkung



$|S(j\omega)| < 1$  Dämpfung  
 $|S(j\omega)| > 1$  Verstärkung

### Load Sensitivity Function

$$G_{yv} = PS = \frac{P}{1 + PC}$$

### Complementary Sensitivity Function

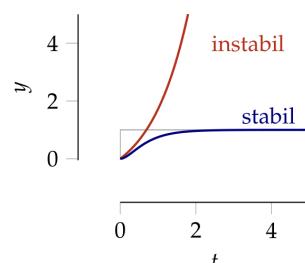
$$G_{yr} = T = \frac{PC}{1 + PC} \quad (\stackrel{!}{=} 1)$$

### Noise Sensitivity Function

$$G_{ur} = CS = \frac{C}{1 + PC}$$

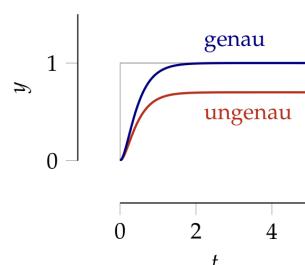
## Anforderungen

### Stabilität



- binäres Kriterium und zwingend zu erfüllen
- Für lineare Systeme gilt dies **global**, egal welcher AP
- Die Stabilität kann anhand des Polnullstellendiagramms beurteilt und mit Hurwitz & Nyquist untersucht werden

### Stationäre Genauigkeit

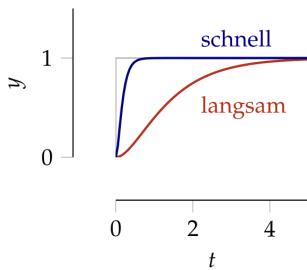


- Beschreibt bleibender Fehler, nach Abklingung der transienten Vorgänge
- Gutes Mass ist stationärer Regelfehler  $e$

$$e = \frac{1}{1+PC} r + \frac{-P}{1+PC} v + \frac{-1}{1+PC} w$$

$$e_{stationr} = \frac{1}{1+PC} \Big|_{s=0} \cdot r_0 + \frac{-P}{1+PC} \Big|_{s=0} \cdot v_0 + \frac{-1}{1+PC} \Big|_{s=0} \cdot w_0$$

## Schnelligkeit



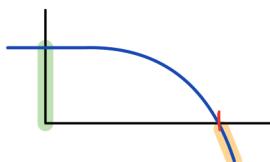
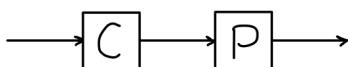
- Für Charakterisierung des dynamischen Verhaltens wird **Ge-samtregelkreis** betrachtet in Bezug auf Führungsgrösse

$$y = \frac{PC}{1+PC} r$$

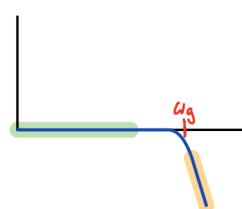
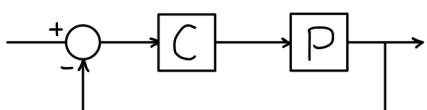
- Als Kriterium dient die Grenzfrequenz  $\omega_g \rightarrow$  Beschreibt ab wann das Verhalten deutlich degradiert ( $\omega_g < \omega$ )

$$\omega_g : |L(s)|_{s=j\omega_g} \approx 1$$

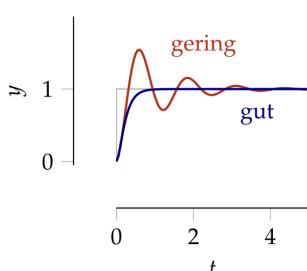
## offener Kreis



## geschlossener Kreis



## Dämpfung



- Unterdrückung von schwingenden Signalteilen, welche Anzeichen von Instabilität sind
- Gutes Mass ist die Phasenlage im Bereich von  $\omega_g$

## Eigenschaften

### Robustheit

*Robustheit* bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.

Robustheit gegenüber Unsicherheit → Standhaltung gegenüber Störungen

### Dynamik

Die *Dynamik* eines Systems kann durch eine Regelung beeinflusst und verändert werden.

- Instabile Systeme → stabil
- Träges System → schnell
- Abdriftende System → konstant.

### Abhängigkeit

Viele Systemeigenschaften sind nicht unabhängig voneinander. Sie unterliegen von Natur aus bestimmten Beschränkungen

- Stabiles Flugverhalten → keine hohe Manövriertbarkeit
- !! Regelungen können helfen, diese Abhängigkeiten teilweise aufzuheben!

### Safety Critical

Werden instabile Systeme mittels Regelung stabilisiert, so wird die Regelung kritisch für die Sicherheit des Systems.

### Modularität

In einem modularen System sind die einzelnen Module möglichst unabhängig voneinander → Module können einfach ersetzt oder erweitert werden.

- Wohldefinierte Ein-/Ausgänge, Beziehungen dazwischen → Verhalten unabhängig von äusseren Umständen → ebenfalls Ziel von Regler

Mittels Regelung lassen sich Komponenten unabhängiger und damit zusammengesetzte Systeme Modularer machen.

### Genauigkeit

Mit Regelung können unerwünschte Störeinflüsse ausgeglichen werden → Verbessert Genauigkeit und Auflösung (z.B. bei Sensoren).

### Anwendungen

Ein Konzept einer hohen Genauigkeit ist, mittels Regelung wird ein bestimmten und wohldefinierten Arbeitspunkt ausgeregt und dabei aufgewendete Stellgrösse als Messgrösse des Sensors interpretiert dies.

Beispiel: Seismographen, sehr präzise Waagen

## Herausforderungen

Regelungen bringen viele Vorteile, aber auch einige Nachteile:

**Gefahr der Instabilität** – Auch geregelte Systeme haben einen Kippunkt, wo die Mitkopplung dominant wird und zur Instabilität führt. Ziel einer Regelung ist das System unter allen Umständen stabil zu halten (nicht nur unter Normalbedingung sondern auch unter allen Störeinflüssen → anspruchsvoll).

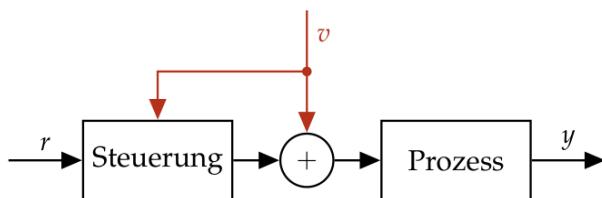
Beispiel: Mikrofonverstärkung bei Beschallungsanlage zu weit aufgedreht → pfeifen

**Messfehler** – Jede Regelgröße wird messtechnisch verfasst → verbundene Messfehler gehen in Systemverhalten ein (betrifft statische Fehler, dynamische Fehler, wie Rauschen)

**Komplexität** – Die Implementation eines Regelsystems bei hoher Komplexität wird anspruchsvoller und mit entsprechendem Aufwand verbunden.

## Steuerung

Feedforward Control



## P-Regler

$$C(s) = k_p \quad u = k_p \cdot e$$

### Achtung

$e = 0$  ist mit einem P-Regler nicht möglich. Unter Annahme eines stabilen Regelkreises:

$$G_{er} = \frac{1}{1 + P \cdot C} = \frac{1}{1 + P \cdot k_p}$$

entsteht ein bleibender Fehler von:

$$G_{er}(0) = \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} = \frac{1}{1 + P(0) \cdot k_p}$$

Dies kann mit einer Vorsteuerung korrigiert werden, was aber Störeinflüsse nicht ausschliesst:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + u_{ff} = k_p \cdot e(t) + \frac{r}{P(0)}$$

Besser ist ein PI-Regler

## PI-Regler

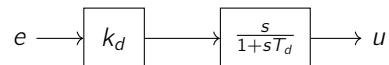
$$C_{PI} = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_{IS}} \right) \quad u = k_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$$

## PD-Regler

$$C_{PD} = k_p \cdot (1 + T_d \cdot s) \quad u = k_d \frac{de}{dt}$$

### Filter D-Anteil

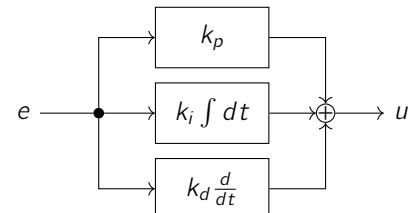
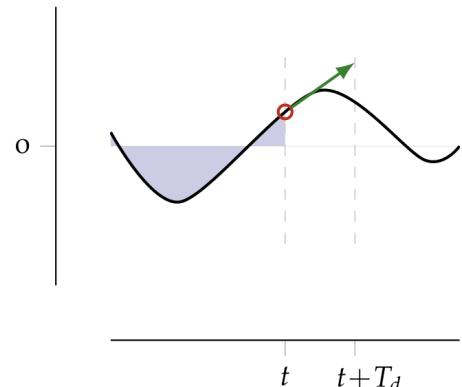
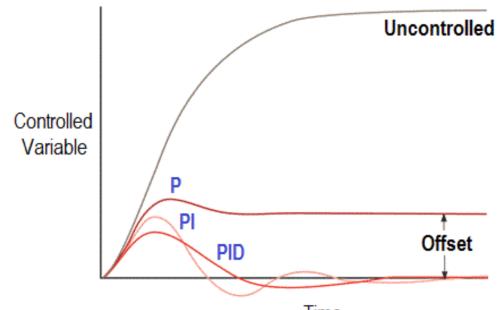
Hochfrequente Änderungen (z.B. Sprungantworten) führt zu hohem D-Anteil → Erweiterung TP-Filter



Für tiefe Frequenzen ( $|s| \ll \frac{1}{T_d}$ ) wird  $G_{ue} \approx k_p T_d s$  und hohe Frequenzen wird  $G_{ue} \approx k_p$  (limitiert durch  $k_p$ )

$$C_D(s) = k_p \frac{T_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d} = \underbrace{\frac{k_p \cdot s}{1 + s \cdot T_d}}_{\text{Filter}} \underbrace{\frac{k_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d}}_{\text{D-Anteil}}$$

## PID-Regler



$$C(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = k_p \cdot \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{T_i \cdot s}$$

$$= \underbrace{k_p \cdot e}_P + \underbrace{\frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_I + \underbrace{k_p \cdot T_d \frac{de}{dt}}_D$$

$k_p$  : Reglerverstärkung

$T_i = k_p/k_i$  : Nachstellzeit

$T_d = k_d/k_o$  : Vorhaltzeit

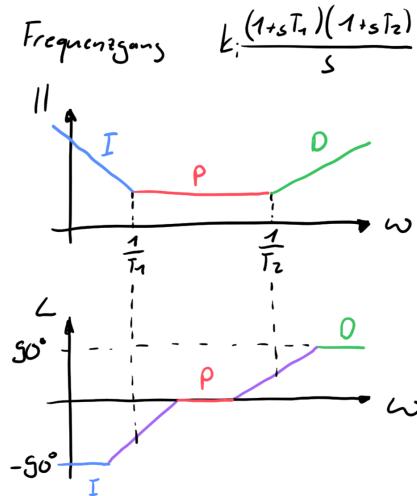
Die Stellgröße wird dadurch geregelt, bis der Regelfehler  $e = 0$  wird. Der Integrator verstärkt tiefe Frequenzen und ergibt so die stationäre Genauigkeit ( $e = 0$  bei  $t \rightarrow \infty$ ).

### Differential $k_d, T_d$

Der D-Anteil reagiert auf zukünftige Fehler, indem die Steigung mit einem Verstärkungsfaktor  $k_d$  verstärkt wird.

### ! Wichtig

Diese Beschreibung ist nur eine idealisierte Repräsentation, welche für das Verständnis des Systems hilfreich ist. Im praktischen Einsatz sind Modifikationen notwendig.



### Proportional $k_p$

P-Anteil verstärkt den Regelfehler  $e$  um die Proportionalverstärkung  $k_p$ .

$$C(s) = k_p \quad u = k_p \cdot e$$

### ! Proportionalband

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{falls } e \geq e_{max} \\ k_p \cdot e & \text{falls } e_{min} < e < e_{max} \\ u_{min} & \text{falls } e \geq e_{min} \end{cases}$$

mit

$$e_{min} = \frac{u_{min}}{k_p} \quad e_{max} = \frac{u_{max}}{k_p}$$

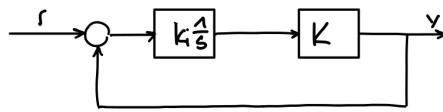
### Integral $k_i, T_i$

Mit dem I-Anteil werden vergangene Fehler mitberechnet → stationäre Fehler des P-Anteils wird korrigiert.

## Auslegung anhand...

### ... Modelle geringer Ordnung

#### Approximation 0-er Ordnung



Für einen statischen Prozess  $K = P(0)$  und einen I-Regler wird  $L = PC = K \cdot \frac{k_i}{s}$ :

$$G_{yr} = \frac{K \cdot k_i}{s + K \cdot k_i} = \frac{1}{1 + s \cdot T_{cl}}$$

$$k_i = \frac{1}{T_{cl} \cdot K} = \frac{1}{T_{cl} \cdot P(0)}$$

#### 🔥 mittlere Verzögerungszeit

Die Auslegung bedingt, dass der Prozess gut durch eine Konstante beschrieben werden kann. Ein vernünftiges Kriterium dafür ist die Bedingung:

$$T_{cl} > T_{ar} \quad T_{ar} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$

$T_{ar}$  : mittlere Verzögerungszeit

$T_{cl}$  : Zeitkonstante des geschlossenen Kreises

$T_{ar}$  beschreibt die Zeit, bis die Sprungantwort des Systems sich gesetzt hat.

#### Approximation 1-ter Ordnung

Näherung erster Ordnung kann folgendes Modell gewählt werden.

$$P \approx P(0) + P'(0)s \approx \frac{P(0)}{1 + sT_{ar}}$$

#### ... Bodediagramm

Diese Auslegung wird mit dem **offenen** Regelkreis gemacht.

$$C(s) = k_i \frac{(1 + s T_1)(1 + s T_2)}{s} = k_p \frac{(1 + s T_i)(1 + s T_d)}{s \cdot T_i}$$

Zielgrößen: Durchtrittsfrequenz  $\omega_{gc}$ , die Phasenreserve  $\varphi_m$  und allenfalls Amplitudenreserve  $g_m$ .

#### Vorgehen

Prozess:  $P(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$  mit Ziel  $\omega_{gc} \geq 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\varphi_m \geq 50$ .

1. P-Regler für Erreichung von  $\omega_{gc}$ . Mit  $|k_p \cdot P(j\omega_{gc})| = 1$  (Nyquist-Kriterium) folgt:

$$k_p = \frac{1}{\left| \frac{10}{1+10j} \right|} = \frac{(\sqrt{1^2 + 10^2})^2}{10} = 10.1$$

$$C(s) = k_p = 10.1$$

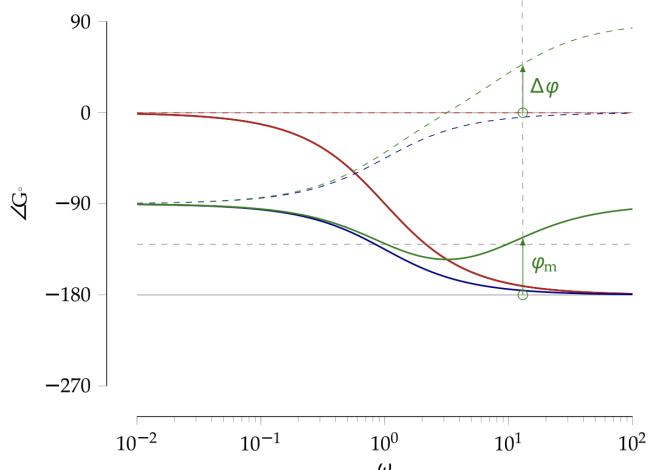
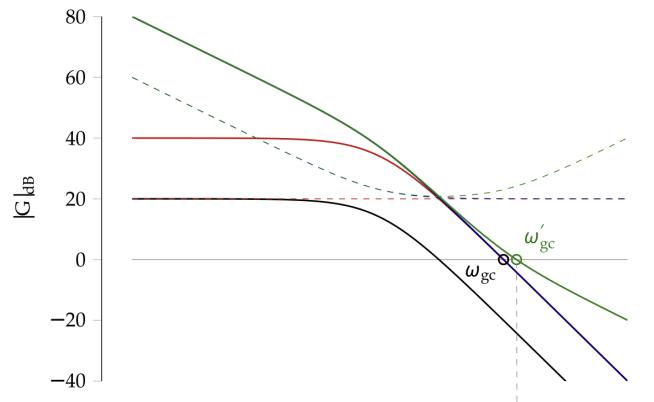
2. PI-Regler für Reduktion der zusätzlichen Phasensenkung im Bereich von  $\omega_{gc}$

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)}{s} = \frac{10 \cdot (1 + s)}{s}$$

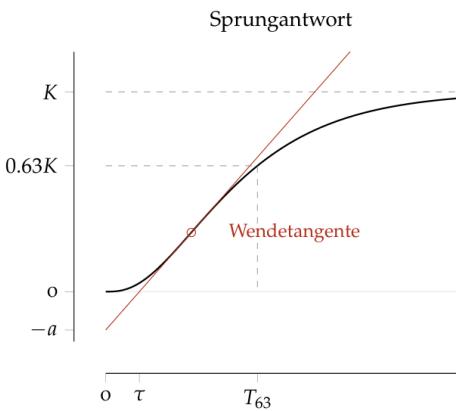
3. PID-Regler für genügend Phasenabhebung im Bereich von  $\omega_{gc}$

$$\begin{aligned} C(s) &= k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s} \\ &= 10 \cdot \frac{(1 + s)(1 + 0.1s)}{s} \end{aligned}$$

4. Kontrolle von resultierenden Durchtrittsfrequenz  $\omega'_{gc}$  und damit ergebenden Phasenreserve  $\varphi_m$ .



### ... Einstellregeln im Zeitbereich

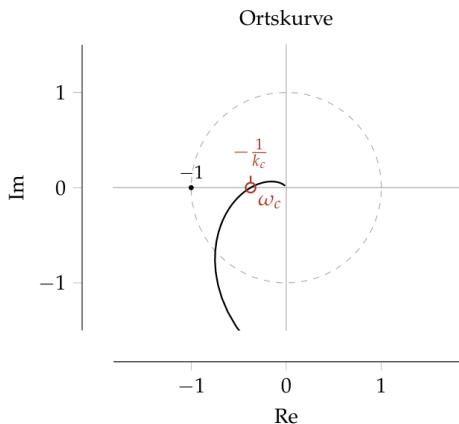


### Ziegler-Nichols-Tabelle (via Sprungantwort)

| Typ | $k_p$   | $T_i$          | $T_d$            |
|-----|---------|----------------|------------------|
| P   | $1/a$   | -              | -                |
| PI  | $0.9/a$ | $3 \cdot \tau$ | -                |
| PID | $1.2/a$ | $2 \cdot \tau$ | $0.5 \cdot \tau$ |

### ... Einstellregeln im Frequenzbereich

Verstärkung  $k$  erhöhen, bis sich eine anhaltende Schwingung einstellt. Regelparameter anhand kritischer Verstärkung  $k_c$  & Periodendauer  $T_c$  ermitteln.



### Ziegler-Nichols-Tabelle (via Kritische Verstärkung)

| Typ | $k_p$           | $T_i$           | $T_d$             |
|-----|-----------------|-----------------|-------------------|
| P   | $0.5 \cdot k_c$ | -               | -                 |
| PI  | $0.4 \cdot k_c$ | $0.8 \cdot T_c$ | -                 |
| PID | $0.6 \cdot k_c$ | $0.5 \cdot T_c$ | $0.125 \cdot T_c$ |

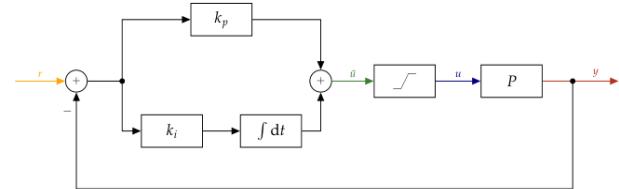
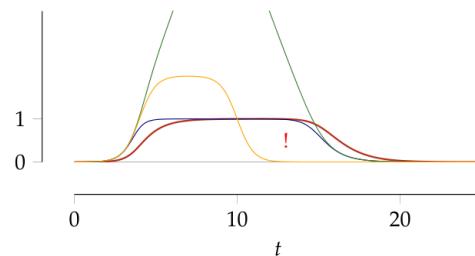
### Stellgrößen-Sättigung

#### Sättigungseffekt

Arbeitet der Regelkreis in der Sättigung, so ist dieser faktisch unterbrochen – das System arbeitet als offener Kreis, solange der Aktor im gesättigtem Zustand ist.

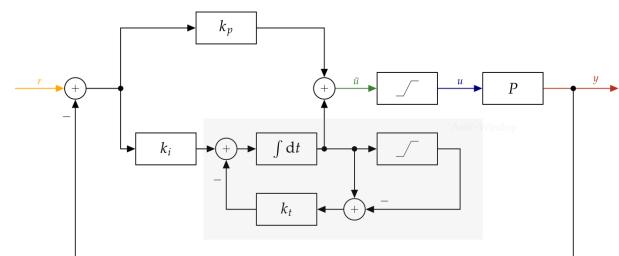
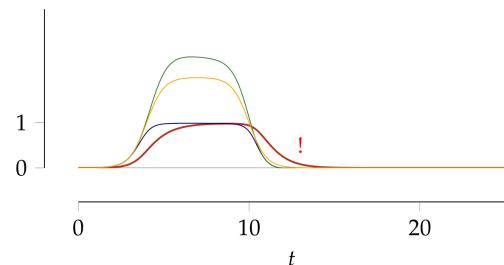
#### Windup

Bei Sättigung baut Fehler den I-Anteil auf. Muss nach Erholung abgebaut werden.



#### Anti-Windup

Exzessiver Anteil wird mit einem invertierten Vorzeichen an den Integrator zurückgeführt und somit der Windup klein gehalten → kürzere Erholzeit nach Stellgrößensättigung

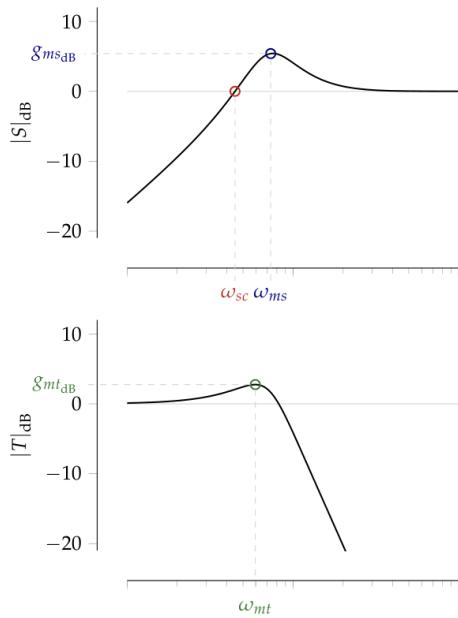
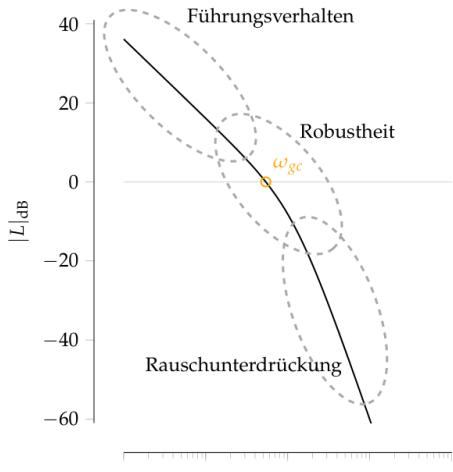


$$k_t \approx 10k_i$$

## Loop Shaping

### ! Verlauf von $|L|$

- $\omega < \omega_{gc}$  möglichst gross
- $\omega \approx \omega_{gc}$  möglichst flach
- $\omega > \omega_{gc}$  möglichst klein



## Lag & Lead Kompensatoren

$$C(s) = k \cdot \prod_i \left( \frac{s + a_i}{s + b_i} \right)$$

Mit  $a_i > 0, b_i > 0, k > 0$

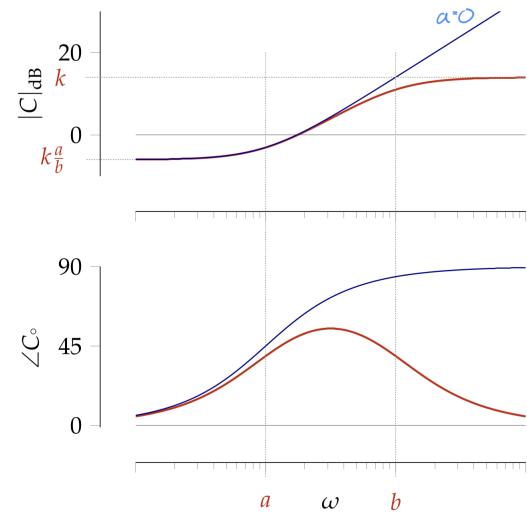
### i PI-Regler & D-Anteil

PI Regler  $\rightarrow b = 0$

D-Anteil mit Beschränkung  $\rightarrow a = 0$

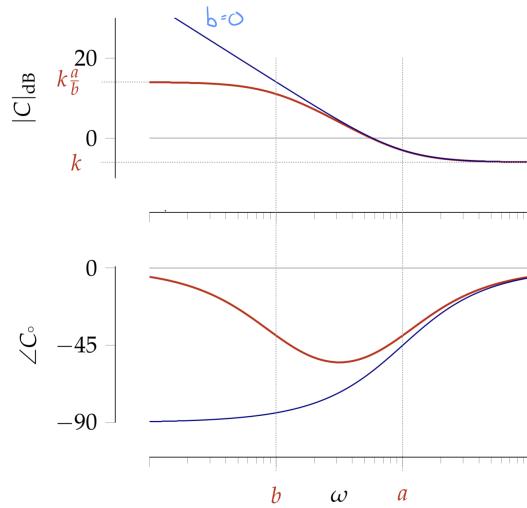
### Lead ( $a < b$ )

Verstärkung bei hohen Frequenzen + Phasenanhebung (max 90° pro Ordnung)



### Lag ( $a > b$ )

Verstärkung bei tiefen Frequenzen + Phasensenkung (max -90° pro Ordnung)



## Grenzen des Loop-Shapings

Der Beeinflussung des Systemverhalten durch Regelung sind bestimmte Grenzen gesetzt. Verhalten kann nicht uniform verbessert werden.

### i Bode's Integral

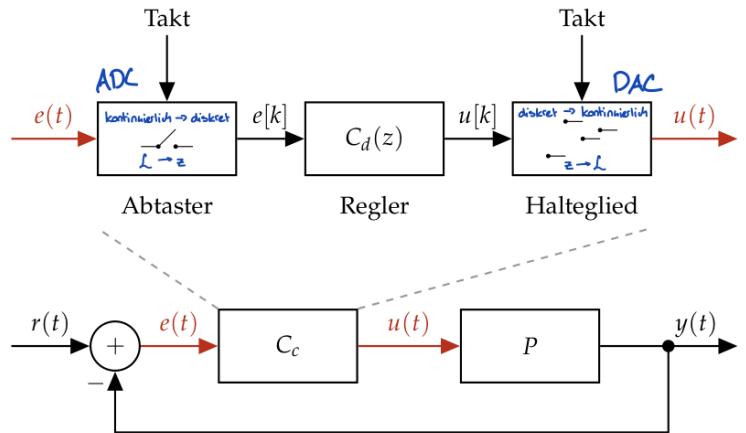
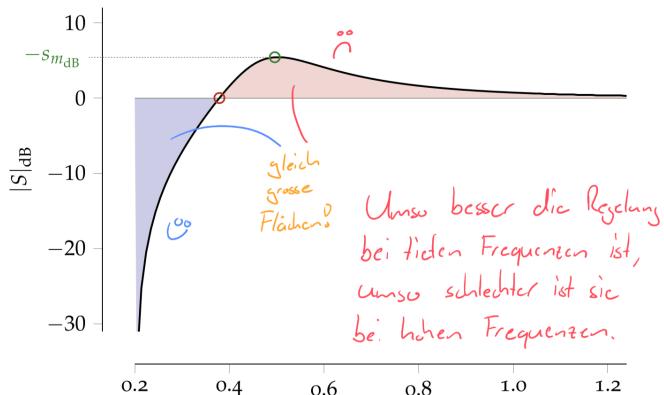
Ist der geschlossene Regelkreis mit  $L$  stabil und geht  $sL(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  gegen null, dann ist

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)| d\omega = \pi \sum p_k$$

wobei  $p_k$  die Pole in der rechten Halbebene sind. Ist  $L$  an sich stabil, so gilt

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)| d\omega = 0$$

**Alle Verbesserungen werden mit Verschlechterungen komplementiert.**



$$z = e^{sh} \approx 1 + sh \quad \text{Euler/Vorwärtsdifferenz}^1$$

$$z = e^{sh} \approx \frac{1}{1-sh} \quad \text{Rücksdifferenz}^2$$

$$z = e^{sh} \approx \frac{1+sh/2}{1-sh/2} \quad \text{Trapezregel/Tustin}$$

1. zu optimistisch
2. zu pessimistisch

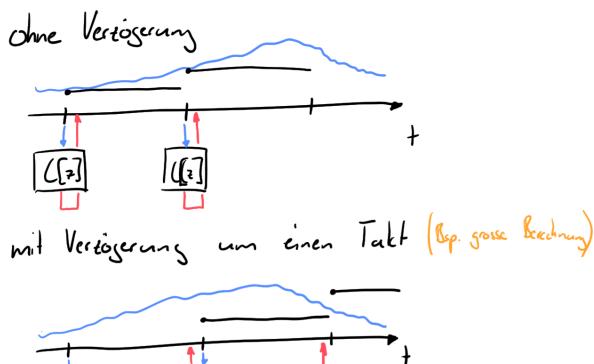
## Diskretisierung

### Entwurf Regler

Digitalrechner arbeiten zeitdiskret  $\leftrightarrow$  Prozesse sind von zeitkontinuierlicher Natur

#### Verzögerung

Durch grosse Berechnungen kann es zu Verzögerungen kommen



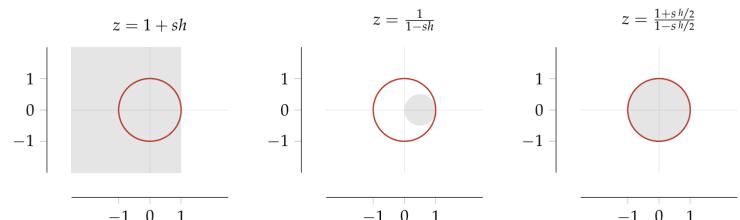
### 1) kontinuierlicher Prozess

kontinuierlicher Regler  $s$  wird entworfen und dann diskretisiert.

$$\tilde{s} = \frac{z-1}{h} \quad \text{Euler/Vorwärtsdifferenz}$$

$$\tilde{s} = \frac{z-1}{z^h} \quad \text{Rücksdifferenz}$$

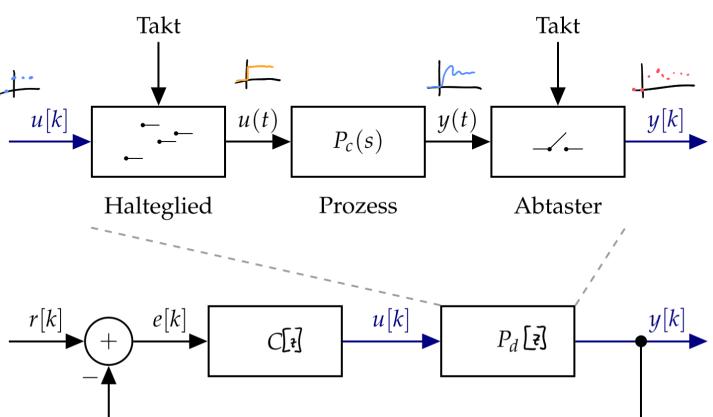
$$\tilde{s} = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Trapezregel/Tustin}$$



#### Stabilität

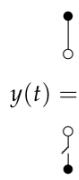
Die Stabilitätsaussage bezieht sich auf die transformierte Funktion, nicht aber zwingend auch für den geschlossenen Regelkreis. \*Pole innerhalb des Einheitskreises der  $z$ -Ebene sind stabil.

### 2) zeitdiskreter Regler



$u[k] = \sigma[k] \circ \text{---} \bullet \frac{z}{z-1}$  an, so ist  $u(t) = \sigma(t) \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s}$ , ebenfalls ein Einheitssprung. Damit wird

$$Y(s) = P_c(s) \cdot U(s) = P_c(s) \cdot \frac{1}{s}$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_c(s) \cdot \frac{1}{s}\}$$

$$\text{t} = k h$$

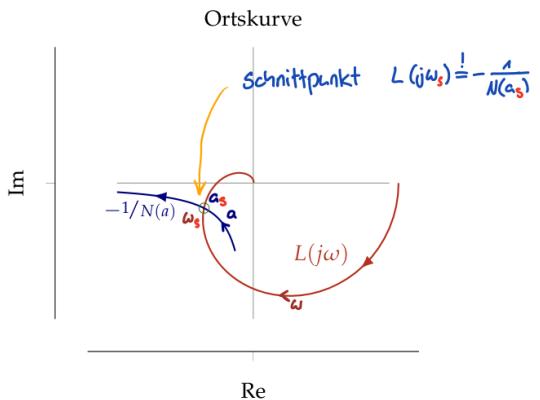
$$\mathcal{Z}\{y[k]\} = \mathcal{Z}\{y(t)_{t=kh}\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{P_c(s) \cdot \frac{1}{s}\}_{t=kh}\}$$

und letztendlich

$$\frac{1}{z^k} = \frac{z-1}{z} = 1 - z^{-1}$$

$$P_d(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y[k]\}}{\mathcal{Z}\{u[k]\}} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{P_c(s) \cdot \frac{1}{s}\}_{t=kh}\}$$

1. Sprungantwort des Systems  $G_c(s)$  bestimmen.
2. Korrespondierende  $\mathcal{Z}$ -Transformierte der Sprungantwort bei Abtastung mit Intervall  $h$  ermitteln.
3. Division der resultierenden  $\mathcal{Z}$ -Transformierten durch die  $\mathcal{Z}$ -Transformierte des Einheitssprungs.

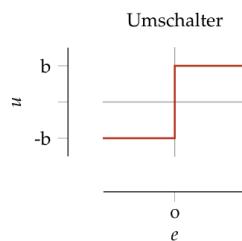


### ! Anhaltende Schwingung

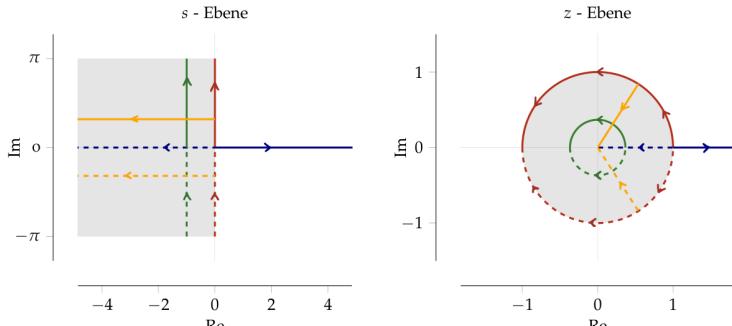
Die Bedingung für eine anhaltende Schwingung lautet in erster Näherung:

$$N(a) \cdot L(j\omega) = 1$$

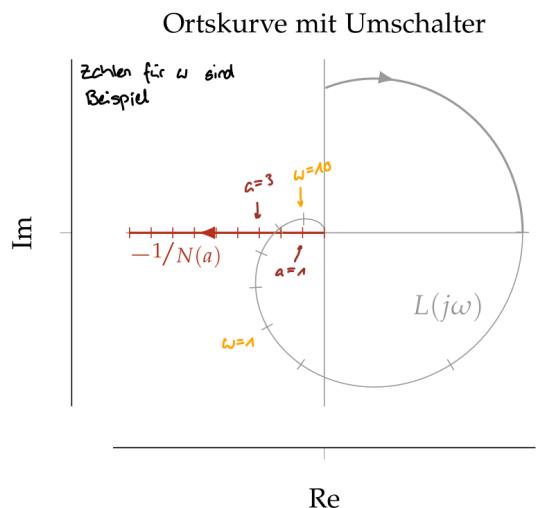
### Ohne Hysterese



### Relation z & s Ebene

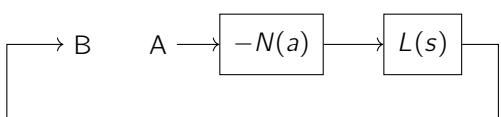


Es kann lediglich ein Streifen der Breite  $2\pi$  eindeutig abgebildet werden.



$$F(e) = \begin{cases} +b & \text{falls } e \geq 0 \\ -b & \text{falls } e < 0 \end{cases}$$

$$N(a) = M_1(a) e^{j\varphi_1(a)} = \frac{4b}{a\pi} e^{j0} = \frac{4b}{a\pi}$$

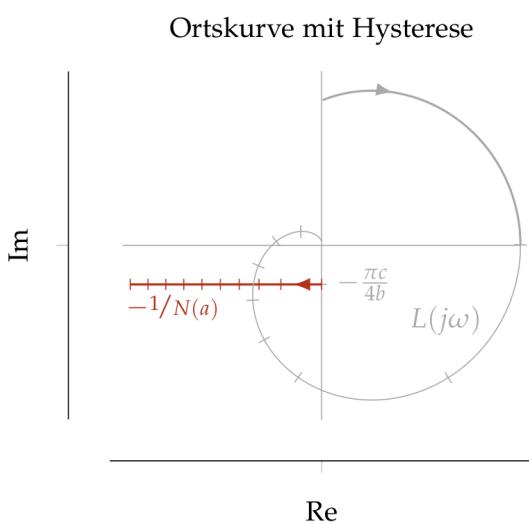
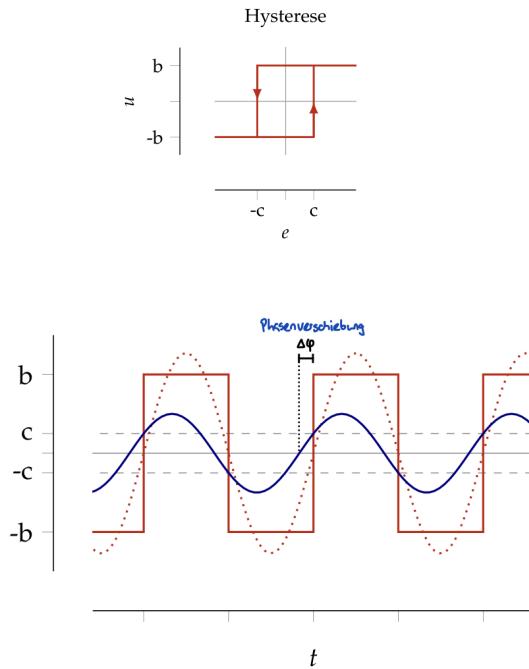


- $a$  : Amplitude des harmonischen Eingangssignals  
 $b$  : Amplitude Rechtecksignal Ausgang  
 $N(a)$  : Beschreibungsfunktion

Entsprechend für den Schnittpunkt auf der Ortskurve gilt  $-\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi c}{4b}$ !

$$N(a) = M_1(a)e^{j\varphi_1(a)} = \frac{4b}{a\pi}e^{j\alpha} = \frac{4b}{a\pi}(\cos(\alpha) - j\sin(\alpha))$$

## Mit Hysterese



Zugehörige Fourierreihe lautet

$$y(t) = \frac{4b}{\pi} \left( \sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t - 3\alpha) + \frac{1}{3} \sin(5\omega t - 5\alpha) + \dots \right)$$

und deren erste Harmonische

$$y_1(t) = \frac{4b}{\pi} \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{mit} \quad \sin(\alpha) = \frac{c}{a}$$

Unter der Voraussetzung dass  $a > c$  ist, ergibt sich die Beschreibungsfunktion  $N(\cdot)$  zu

$c$  : Schaltpunkte für die Hysterese  
 $\alpha$  : Phasenverschiebung

Es folgt mit  $\sin(\alpha) = c/a$ ;  $\cos(\alpha) = \sqrt{1^2 - \sin(\alpha)^2}$

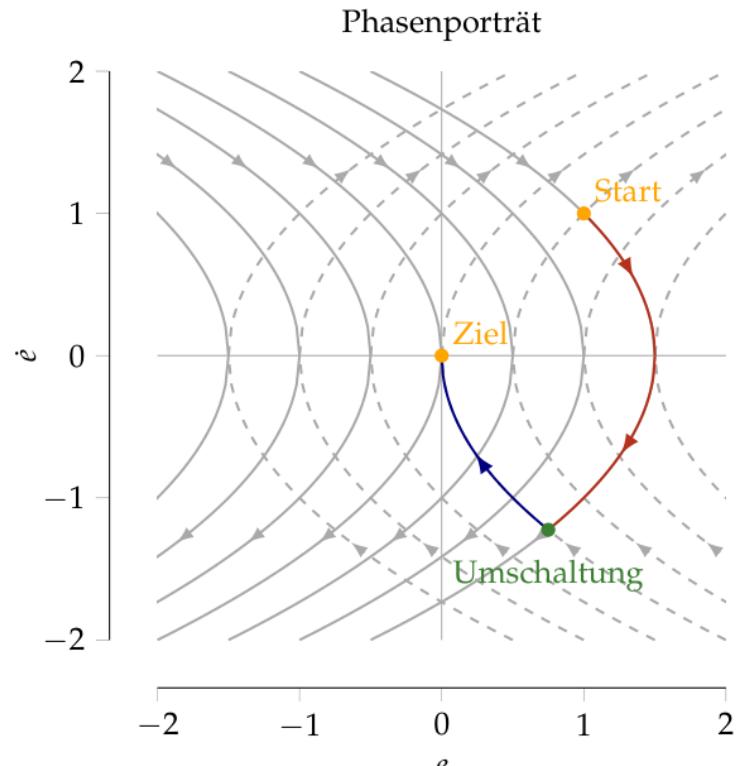
$$N(a) = \frac{4b}{a\pi} \left( \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} - j \frac{c}{a} \right)$$

Mit Kehrwert

$$\frac{1}{N(a)} = \frac{\pi\sqrt{a^2 - c^2}}{4b} + j \frac{\pi c}{4b}$$

## Zustandsraum

Nur kleine Info: anhand dem Zustandsraum können die "Regelumschaltungen" ermittelt werden. Folgend ist ein Phasenporträät, welches das Ziel in zwei Schritten erreicht.



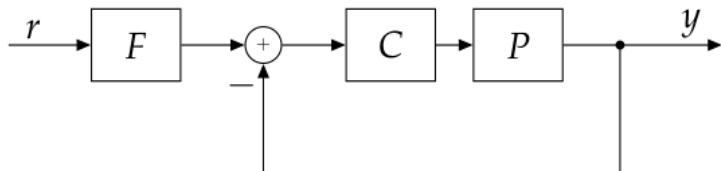
## Struktur

### ⚠ Steuerung & Stabilität

Steuerungen nehmen im Allgemeinen keinen Einfluss auf die Stabilität des Regelkreises → Solange **keine Größen aus dem Regelkreis** Einfluss nehmen!

## Steuerungen

### Vorfilter



$$G_{yr} = F \cdot \frac{PC}{1 + PC}$$

Mit dem idealen Ziel  $G_{yr} = 1$  ergibt sich

$$F \stackrel{!}{=} \frac{1 + PC}{PC} = 1 + (PC)^{-1}$$

Oft aber ist dies theoretisch möglich, **aber** die Realisation wird nicht realisierbar sein.

- **nicht kausal** – Totzeiten  $e^{-\tau s} \rightarrow$  Vorhersage (**Nicht Realisierbar**)  $e^{\tau s}$
- **instabil** – Inverse Funktionen, welche instabil werden  $L^{-1} = \frac{s+2}{s-1}$

### Flammen Pol-/ Nullstellenkürzung

Eine Kürzung, und damit Egalisierung, von Polen durch entsprechende Nullstellen ist nur dann zulässig, wenn diese stabil und hinreichend schnell sind. Ansonsten resultieren Signale welche entweder exponentiell anwachsen oder nur sehr langsam abklingen.

### Glühbirne Approximation

Als Lösung können stabile, kausale Approximationen  $P^\dagger(s) = P(0)^{-1}$  verwendet werden, welche die relevanten Eigenschaften hinreichend wiedergibt.

$$P = \frac{1}{1 + sT} e^{-\tau s} \quad P^\dagger = \frac{1 + sT}{1 + sT/N}$$

$$P = \frac{s - 1}{s + 2} \quad P^\dagger = \frac{s + 2}{s + 1}$$

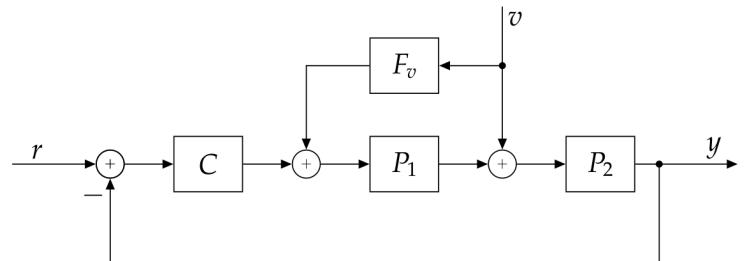
$$F_r \stackrel{!}{=} PF_u \quad F_u = P^{-1}F_r$$

### Flammen Anforderungen $F_r$

Damit  $F_u = P^{-1}F_r$  realisierbar ist, gelten folgende Kriterien:

1. zeitliche Verzögerung von  $F_r$  muss **mindestens so gross** wie von  $P$  sein ( $\rightsquigarrow$  Kausalität)
2.  $F_r$  &  $P$  müssen die **gleichen Nullstellen in der rechten Halbebene** ( $\rightsquigarrow$  Stabilität)
3. Polüberschuss von  $F_r$  mindestens so gross wie von  $P$  ( $\rightsquigarrow$  keine reine Differentiation)

### Störgrössenaufschaltung

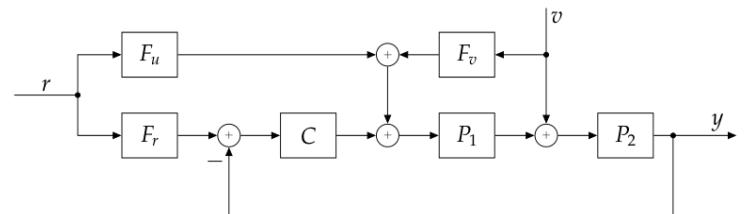


$$G_{yv} = \frac{P_2 \cdot (1 + P_1 F_v)}{1 + PC} = P_2 \underbrace{(1 + P_1 F_v)}_{\text{Steuerung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + PC}}_{\text{Regelung}}$$

$$1 + P_1 F_v \stackrel{!}{=} 0 \quad F_v = -P_1^{-1}$$

### Kombination

Mit allen Strukturen zusammen, ergibt sich folgender Regelkreis.



## MATLAB

### Vektoren

Vektoren werden mit [...] deklariert. Elemente werden Spaltenweise mit einem Leerschlag ' ' oder Komma , eingeteilt und mit einem Semikolon ; Reihenweise geteilt.

```
data = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]; % same as [1 2 3;4 5  
; 6;7 8 9];
```

### Glühbirne Grösse size

Mit size kann die Grösse einer Variable ermittelt werden. size gibt als Resultat ein 1x2 Vektor zurück

([Rows Columns])

```
>> a = 1
>> size(a)
1 1 % rows, columns
```

a = 1

[1] oder einfach 1

Die size-Funktion gibt auch bei einzelnen Werte eine Grösse aus, nämlich [1 1]

```
b = [1 2 3] % Linienvektor
```

[1 2 3]

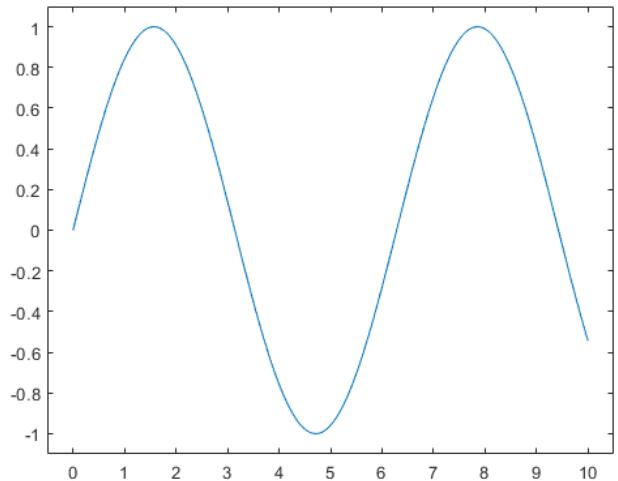
```
c = [2;3;4] % Spaltenvektor
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

### Slicing

Mit **Slicing** kann ein Teil einer Matrix **kopiert** werden und einer anderen Variable zugewiesen werden.

```
<matrix>(<rowStart>:<rowEnd>,<colStart>:<colEnd>)
```



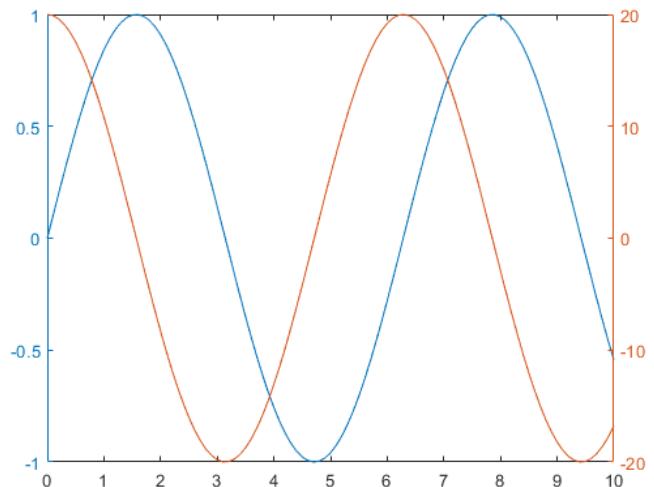
### XYY-Graph

Mit yyaxis kann die Y-Achse beim selben Plot mit left & right gewechselt werden.

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;

yyaxis left;
plot(t, sin(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);

yyaxis right;
plot(t, 20*cos(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-20.5 20.5]);
```



## Plotting

### Figure-Separierung

Mit figure(n) können mehrere Plot-Befehle in eigene Figuren geladen werden.

### XY-Graph

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;
y = sin(t);

plot(t,y);
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);
```

### Transferfunktion tf(...)

Mit dem Befehl tf(...) kann eine Transferfunktion deklariert werden mit Zähler- und Nenner-Zeilenvektoren.

```
sys = tf(numerator,denominator);
```

Die Transferfunktion kann in anderen Funktionen wiederverwendet werden, wie zum Beispiel `step` oder `bode`. Folgende Beispiele sind mit der `sys`-Transferfunktion (folgende Gleichung) gemacht.

$$G_{\text{sys}}(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 10}$$

```
sys = tf(4,[1 2 10]);
```

## PID-Regler `pidstd`

Filter design über SISO-Tool `controlSystemDesigner(sys)`, export des ausgelegten Reglers `C`

```
pidstd(C) % retrieval of standardform
```

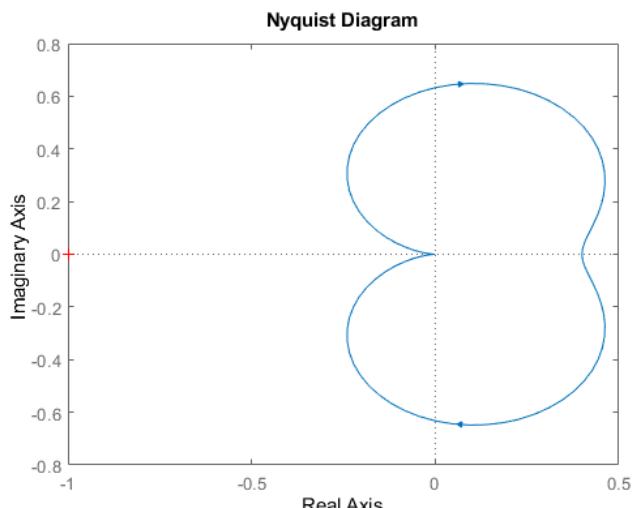
```
---
```

```
ans =
```

$$\frac{1}{Ti} \cdot \frac{1}{s} + K_p + \frac{Td}{s}$$

with `Kp = 64.8`, `Ti = 0.482`, `Td = 0.121`

Continuous-time PID controller in standard form  
Model Properties



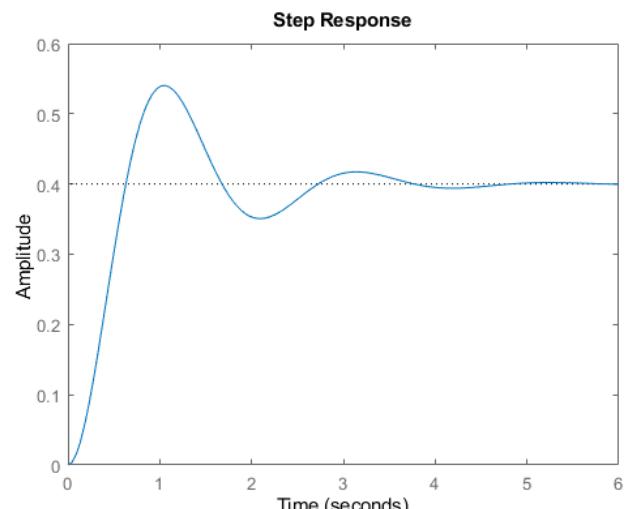
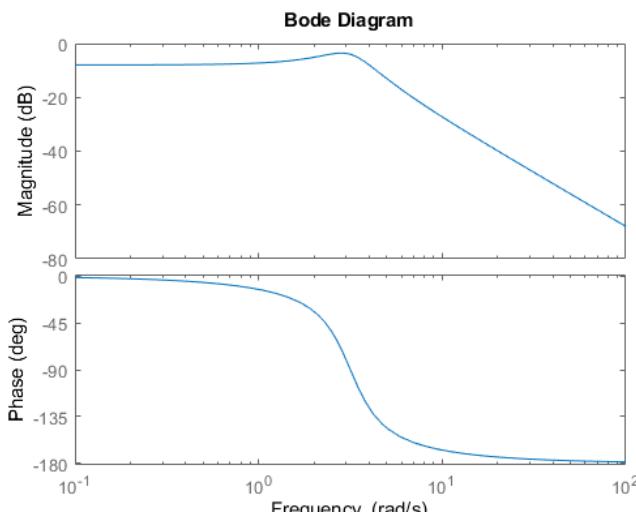
## Sprungantwort `step`

Mit `step(...)` kann eine Transferfunktion mit der Sprungfunktion  $\sigma$  verwendet werden. Damit

```
step(sys);
```

## Bode-Diagramm `bode`

```
bode(sys,[0.1,100]); % or bode(sys);
% grid on; to enable Grid in Plot
```



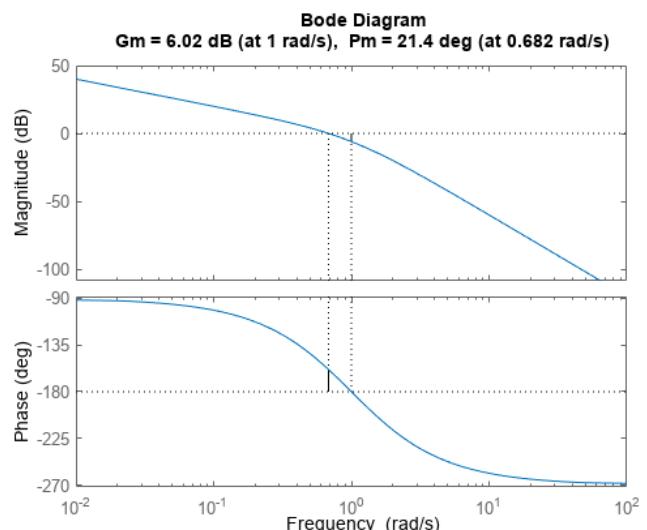
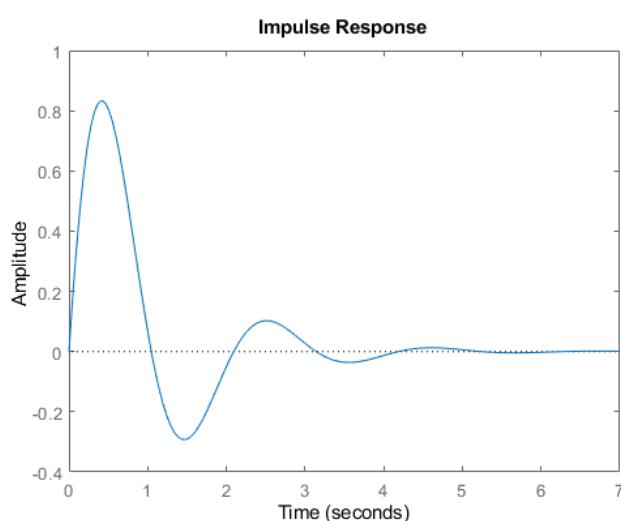
## Impulsantwort `impulse`

Mit `impulse(...)` kann die Impulsantwort der Transferfunktion ausgegeben werden.

## Nyquist-Diagramm `nyquist`

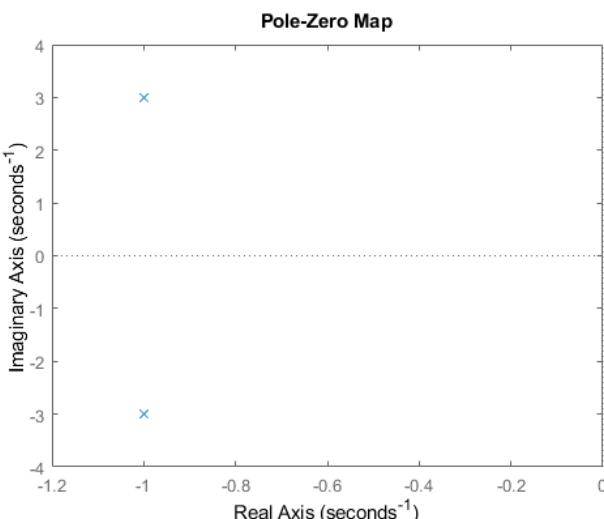
```
nyquist(sys)
```

```
impulse(sys);
```



### Pol-Nullstellen-Diagramm `pzmap`

```
pzmap(sys);
ylim([-4 4]); xlim([-1.2 0]);
```



### 🔥 MATLAB Zauber

Damit die Pol- und Nullstellen erkennbar sind, muss eventuell mit den Darstellungsgrenzen gespielt werden.

### Margin `margin(tf)`

Mit dem Befehl `margin(tf)` kann das Bode-Diagramm

```
margin(tf(1,[1 2 1 0]))
```

### Zustandsraumdarstellung `ss()`

Mit `ss(...)` können vier Matrizen  $A, B, C, D$  zu einer Zustandsraumdarstellung zusammengeführt werden.

```
A = [0 1;-5 -2];
B = [0;3];
C = [0 1];
D = 0;
Ts = 0.25;
sys = ss(A,B,C,D,Ts);
```

Es kann ebenfalls `bode`, `nyquist`, `step`, etc. angewendet werden, da die ZRD eine andere Darstellung der Übertragungsfunktion ist.

### Reglersimulator `Sisotool(tf(...))`

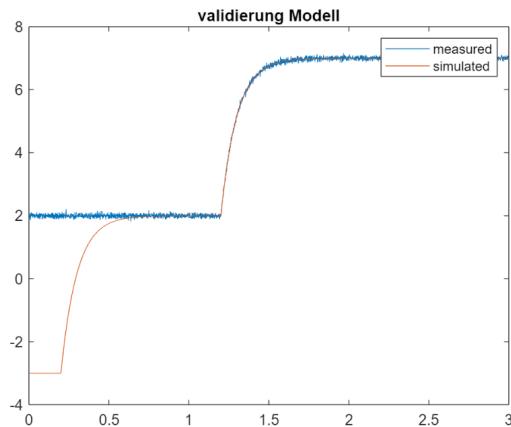
Mit `sisotool` kann ein Regler  $C$  basierend auf einem Prozess  $P$  ausgelegt werden.

```
P = tf(...);
sisotool(P); % Der Prozess wird angegeben
```

### Linear system simulation `lsim(sys,t,x)`

Simulation eines linearen Systems  $sys$  über eine dauer  $t$  mit der Eingangsgrösse  $x$

```
y_sim = lsim(G,u_mat,t_mat);
% offset for simulation adjustments
plot(t_mat,y_mat,t_mat,y_sim-3)
legend('measured','simulated')
```



- Modell & Parameter validieren (wenn nicht gut, zurück zu Punkt 1 mit neuem Modell)

## Linearität & Zeitinvarianzen

### LTI-Systeme

**!** Anforderung

Alle Kriterien *Zeitinvarianz*, *Verstärkungs* und *Überlagerungsprinzip* müssen für LTI-System gelten.

## Weitere Befehle

### `minreal`

Kürzt doppelte Nullstellen heraus algebraisch -> reduzieren auf Minimalform

## Anleitungen / Vorgehen

### Modellierung dynamischer Systeme

- Festlegung der Systemgrenzen sowie der Ein-/ Ausgangsgrößen.
- Identifikation der relevanten Energiespeicher und der zugehörigen 'Füllstandsgrößen'.
- Formulierung der Bilanzgleichungen für die Energiespeicher.

$$\frac{d}{dt} \text{Füllstand} = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}$$

- Formulierung der Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Energiespeichern.
- Identifikation der Systemparameter anhand von Spezifikationen oder Experimenten.
- Validierung des Modells durch Experimente. Je nach Resultat Iteration des Verfahrens.

### Stabilitätsbestimmung

- Offener Kreis bilden  $L = PC$
- Nyquist/Ortskurve zeichnen `nyquist(L)`
- Bodediagramm zeichnen `margin(L)`, `bode(L)`
- Stabilitätsbedingung anhand Nyquist-Kriterium prüfen

### Parameter Identifikation

- Hypothese über die Modellstruktur (Naturgesetze oder Black Box). Beispiel

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

- Gute Anregung (Impuls, Sprung, Rampe,...) auswählen und Experiment durchführen
- Messdaten  $y(k)$  speichern
- Mit  $(u(k), y(k))$  die Parameter  $(b, a_1, a_2)$  bestimmen

**Tipp**

Zustands-, Ein- oder Ausgangsgrößen in nichtlinearen Operationen ( $\cdot^2, \sin, \ln \dots$ ) in Differenzialgleichung deuten auf ein **nicht lineares** System.

|                                  |                 |
|----------------------------------|-----------------|
| $y = e^{-t} \cdot \dot{u} + 1$   | → zeitvariant   |
| $y = \int_0^t u(\tau) d\tau$     | → zeitinvariant |
| $y = \dot{u} + 1$                | → zeitinvariant |
| $y = \ddot{y} - u \cdot \dot{y}$ | → nicht linear  |
| $y = \sqrt{u^2 + 1}$             | → nicht linear  |
| $y = 2 \cdot u + 4$              | → linear        |

### Zeitinvarianz

System ist *zeitinvariant*, falls dessen Wirkungsweise nicht von der Zeit  $t$  abhängig ist. Das heißt, das System

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

liefert auf ein Signal  $x(t)$  mit einer Verzögerung  $a > 0$  ebenfalls ein verzögertes Ausgangssignal

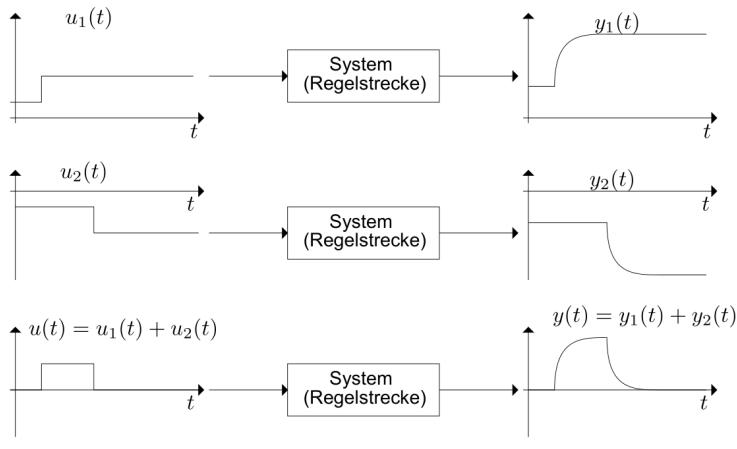
$$y(t+a) = H\{x(t+a)\}$$

### Linearität

Ein System ist *linear*, falls das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip gelten.

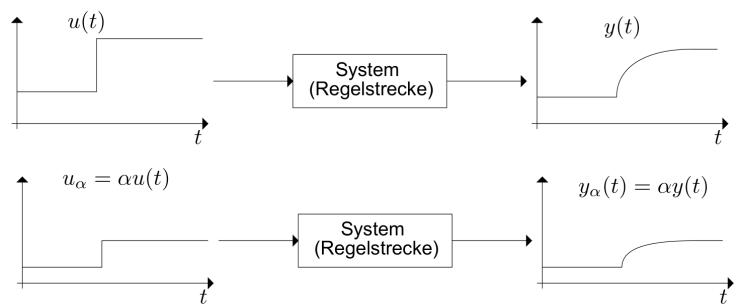
### Überlagerungsprinzip

Wenn  $y_1(t)$  die Antwort auf  $u_1(t)$  ist und  $y_2(t)$  die Antwort auf  $u_2(t)$  ist, so ist  $y_1(t) + y_2(t)$  die Antwort auf  $u_1(t) + u_2(t)$ .



### Verstärkungsprinzip

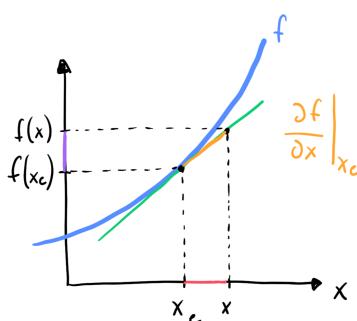
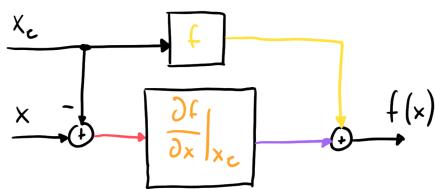
Wenn  $y(t)$  die Antwort auf  $u(t)$  ist,  $\alpha \cdot y(t)$  ist die Antwort auf  $\alpha \cdot u(t)$ .



### Linearisierung

#### Zustandsraumdarstellung

$$f(x) \approx f(x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} \cdot (x - x_e)$$



Ein nicht-lineares System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

kann an einem Arbeitspunkt linearisiert werden. Anhand eines Arbeitspunktes wird die Tangente mit folgender Gleichung berechnet.

$$f(x, u) \approx f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} \cdot (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} \cdot (u - u_e)$$

Das nicht-lineare System kann als Zustandsraum-Darstellung linearisiert werden. Folgende Gleichungen

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)}$$

ergeben die Linearisierung.

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv \quad w = Cz + Dv$$

mit  $z = x - x_e$ ,  $v = u - u_e$  und  $w = y - y_e$  mit  $y_e = h(x_e, u_e)$ .

#### Differentialgleichung

$$F(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0 \quad \text{mit } m \leq n$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_{(y_e, u_e)} z^{(n)} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_{(y_e, u_e)} \dot{z} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(y_e, u_e)} z + \\ \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_{(y_e, u_e)} v^{(m)} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_{(y_e, u_e)} \dot{v} + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{(y_e, u_e)} v = 0 \end{aligned}$$

mit  $z = y - y_e$  &  $v = u - u_e$ .

#### Vorgehen

##### Beispiel mit Differentialgleichung

$$M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

- Alle Elemente auf eine Seite bringen und Differentialgleichung gleich 0 setzen  $f(\dots) = F(\dots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 - M \cdot g}_{F(y^{(n)}, \dots, y, u^{(m)}, \dots, u)} = 0$$

$$\rightarrow f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

- Gleichgewichtslage bestimmen, Änderungsraten = 0  $\rightarrow h^{(n>0)} = 0$

$$\bar{h} = h_0 = \sqrt[3]{\frac{M \cdot g}{k}}$$

- Deltagrossen definieren  $\bar{h}^{(n>0)} = 0$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h - \bar{h} \\ \Delta \dot{h} &= \dot{h} - \dot{\bar{h}} = \dot{h} \\ \Delta \ddot{h} &= \ddot{h} - \ddot{\bar{h}} = \ddot{h}\end{aligned}$$

4. Linearisierung machen (Ableiten, dann Gleichgewichtslage einsetzen!)

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{h}} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \ddot{h} + \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \dot{h} + \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta h = 0$$

5. linearisierte Differentialgleichung aufbauen

$$M \Delta \ddot{h} + \alpha \Delta \dot{h} + 3k \bar{h}^2 = 0$$

### Vorgehen wie in Frankreich

Beispiel mit Differentialgleichung

$$M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

1. Alle Elemente auf eine Seite bringen und Differentialgleichung gleich 0 setzen  $f(\dots) = F(\dots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3}_F(y^{(n)}, \dots, y, u^{(m)}, \dots, u) - M \cdot g = 0$$

$$\rightarrow f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

2. Ableitungen der Funktion  $f$  nach allen Variablen  $\rightarrow$  Pattern Matching

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{h}} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} = \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial h} = 3kh^2$$

3. Deltagrössen definieren  $\bar{h}^{(n>0)} = 0$

$$\begin{aligned}\Delta h &= h - \bar{h} \\ \Delta \dot{h} &= \dot{h} - \dot{\bar{h}} = \dot{h} \\ \Delta \ddot{h} &= \ddot{h} - \ddot{\bar{h}} = \ddot{h}\end{aligned}$$

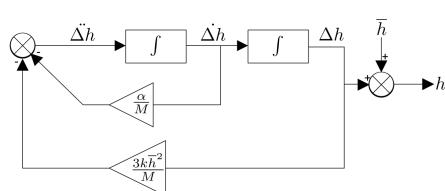
4. Linearisierung machen (Ableiten, dann Gleichgewichtslage einsetzen!)

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{h}} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \ddot{h} + \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \dot{h} + \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta h = 0$$

5. linearisierte Differentialgleichung aufbauen

$$M \Delta \ddot{h} + \alpha \Delta \dot{h} + 3k \bar{h}^2 = 0$$

6. Wirkungsplan



## Übertragungselemente

### Elementare Glieder

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= b_0 \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}\end{aligned}$$

$m$  : Nullstellen  $z_1 \dots m$

$n$  : Polstellen  $p_1 \dots n$

### Elementare Funktionen

Werden für die Beschreibung beliebiger LTI-Systeme verwendet. Mit Parametern  $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$

| Typ                     | System  | Übertragungsfunktion  |
|-------------------------|---|---|
| Integrator              | $\dot{y} = u$   | $\frac{1}{s}$   |
| Differentiator          | $y = \dot{u}$   | $s$   |
| Erste Ordnung           | $\dot{y} + ay = u$                                    | $\frac{1}{s+a}$   |
| Doppelintegrator        | $\ddot{y} = u$  | $\frac{1}{s^2}$   |
| Gedämpfter Oszillatator | $\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u$ | $\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$                             |
| Zustandsdarstellung     | $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$                      | $C(sI - A)^{-1}B + D$   |
| PID Regler              | $y = k_p u + k_d \dot{u} + k_i \int u$                | $k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$   |
| Totzeit                 | $y(t) = u(t - \tau)$                                  | $e^{-\tau s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+s^{\frac{1}{n}})^n}$ |

$G(s) = k$  : konstanter Faktor

$G(s) = s + a$  : einfache reelle Nullstelle

$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$  : konj. komplexe Nullstellen ( $\zeta \leq 1$ )

$G(s) = \frac{1}{s+a}$  : einfacher reller Pol

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$  : konj. komplexe Pole ( $\zeta \leq 1$ )

$G(s) = e^{-\tau s}$  : Totzeitglied  $\tau > 0$

Die zugehörigen Nullstellen

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{konj. komplex} \end{cases}$$

### Polüberschuss $n_{pe}$

Der Polüberschuss oder *relativer Grad* beschreibt die Differenz zwischen der Pol- und Nullstellen-Ordnung.

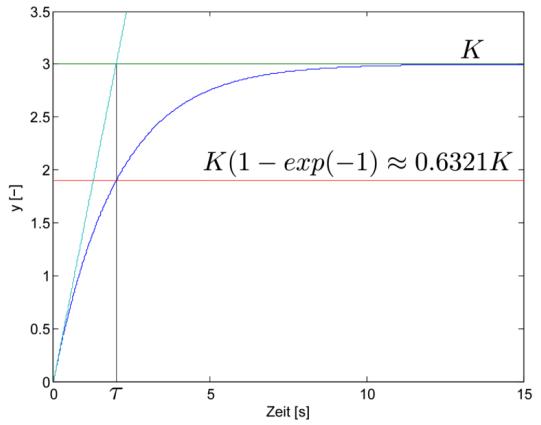
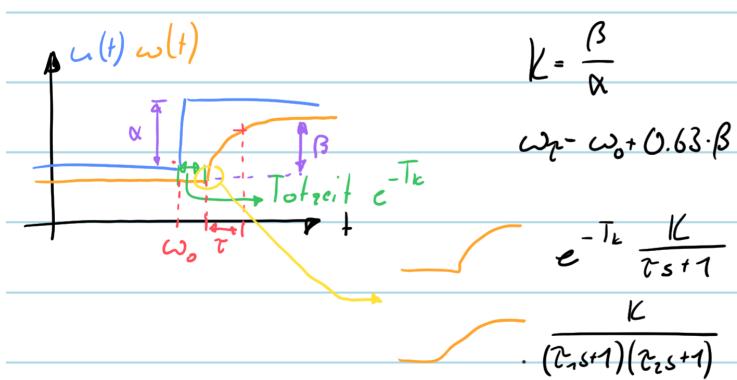
$$n_{pe} = n - m$$

$n_{pe} \geq 0$  proper/gebrochenrational

$n_{pe} > 0$  strictly proper/echt gebrochenrational

$$y = \begin{cases} \frac{\delta(t)e^{st} + \dots}{s^2} & \text{falls } n_{pe} \leq -2 \quad \text{bsp } s^2 \\ \frac{\delta(t)e^{st} + \dots}{s} & \text{falls } n_{pe} = -1 \\ \frac{\sigma(t)e^{st} + \dots}{1} & \text{falls } n_{pe} = 0 \\ \frac{t \cdot \sigma(t)e^{st} + \dots}{1/s} & \text{falls } n_{pe} = 1 \\ \frac{\delta(t)e^{st} + \dots}{1/s^2} & \text{falls } n_{pe} = n \geq 2 \end{cases}$$

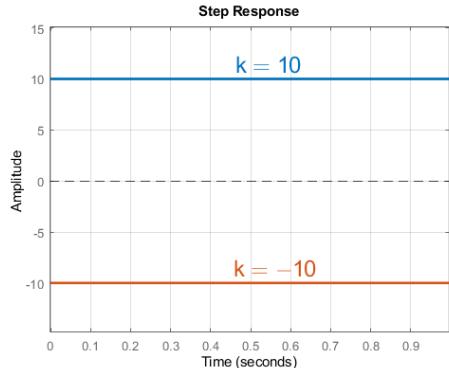
## Bezeichnete Glieder



## PT2-Glied

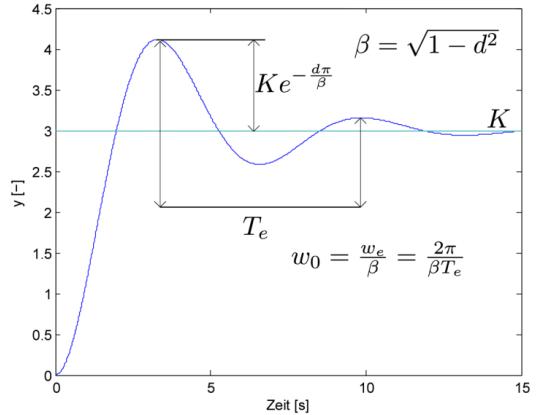
### P-Glied

$$G(s) = k \quad \text{konstanter Faktor}$$



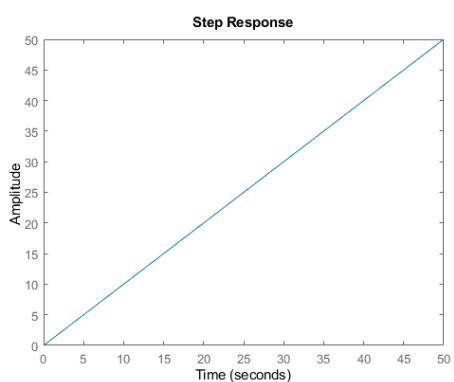
$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Sprungantwort &  $d \hat{=} \zeta$



### I-Glied

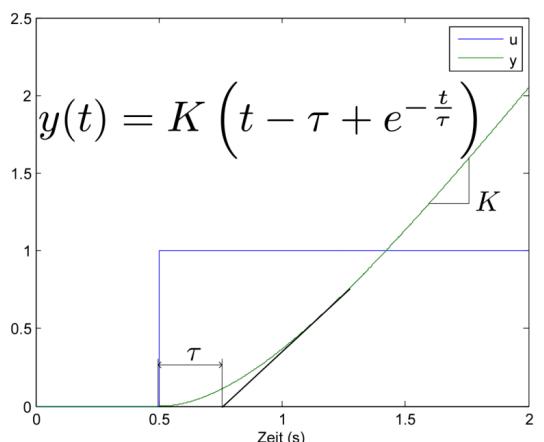
$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Integrator}$$



## IT-Glied

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

Sprungantwort



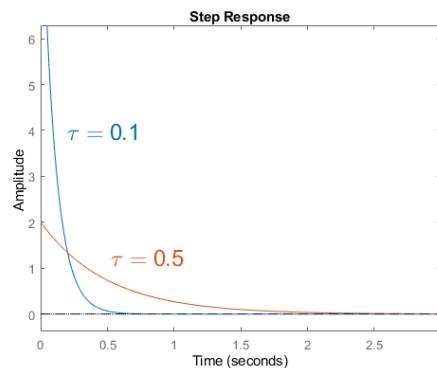
### PT1-Glied

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Sprungantwort

### DT1-Glied

$$G(s) = \frac{s}{1 + sT} \quad \text{Gefilterter Differentiator}$$



SW0 GRUNDELEMENTE 7

REELLER POL:  $\dot{y} + ay = u$ .

$$G = \frac{1}{s+a}$$

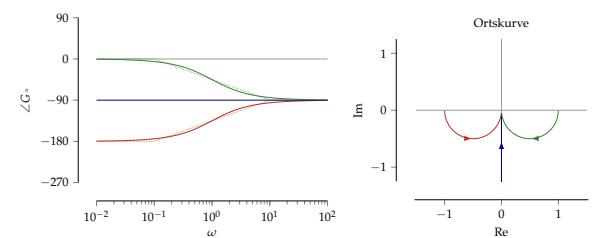
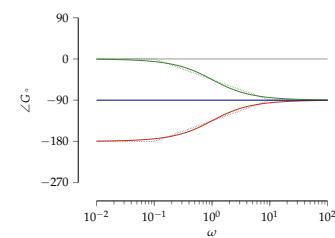
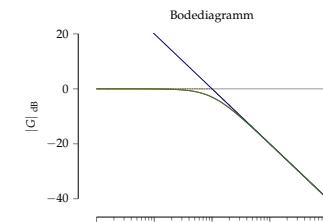
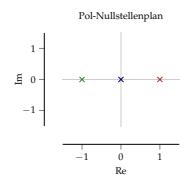
$$\omega_g = |a| \Rightarrow a = -1 \quad a = 0 \quad a = +1$$

$$\angle G(j\omega_g) = -45^\circ / -135^\circ$$

$$|G(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$$

$$\omega \ll \omega_g : |G| \approx \frac{1}{|a|}$$

$$\omega_g \ll \omega : |G| \propto -20 \text{ dB/Dek.}$$

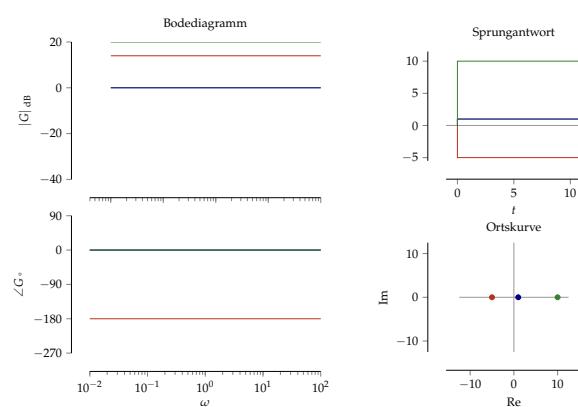


6 RGT - HS23

KONSTANTER FAKTOR:  $y = ku$ .

$G = k$

$k = -5 \quad k = 1 \quad k = 10$



KONJUGIERT KOMPLEXES POLPAAR:  $\ddot{y} + 2a\dot{y} + by = u$ .

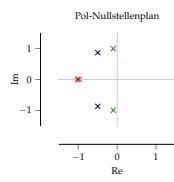
$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$\omega_0 = 1$   $\zeta = 1$   $\zeta = 0.5$   $\zeta = 0.1$

$\angle G(j\omega_0) = -90^\circ$

$\omega \ll \omega_0$  :  $|G| \approx 1/\omega_0^2$   
 $\omega_0 \ll \omega$  :  $|G| \propto -40 \text{ dB/Dek.}$

$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  relatives Überschissen  $\frac{\hat{h}}{h_\infty}$



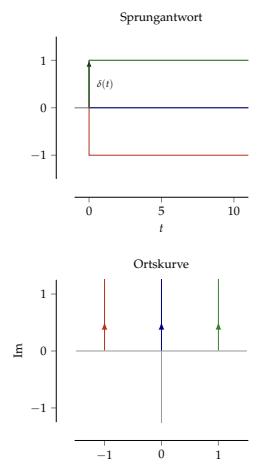
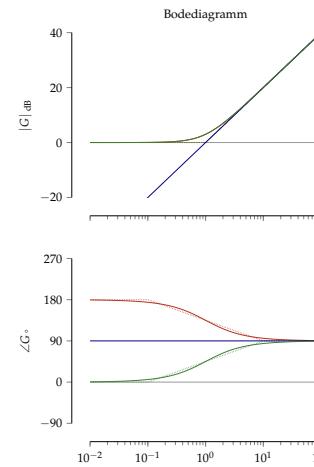
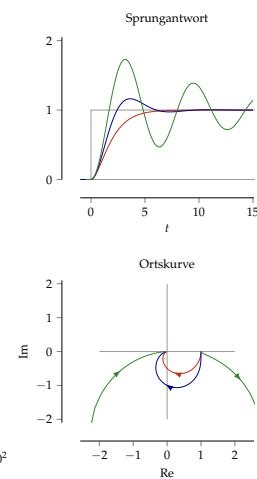
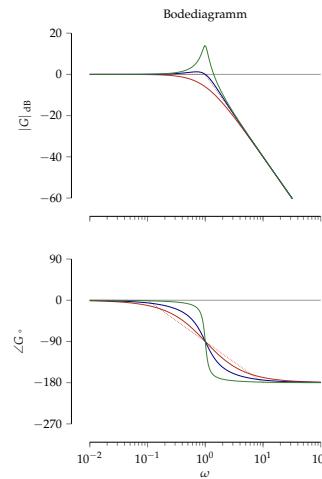
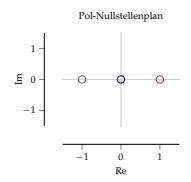
REELLE NULLSTELLE:  $y = \dot{u} + au$ .

$$G = s + a$$

$\omega_g = |a| \Rightarrow a = -1 \quad a = 0 \quad a = +1$

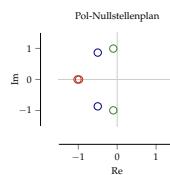
$\angle G(j\omega_g) = +45^\circ / 135^\circ$

$\omega \ll \omega_g$  :  $|G(j\omega_g)| = \sqrt{2} \approx +3 \text{ dB}$   
 $\omega_g \ll \omega$  :  $|G| \approx |a|$   
 $|G| \propto +20 \text{ dB/Dek.}$



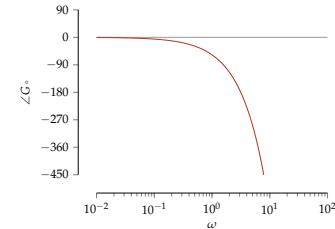
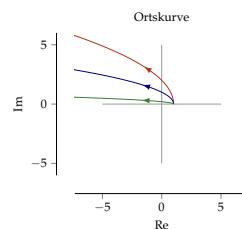
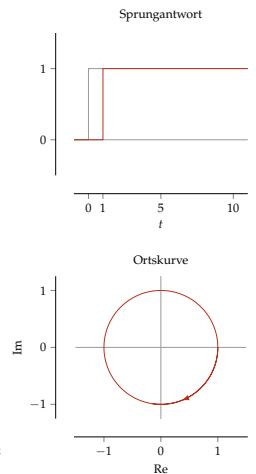
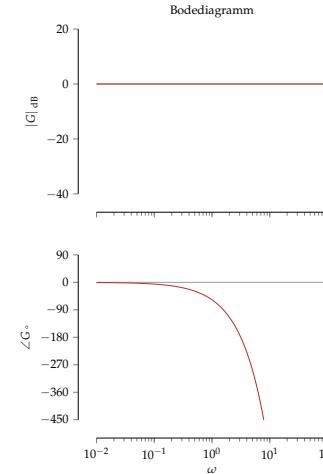
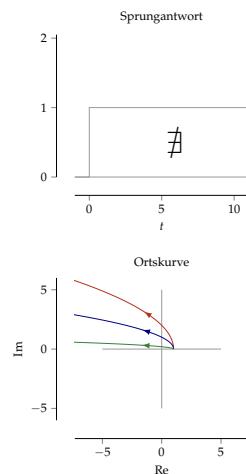
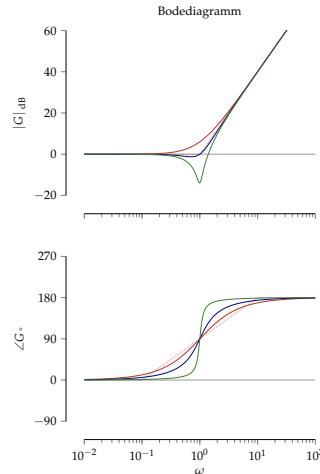
KONJUGIERT KOMPLEXES NULLSTELLENPAAR :  $y = \ddot{u} + a\dot{u} + bu$ .

$$\begin{aligned}s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 & \quad \omega_0 = 1 \quad \zeta = 1 \quad \zeta = 0.5 \quad \zeta = 0.1 \\ \omega \ll \omega_0 : & \quad |G(j\omega)| = \omega_0^2 \\ \omega_0 \ll \omega : & \quad |G| \propto +40 \text{ dB/Dek.}\end{aligned}$$



TOTZEIT, VERZÖGERUNG :  $y(t) = u(t - \tau)$ .

$$\begin{aligned}G &= e^{-s\tau} \quad \tau > 0 \\ \angle G(j\omega) &= -\omega\tau \\ |G| &= 1 = 0 \text{ dB} \\ e^{-s\tau} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s\frac{\tau}{n})^n\end{aligned}$$



## VERKETTUNG – BEISPIEL.

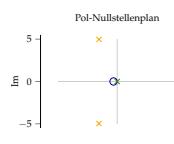
$$G = \frac{10s+1}{s^3+s^2+25s} = 10 \cdot \underbrace{(s+0.1)}_{G_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{G_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+s+25}}_{G_3}$$

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = (s+0.1)$$

$$G_3 = \frac{1}{s}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2+s+25} = \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{mit } \omega_0 = 5, \zeta = 0.1$$

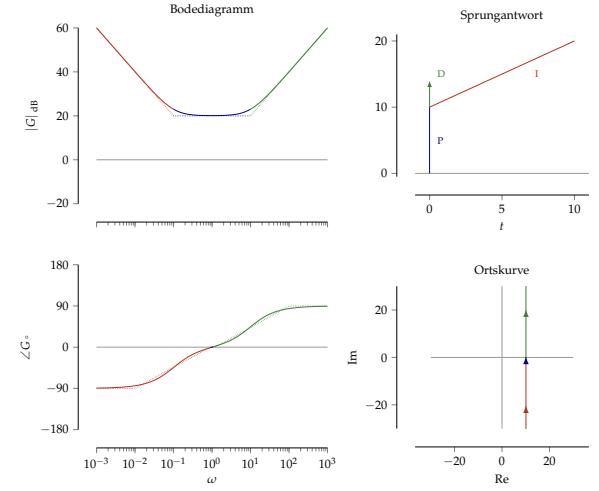
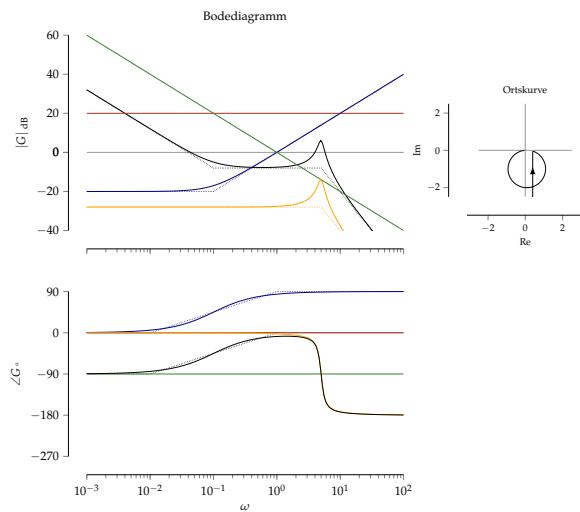
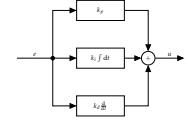


## ADDITION – BEISPIEL PID.

$$u = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de}{dt}$$

$$u = k_p e + k_i \frac{1}{s} e + k_d s e$$

$$G = \frac{u}{e} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} = k \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s}$$

Graphen für  $k = 1, T_1 = 0.1, T_2 = 10$  sowie  $k_p = 10.1, k_i = 1, k_d = 1$ 

## Anderes Zeug

Betrag von Zeitverzögerungen sind immer = 1, da die Phase keine Rolle spielt.

$$|PC| = 1 \Rightarrow |k \cdot e^{-0.2s} \frac{10}{s}|$$

## Glossar

- **SISO** – Single Input Single Output
- **MIMO** – Multiple Input Multiple Output