Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-3

[[**Análisis y Modelamiento Numérico I - CM4F1**]
[**Los profesores**] UNI, 03 de febrero de 2022

Práctica Calificada 1

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) Un número racional puede tener un número finito de dígitos en una base e infinitos en otra. [1 ptos]

   b) El número 1/100 puede representarse como un número de máquina en una computadora binaria. [1 ptos]

   c) Un sistema de punto flotante tiene una representación independiente para el 0. [1 ptos]

   d) Si la representación de un número en punto flotante con t cifras significativas y base β es

   $$x = (-1)^s \,(a_1 a_2 \cdots a_t)_\beta \, \beta^{e-t},$$

   denotando por $m = (a_1 a_2 \cdots a_t)_\beta$. Entonces, la condición $m \geq \beta^{t-1}$ permite que sus representaciones en punto flotante sean únicas. [2 ptos]

Solución:

a) (V) Considere 1/3 que tiene representación 0,1 en la base 3 y representación $0{,}33\cdots$ en base 10.

b) (F) Aunque en base 10 tiene representación finita igual a 0,01, sin embargo en base 2 tiene la representación infinita

$$\frac{1}{100} = 0{,}000000\,101\,000\,1111\,0101\cdots$$

Por lo tanto, no puede representarse en una máquina binaria.

c) (V)

d) (V) La condición evita que $a_1 = 0$, lo que a su vez no permite que haya ceros al inicio de la representación y pueda coincidir con una representación que tenga ceros en la cola, ya que el punto es flotante. Por ejemplo, sea el sistema de punto flotante $F(\beta = 10, t = 4, L = -1, U = 4)$, el 1 admite 4 representaciones

$$0{,}0001 \times 10^4\,;\;\; 0{,}0010 \times 10^3\,;\;\; 0{,}0100 \times 10^2\,;\;\; 0{,}1000 \times 10^1\,.$$

2. Probar que que todo número real puede ser aproximado por un número con una representación posicional finita. Es decir

   $$\forall \epsilon > 0,\ \forall x_\beta \in \mathbb{R},\ \exists y_\beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } |y_\beta - x_\beta| < \epsilon,$$

   donde β es la base e y_β tiene una representación posicional finita. [5 ptos]

Solución: Esto se deduce directamente de la densidad de los números racionales. Por ejemplo, consideremos un número positivo con un número finito o infinito de dígitos:

$$x_\beta = x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0 \, , \, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m} \cdots$$

Truncamos en $r \geq 1$ dígitos, obteniendo

$$x_\beta^{(l)} = \sum_{k=0}^{r-1} x_{n-k} \beta^{n-k},$$

claramente, $x_\beta^{(l)} \leq x_\beta$, además podemos obtener un siguiente número sumando una unidad a la posición r, obteniendo

$$x_\beta^{(u)} = x_\beta^{(l)} + 1 \times \beta^{n-r+1}.$$

Tomando $y_\beta \in \{x_\beta^{(l)}, x_\beta^{(u)}\}$, obtenemos

$$|y_\beta - x_\beta| \leq x_\beta^{(u)} - x_\beta^{(l)} = \beta^{n-r+1}.$$

Finalmente, tomamos r suficientemente grande tal que $\beta^{n-r+1} < \epsilon$. Por tanto, hemos construido y_β que depende de ϵ.

3. Probar que el cardinal del sistema de números de punto flotante normalizado $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ es

$$\text{card}(\mathbb{F}) = 2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1.$$

En particular, para $\mathbb{F}(10, 3, -2, 3)$, calcular x_{min}, x_{max}, ϵ_M. [5 ptos]

Solución:

a) Los factores de la expresión para el cardinal de los números de punto flotante

$$x = (-1)^s \, (0.a_1 a_2 \cdots a_t)_\beta \, \beta^e,$$

se explican de la siguiente manera:

- 2: se duplica las opciones por el signo.
- $(\beta - 1)$: número de valores posibles distintos de cero del dígito más significativo de la mantisa.
- β: número de valores posibles por cada uno de los $t-1$ dígitos restantes de la mantisa.
- $U - L + 1$: número de valores posibles del exponente.
- 1: para incluir al 0.

b) Dado el sistema $\mathbb{F}(10, 3, -2, 3)$, se tiene

- El valor mínimo:

$$\begin{aligned} x_{min} = (0{,}10 \cdots 0) \times \beta^L &= 1 \times \beta^{-1} \times \beta^L \\ &= \beta^{L-1} = 10^{-3}. \end{aligned}$$

- El valor máximo:

$$\begin{aligned} x_{max} &= (1 - 0{,}0 \cdots 0 \underbrace{\ 1\ }_{\text{posicion } t}) \times \beta^U \\ &= (1 - \beta^{-t}) \times \beta^U = (1 - 10^{-3}) \times 10^3 = 999. \end{aligned}$$

- El épsilon de máquina: Se considera valores despreciables a los números desde

$$0{,}0\cdots0\underbrace{1}_{t}\ \text{ hasta }\ 0{,}0\cdots0\underbrace{(\beta-1)}_{t}.$$

Por tanto el primer valor no despreciable sería

$$\epsilon_M = 0{,}0\cdots0\underbrace{1}_{t-1}0 = \beta^{1-t} = 10^{-2}.$$

4. Sea $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Muestre cómo evitar la pérdida de significancia al calcular $f(x)$ cuando x es negativa. (Sug. Calcule primero $f(-x)$) [5 ptos]

Solución: Observamos que para valores negativos grandes de x, la forma original de la función f conduce a fenómenos de cancelación drásticos, aproximadamente "$f(x) \approx \ln(x-x) = \ln(0)$". Por tanto, modificamos la forma de f, para obtener una segunda alternativa que nos proporcionará resultados precisos:

$$f(x) = \ln\left(\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) \approx \ln\left(-\frac{1}{2x}\right).$$

```python
# Solucion 4
# Jonathan Munguia

import numpy as np
from math import log, sqrt

x=-10**(8)

g1 = np.log(x + (sqrt(x**2 + 1)))
g2 = np.log(1/(sqrt(x**2 + 1) - x))

print("Funcion del problema g1(",x,")=",g1)
print("Funcion del problema g2(",x,")=",g2)
```

El resultado obtenido es:

$$g_1(-100000000) = -\text{ínf}$$
$$g_2(-100000000) = -19{,}11382792451231.$$

Lo que muestra una pérdida de significancia en los cálculos.