Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2024-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, M. Quiñones.]

Práctica Calificada 3
Duración: 110 minutos.

SOLUCIONARIO

---

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   a) If $\|G\|_2 < 1$ and $\|G\|_1 > 1$ then the method $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$, converges. (1pts)

   b) If A is a symmetric matrix then $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$. (1pts)

   c) If the iterative method $x^{(k+1)} = \frac{1}{2}(I - Q^{-1}A)x^{(k)} + \frac{1}{2}x^{(k-1)} + c$ converges to x, then $Ax = Qc$. (1pts)

   d) If A is a upper triangular square matrix then Jacobi's method and Gauss Seidel's method are equal. (1pts)

   Solución.

   a) True, just find a norm that satisfies the inequality.

   b) True, by definition.

   c) True, In the limit we get $x = \frac{1}{2}x - Q^{-1}Ax + \frac{1}{2}x + b \implies Ax = Qb$.

   d) True. The Gauss-Seidel method has the form $(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$, and the Jacobi method has the form $Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$, both are same if $L = 0$.

   □

2. Determine la descomposición SVD de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   además calcule el número de condición de la matriz B en $\|\cdot\|_2$ usando los valores singulares de la matriz B.

   Solución.
   Iniciamos calculando:

$$A = B^T B = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

   Se calculan los autovalores de la matriz A:

$$\lambda_1 = 25, \quad \lambda_2 = 3$$

   Ahora se calculan los valores singulares de la matriz B:

$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Se calculan los autovectores asociados a los autovalores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Luego, se obtienen las columnas de la matriz V normalizando los vectores v_1 y v_2, es decir:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos las columnas de la matriz U:

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Para calcular $u_3 = [x,\, y,\, z]$, desde que $B = U\Sigma V^T$, entonces: $B^T U = V\Sigma^T$, luego:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & y \\ \frac{\sqrt{8}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo resulta:

$$x = 7z, \quad y = -5z$$

debe de cumplirse:

$$\|u_3\|_2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{5\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{7}{5\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

por tanto, la matriz U resulta:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{5\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{8}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{5\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que:

$$B = U\Sigma V^T.$$

Para calcular el número de condición de la matriz, se sabe que:

$$K(B) = \|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

□

3. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   a) ¿El método de Gauss Seidel converge a la solución del sistema de ecuaciones?
   b) Implemente utilizando Python, el método iterativo Gauss - Seidel para el sistema presentado anteriormente.
   c) Si $n = 50$ verifique que $x^{(50)} = 0{,}200000$; $y^{(50)} = -0{,}266666$.

Solución.

   a) Si, el método converge porque la matriz del sistema es diagonalmente dominante.
   b)

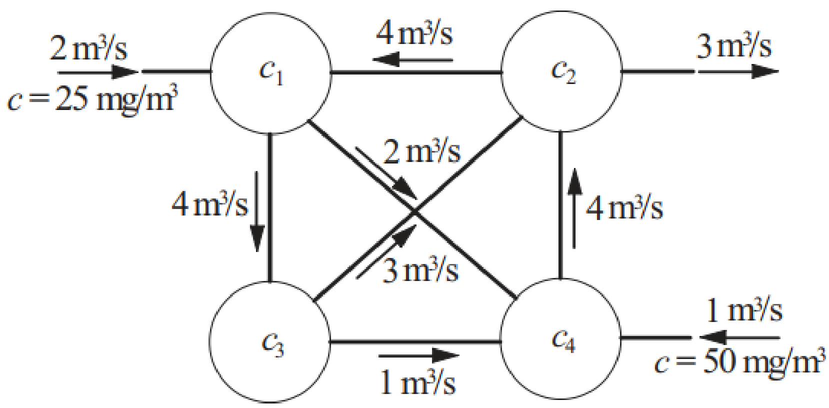
```
# Matriz A y vector b
A = [
[7, -6],
[-8, 9]
]

b = [3, -4]

# Valores iniciales
x0 = 0
```

```
y0 = 0

# Tolerancia y número máximo de iteraciones
tolerancia = 1e-5

max_iter = int(input("Ingrese el número de iteraciones: "))

# Iteración de Gauss-Seidel
for iteracion in range(max_iter):
x1 = (b[0] - A[0][1] * y0) / A[0][0]
y1 = (b[1] - A[1][0] * x1) / A[1][1]

# Verificar la convergencia
if abs(x1 - x0) < tolerancia and abs(y1 - y0) < tolerancia:
print(f"Iteracion {iteracion}")
break

x0 = x1
y0 = y1

print(f'Solución: x = {x1:.6f}, y = {y1:.6f}')
```

c)
```
Ingrese el número de iteraciones: 50
Solución: x = 0.200000, y = -0.266666
```

□

4. Cuatro tanques de mezcla están conectados por tuberías, de manera que el sistema está en equilibrio, es decir la cantidad de mezcla que entra en cada tanque es igual a la que sale.



a) Formule el problema como un sistema lineal de ecuaciones.

b) Aplique un método iterativo, justifique la elección del método y de la aproximación inicial.

c) Estime la concentración en cada tanque.

Solución.

a) Planteamos el sistema de ecuaciones, sea c_i la concentración en cada tanque, y como el sistema está en equilibrio entonces la cantidad de mezcla que entra es igual a la que sale de cada tanque:

$$\begin{aligned}
\text{sale de } c_1 &: 6c_1 = 50 + 4c_2 : \text{entra a } c_1 \\
\text{sale de } c_2 &: 7c_2 = 3c_3 + 4c_4 : \text{entra a } c_2 \\
\text{sale de } c_3 &: 4c_3 = 4c_1 : \text{entra a } c_3 \\
\text{sale de } c_4 &: 4c_4 = 50 + 2c_1 + c_3 : \text{entra a } c_4
\end{aligned}$$

asi el sistema tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

b) Vemos que la matriz del sistema no es simétrica, ni diagonalmente dominante, asi que examinamos el radio espectral de la matriz de iteración de cada método

```
MGaussSeidel=(np.linalg.inv(D-L))@U
MJacobi=(np.linalg.inv(D))@(L+U)
MRichardson=np.eye(4)-A
l,v = np.linalg.eig(MRichardson)
print(np.max(np.linalg.norm(l,2)))
l,v = np.linalg.eig(MGaussSeidel)
print(np.max(np.linalg.norm(l,2)))
l,v = np.linalg.eig(MJacobi)
print(np.max(np.linalg.norm(l,2)))
```

```
11.339710065914028
1.0690449676496976
1.3769064079816313
```

El método de Gauss-Seidel tiene un radio espectral próximo a 1, por lo que empleamos dicho método con vector inicial $x_0 = [30, 30, 30, 30]$ por ser un valor comprendido entre los valores conocidos de la concentración, 25 y 50 respectivamente.

```
def metodoGaussSeidel(A,b,y0=None):
    M = 100
    tol = 1e-5
    x = np.zeros_like(b)
    if y0 is None:
        y = np.zeros_like(b)
    else:
        y = y0
    n = len(b)
    for k in range(M):
        for i in range(n):
            x[i,0] =  ( (b[i,0] - np.dot(y[i+1:n,0] , A[i,i+1:n])-np.dot(x[0:i,0] , A[i,0:i])) )/A[i,i]
        error = np.linalg.norm(x-y,np.inf)
        if (error<tol):
            break
        y[:,:] = x[:,:]
    return (x,k)
A= np.array([[6,-4,0,0],[0,7,-3,-4],[-4,0,4,0],[-2,0,-1,4]],dtype=float)
b = np.array([[50],[0],[0],[50]],dtype=float)
x = np.array([[30],[30],[30],[30]],dtype=float)
(x,k)= metodoGaussSeidel(A,b,x)
print(x)
print(k)
```

```
[[30.55554556]
 [33.33331834]
 [30.55554556]
 [35.41665917]]
44
```

c) finalmente los valores resultantes son $c_1 = 30{,}55551874$, $c_2 = 33{,}33328706$, $c_3 = 30{,}55551152$, $c_4 = 35{,}41663157$.

□

5. Trabajo de laboratorio (4pts)

UNI, 23 de octubre de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX