Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 02

---

1. **Represente en el estandar IEEE 754 de simple precisión el valor de -36 y -24.5. Luego, realice la suma de los números representados en IEEE 754. Muestre todos los pasos.**

2. **Represente en el estandar IEEE 754 de simple precisión el valor de 10.25 y 6.75. Luego, realice la suma de los números representados en IEEE 754. Muestre todos los pasos.**

3. **Determine el Landau de las funciones siguientes:**

   a) $\frac{1}{n^2}$. *b)* $\cos(n)$. *c)* $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$. *d)* $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

4. **La pérdida de cifras significativas se puede evitar reordenando los cálculos. Determine en los siguientes casos una forma equivalente que evite la pérdida de cifras significativas para valores indicados de x.**

   a) $\ln(x+1)-\ln(x)$. *b)* $\sqrt{x^2+1}-x$. *c)* $1-\cos(x)$. *d)* $\sin(x)-x$.

5. **Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por**

   a) $f(x)=\frac{x}{4}$, **con** $n=1$.
   b) $f(x)=\sqrt{x}$, **con** $n=1$.
   c) $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$, **con** $n=2$.

   Determine el número de condición.

6. **Muestre que la siguiente sucesión:**

$$I_0=\log\left(\frac{6}{5}\right), \quad I_k+5I_{k-1}=\frac{1}{k},\ k=1,2,3,\ldots$$

   no es apropiada para aproximar la integral:

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{5+x}\,dx,$$

   a pesar que funciona en aritmética infinita.

7. **Construya una matriz A de tamaño 2×2 que tenga como autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y que:**

$$\|A\|_\infty \geq 1000, \quad \|A\|_1 \geq 1000, \quad \|A\|_2 \geq 1000.$$

Estime el número de condición de la matriz y comente sobre el comportamiento de las soluciones del sistema $Ax = b + \varepsilon$ para diferentes vectores ε.

8. **Considera el sistema de ecuaciones lineales:**

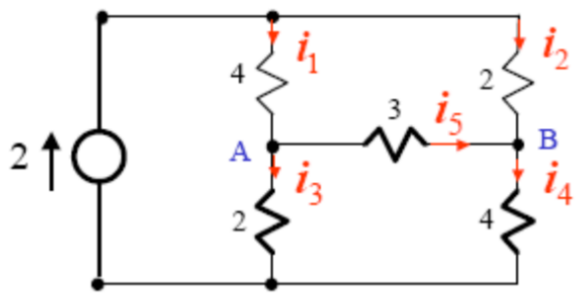
$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Explica por qué cuando $b = (2001, 2001)^T$, un pequeño cambio $\delta b = (1, 0)^T$ produce una variación muy grande en la solución x.

9. **Determine la solución del siguiente sistema lineal usando el método de Gauss-Seidel:**

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + 2x_3 &= 44 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 51 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 61. \end{aligned}$$

10. **Use eliminación gaussiana para determinar las corrientes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5.**



11. **Determine la inversa de la siguiente matriz, usando eliminación gaussiana y sustitución regresiva.**

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}24 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}24 & 0{,}24 \\ 0{,}05 & 0{,}30 & 0{,}49 \end{pmatrix}.$$

12. **Consider the numerical solution of the system of linear equations $Ax = b$ with:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) **Find the condition number of A in the ∞-norm.**

   b) **Find a right hand side b and perturbation Δb for which this condition number is actually achieved.**

c) **For the same b, find a perturbation ΔA for which this condition number is approximately achieved.**

13. Let A be a Hermitian, positive definite $n \times n$ matrix. After k steps of Gaussian elimination without pivoting, A will be reduced to the form:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

where $A_{22}^{(k)}$ is an $(n-k) \times (n-k)$ matrix. Show by induction that:

a) **$A_{22}^{(k)}$ is symmetric and positive definite.**

b) **$a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$ for $k \leq i \leq n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.**

14. Let A be an $n \times n$ nonsingular matrix and $A^{(k)}$ the matrix obtained in the $k - th$ step of Gaussian elimination for A with $A^{(0)} = A$. Let $A^{(k)} = (a_{r,s}^{(k)})$ and $a_k = \max\limits_{r,s} |a_{r,s}^{k}|$. Suppose that partial pivoting is used in the elimination. Show that:

a) **$a_k \leq 2^k a_0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ for arbitrary A, and**

b) **$a_k \leq 2 - a_0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ for tridiagonal matrices A.**

15. Suppose A and ΔA are $n \times n$ matrices, and that x and Δx are such that $Ax = b$ and $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ with $b \neq 0$. In addition, suppose that $\|\Delta A\| \|A^{-1}\| < 1$, where $\|\cdot\|$ is a matrix norm induced by a vector norm. Show that:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right),$$

where $cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$.
Hint:
You may use the fact that if $\|B\| < 1$, then $I - B$ is invertible, and:

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

where I is the identity matrix.

16. Dado el siguiente sistema lineal:

$$3 \times 10^{-3} x_1 \quad + 6{,}11 x_2 \quad = 6{,}14 \tag{1}$$

$$7{,}00 x_1 \quad - 3{,}00 \times 10^{1} x_2 \quad = 4{,}00 \times 10^{1} \tag{2}$$

Monte el esquema matricial y resuelva usando eliminación gaussiana sin pivote, empleando 2 decimales y redondeo.

17. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad b_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Se desea resolver el sistema $A_n x = b_n$. Un estudiante obtiene como resultado $x^* = (10)^T$.

a) Se define el vector residual asociado a esta soluci?n como $r_n = A_n x^* - b_n$. Calcule r_n. ?Podemos decir que para n grande, la soluci?n es razonablemente confiable? Justificar.

b) Resolver $A_n x = b_n$ en forma exacta. Denote por $\hat{x}_n$ la soluci?n exacta y calcule el error relativo de la aproximaci?n x^*.

c) Lo razonablemente esperado es que $\hat{x}_n$ converja a x^* cuando n tiende a infinito. Para este ejemplo, ?se cumple dicha afirmación?. Calcule $K_\infty(A_n)$ y explique el resultado obtenido.

18. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ 0{,}45 \end{pmatrix}$$

a) Para realizar los c?lculos con decimales, se considera el vector $\hat{b} = \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}45 \end{pmatrix}$. Obtenga una cota para el error relativo de la soluci?n del sistema con respecto a la soluci?n del sistema $Ax = \hat{b}$.

b) Ahora considere la matriz perturbada $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix}$. Obtenga una cota para el error relativo de la soluci?n del sistema original con respecto a la soluci?n del sistema $\hat{A}x = b$.

19. En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. Dettermine el número de coches y motos que hay según el requerimiento siguente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A.

c) Determine el número de condicionamiento de A.

d) Indique si está bien o mal condicionado.

20. Un fabricante de bombillas gana 0,3 dolares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0,4 dolares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 dolares. Determine el número de bombillas buenas y defectuosa según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A.

c) Determine el número de condicionamiento de A.

d) Indique si está bien o mal condicionado.

21. Sean dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 13 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 247 como suma de los dos productos. Determine los números según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) **Determine la norma matricial de A y A^{-1}.**

c) **Determine el condicionamiento de A.**

d) **Indique si está bien o mal condicionado.**

22. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo según el requerimiento siguiente.

a) **Modele el problema.**

b) **Determine la norma matricial de A y A^{-1}.**

c) **Determine el condicionamiento de A.**

d) **Indique si está bien o mal condicionado.**

23. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 8,80 soles. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 16,40 soles. Determine el costo de kilo del plátano y de la pera según el requerimiento siguiente.

a) **Modele el problema.**

b) **Determine la norma matricial de A y A^{-1}.**

c) **Determine el condicionamiento de A.**

d) **Indique si está bien o mal condicionado.**

24. Una compañia minera trabaja en 3 minas, cada una de las cuales produce minerles de tres clases. La primera mina puede producir 4 toneladas del mineral A, 3 toneladas del mineral B, y 5 toneladas del mineral C; la segunda mina puede producir 1 tonelada de cada uno de los minerales y la tercera mina, 2 toneladas del A, 4 toneladas del B y 3 toneladas del C, por cada hora de funcionamiento. Se desea satisfacer los tres pedidos siguientes:

Pedidos	Mineral A	Mineral B	Mineral C
P_1	19	25	25
P_2	13	16	16
P_3	8	12	10

Determine

a) **Modele el sistema ha resolver.**

b) **Resolver usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

25. Determine el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

26. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

27. **En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:**

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

28. **En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:**

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

29. **Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Determine el número de hombres, mujeres y niños según el siguiente requerimiento:**

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

30. **Un fabricante de coches ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A, B y C). El precio de venta de cada modelo es 1,5, 2 y 3 millones de soles, respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por coche para el modelo A, de 1,5 para el modelo B y de 2 para el C. El coste total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de coches vendidos 140. Determine el número de coches vendidos de cada modelo según el siguiente requerimiento:**

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.**

19 de Abril del 2023