Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-2**

[Código: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida 06

---

1. **Considere la iteración de punto fijo:**

$$p_{k+1} = (3p_k + 1)^{1/3}, k = 0, 1, ...,$$

   (a) **Demuestre que existe un punto fijo en $p_0 \in [1, 2]$.**

   (b) **Demuestre que la iteración anterior converge para cualquier $p_0 \in [1, 2]$.**

2. **Implemente el método de Broyden para calcular una solución aproximada del sistema no lineal**

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) &= \frac{1}{2}, \\ x_1^2 - 81\left(x_2 + \frac{1}{10}\right)^2 + \sin(x_3) + 1 &= 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + 9 &= 0, \end{aligned}$$

con $x_0 = (1, 1, 1)$ y $J_0 = JF(x_0)$.

3. **Sea el sistema no lineal de ecuaciones siguiente:**

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 &= 0 \end{aligned}$$

Mediante el método de Cuasi Newton calcúlese la aproximación de la solución, comenzando en el punto inicial $x_0 = (0.1, 0.1, -0.1)$ e iterando hasta que $\|x_{i+1} - x_i\|_\infty \leq 10^{-5}$.

4. **Implemente el método de continuación de homotopía para aproximar la solución del sistema no lineal**

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2^2 - 6 &= 0, \end{aligned}$$

comenzando en el punto inicial:

   (a) $x_0 = (0, 0)$.

(b) $x_0 = (1, 1)$.

(c) $x_0 = (3, -2)$.

Y realizando 8 iteraciones.

5. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 290 \\ x + y &= 24 \end{aligned}$$

Resolver usando los programas elaborados de los métodos de Cuasi Newton y Homotopía.

6. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 77 \\ xy + y^2 &= 44 \end{aligned}$$

Resolver usando los programas elaborados de los métodos de Cuasi Newton y Homotopía.

7. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ y + 3 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando los programas elaborados de los métodos de Cuasi Newton y Homotopía.

8. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x - 2y^2 &= 0 \\ y + 5 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando los programas elaborados de los métodos de Cuasi Newton y Homotopía.

9. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - \frac{3}{4}y &= 0 \end{aligned}$$

Resolver usando los programas elaborados de los métodos de Cuasi Newton y Homotopía.

10. **Dada la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $\rho(A) \leq 8$ usando el teorema de Gershgorin.

11. **Se considera la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hallar los círculos de Gershgrorin de A y B y probar que B no tiene valores propios con parte real positiva sin usar directamente el polinomio característico.

12. Implemente el método de potencias para calcular el valor propio dominante y un autovalor de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

dado un vector inicial $x = (-1, 1, 1)$.

13. Encontrar el valor propio dominante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2.0 \end{bmatrix},$$

usando el vector $x = (1, 1, 1)$ y aplique la aceleración de Aitken.

14. Dada la factorización LU de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

Implemente el método de potencias inverso dado el vector $x = (3, 7, -13)$ y realice 25 iteraciones.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Implemente el método de potencias inverso desplazado para aproximar el valor propio correspondiente a la aproximación inicial del vector propio $x_0 = (1, 1, 1)$.

16. Suponga que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edad. El número medio de crías hembras de la primera clase es de 1.5 y el de la segunda es de 2. En cada periodo el 8% de la primera pasa a la segunda. Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase de edad. Estudie el comportamiento de la población a largo plazo.

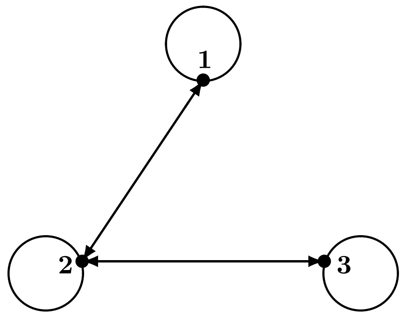
    (a) Indique las variables a usar.

    (b) Determine la matriz que define la población.

    (c) Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.

    (d) Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.

17. Las páginas de internet públicas es un gran grafo dirigido, donde cada página web es un nodo en el cual hay una arista orientada entre páginas que citan a otras páginas. Sea A el grafo de una página de internet, dado por el gráfico



(a) Indique las variables a usar.

(b) Determine la matriz de adyacencia del grafo A.

(c) Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.

(d) Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.

18. Un territorio está dividido en dos zonas Z_1 y Z_2 entre las que habita una población de aves. Cada año y debido a diversas razones (disponibilidad de alimentos, peleas por el territorio, etc.) se producen las siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:

(a) En Z_1: un 60% permanece en Z_1 y un 40% migra a Z_2.

(b) En Z_2: un 20% migra a Z_1 y un 80% permanece en Z_2.

Supongamos que tenemos una situación inicial en la que de la población total de aves un 60% viven en Z_1, un 40% viven en Z_2.

(a) Indique las variables a usar.

(b) Determine la matriz que define la migración.

(c) Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.

(d) Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.

19. En el Departamento de San Martín en el 2017 cuenta con 210 790 familias, donde el 20% de las rentas familiares anuales son bajos, el 70% es considerado mediana y el 10% es alta.
Se sabe que, año tras año, un 70% de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20% pasan a renta media y un 10% a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60%, pasando un 30% a renta baja y un 10% a renta alta. Por último, el 60% de las rentas altas se mantienen, pasando un 30% a rentas medias y un 10% a rentas bajas.
Ayude a las autoridades del Departamento que pierdan el temor, no existe una distribución de renta estable.

(a) Modele el problema.

(b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

(c) Determine los valores y vectores propios usando los métodos dados en clase.

(d) Indique si la distribución de renta es estable.

20. **Una población de aves tiene un territorio dividido en tres regiones R_1, R_2 y R_3. Cada año y debido a diversas razones se produce las migraciones entre las distintas regiones:**
En R_1, un 60% permanece en R_1, un 10% emigra a R_2 y un 30% emigra a R_3.
En R_2, un 10% emigra a R_1, un 80% permanece en R_2 y un 10% emigra a R_3.
En R_3, un 10% emigra a R_1, un 20% emigra a R_2 y un 70% permanece en R_3.
Además la situación inicial de 100 aves que es la población total, que el 30% viven en R_1, un 20% viven en R_2 y un 50% viven en R_3.

(a) **Modele el problema.**

(b) **Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.**

(c) **Determine los valores y vectores propios.**

(d) **Indique si la distribución de renta es estable.**

28 de Diciembre del 2022