Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I] **Examen Parcial**
[Prof: L. Roca, I. Mantilla, C. Salinas.] **Duración:** 110 **minutos.**

SOLUCIONARIO

---

1. Si $a = (0{,}1000)_2, b = (0{,}1001)_2, c = (0{,}0101)_2$, realice las siguiente operaciones con truncamiento usando 4 bits para la mantisa

   a) $A = ab + ac$ [2 pts]
   b) $B = a(b + c)$ [2 pts]
   c) $A - B$ [1 pts]

   Solución.
   $a = 2^{-1}$, $b = 2^{-1} + 2^{-4}$, $c = 2^{-2} + 2^{-4}$

   a) $ab = 2^{-2} + 2^{-5} \implies fl(ab) = 2^{-2}$
   $ac = 2^{-3} + 2^{-5} \implies fl(ac) = 2^{-3}$
   $fl(ab) + fl(ac) = 2^{-2} + 2^{-3} \implies fl(fl(ab) + fl(ac)) = (0, 0110)_2$
   b) $b + c = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} \implies fl(b + c) = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$
   $a(fl(b + c)) = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} \implies fl(a(fl(b + c))) = (0, 0111)_2$
   c) $A - B = (0, 0110)_2 - (0, 0111)_2 = -2^{-4}$

   □

2. Sea A una matriz real y simétrica definida positiva $n \times n$ y $D = diag(A)$. Considere el método iterativo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x_i^k, \forall i = 1, \ldots, n, \forall k \geq 0$$

   Pruebe que el método converge si $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$ [5 pts]

   Solución.
   Como A es definida positiva entonces $a_{ii} > 0$ y existe D^{-1}.
   En forma matricial tenemos que

$$x^{(k)} = (I - \omega D^{-1} A) x^{(k-1)} + \omega D^{-1} b$$

   para garantizar la convergencia necesitamos que $\rho(M) < 1$ donde $M = I - \omega D^{-1} A$.
   Sea λ_M un autovalor de $M = I - \omega D^{-1} A$ con autovector $x \neq 0$, por lo tanto

$$(1 - \lambda_M) x = x - Mx = \omega D^{-1} A x$$

   entonces como A es definida positiva:

$$(1 - \lambda_M) x^T D x = \omega x^T A x > 0 \implies \lambda_M < 1$$

$$Mx = \lambda_M x$$

Como $\omega^{-1}(1-\lambda_M)$ es un autovalor de $D^{-1}A$, entonces $\omega^{-1}|1-\lambda_M| \leq \rho(D^{-1}A)$ por lo tanto

$$|1-\lambda_M| < \omega\rho(D^{-1}A) < 2 \implies -1 < \lambda_M$$

entonces $|\lambda_M| < 1 \implies \rho(M) < 1$ y el método converge. $\square$

3. Suponga que A^{-1} existe y que $I + V^T A^{-1} U$ es no singular, demuestre que

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}$$

[5 pts]

Solución.

$$\begin{aligned}(A + UV^T)(A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}) &= I - U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}) + UV^T A^{-1} \\ &\quad - UV^T A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}) \\ &= I - U(I + V^T A^{-1}U)(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}) + U \\ &= I - UV^T A^{-1}) + UV^T A^{-1} = I\end{aligned}$$

por lo tanto $\det(A + UV^T) \neq 0$ entonces $(A + UV^T)^{-1}$ existe y

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}$$

$\square$

4. Considere el espacio de matrices 2×2 con la norma subordinada a la norma $\| \ \|_\infty$.
   a) Dé y pruebe una fórmula para $\|A\|_\infty$. [2 pts]
   b) Considere $A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine la factorización Doolitle LU. [1 pt]
   c) Dé el número de condición de cada matriz: A, L, U [1.5 pts]
   d) ¿Cual de los problemas $AX = b$, $LX = b$ y $UX = b$ está mejor condicionado? [0.5 pts]

Solución.

a) Utilizando la definición se deduce

$$|A|_\infty = \text{máx}\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\}$$

b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^4 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -999 \end{bmatrix}$

c) $\kappa(A) = \dfrac{4}{1 - 10^{-4}}$, $\kappa(L) = (1 + 10^4)^2$, $\kappa(U) = 10^4$

d) El problema mejor condicionado corresponde al menor número de condición en este caso $AX = b$.

$\square$

UNI, 16 de octubre de 2024[1]

[1] Hecho en LaTeX