Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2022-2

[Análisis y Modelamiento Numérico I - CM4F1]
[Los profesores] UNI, 07 de diciembre de 2022

Quinta Práctica Dirigida

1. Encuentre los polinomios de mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los datos en la siguiente tabla. Calcule el error E en cada caso. Grafica los datos y los polinomios. (Implemente un algoritmo)

   a)

x_i	0	0,15	0,31	0,5	0,6	0,75
y_i	1,0	1,004	1,0031	1,117	1,223	1,422

   b)

x_i	1,0	1,1	1,3	1,5	1,9	2,1
y_i	1,84	1,96	2,21	2,45	2,94	3,18

2. Encuentre la aproximación polinomial de mínimos cuadrados lineales en el intervalo $[-1, 1]$ para las siguientes funciones. (Implemente un algoritmo)

   a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin(2x)$

3. Determine el número de un polígono convexo de n lados, con valor inicial en el origen, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando el método de Gram-Schmidt y Factorización QR.

4. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando el método de Gram-Schmidt y Factorización QR.

5. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando el método de Gram-Schmidt y Factorización QR.

6. Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. Determine la medida de cereal ue contiene un fardo de cada tipo, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando la transformación de Givens.

7. Un negociante internacionl necesita en promedio, cantidades fijas de yenes, francos y marcos para cada uno de sus viajes de negocio. Este año viajó tres veces. La primera vez cambió un total de $ 434 a la siguiente paridad: 100 yenes, 1,5 francos y 1,2 marcos por dolar. La segunda vez, cambió un total de $ 406 con las siguentes tasas: 100 yenes, 1,2 francos y 1,5 marcos por dolar. La tercera vez cambió $ 434 en total, a 125 yenes, 1,2 francos y 1,2 marcos por dolar. Determine la cantidad de yenes, francos y marcos que compró, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando la transformación de Givens.

8. Tres industrias interrelacionadas I_1 I_2 y I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente: Cada unidad de I_1 requiere 0,3 unidades de I_1, 0,2 unidades de I_2 y 0,3 unidades de I_3. Cada unidad producida de I_2 necesita 0,1 unidades de I_1, 0,2 de I_2 y 0,3 de I_3, y cada unidad de I_3 precisa 0,2, 0,5 y 0,1 unidades producidas en I_1, I_2 e I_3 respectivamente. Si las demandas exteriores son 45, 50 y 51 unidades de I_1, I_2 e I_3, determine los niveles de producción que permiten el equilibrio de esta economía, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resuelve usando la transformación de Givens.

9. Demuestre que la transformación Householder, $P = I - 2ww^t$, es simétrica y ortogonal ($P^tP = I$), y así, $P^{-1} = P$.

10. Encuentre por el método de Householder, para encontrar la descomposición QR de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ y determine la determinante de la matriz A.

11. Encuentre por el método de Householder, para encontrar la descomposición QR de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ y determinen la solución de la siguiente ecuación $Ax = b$, donde $b = [-1, 3, 1, 1, 2]^t$.

12. Resuelva el sistema $Ax = b$ calculando la factorización QR de la matriz A, usando la reducción de Householder:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

13. Use ahora el método de las rotaciones de Givens para hallar una solución de mínimos cuadrados del problema anterior.

14. Resuelva el siguiente sistema $Ax = b$ usando factorización QR
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
    Si añadimos la condición de que $R(i;i) > 0$, $1 \leq i \leq n$, ¿es cierto que la factorización QR es única?

15. Calcular $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ y $\|A\|_\infty$ para las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1$, implementando el método de la bisección. Testee con 0, 1, 2.

17. Dada la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$
    Realice cuatro iteraciones del método de bisección a mano para estimar el valor propio entre 2 y 3. Verifique, implementando el método de la bisección.

18. Localice los intervalos que contienen las raíces reales positivas de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$. Obtenga estas raíces hasta tres decimales correctas, usando el método de la regla falsa.

19. Encuentra la raíz correcta a dos decimales de la ecuación $xe^x = \cos x$, usando el método de la regla falsa.

20. Resuelva $2x^3 - 2{,}5x - 5 = 0$ para la raíz en el intervalo $[1, 2]$ por el método de la regla falsa modificada.

21. Resuelva $5 \sin x^2 - 8 \cos^5 x = 0$ para la raíz en el intervalo $[0{,}5, 1{,}5]$ por el método de la regla falsa modificada.