Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2024–I

PRÁCTICA CALIFICADA 4
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1 A

---

1. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Dé una demostración si la proposición es verdadera o dé un contraejemplo o demostración en caso sea falsa.

   a) Consider the iteration:

   $$x^{k+1} = b + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^k, \quad k = 0, 1, 2$$

   where α is a real constant. So, the method converges for all $\alpha \in \mathbb{R}$.

   b) Para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ distintos pero con la misma norma euclidea, el reflector de Householder construido con el vector $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$ lleva un vector en el otro.

   c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. La primera iteración de la factorización QR por el método de Householder, resulta:

   $$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución.

a) **Falso.** La matriz de iteración es:

$$M = \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores:

$$det(M - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 2\alpha - \lambda & \alpha \\ \alpha & 2\alpha - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = \lambda$$

el método es convergente cuando $\rho(M) < 1$, entonces:

$$|3\alpha| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3}\alpha < \frac{1}{3}$$

b) **Verdadero**. Resultado de teoría. Defina:

$$w = \frac{1}{\|x-y\|^2}(x-y) \Rightarrow Hx = (I - 2ww^T)x = y$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Hx &= x - 2\left(\frac{(x-y)^T x}{\sqrt{(x-y)^T(x-y)}}\right)\left(\frac{x-y}{\sqrt{(x-y)^T(x-y)}}\right) \\ &= x - 2\left(\frac{x^Tx - y^Tx}{(x-y)^T(x-y)}\right)(x-y) \\ &= x - 2\left(\frac{x^Tx - y^Tx}{2(x^Tx - y^Tx)}\right)(x-y) \\ &= y \end{aligned}$$

c) **Falso**. Iniciamos la iteración:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_1\| = 3$$

luego:

$$v_1 = a_1 + sign(a_{11})\|a_1\|e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz de Householder:

$$H_1 = I - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Actualizamos la matriz:

$$H_1 A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ encuentre una matriz de rotación G tal que GA es una matriz triangular superior. (4pts)

Solución. Elegimos el pivote $a_{22} = 4$ por lo tanto la matriz de Givens es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

donde

$$c = \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = \frac{4}{5}$$

$$s = \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = -\frac{3}{5}$$

□

3. Determine el plano que mejor se ajusta en el sentido de mínimos cuadrados al siguiente conjunto de datos: $(1,1,7)$, $(1,2,9)$, $(2,1,10)$, $(2,2,11)$, $(2,3,12)$. (4pts)

   Solución. Si la ecuación del plano es $z = ax + by + c$ entonces el sistema de ecuaciones será

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} = B$$

   y las ecuaciones normales correspondientes: $A^T AX = A^T B$

$$\begin{bmatrix} 14 & 15 & 8 \\ 15 & 19 & 9 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 \\ 93 \\ 49 \end{bmatrix}$$

   por lo que la solución de mínimos cuadrados es $a = 2.4$, $b = 1.2$, $c = 3.8$. Así el plano que mejor se ajusta es

$$z = 2.4x + 1.2y + 3.8$$

□

4. Demuestre que si las columnas de una matriz A son linealmente dependientes entonces el proceso de Gram-Schmidt dará como resultado una matriz con una o mas columnas nulas. (4 pts)

   Solución. Sea $A = [a_1, \ldots, a_k, \ldots a_n]$ y $Q = [q_1, \ldots, q_k]$ la matriz que se obtiene del proceso de Gram-Schmidt a las primeras k columnas l.i., luego $QQ^T a_{k+1}$ es la proyección de la columna $k+1$ de A en el subespacio formado por las primera k columnas de A. Como $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ es l.d entonces a_{k+1} pertenece a dicho subespacio y $QQ^T a_{k+1} = a_{k+1}$. Asi el proceso de Gram-Schmidt a la columna a_{k+1} genera:

$$q_{k+1} = a_{k+1} - QQ^T a_{k+1} = 0$$

□

5. Trabajo de grupo en la práctica dirigida. (4 pts)

Los profesores[1]
Lima, 29 de Mayo del 2024.

[1]Hecho en LaTeX