Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática   Ciclo 2022-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada 03

---

1. **La Transferencia de Calor es determinado por la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección trasversal perpendicular a la placa**

T_{C_N}

		T_1	T_2	T_3
T_{C_O}		T_4	T_5	T_6	T_{C_E}

T_{C_S}

Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Así por ejemplo $T_1 = \dfrac{T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O}}{4}$.

(a) **[1 *pto.*] Modele el sistema de las temperaturas sabiendo que $T_{C_N} = 25^o$, $T_{C_E} = 37^o$, $T_{C_S} = 10^o$ y $T_{C_O} = 31^o$.**

(b) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de LDL^T.**

(c) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Cholesky.**

(d) **[1 *pto.*] ¿Qué puede decir de la calidad de las soluciones aproximadas obtenidas?**

Solución:

(a) **[1 *pto.*] El sistema es:**

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] **Por el método de LDL^T, se tiene**

$$L = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0 \\ -0.25 & 1.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0 \\ 0.00 & -0.2666667 & 1.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0 \\ -0.25 & -0.0666667 & -0.0178571 & 1.0000000 & 0.0000000 & 0 \\ 0.00 & -0.2666667 & -0.0714286 & -0.2870813 & 1.0000000 & 0 \\ 0.00 & 0.0000000 & -0.2678571 & -0.0047847 & -0.3160112 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0.00 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0 & 3.75 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0 & 0.00 & 3.7333333 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0 & 0.00 & 0.0000000 & 3.7321429 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0 & 0.00 & 0.0000000 & 0.0000000 & 3.4066986 & 0.0000000 \\ 0 & 0.00 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 3.3918539 \end{bmatrix}$$

Donde resolvemos:

$$LDL^T x = b \;\Rightarrow\; Lz = b \;\wedge\; Dy = z \;\wedge\; L^T x = y.$$

Resulta:

$$z = \begin{bmatrix} 56.000000 \\ 39.000000 \\ 72.400000 \\ 58.892857 \\ 42.478469 \\ 80.098315 \end{bmatrix} \;\wedge\; y = \begin{bmatrix} 14.000000 \\ 10.400000 \\ 19.392857 \\ 15.779904 \\ 12.469101 \\ 23.614907 \end{bmatrix} \;\wedge\; x = \begin{bmatrix} 25.527950 \\ 24.496894 \\ 27.527950 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] **Por el método de Cholesky, se tiene**

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9364917 & -0.5163978 & -0.1290994 & -0.5163978 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9321836 & -0.0345033 & -0.1380131 & -0.5175492 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9318755 & -0.5546054 & -0.0092434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8457244 & -0.5832696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8416987 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$x = \begin{bmatrix} 25.52795 \\ 24.496894 \\ 27.52795 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] **Para ambos métodos, se cumple:**

$$\frac{3\times 10^{-6}}{62}\times\frac{1}{4.9999999}\leq\frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty}\leq 4.9999999\times\frac{3\times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow\frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty}=0.$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, dado que la condición es un valor pequeño.

2. (a) [1 *pto.*] **Mostrar que en la etapa $k+1$ del método Parlett y Reid, la matrix $A^{(k)}$ y la permutación P_{k+1}, satisfacen que la matriz $P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1}$ y $A^{(k)}$ tienen los mismos elementos (quiza en distinto orden) en la fila y columna $k-$ésima. Realizar un esbozo de ambas matrices.**

   (b) [3 *pts.*] **Dado el sistema**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\1&2&1&1\\3&1&1&2\\2&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\8\\9\\11\end{pmatrix}$$

Resolverlo mediante el método Parlett y Reid.

Solución:

(a) [1 *pto.*]

$$A^{(k)}=\left(\begin{array}{cc|c} & & 0_{k-1,n-k}\\ \multicolumn{2}{c|}{T_k} & b\\ \hline 0_{n-k,k-1} & a & B\end{array}\right),\quad P_{k+1}=\begin{pmatrix}I_k&0\\0&\hat{P}\end{pmatrix}$$

donde T_k es tridiagonal de orden k, $a\in\mathbb{R}^{(n-k)\times 1}$, $b\in\mathbb{R}^{1\times(n-k)}$, $\hat{P}$ es una matriz de intercambio de filas. Luego

$$P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1}=\left(\begin{array}{cc|c} & & 0_{k-1,n-k}\\ \multicolumn{2}{c|}{T_k} & b\hat{P}\\ \hline 0_{n-k,k} & \hat{P}a & \hat{P}B\hat{P}\end{array}\right)$$

Al ser $\hat{P}$ una matriz de intercambio de filas, $\hat{P}a$ y $b\hat{P}$ tienen los mismos elemtos que a y b. Por tanto $P_{k+1}A^{(k)}P_{k+1}$ y $A^{(k)}$ tienen los mismos elementos en la fila y columna $k-$ésima.

(b) [3 *pts.*] **Etapa 1:** $P_1=[e_1,e_3,e_2,e_4]$ **y** $M_1=I_4-\begin{pmatrix}0\\0\\1/3\\2/3\end{pmatrix}e_2$, **luego**

$$A^{(2)}:=M_1P_1AP_1M_1^t=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&1&2/3&4/3\\0&2/3&13/9&-1/9\\0&4/3&-1/9&7/9\end{pmatrix}$$

Etapa 2: $P_2 = [e_1, e_2, e_4, e_3]$ **y** $M_2 = I_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} e_3$, **luego**

$$A^{(3)} := M_2 P_2 A^{(2)} P_2 M_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 4/3 & 7/9 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 7/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto con $P = P_2 P_1 = [e_1, e_4, e_2, e_3]$ **y** $L = (M_2 P_2 M_1 P_1 P^t)^{-1}$ **se cumple** $PAP^t = LTL^t$

$$L = P_2 M_1^{-1} P_2 M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos los sistemas $Lz = Pb$, $Tw = z$, $L^t y = w$ **y finalmente la solución es** $x = P^t y$.
$z = [11, 9, 5, 5/2]^t$, $\quad w = [1, 10/3, 2, 2]^t$, $\quad y = [1, 2, 1, 2]^t \quad x = [1, 2, 2, 1]^t$.

02 de Noviembre del 2022