UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2024–I

PRÁCTICA CALIFICADA 5
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1

SOLUCIONARIO

1. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Dé una demostración si la proposición es verdadera o dé un contraejemplo o demostración en caso sea falsa.

   a) Si $f(x) = cos(x) - x$ y se aplica el método de la bisección en $[0, 1]$ se requieren al menos $n \geq 10$ iteraciones para garantizar que el error sea menor que 10^{-3}. (1Pto)

   b) No existe solución de la ecuación $cos(x) = 0.02x^2$ en el intervalo $[0, \pi]$. (1.5 Pts)

   c) The vector " x " in $Col(A)$ closest to b where

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   satisfies that $\|Ax - b\|_2 = \dfrac{16}{3}$. (1.5 Pts)

RESPUESTA

a) **Verdadero.** La cota de error en el método de la bisección es:

$$|\hat{x} - x_n| = \frac{b-a}{2^n},$$

entonces, debe cumplirse:

$$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow n > \frac{3}{\ln(2)} \approx 9.96,$$

por tanto, podemos tomar $n = 10$ iteraciones.

b) **Falso.** Se define la función: $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ del modo siguiente:

$$f(x) = cos(x) - 0.02x^2,$$

se observa:

$$f(0) = cos(0) - 0.02(0)^2 > 0, \quad f(\pi) = cos(\pi) - 0.02(\pi)^2 < 0,$$

y desde que f es una función continua, se puede aplicar el Teorema del Valor Intermedio, es decir, existe $c \in \langle 0, \pi \rangle$ tal que $f(c) = 0$. Por tanto, existe solución de la ecuación.

$c)$ **Falso.** Se calcula la solución por mínimos cuadrados, es decir:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

resultando:

$$Ax - b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ax - b\|_2 = \sqrt{\frac{16}{3}}.$$

2. Sea $g(x) = \sqrt{x+2}$, para $x \in [1, 3]$,

   $a)$ Demuestre que existe una constante $K > 0$, tal que g es una contracción y que dicha sucesión de punto fijo converge a $p = 2$. (2pts)

   $b)$ Con el valor inicial $x_0 = 1$ determine el número n de iteraciones necesario para hallar x tal que $g(x) = x$ y error sea menor a 10^{-4}, estime los errores en cada iteración y grafique la curva de convergencia (Nro. de iteraciones Vs. Errores). (2Pts)

RESPUESTA

a)

Si $1 \leq x \leq 3$ entonces $\sqrt{3} \leq \sqrt{x+2} \leq \sqrt{5}$ entonces $g(x) \in [1, 3]$, además

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} = K < 1, \forall x \in [1, 3]$$

por lo tanto g es una contracción que cumple con las condiciones del teorema de punto fijo: existe $p \in [1, 3]$, $g(p) = p$, como g es continua entonces

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} g(x_{n-1}) = g(p) = p$$

Como $p = g(p) = \sqrt{p+2}$ entonces $p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1) = 0$ entonces $p = 2 \in [1, 3]$. $\square$

b)

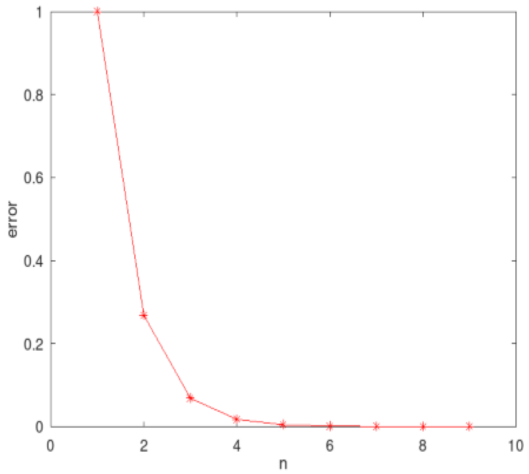
Si $e_n = |x_n - p|$ entonces

$$e_n \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

luego si $e_n < 10^{-4}$

$$n \geq \frac{\log \frac{(1-K)10^{-4}}{|x_1 - x_0|}}{\log K}$$

como $x_1 = g(x_0) = g(1) = \sqrt{3}$ entonces $n \geq 7,436$ entonces el numero de iteraciones buscado es $n = 8$.



n	$\frac{K^n}{1-K}\|x_1 - x_0\|$
0	2.9709e-01
1	8.5761e-02
2	2.4757e-02
3	7.1468e-03
4	2.0631e-03
5	5.9557e-04
6	1.7192e-04
7	4.9630e-05
8	1.4327e-05

3. Considere la siguiente expresión $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$

Demostrar que para $g'(x) = 0$, las iteraciones del método de Newton, cumple las siguientes propiedades:

a) $|x^0| < 1$, entonces $g(x^{k+1}) < g(x^k), k \geq 0$, $\lim_{k \to \infty} x^k = 0$ (2Pts)
b) $|x^0| > 1$, entonces $g(x^{k+1}) > g(x^k), k \geq 0$, $\lim_{k \to \infty} x^k = +\infty$ (2Pts)

RESPUESTA

tenemos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g'(x_n)}{g''(x_n)} = x_n - \frac{x_n/(2(1+x_n^2)^{1/2})}{1/(2(1+x_n^2)^{3/2}} = x_n - x_n(1 + x_n^2) = -x_n^3$$

en general

$$|x_{n+1}| = |x_0|^{3^{n+1}}$$

Se cumple *a*) y b)

- Si $|x_0| < 1$ entonces $\lim_{n \to \infty} |x_n| = 0$.
- Si $|x_0| > 1$ entonces $\lim_{n \to \infty} |x_n| = +\infty$.

4. La orientación de un perfil aerodinámico está representada por los ángulos β y θ que siguen la relación

$$tan\theta = \frac{2(cot\beta)M^2 sen^2\beta - 1}{M^2(k + \cos(2\beta) + 2}$$

Donde M es el número de Match, la razón entre $v(m/s)$, la velocidad del jet y $c\left(\frac{m}{s}\right), la\ velocidad\ del\ sonido$, donde $c = \sqrt{kRT_a}$, donde $k = 1.4, R = 287N\frac{m}{(kg\ K)}$ y T_a es la temperatura del aire (K). Si $M, k\ y\ \theta$ son conocidos, entonces el valor de β se calcula resolviendo $f(\beta) = \frac{2(cot\beta)M^2sen^2\beta-1}{M^2(k+\cos(2\beta)+2} - tan\theta$=0

La presión del aire en la superficie del perfil es $p_a = p\frac{2k}{k+1}(Msen\beta)^2 - \frac{k-1}{k+1}$

Suponga que el jet va a una velocidad $v = 625\ m/s$, T=4°C, p=110kp_a, $\theta = 4^o$.

Subir los scripts y la gráfica al aula virtual

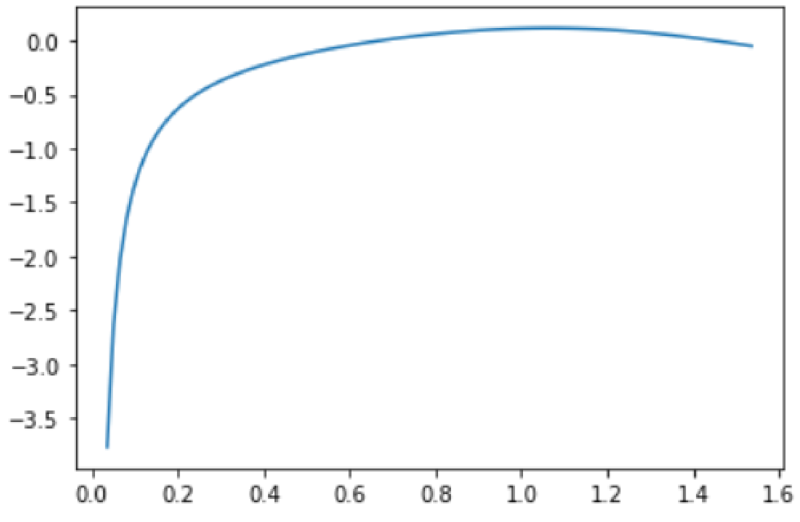
a) Grafique $f(\beta)Vs\ \beta, para\ \beta\ entre\ 2^o\ y\ 88^o$. (2Pts.)

b) Explique que método numérico puede usar para calcular β y calcule p_a. Responda en la hoja del examen. (2Pts.)

RESPUESTA

```
import numpy as np
v=625
T=4+273.15
p=110E+3
M=1
k=1.4
R=287
```

```
c=np.sqrt(k*R*T)
M=v/c
theta=4*np.pi/180
f = lambda x : (2*(M**2*np.sin(x)**2 -1))/( np.tan(x)*(M**2 * (k+np.cos(2*x)+2)) )
import matplotlib.pyplot as plt
beta=np.linspace(2*np.pi/180,88*np.pi/180,100);
y = np.zeros_like(beta);
for i in range(len(beta)):
    y[i]=f(beta[i])
plt.plot(beta,y)
```



Aplicamos el metodo de biseccion

```
a=2*np.pi/180
b=88*np.pi/180

i=0
converge=False
while (i<=50):
    c=(a+b)/2
    if (np.abs(f(c))<1e-5):
        converge=True
        break
    if (f(c)*f(a)<0):
        b=c
    else:
        a=c
    i=i+1

if converge:
    print(f'solucion beta={c} en {i} iteraciones')
else:
    print(f'no hay convergencia')
```

Resultado: solucion beta=0.6699661091090539 en 11 iteraciones.

Los profesores[1]
Lima, 12 de Junio del 2024.