Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Tercera Práctica Calificada

---

1. **[4 *pts.*] Let A be a real $m \times n$ matrix with singular value decomposition (SVD): $A = U\Sigma V^T$. Denote the nonzero diagonal entries of Σ by $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Let:**

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T$$

be the pseudo inverse of A, where $\Sigma^+ = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$ of size $m \times n$. Show that:

$$AA^+A = A \quad \text{and} \quad (A^+A)^T = A^+A.$$

Solución: Podemos observar que:

$$\mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\Sigma^+ = diag(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

y el rango (rank) de $A = r$. Entonces:

$$\Sigma^+\Sigma = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$
$$\Sigma\Sigma^+ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

donde I_r es la matriz identidad de orden $r \times r$.

Con esto, podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} AA^+A &= (U\Sigma V^T)(V\Sigma^+U^T)(U\Sigma V^T) \\ &= U\Sigma(V^TV)\Sigma^+(U^TU)\Sigma V^T \\ &= U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^T = U\Sigma V^T \\ &= A \end{aligned}$$

y tambien que:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^T &= ((\boldsymbol{V}\Sigma^+\boldsymbol{U}^T)(\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^T))^T \\
&= (\boldsymbol{V}\Sigma^+(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})\Sigma\boldsymbol{V}^T)^T \\
&= (\boldsymbol{V}\Sigma^+\Sigma\boldsymbol{V}^T)^T = \boldsymbol{V}\Sigma^T(\Sigma^+)^T\boldsymbol{V}^T \\
&= \boldsymbol{V}(\Sigma^+\Sigma)^T\boldsymbol{V}^T
\end{aligned}$$

Como

$$\Sigma^+\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

es una matriz simetrica, entonces $(\Sigma^+\Sigma)^T = \Sigma^+\Sigma$.

Continuando:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^T &= \boldsymbol{V}(\Sigma^+\Sigma)^T\boldsymbol{V}^T \\
&= \boldsymbol{V}\Sigma^+\Sigma\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V}\Sigma^+(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})\Sigma\boldsymbol{V}^T \\
&= (\boldsymbol{V}\Sigma^T\boldsymbol{U}^T)(\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^T) \\
&= \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

(a) [2 *pts.*] Resuelva el sistema usando descomposición LU de Crout. Muestre los detalles.

(b) [1 *pto.*] Use la descomposición anterior para determinar la descomposición de Doolitle. Muestre los detalles.

(c) [1 *pto.*] Resuelva el sistema usando la descomposición de Doolitle. Muestre los detalles.

Solución:

(a) [2 *pts.*] Sea:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Donde u_{11}, u_{22}, u_{33} son 1
Columna 1:

$F_1 = 10 = l_{11}u_{11} \Rightarrow l_{11} = 10$

$F_2 = 1 = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = 1$

$F_3 = -2 = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = -2$

Columna 2:

$F_1 = -3 = l_{11}u_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{-3}{10}$

$F_2 = -8 = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \Rightarrow l_{22} = \frac{-77}{10}$

$F_3 = 4 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{17}{5}$

Columna 3:

$F_1 = 6 = l_{11}u_{13} \Rightarrow u_{13} = \frac{3}{5}$

$F_2 = -2 = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{26}{77}$

$F_3 = 9 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \Rightarrow l_{33} = \frac{697}{77}$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-77}{10} & 0 \\ -2 & \frac{17}{5} & \frac{697}{77} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{26}{77} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Descomponiendo L se obtiene la matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -77/10 & 0 \\ 0 & 0 & 697/77 \end{pmatrix}$$

y resulta la descomposición de Doolitle:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{-34}{77} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 0 & \frac{-77}{10} & \frac{-13}{5} \\ 0 & 0 & \frac{697}{77} \end{pmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$Ax = b \Rightarrow (LU)x = b \Rightarrow L(Ux) = b \Rightarrow Ly = b$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{-34}{77} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Por sustitucion progresiva:

$$\begin{aligned} y_1 &= 25 \\ y_1 \cdot \tfrac{1}{10} + y_2 \cdot 1 &= -9 \Rightarrow y_2 = \frac{-23}{2} \\ y_1 \cdot \tfrac{-1}{5} + y_2 \cdot \tfrac{-34}{77} + y_3 \cdot 1 &= -50 \Rightarrow y_3 = \frac{-3856}{77} \end{aligned}$$

Ahora se resuelve el sistema $UX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 0 & \frac{-77}{10} & \frac{-13}{5} \\ 0 & 0 & \frac{697}{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ \frac{-23}{2} \\ \frac{-3856}{77} \end{pmatrix}$$

Por sustitucion regresiva:

$$\begin{aligned} \tfrac{697}{77} \cdot x_3 &= \tfrac{-3856}{77} \Rightarrow x_3 = \frac{-3856}{697} \\ \tfrac{-77}{10} \cdot x_2 - \tfrac{13}{5} \cdot x_3 &= \tfrac{-23}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{2343}{697} \\ 10 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 &= 25 \Rightarrow x_1 = \frac{4759}{697} \end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4759}{697} \\ y &= \frac{2343}{697} \\ z &= \frac{-3856}{697} \end{aligned}$$

3. Dado

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + n^3.$$

Se desea obtener el resultado de dicha suma.

(a) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(b) [1 *pto.*] Determine el número de condición.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando LU.

(d) [1 *pto.*] Calcule la estabilidad dada en (c).

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sea $P(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Evaluando

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies P(1) = 1 = a + b + c + d + e \\ n = 2 &\implies P(2) = 9 = 16a + 8b + 4c + 2d + e \\ n = 3 &\implies P(3) = 36 = 81a + 27b + 9c + 3d + e \\ n = 4 &\implies P(4) = 100 = 256a + 64b + 16c + 4d + e \\ n = 5 &\implies P(5) = 225 = 625a + 125b + 25c + 5d + e \end{aligned}$$

El sistema es

$$\begin{bmatrix} 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 100 \\ 36 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Sea $\|A\|_\infty = 781$.

Luego, determinando su inversa, resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0416668 & -0.1666671 & 0.2500009 & -0.1666675 & 0.041667 \\ -0.4166667 & 1.8333335 & -3.0000003 & 2.166667 & -0.5833335 \\ 1.4583332 & -6.8333329 & 12.249999 & -9.8333325 & 2.958333 \\ -2.0833333 & 10.166667 & -19.5 & 17.833333 & -6.4166665 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\| = 55.999999$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 43735.999$$

(c) [1 *pto.*] Por el método LU, se tienen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 625 & 125 & 12 & 5 & 1 \\ 0 & 12.8 & 5.76 & 1.952 & 0.5904 \\ 0 & 0 & 1.2 & 1.14 & 0.753 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4096 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0256 & 0.375 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0.0625 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.1296 & 0.84375 & 0.75 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tiene:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

(d) [1 *pto.*] Para ambos métodos se cumple

$$\frac{0}{225} \times \frac{1}{43735.999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 43735.999 \times \frac{0}{225}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, a pesar que la condición es un valor grande.

4. **La Transferencia de Calor es determinado por la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección trasversal perpendicular a la placa**

T_{C_N}

		T_1	T_2	T_3	
T_{C_O}		T_4	T_5	T_6	T_{C_E}

T_{C_S}

Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Así por ejemplo $T_1 = \dfrac{T_{C_N} + T_2 + T_4 + T_{C_O}}{4}$.

(a) **[1 *pto.*] Modele el sistema de las temperaturas sabiendo que $T_{C_N} = 25^o$, $T_{C_E} = 37^o$, $T_{C_S} = 10^o$ y $T_{C_O} = 31^o$.**

(b) **[1 *pto.*] Determine el número de condición del problema.**

(c) **[1 *pto.*] Determine la solución usando los métodos de Cholesky.**

(d) **[1 *pto.*] ¿Qué puede decir de la calidad de la solución aproximada obtenida?**

Solución:

(a) **[1 *pto.*] El sistema es:**

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) **[1 *pto.*] Sea $\|A\|_\infty = 7$.**

Luego, determinando su inversa, resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 & 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 \\ 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 & 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 \\ 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 & 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 \\ 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 & 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 \\ 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 & 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 \\ 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 & 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\| = 0.7142857$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 4.9999999$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Cholesky, se tiene

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9364917 & -0.5163978 & -0.1290994 & -0.5163978 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9321836 & -0.0345033 & -0.1380131 & -0.5175492 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9318755 & -0.5546054 & -0.0092434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8457244 & -0.5832696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8416987 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$x = \begin{bmatrix} 25.52795 \\ 24.496894 \\ 27.52795 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Para ambos métodos, se cumple:

$$\frac{3\times 10^{-6}}{62} \times \frac{1}{4.9999999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4.9999999 \times \frac{3\times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, dado que la condición es un valor pequeño.

5. [4 *pts.*] Identifique su grupo de exposición y la sección donde esta matriculado.

10 de Mayo del 2023