



Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2022-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 02

1. Obtenga los números de condición relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^p$

c) $f(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \log(x)$

d) $f(x) = e^x$

2. Suponga que f y g son funciones de valor real que tienen números de condición κ_f y κ_g , respectivamente. Defina una nueva función $h(x) = f(g(x))$. Muestre que para x en el dominio de h , el número de condición de h satisface

$$\kappa_h(x) = \kappa_f(g(x)) \cdot \kappa_g(x). \quad (1)$$

3. Usando la regla de la cadena, obtenga los números de condición relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = \cos(2\pi x)$

4. Suponga que f es una función con número de condición κ_f , y que f^{-1} es su función inversa. Muestre que el número de condición de f^{-1} satisface

$$\kappa_f^{-1}(x) = \frac{1}{\kappa_f(f^{-1}(x))}, \quad (2)$$

siempre que el denominador sea distinto de cero.

5. El polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene una raíz doble $r = 1$.

a) Usando una computadora o calculadora, haga una tabla de las raíces de $x^2 - (2 + \epsilon)x + 1$ para $\epsilon = 10^{-4}, 10^{-6}, \dots, 10^{-12}$.

b) ¿Qué parecen implicar los resultados del inciso (a) acerca del número de condición de la raíz?

6. Determine el Landau de las funciones siguientes:

$$a) \frac{1}{n^2}.$$

$$b) \cos(n).$$

$$c) \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

$$d) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

7. La pérdida de cifras significativas se puede evitar reordenando los cálculos. Determine en los siguientes casos una forma equivalente que evite la pérdida de cifras significativas para valores indicados de x .

$$a) \ln(x+1) - \ln(x).$$

$$b) \sqrt{x^2+1} - x.$$

$$c) 1 - \cos(x).$$

$$d) \sin(x) - x.$$

8. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a) f(x) = \frac{x}{4}, \text{ con } n = 1.$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}, \text{ con } n = 1.$$

$$c) f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \text{ con } n = 2.$$

Determine el número de condición.

9. En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. Determine el número de coches y motos que hay según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A .

c) Determine el número de condicionamiento de A .

d) Indique si está bien o mal condicionado.

10. Un fabricante de bombillas gana 0,3 dolares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0,4 dolares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 dolares. Determine el número de bombillas buenas y defectuosa según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A .

c) Determine el número de condicionamiento de A .

d) Indique si está bien o mal condicionado.

11. Suponga que $A = uv^t$ donde u y v son vectores. Demuestre que $\|A\|_2 = \|u\|\|v\|$, donde $\|A\|_2 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ (norma espectral) y $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana.

12. Dados

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+a & 1-a \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ a+1 & -1 \end{bmatrix},$$

donde a es pequeño y distinto de cero (por ejemplo $a = 10^{-10}$). Demuestre que el número de condición $\kappa(A) \geq 1/|a|$, donde $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

13. Suponga que $A = UBV$ con U, V ortogonales y B no singular. Demuestre que $\kappa(A) = \kappa(B)$.

14. Determine el número de condición de la matriz dada a continuación

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,0001 & 2 \end{bmatrix}.$$

15. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta de cada sistema es $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.)

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8, \\ a) \quad \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5, \\ b) \quad \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9. \end{aligned}$$

16. Sean dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 13 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 247 como suma de los dos productos. Determine los números según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

17. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

18. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 8,80 soles. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 16,40 soles. Determine el costo de kilo del plátano y de la pera según el requerimiento siguiente.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

19. Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

20. Una editorial dispone de tres textos diferentes para Matemáticas de 2° de secundaria. El texto A se vende a 90 soles el ejemplar; el texto B a 110 soles y el C a 130 soles. En la campaña correspondiente a un curso académico la editorial ingresó, en concepto de ventas de estos libros de Matemáticas 84000 soles.

a) Modele el problema.

b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .

c) Determine la solución usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

12 de Octubre del 2022