**Universidad Nacional de Ingeniería**
**Facultad de Ciencias**
**Escuela Profesional de Matemática** **Ciclo 2024-1**

**[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]** **Práctica Calificada 2.**
**[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]** **Duración: 110 minutos.**

# SOLUCIONARIO

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   *a*) If $A$ has $LU$ factoring, then $A$ is nonsingular. [1 pt.]
   *b*) If $A_{n\times n}$ is positive definite, then all of its submatrices $m\times m$ are nonsingular. [1 pt.]
   *c*) If $A$ has decomposition $A = LL^T$ then $\det A > 0$. [1 pt.]
   *d*) Si $A$ es nonsingular then $1 \leq \kappa(A)$. [1 pt.]

**RESPUESTA**

a) **Falso** ( Supongamos que A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ U= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Det(A)=0.

**b) Verdadero**

c) **Falso (**Supongamos que A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $L$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A=$LL^T$, pero det(A)=0

**d) Verdadero**

2. Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonal dominante estricto si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuestre que $A$ es invertible y además que admite una única factorización $LU$ de Crout. Sugerencia: analice los pasos de la eliminación gaussiana. [4 pts.]

RESPUESTA

Se dice que una matriz $A$ $n\times n$ **es no singular** (o *invertible*) si existe una matriz $A^{-1}$ $n\times n$ con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La matriz $A^{-1}$ recibe el nombre de **inversa** de $A$. Una matriz que no tenga inversa recibe el nombre de **singular** (o *no invertible*).

Una matriz estrictamente diagonalmente dominante $A$ es no singular. Además, en este caso, la eliminación gaussiana se puede realizar en cualquier sistema lineal de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para obtener su única solución sin intercambios de fila o columna y los cálculos serán estables respecto al crecimiento de errores de redondeo.

En general, las fórmulas de recurrencia que se pueden deducir de este proceso, denominado factorización $LU$ de Crout, son:

$$\begin{aligned}
l_{i1} &= a_{i1}, & i &= 1, 2, \ldots, n,\\
u_{1j} &= a_{1j}/l_{11}, & j &> 1,\\
l_{ik} &= a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}, & i &\geq k,\\
u_{kj} &= \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}\right) \Big/ l_{kk}, & j &> k.
\end{aligned}$$

3. Resuelva el siguiente sistema lineal de ecuaciones con aritmética de 3 cifras y pivoteo parcial

$$\begin{aligned}
1{,}21x_1 - 3{,}25x_2 + 0{,}562x_3 &= 3{,}10\\
4{,}10x_1 + 5{,}15x_2 - 0{,}341x_3 &= -4{,}20\\
2{,}01x_1 + 4{,}20x_2 + 0{,}653x_3 &= 2{,}40
\end{aligned}$$

[4 pts.]

**RESPUESTA**

En otras palabras, al inicio de la eliminación gaussiana, el pivoteo parcial pide que se seleccione el $p$-ésimo renglón, **o fila de la matriz, es decir**

$$|a_{p1}| \geq |a_{i1}|$$

para todo $1 \leq i \leq n$, e intercambiar los renglones 1 y $p$. A continuación, procede la eliminación de la columna 1 como de costumbre, con la "nueva" versión de $a_{11}$ como pivote. El multiplicador utilizado para eliminar $a_{i1}$ será

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

y $|m_{i1}| \leq 1$.

La misma comprobación se aplica a cada elección de pivote durante el algoritmo. Para decidir sobre el segundo pivote, se inicia con la $a_{22}$ actual y se revisan todas las entradas que están justo abajo. Se selecciona el renglón $p$ de tal forma que

$$|a_{p2}| \geq |a_{i2}|$$

para toda $2 \leq i \leq n$, y si $p \neq 2$ los renglones 2 y $p$ se intercambian. El renglón 1 nunca se involucra en este paso. Si $|a_{22}|$ ya es la más grande, no se hace intercambio de renglón.

Con Pivoteo Parcial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.402 \\ -0.118 \\ 5.70 \end{bmatrix}$$

4. Considere el problema de encontrar los coeficientes del polinomio $p(t)$ de grado $n$ tal que $p(1+i) = ((1+i)^{n+1} - 1)/i$ para $i = 1, 2, \dots, n+1$.

*a*) Modele el problema como un sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ y utilice el método de eliminación gaussiana sin pivoteo para obtener los coeficientes de $p(t)$ para valores de $n = 10, 11, \dots, 20$. [2 pts.]

*b*) Considere que $x$ es un vector que almacena la solución por eliminación gaussiana para el polinomio $p(t)$. Imprima una tabla de los errores relativos $\frac{\|x - x_{exacto}\|_\infty}{\|x_{exacto}\|_\infty}$ para $n = 10, 11, \dots, 20$. [1 pts.]

*c*) ¿Que puede concluir del condicionamiento de la matriz $A$?. [1 pts.]

**RESPUESTA**

**a)** $p(i+1) = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$**, entonces** $p(2) = \frac{(2)^{n+1}-1}{1} = \sum_{i=0}^{n} c_i 2^i$**, ……..**

**b)** $p(n+1) = \frac{(1+n)^{n+1}-1}{n}$**=**$\sum_{i=0}^{n} c_i (i+1)^i$**, luego**

**X=(1 …..i …..n+1)$^T$**

**, i =1,…..n+1**

5. Trabajo de grupo en la práctica dirigida.

UNI, 16 de abril de 2024