Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada N° 5

1. **Let A be an $m \times n$ matriz of rank n and let $b \in \mathbb{R}^m$. Show that if Q and R are the matrices derived from applying the Gram-Schimdt process to the column vectors of A and:**

$$p = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \ldots + c_n q_n,$$

is the projection of b onto the column space $R(A)$, then:

   (a) [1 *pto.*] $c = Q^T b$.

   (b) [1 *pto.*] $p = QQ^T b$.

   (c) [1 *pto.*] $QQ^T = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Solución:

Observe que $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ es una base ortonormal de $R(A)$. Luego:

$$p = Proy_{R(A)}(b) = \langle b, q_1 \rangle q_1 + \ldots + \langle b, q_n \rangle q_n,$$

es decir:

$$c_i = \langle b, q_i \rangle = q_i^T b \, \forall \, i = 1, \ldots, n.$$

Los vectores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ son las columnas de la matriz ortogonal Q de orden $m \times n$, es decir:

$$Q = [q_1 \, q_2 \, \ldots \, q_n]$$

Observe lo siguiente:

$$p = \begin{pmatrix} c_1 q_{11} + c_2 q_{12} + \ldots + c_n q_{1n} \\ c_1 q_{21} + c_2 q_{22} + \ldots + c_n q_{2n} \\ \vdots \\ c_1 q_{m1} + c_2 q_{m2} + \ldots + c_n q_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & \vdots & \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Qc$$

donde $c = (c_1 \, c_2 \, \ldots \, c_n)^T$.

(a) **En efecto:**

$$Q^Tb = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} q_1^Tb \\ q_2^Tb \\ \vdots \\ q_n^Tb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c.$$

(b) **En efecto:**

$$QQ^Tb = Qc = p.$$

(c) **En efecto:**

$$A = QR \Rightarrow Q = AR^{-1}, \ A^T = R^TQ^T \Rightarrow (R^T)^{-1}A^T = Q^T,$$

luego:

$$\begin{aligned} A^TA &= (R^TQ^T)(QR) \\ &= R^T(Q^TQ)R \\ &= R^TI_{n\times n}R \\ &= R^TR \\ (A^TA)^{-1} &= R^{-1}(R^T)^{-1} \\ A(A^TA)^{-1}A^T &= AR^{-1}(R^{-1})^TA^T \\ &= QQ^T \end{aligned}$$

2. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) **[1 *pto.*] Determine si la matriz asociada al sistema es de rango completo.**

(b) **[4 *pts.*] Según lo determinado en el item anterior, determine la solución de mínimos cuadrados usando el método de Gram-Schmidt modificado.**

Solución:

(a) **Se calcula la matriz escalonada reducida:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se observa que el rango es 3 que coindice con el número de columnas. Por tanto, se tiene una matriz de rango completo.

(b) Aplicamos el método de Gram-Schmidt para determinar la factorización QR de la matriz A:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

- **Para $k = 1$:**

$$R_{11} = \|a_1\| = \sqrt{6} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{R_{11}} a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - **Para $j = 2$:**

$$R_{12} = q_1^T a_2 \Rightarrow R_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{12} = 0.$$

$$a_2 = a_2 - R_{12} q_1 \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

  - **Para $j = 3$:**

$$R_{13} = q_1^T a_3 \Rightarrow R_{13} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{13} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$a_3 = a_3 - R_{13}q_1 \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{6} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- **Para $k = 2$:**

$$R_{22} = \|a_2\| = 2\sqrt{3} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{R_{22}} a_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

  - **Para $j = 3$:**

$$R_{23} = q_2^T a_3 \Rightarrow R_{23} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$a_3 = a_3 - R_{23}q_2 \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Para $k = 3$:**

$$R_{33} = \|a_3\| = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{R_{33}} a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se obtienen las matrices:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{pmatrix}$$

Luego, la solución de mínimos cuadrados viene dada por:

$$Rx = Q^T b$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{14}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3}{R_{33}} = -1 \\ x_2 &= \frac{b_2 - R_{23}x_3}{R_{22}} = 2 \\ x_1 &= \frac{b_1 - R_{12}x_2 - R_{13}x_3}{R_{11}} = 1 \end{aligned}$$

3. Un comerciante vende quesos de 3 tipos curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son S/ 12, S/ 10 y S/ 9 el kilogramo, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, siendo el importe total de la venta S/ 436 y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. Ayudale al comerciante ha determinar los kilos de queso que vendió.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando la transformación de Householder.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando la transformación de Givens.

(d) [1 *pto.*] Indique que transformación recomienda.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{aligned} x &: \text{ Queso tipo curado.} \\ y &: \text{ Queso tipo semicurado.} \\ z &: \text{ Queso tipo terno.} \end{aligned}$$

Donde, el sistema ha resolver es:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 44 \\ 12x & + & 10y & + & 9z & = & 436 \\ 2x & - & y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

(b) [1 *pto.*] Por la transformación de Householder se obtienen las matrices siguientes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.999994444491 & 0 & -0.003333314815 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.003333314815 & 0 & 0.999994444491 \end{bmatrix}$$

y

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.999999500006 & 0.000999993944 \\ 0 & 0.000999993944 & 0.999999500006 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\boldsymbol{H_2H_1A = R =} \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & 2.638130312101 & 1.495873311008 \\ 0 & 0 & -0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_1H_2 = Q =} \begin{bmatrix} 0.081923192052 & 0.076320066888 & -0.993712150471 \\ 0.983078304623 & 0.157728138236 & 0.093160514107 \\ 0.163846384104 & -0.984528862857 & -0.062107009404 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q'b = c =} \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ 72.12755121377 \\ -3.105350470223 \end{bmatrix}$$

Al resolver, se tiene

$$\boldsymbol{x =} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] Por la transformación de Givens tenemos las matrices siguientes:

$$\boldsymbol{G_{21} =} \begin{bmatrix} 0.083045479854 & -0.996545758245 & 0 \\ 0.996545758245 & 0.083045479854 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G_{31} =} \begin{bmatrix} 0.98648586529 & 0 & -0.163846384104 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.163846384104 & 0 & 0.98648586529 \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{G_{32} =} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.062957830000 & 0.998016188066 \\ 0 & -0.998016188066 & -0.062957830000 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\boldsymbol{G_{32}G_{31}G_{21}A = R =} \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & -2.638130312101 & -1.495873311008 \\ 0 & 0 & 0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G_{21}G_{31}G_{32} = Q =} \begin{bmatrix} 0.081923192052 & -0.076320066888 & 0.993712150471 \\ 0.983078304623 & -0.157728138236 & -0.093160514107 \\ 0.163846384104 & 0.984528862857 & 0.062107009404 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q'b = c =} \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ -72.12755121377 \\ 3.105350470223 \end{bmatrix}.$$

Al resolver, se tiene:

$$\boldsymbol{x =} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(d) **[1 *pto.*] Se recomienda la transformación de Householder para este problema en particular, porque se reduce el número de operaciones.**

4. **Elias compra una bolsa de caramelos, por el cual paga $\sqrt{7}$ ayudale en lo siguiente:**

(a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

(b) **[1 *pto.*] Indique la cantidad de iteraciones que se requiere.**

(c) **[1 *pto.*] Determine la solución aproximad usando el método de bisección.**

(d) **[1 *pto.*] Determine el vuelto si paga con 5.00 soles.**

Solución:

(a) **[1 *pto.*] Sea x : el valor de la bolsa de caramelos. Donde**

$$x = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = 7.$$

Luego la función es:

$$f(x) = x^2 - 7 = 0.$$

(b) **[1 *pto.*] Sabemos que:**

$$\sqrt{7} = 2.645751311 \wedge \varepsilon = 10^{-2}.$$

Donde $a = 2$ y $b = 3$.
Luego

$$n + 1 > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln(2)} = 6.64385619 \Rightarrow n = 6.$$

(c) **[1 *pto.*] Por el método de Bisección:**

n	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	2	3	2.5	−3	2	−0.75	2.5
1	2.5	3	2.75	−0.75	2	0.5625	0.25
2	2.5	2.75	2.625	−0.75	0.5625	−0.109375	0.125
3	2.625	2.75	2.6875	−0.109375	0.5625	0.2226562	0.0625
4	2.625	2.6875	2.65625	−0.109375	0.2226562	0.0556641	0.03125
5	2.625	2.65625	2.640625	−0.109375	0.0556641	−0.0270996	0.015625
6	2.640625	2.65625	2.6484375	−0.2070996	0.0556641	0.0142212	0.0078125

Entonces

$$x = 2.64$$

(d) **[1 *pto.*] El vuelto que recibe Elias es:**

$$5.00 - 2.64 = 2.36$$

14 de Junio del 2023