



[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Cuarta Práctica Calificada

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

- (a) [1pto.] Si f es continua tal que $f(a)f(b) < 0$ con $a < b$, entonces es posible aplicar el algoritmo de la regla falsa en $[a, b]$.
- (b) [1pto.] Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos, existe una matriz Q con columnas ortogonales tal que $Qx = y$.
- (c) [1pto.] Dado $b \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $A^T Ax = A^T b$ si y solo si $Ax = b - P_{\ker(A^T)}b$, donde $P_{\ker(A^T)}$ es la proyección sobre el núcleo de A^T .
- (d) [1pto.] Dado una matriz cuadrada M con columnas no nulas, existe P producto de transformaciones de Givens tal que PM es una matriz diagonal.

Solución:

- (a) [1pto.] (F) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua con $f(-1)f(1) < 0$, el primer iterado es

$$x^1 = \frac{\frac{-1}{1} - \frac{1}{-1}}{\frac{1}{1} - \frac{-1}{-1}} = 0,$$

pero $x^1 \notin \text{Dom}(f)$ por tanto no es posible continuar con el algoritmo.

- (b) [1pto.] (V) Sea Q la matriz de housholder ($Q^T Q = Q Q^T = I$) tal que $Q \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$. Luego considerando $S = \frac{\|y\|}{\|x\|} Q$ se cumple que $Sx = y$ y $S^T S = S S^T = \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} I_n$ (columnas ortogonales).
- (c) [1pto.] (V) Se sabe que $A^T Ax = A^T b$ si y solo si $\|Ax - b\| = \min_z \|Az - b\|$ si y solo si $Ax = P_{\text{Im}(A)}(b) = b - P_{(\text{Im}(A))^\perp}(b) = b - P_{\ker(A^T)}(b)$.
- (d) [1pto.] (F) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ supongamos que existe P como en (d) tal que $PM = \text{diag}(c_1, c_2)$,

como P es una proyección $c_1 = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$, de igual manera $c_2 = 1$, por tanto al ser P invertible se obtiene que M es invertible lo cual es una contradicción.

2. Un comerciante vende quesos de 3 tipos curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son S/ 12, S/ 10 y S/ 9 el kilogramo, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, siendo el importe total de la venta S/ 436 y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. Ayudale al comerciante ha determinar los kilos de queso que vendió.

- (a) [1 *pto.*] Modele el problema.
 (b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Householder.
 (c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Givens.
 (d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.

Solución:

- (a) [1 *pto.*] Sean:

x : Queso tipo curado.
 y : Queso tipo semicurado.
 z : Queso tipo tierno.

Donde, el sistema ha resolver es:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 44 \\ 12x & + & 10y & + & 9z & = & 436 \\ 2x & - & y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

- (b) [1 *pto.*] Por el método de Householder se obtienen las matrices siguientes:

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.999994444491 & 0 & -0.0033333314815 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ -0.0033333314815 & 0 & & 0.999994444491 \end{bmatrix} \wedge H_2 = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & -0.999999500006 & & 0.000999993944 & \\ 0 & 0.000999993944 & & 0.999999500006 & \end{bmatrix}$$

Luego

$$H_2 H_1 A = R = \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ & 0 & 2.638130312101 & 1.495873311008 \\ & 0 & & 0 & -0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$H_1 H_2 = Q = \begin{bmatrix} 0.081923192052 & 0.076320066888 & -0.993712150471 \\ 0.983078304623 & 0.157728138236 & 0.093160514107 \\ 0.163846384104 & -0.984528862857 & -0.062107009404 \end{bmatrix}$$

$$Q'b = c = \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ 72.12755121377 \\ -3.105350470223 \end{bmatrix}$$

Al resolver, se tiene

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Givens tenemos las matrices siguientes:

$$G_{21} = \begin{bmatrix} 0.083045479854 & -0.996545758245 & 0 \\ 0.996545758245 & 0.083045479854 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_{31} = \begin{bmatrix} 0.98648586529 & 0 & -0.163846384104 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.163846384104 & 0 & 0.98648586529 \end{bmatrix}$$

y

$$G_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.062957830000 & 0.998016188066 \\ 0 & 0.998016188066 & -0.062957830000 \end{bmatrix}$$

Luego

$$G_{32}G_{31}G_{21}A = R = \begin{bmatrix} 12.20655561573 & 9.748859854177 & 8.929627933658 \\ 0 & -2.638130312101 & -1.495873311008 \\ 0 & 0 & 0.155267523511 \end{bmatrix}$$

$$G_{21}G_{31}G_{32} = Q = \begin{bmatrix} 0.081923192052 & -0.076320066888 & 0.993712150471 \\ 0.983078304623 & -0.157728138236 & -0.093160514107 \\ 0.163846384104 & 0.984528862857 & 0.062107009404 \end{bmatrix}$$

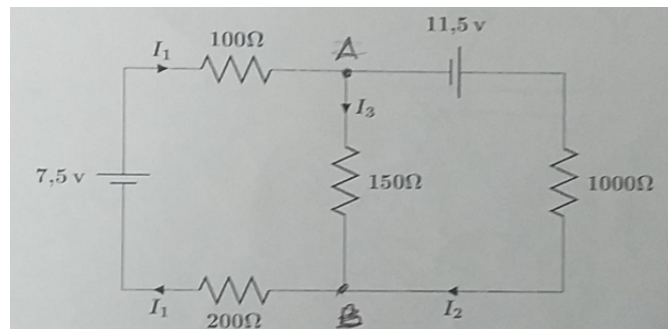
$$Q'b = c = \begin{bmatrix} 432.2267612658 \\ -72.12755121377 \\ 3.105350470223 \end{bmatrix}.$$

Al resolver, se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Se recomienda el método de Householder para este problema en particular, porque se reduce el número de operaciones.

3. Dado el circuito de una red



Determine la solución aproximada del circuito, según el siguiente requerimiento.

- (a) [1 *pto.*] Modele el problema.
- (b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt.
- (c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gram-Schmidt Modificado.
- (d) [1 *pto.*] Indique que método recomienda.

Solución:

- (a) [1 *pto.*] Sean

I_1 : Intensidad 1.

I_2 : Intensidad 2.

I_3 : Intensidad 3.

Por la segunda Ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} 300I_1 + 150I_3 &= 7.5 \\ 1000I_2 - 150I_3 &= 11.5 \end{aligned}$$

Por la primera Ley de Kirchhoff:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Donde, el sistema es

$$\begin{aligned} 300I_1 + 150I_3 &= 7.5 \\ 1000I_2 - 150I_3 &= 11.5 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

- (b) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt, tenemos:

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix} \\ U &= \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix} \\ c &= \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (c) [1 *pto.*] Por el método de Gram-Schmidt Modificado, tenemos:

$$E = \begin{bmatrix} 0.999994444491 & 0.000003333295 & 0.003333313148 \\ 0 & 0.999999500006 & -0.000999993944 \\ 0.003333314815 & -0.000999988389 & -0.999993944499 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 300.001666662 & -0.003333314815 & 149.9958333588 \\ 0 & 1000.000499994 & -149.9984250183 \\ 0 & 0 & 1.649990008424 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 7.499996666569 \\ 11.49999425007 \\ 0.013499994638 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.020909090909 \\ 0.012727272727 \\ 0.008181818182 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] Ambos métodos son eficientes para el problema presentado.

4. Dado una función $f : [0, +\infty) \rightarrow]0, +\infty)$ diferenciable acotado. Se busca determinar $p > 0$ tal que sean iguales las áreas bajo las gráficas de f y la función identidad $y = x$, tomados desde el origen hasta p .

(a) [1 *pto.*] Muestre que bajo las hipótesis sobre f , existe p .

(b) [0.5 *pts.*] Si $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + 1$, verificar que f cumple las hipótesis del problema e indique el intervalo I donde aplicar el método de la bisección para aproximar p , obtener la información de I a partir del gráfico conjunto de f y la función identidad.

(c) [2.5 *pts.*] De (b) aproxime p , utilizando el método de la bisección y regla de falsa modificada ($\alpha = \frac{1}{2}$), con una tolerancia de 10^{-5} .

Solución:

(a) [1 *pto.*] Considerar la función

$$\psi(x) = \int_0^x f(s) ds - \frac{x^2}{2},$$

la cual por TFC es continua en $[0, +\infty)$. La existencia de p es equivalente a mostrar la existencia de un cero de ψ .

Se tiene que $f(x) - x$ es continua, luego al ser $f(0) - 0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - x > \frac{f(0)}{2}, \forall x \in [0, \delta],$$

luego integrando se tiene $\psi(\delta) > 0$. Por otro lado como $f(s) \leq M, \forall s \in [0, +\infty)$, se obtiene que

$$\int_0^x f(s) ds - \frac{x^2}{2} \leq Mx - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \psi(3M) < 0.$$

Finalmente el TFI garantiza la existencia de un cero de ψ en el intervalo $[\delta, 3M]$.

(b) [0.5 *pts.*] Se observa que f es diferenciable con $f(x) \geq 1, \forall x \in [0, +\infty)$. Además es acotado, $0 < f(x) < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. De la prueba anterior se observa que el intervalo donde aplicar los métodos serían $[c, d]$, siendo $c < x_0$, siendo x_0 el menor escalar tal que $f(x_0) = x_0$; y $d > 2M$. Por tanto consideraremos el intervalo $[1, 3]$, para hallar el zero de $\psi(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + x - \frac{x^2}{2}$

(c) [2.5 pts.] Al aplicar el método de la bisección se obtiene la tabla:

k	a_k	b_k	$Error\ b_k - a_k$
0	1	3	2
1	2	3	1
2	2.5	3	0.5
\vdots			
18	2.77937316	2.77938079	0.00000762

Al aplicar el método de la regla de falsa modificada ($\alpha = \frac{1}{2}$) se obtiene la tabla:

k	a_k	b_k	$Error\ b_k - a_k $	$Error\ f(c_k) $
0	2	3	2	0.458091
1	3	2.416526	0.583473	0.045563
2	3	2.747816	0.252183	0.030453
\vdots				
5	2.800065	2.779376	0.020689	0.000002685899
6	2.779376	2.779379	0.000003	0.000000000001

06 de Julio del 2022