Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I] **Práctica Calificada 2**
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, M. Quiñones.] **Duración:** 110 **minutos.**

---

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   a) The factorization LU exists if A has an inverse. (1pts)

   b) Partial pivoting is not necessary if LU factorization exists. (1pts)

   c) If A is a square matrix and $A = LL^T$ then A is positive definite. (1pts)

   d) If A is a square matrix and $x^tAx < 0$ for all non-zero $x \in \mathbb{R}^n$ then $a_{ii} < 0, i = 1, \ldots, n$. (1pts)

   Solución.

   a) False, by example $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ has a inversa but no exists LU.

   b) False, by example let $A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, have LU factorization but the multiplicator $m_{21} = 10^20$ is big. The problema $Ax = b$ need partial pivoting.

   c) False, by example let $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, and $A = L$.

   d) True, because $-A$ is positive definite, the $-a_{ii} > 0$.

   □

2. *a*) Descomponga la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ en forma LU de tipo Doolitle y de tipo Crout. (2pts)

   b) La factorización LU encontrada en la parte *a*) es única? (2pts)

   Solución.

   a) Por eliminación gaussiana

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \,(Doolittle)$$

   y como $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,(Crout)$$

   b) En este caso la factorización es única, pues L y U tiene inversa.

   □

3. Una familia consta de una madre, un padre y un hijo. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Considerando la terna (M, P, H) para denotar las edades de la madre, padre e hijo respectivamente, determine la edad de la familia según el siguiente requerimiento:

   a) Modele el sistema. (1pts)

b) ¿La matriz del sistema cumple que $x^T A x > 0$ si $x \neq 0$? Justifique adecuadamente su respuesta. (1pts)

c) Resuelva el sistema usando el método Gauss con pivoteo parcial, indicando todos los pasos. (2pts)

Solución.

a) El sistema que modela el problema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ P \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 22 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) No cumple con el enunciado, en efecto para $x = (0,1,0)^T$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

c) Aplicando el método de Gauss con pivoteo parcial:
Iniciamos con la matriz ampliada y triangulizamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & 0 & -2 & 22 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & -1 & -3 & -58 \\ 0 & 2 & 1 & 81 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 2 & 1 & 81 \\ 0 & -1 & -3 & -58 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 2 & 1 & 81 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{35}{2} \end{pmatrix}$$

ahora se resuelve por sustitución regresiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ P \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 81 \\ -\frac{35}{2} \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$-\frac{5}{2}H = -\frac{35}{2} \Rightarrow H = 7,$$

$$2P + H = 81 \Rightarrow 2P + 7 = 81 \Rightarrow P = 37,$$

$$M + P + H = 80 \Rightarrow P + 37 + 7 = 80 \Rightarrow M = 36.$$

Por tanto, las edades pedidas de la familia son: el hijo tiene 7 años, la madre tiene 36 años y el padre tiene 37 años.

□

4. Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de $n+1$ puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cuando un objeto está en x_i puede moverse solo a sus vecinos x_{i-1} o x_{i+1}. Considere la probabilidad P_i de que un objeto comenzando en x_i llegue hasta el extremo izquierdo x_0 antes de alcanzar el extremo derecho x_n, es claro que $P_0 = 1$ y $P_n = 0$. Si la probabilidad de ir hacia la izquierda es α y de ir a la derecha es $1-\alpha$ entonces:

a) Plantee el sistema de ecuaciones que define P_i. (1pts)

b) Para $n = 10$ y $\alpha = 1/2, 1/3, 1/4$ calcule $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ con un método adecuado. (2pts)

c) Grafique las curvas P vs x para $\alpha = 1/3$ y $n = 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}$, y $x \in [0, 10]$. (1pts)

Solución.

a) Sea X una variable aleatoria tal que $P(X=1)=\alpha$ y $P(X=-1)=1-\alpha$, si $X=1$ entonces damos un paso a la derecha y si $X=-1$ damos un paso a la izquierda, luego por el teorema de Bayes

$$P_i = P_{i-1}P(X=-1) + P_{i+1}P(X=1)$$

lo que forma la ecuación

$$P_i - \alpha P_{i-1} - (1-\alpha)P_{i+1} = 0$$

y el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha-1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & \alpha-1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -\alpha & 1 & \alpha-1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\alpha & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) El sistema es tridiagonal.

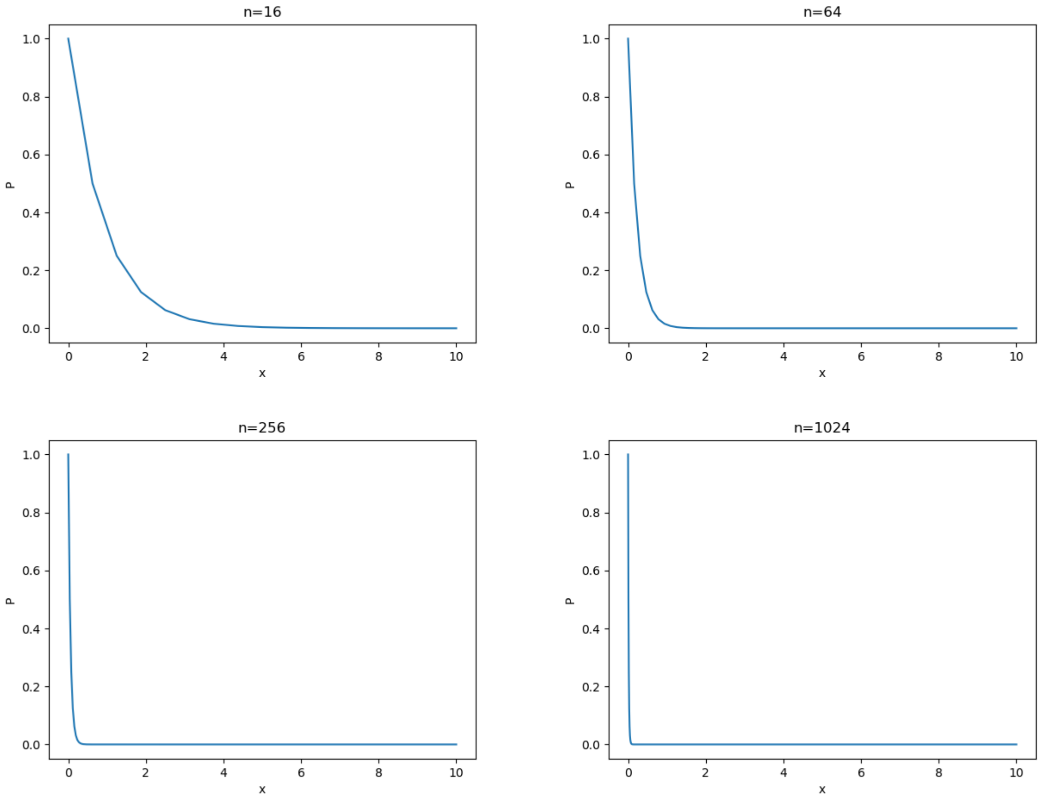
```
import numpy as np
def resuelve_triadiagonal(alpha,n):
d= np.ones(n+1)
x= np.zeros(n+1)
a= np.ones(n)
b= np.zeros(n+1); b[0]=1;
c= np.ones(n)
a = -alpha *a;a[-1]=0;
c = (alpha-1) *c; c[0]=0;
for i in range(1,n+1):
d[i] = d[i] - (a[i-1]/d[i-1])*c[i-1]
b[i] = b[i] - (a[i-1]/d[i-1])*b[i-1]
x[-1]=b[-1]/d[-1]
for i in range(n-1,-1,-1):
x[i]= (b[i]-c[i]*x[i+1])/d[i]
return x

vector_alpha=[1/2.0,1/3.0,1/4.0]
n=10
x = np.zeros([n+1,3])
i=0;
for alpha in vector_alpha:
x[:,i] = resuelve_triadiagonal(alpha,n)
i=i+1
print(x)
```

```
[[1.00000000e+00 1.00000000e+00 1.00000000e+00]
[9.00000000e-01 4.99511241e-01 3.33322043e-01]
[8.00000000e-01 2.49266862e-01 1.11096057e-01]
[7.00000000e-01 1.24144673e-01 3.70207289e-02]
[6.00000000e-01 6.15835777e-02 1.23289527e-02]
[5.00000000e-01 3.03030303e-02 4.09836066e-03]
[4.00000000e-01 1.46627566e-02 1.35482997e-03]
[3.00000000e-01 6.84261975e-03 4.40319740e-04]
[2.00000000e-01 2.93255132e-03 1.35482997e-04]
[1.00000000e-01 9.77517107e-04 3.38707492e-05]
```

```
[0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]]
```

c)

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 2**4
alpha=1/3.0
x = np.linspace(0,10,n+1)
P = resuelve_triadiagonal(alpha,n)
plt.plot(x,P)
```



□

5. Trabajo de laboratorio (4pts)

UNI, 25 de setiembre de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX