Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada N° 6

---

1. **The nonlinear system:**

$$5x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_2 - 0.25(sen(x_1) + cos(x_2)) = 0,$$

has a solution near $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$. **Find a function** G **such that** $G : D \to \Re^2$ **has a unique fixed point in** $D = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$. **Use infinity norm.**

Solución:

Observe lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{x_2^2}{5}} = \frac{x_2}{\sqrt{5}} \\ x_2 &= \frac{1}{4}(sen(x_1) + cos(x_2)) \end{aligned}$$

Defina la función $G : D \to \Re^2$ **como sigue:**

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{4}(sen(x_1) + cos(x_2)) \end{pmatrix}$$

Analicemos las hipótesis del Teorema 10.6 del Burden. Para cada $(x_1, x_2) \in D$**:**

$$0 \le x_1 \le \frac{1}{2}, \quad 0 \le x_2 \le \frac{1}{2},$$

luego:

$$|g_1(x_1, x_2)| = \left|\frac{x_2}{\sqrt{5}}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{5}} \le \frac{1}{2},$$

$$|g_2(x_1, x_2)| = \left|\frac{1}{4}(sen(x_1) + cos(x_2))\right| \le \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$$

entonces:

$$G(x_1, x_2) \subset D.$$

Se calculan ahora las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{cos(x_1)}{4}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{sen(x_2)}{4}$$

Luego:

$$JG(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{cos(x_1)}{4} & -\frac{sen(x_2)}{4} \end{pmatrix}$$

La norma infinito de una matriz A de orden $m \times n$ viene dada por $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, por tanto:

$$\|JG(x_1, x_2)\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \left|\frac{cos(x_1)}{4}\right| + \left|\frac{sen(x_2)}{4}\right|\right\} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

observe además:

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, x_2)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{K}{2} \Rightarrow K = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1.$$

Por tanto, por el Teorema 10.6 se concluye que la función de iteración G considerada converge al único punto fijo “ p ”.

2. Para la función de iteración del problema anterior e iniciando en $x^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$, se pide:

   (a) Realice una iteración en detalle.

   (b) Estime el número de iteraciones para garantizar una tolerancia de 10^{-5}. Use la norma infinito.

   (c) Muestre una tabla con los resultados hasta que alcance la convergencia con una tolerancia de $\|x^k - x^{k-1}\|_\infty < 10^{-5}$. Adjunte la tabla y su código como evidencia.

Solución:

(a) $x^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$, luego:

$$x^1 = G(x_0) = \begin{pmatrix} (0.25)/\sqrt{5} \\ \frac{1}{4}\left(sen(1/4) + cos(1/4)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11180 \\ 0.30408 \end{pmatrix}$$

(b) Del Teorema 10.6 del Burden se tiene el siguiente resultado:

$$\|x^k - p\|_\infty \leq \frac{K^k}{1-K}\|x^1 - x^0\|_\infty < Tol$$

donde $p \in D$ es el punto fijo, resulta:

$$k > \frac{\log(Tol(1-K)/\|x^1 - x^0\|_\infty)}{\log(K)} \approx 105.6,$$

por tanto, se tiene que $k = 106$.

(c) **Tabla de resultados:**

k	x_1	x_2	Error
1	0.11180	0.30408	0.13820
2	0.13599	0.26642	0.03766
3	0.11915	0.27507	0.01684
4	0.12302	0.27032	0.00475
5	0.12089	0.27160	0.00213
6	0.12146	0.27098	0.00061
7	0.12119	0.27117	0.00027
8	0.12127	0.27109	0.00008
9	0.12123	0.27111	0.00004
10	0.12125	0.27110	0.00001
11	0.12124	0.27111	0.00000

3. Martha compra un boogie, por el cual paga $\sqrt[7]{17.0859375}$ ayudale en obtener cual es el monto real a pagar:

(a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

(b) **[1 *pto.*] Demuestre que el método de Newton tiene la siguiente iteración.**

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}\left[6x_n + \frac{17.0859375}{x_n^6}\right]$$

(c) **[1 *pto.*] Determine la solución aproximada usando el método de Newton.**

(d) **[1 *pto.*] Determine el vuelto si paga con 5.00 soles.**

Solución:

(a) **[1 *pto.*] Sea x : el valor del boogie, donde**

$$x = \sqrt[7]{17.0859375} \Rightarrow x^7 = 17.0859375.$$

Luego la función es:

$$f(x) = x^7 - 17.0859375 = 0.$$

(b) **[1 *pto.*] Por el método de Newton:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^7 - 17.0859375}{7x_k^6} = \frac{1}{7}\left[6x_k + \frac{17.0859375}{x_k^6}\right].$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Newton:

k	x_k	Error
0	2	
1	1.7524240	0.2475760
2	1.5863540	0.1660670
3	1.5128902	0.0734638
4	1.5003248	0.0125654
5	1.5000002	0.0003246

Entonces

$$x = 1.50$$

(d) [1 *pto.*] El vuelto que recibe Martha es:

$$5.00 - 1.50 = 3.50$$

4. La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores, obreros especializados y obreros no especializados. Así, en cada generación k la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías. Supongamos que:

(a) Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.

(b) El 50% de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25% pasa a ser obrero especializado y el 25% restante es obrero no especializado.

(c) Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30%, 40% y 30%.

(d) Para los hijos de obreros no especializados las proporciones de reparto entre las categorías son 50%, 25% y 25%.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine el polinomio característico, usando el método de Krylov.

(c) [2 *pts.*] Determine los valores y vectores propios usando los método dados en clase.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

x Trabajadores técnico superior

y Trabajadores obreros especializados

z Trabajadores obreros no especializados

Donde:

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.50 \\ 0.25 & 0.40 & 0.25 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix} x^k$$

Con

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Krylon se tiene:

$$p(A) = A^3y + b_1A^2y + b_2Ay + b_3y.$$

Luego:

$$z = Ay = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad z_1 = Az = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.2875 \\ 0.2625 \end{bmatrix} \quad Az_1 = \begin{bmatrix} 0.4425 \\ 0.293125 \\ 0.264375 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el sistema ha resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0.45 & 0.5 & 1 \\ 0.2875 & 0.25 & 0 \\ 0.2625 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4425 \\ -0.293125 \\ -0.264375 \end{bmatrix}$$

por el método de Eliminación de Gauss, tenemos:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1.15\lambda^2 + 0.15\lambda.$$

(c) [2 *pts.*] Por el método de potencia se tiene, la tabla es:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_1(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	*Error*
0					1	1	1	
1	1.3	0.9	0.8	1.3	1	0.6923077	0.6153846	0.3846154
2	1.0153846	0.6807692	0.6115385	1.0153846	1	0.6704545	0.6022727	0.0218531
3	1.0022727	0.6687500	0.6017045	1.0022727	1	0.6672336	0.6003401	0.0032210
4	1.0003401	0.6669785	0.6002551	1.0003401	1	0.6667517	0.6000051	0.0004819
5	1.0000510	0.6667134	0.6000383	1.0000510	1	0.6666794	0.6000077	0.0000723
	$\vdots$							
9	1.0000000	0.6666667	0.6000000	1.0000000	1	0.6666667	0.6000000	0.0000000

La solución del valor y vector propios son $\lambda_1 = 1$ y $x_1 = [1\ 0.6666667\ 0.6]^T$.

Por el método de potencia inversa desplazado con $\overline{\lambda} = -0.1$, se tiene la tabla siguiente:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_3(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	$Error$
0					1	1	1	
1	−1.0909091	1.2727273	2.5454545	2.5454545	−0.4285714	0.5000000	1.0000000	1.4285714
2	−7.1038961	1.0259740	7.0519481	−7.1038961	1.0000000	−0.1444241	−0.9926874	1.9926874
3	9.7171348	−0.4530497	−9.3887319	9.7171348	1.0000000	−0.0466238	−0.9662037	0.0978003
4	9.7086394	−0.1748338	−9.5454670	9.7086394	1.0000000	−0.0180081	−0.9831931	0.0286157
5	9.8635791	−0.0709403	−9.7937307	9.8635791	1.0000000	−0.0071921	−0.9929186	0.0108159
	⋮							
13	9.9999053	−0.0000474	−9.9998579	9.9999053	1.0000000	−0.0000047	−0.9999953	0.0000071

Donde el valor y vector propios son $\lambda_3 = 0.0000009$ y $x_3 = [1\ -0.0000047\ -0.9999953]^T$.
Por el método de potencia inversa desplazado con $\overline{\lambda} = 0.25$, se tiene la tabla siguiente:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_3(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	$Error$
0					1	1	1	
1	4.0000000	0.00000000	0.0000000	4.0000000	1.00000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
2	−4.0000000	3.3333333	−0.5000000	−4.0000000	1.0000000	−0.8333333	−0.5000000	0.8333333
3	−10.6666670	7.2222222	3.0000000	−10.6666670	1.0000000	−0.6770833	−0.2812500	0.2187500
4	−9.4166667	6.9097222	2.5625000	−9.4166667	1.0000000	−0.7337758	−0.2721239	0.0566925
5	−9.8702065	7.3180924	2.5442478	−9.8702065	1.0000000	−0.7494793	−0.2505226	0.0143534
	⋮							
13	−9.9998931	7.4998663	2.5000267	−9.9998931	1.0000000	−0.7499947	−0.2500053	0.0000080

Donde el valor y vector propios son $\lambda_2 = \frac{1}{-9.9998931} + 0.25 = 0.149998931$ y $x_2 = [1\ -0.7499947\ -0.2500053]^T$.

Siendo la proporción de la población sanos y enfermos de 1 a 2

5. [4 *pts.*] Identifique su grupo de exposición y la sección donde esta matriculado.

28 de Junio del 2023