Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2024-2

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, M. Quiñones.]

Práctica Calificada 5
Duración: 110 minutos.

---

1. **Determine si las siguientes afirmaciones on verdaderas o falsas.**

   a) **El método de bisección se puede aplicar a la ecuación $\tan(x) = 0$ en $[\pi/4, 3\pi/4]$. (1pts)** Falso, la tangente no es continua en $\pi/2$.

   b) **Si el método iterativo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)-c}{f'(x_k)}$ converge a $\hat{x}$ entonces $f(\hat{x}) = c$. (1pts)** Verdadero, $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = c - f(x_k)$, y en el limite tendremos $f(\hat{x}) = c$.

   c) **Si el método de Newton converge cuadráticamente a $\hat{x}$ entonces $f'(\hat{x}) \neq 0$. (1pts)** Verdadero, si $f'(\hat{x}) = 0$ entonces la convergencia seria lineal.

   d) **La ecuación $x^3 - 2x = 1$ se puede replantear como un problema de punto fijo. (1pts).** Verdadero, basta hacer $x = (x^3 - 1)/2$

   Solución.

   a) Falso, la tangente no es continua en $\pi/2$.
   b) Verdadero, $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = c - f(x_k)$, y en el limite tendremos $f(\hat{x}) = c$.
   c) Verdadero, si $f'(\hat{x}) = 0$ entonces la convergencia seria lineal.
   d) Verdadero, basta hacer $x = (x^3 - 1)/2$.

   □

2. **Find values for the constants M and L such that $|f''(x)| \leq M$ and $|f'(x)| \geq L$ when $f(x) = x^3 - 2$ on the interval $[1, 2]$. Based on your constants M and L, and the Newton's method error formula:**

$$|x_{n+1} - r| \leq \left(\frac{M}{2L}\right) |x_n - r|^2,$$

   how close to the root r would the initial guess x_0 need to be in order to guarantee that Newton's method will converge. (4pts)

   Solución.
   Si α es raíz de f y se cumple:

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq K|\alpha - x_n|^2 \Rightarrow |\alpha - x_n| \leq \frac{1}{K}(M|\alpha - x_0|)^{2^n}$$

   En el problema, se obtiene:

$$L = 3, \quad M = 12,$$

   entonces, considerando $K = \dfrac{M}{2L}$, para garantizar la convergencia, debe de cumplirse:

$$\frac{M}{2L}|x_0 - r| < 1 \Rightarrow |x_0 - r| < \frac{1}{2}.$$

   □

3. **Sea $f(x) = x \ln x - \ln 2$.**

a) **Demuestre que la función de Newton-Raphson es:**

$$g(x) = \frac{x + \ln 2}{\ln x + 1}$$

b) **Demuestre que el método iterativo:**

$$x_k = \frac{x_{k-1} + \ln 2}{\ln x_{k-1} + 1}$$

aproxima la solución de $x^x = 2$. Considere $x_0 = e$ y realice 3 iteraciones para obtener x_1, x_2 y x_3.

c) **Calcule x_3 elevado a la x_3 y cerciórese que es aproximadamente 2.** (4pts)

Solución.

a) $f(x) = x\ln x - \ln 2$, $f'(x) = 1 + \ln x$ entonces

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x\ln x - \ln 2}{1 + \ln x} = \frac{x + \ln 2}{\ln x + 1}$$

b) Si el método converge entonces $x = \dfrac{x + \ln 2}{1 + \ln x}$ entonces $x\ln x = \ln 2$ es decir $x^x = 2$.

```python
import math
#z=math.log(2)
#print(z)
x=[0, 0,0,0]

x[0]=math.exp(1)
print(x[0])
for k in range (3):
    x[k+1]=(x[k]+math.log(2))/(math.log(x[k])+1)
    print(k+1,x[k+1])
print("el valor aprox de 2 ",x[3]**x[3])
```

c)

```
2.718281828459045
1 1.7057145045094952
2 1.5638113231524933
3 1.5596143719689708
aprox2 2.000011273884301
```

□

4. Encuentre todas la soluciones de las ecuaciones

$$y = -x^2 + x + 0{,}75$$
$$y + 5xy = x^2$$

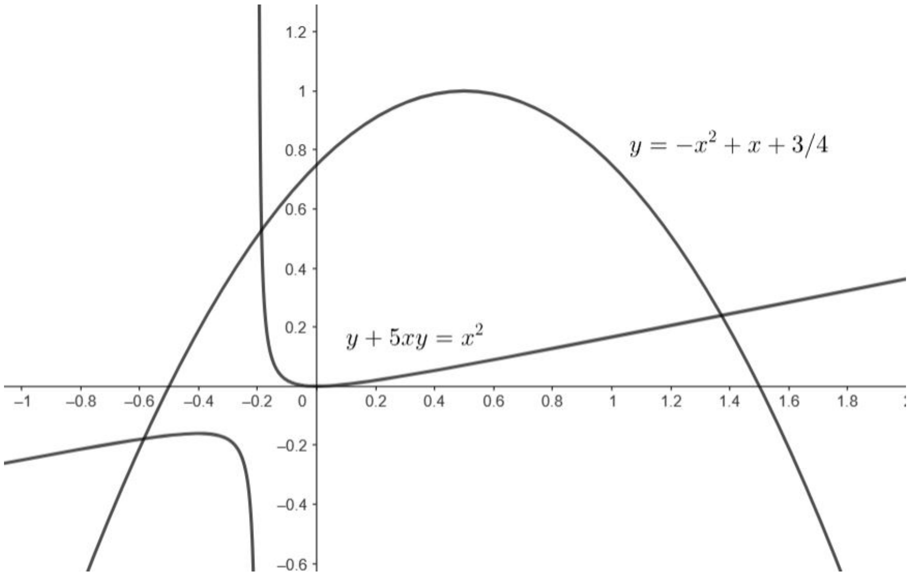
usando

a) **El método de Punto Fijo multivariable.** (2pts)

b) **El método de Newton multivariable.** (2pts)

Considere una tolerancia de 10^{-5}.

Solución.
Debemos buscar tres soluciones



a) Método del punto fijo:
Para $\boldsymbol{F(x,y) = (\frac{x-y+0{,}75}{x}, \frac{x^2}{1+5x})}$ y con $\boldsymbol{X^{(0)} = [1{,}4; 0{,}3]}$ tenemos $\boldsymbol{X = [1{,}37206304; 0{,}2395014]}$ después de 11 iteraciones.
Para $\boldsymbol{F(x,y) = (\frac{x^2-y}{5y}, -x^2+x+0{,}75)}$ y con $\boldsymbol{X^{(0)} = [-0{,}6; -0{,}2]}$ tenemos $\boldsymbol{X = [-0{,}18679157; 0{,}528}$
después de 15 iteraciones.

b) Con el método de Newton definimos $\boldsymbol{F(x,y) = \begin{bmatrix} y + x^2 - x - 0{,}75 \\ y + 5xy - x^2 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{DF = \begin{bmatrix} 2x-1 & 1 \\ 5y-2x & 1+5x \end{bmatrix}}$
$\boldsymbol{X^{(0)} = [-0{,}6; -0{,}2]}$ tenemos $\boldsymbol{X = [-0{,}5852738; -0{,}17781921]}$ después de 3 iteraciones.

□

5. Trabajo de laboratorio (4pts)

UNI, 20 de noviembre de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX