Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 06

---

1. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 290 \\ x + y &= 24 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

2. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 77 \\ xy + y^2 &= 44 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

3. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ y + 3 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

4. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x - 2y^2 &= 0 \\ y + 5 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

5. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - \frac{3}{4}y &= 0 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

6. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 8 \\ xy &= -3 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

7. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} xy &= 15 \\ \frac{x}{y} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

8. **Sea el sistema de ecuaciones no lineales**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 &= 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía implementado.

9. **Suponga que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edad. El número medio de crías hembras de la primera clase es de 1,5 y el de la segunda es de 2. En cada periodo el 8 % de la primera pasa a la segunda. Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase de edad. Estudie el comportamiento de la población a largo plazo.**

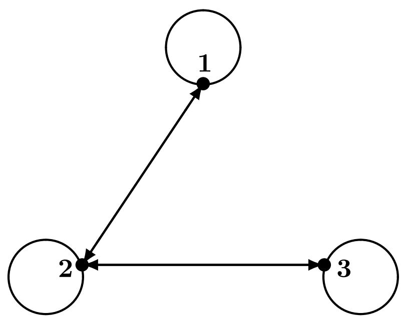
   a) **Indique las variables a usar.**

   b) **Determine la matriz que define la población.**

   c) **Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.**

   d) **Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.**

10. **Las páginas de internet públicas es un gran grafo dirigido, donde cada página web es un nodo en el cual hay una arista orientada entre páginas que citan a otras páginas. Sea A el grafo de una página de internet, dado por el gráfico**



   a) **Indique las variables a usar.**

   b) **Determine la matriz de adyacencia del grafo A.**

   c) **Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.**

d) Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.

11. Un territorio está dividido en dos zonas Z_1 y Z_2 entre las que habita una población de aves. Cada año y debido a diversas razones (disponibilidad de alimentos, peleas por el territorio, etc.) se producen las siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:

    a) En Z_1: un 60 % permanece en Z_1 y un 40 % migra a Z_2.

    b) En Z_2: un 20 % migra a Z_1 y un 80 % permanece en Z_2.

    Supongamos que tenemos una situación inicial en la que de la población total de aves un 60 % viven en Z_1, un 40 % viven en Z_2.

    a) Indique las variables a usar.

    b) Determine la matriz que define la migración.

    c) Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.

    d) Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.

12. En el Departamento de San Martín en el 2017 cuenta con 210 790 familias, donde el 20 % de las rentas familiares anuales son bajos, el 70 % es considerado mediana y el 10 % es alta.
    Se sabe que, año tras año, un 70 % de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20 % pasan a renta media y un 10 % a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60 %, pasando un 30 % a renta baja y un 10 % a renta alta. Por último, el 60 % de las rentas altas se mantienen, pasando un 30 % a rentas medias y un 10 % a rentas bajas.
    Ayude a las autoridades del Departamento que pierdan el temor, no existe una distribución de renta estable.

    a) Modele el problema.

    b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

    c) Determine los valores y vectores propios usando los métodos dados en clase.

    d) Indique si la distribución de renta es estable.

13. Una población de aves tiene un territorio dividido en tres regiones R_1, R_2 y R_3. Cada año y debido a diversas razones se produce las migraciones entre las distintas regiones:
    En R_1, un 60 % permanece en R_1, un 10 % emigra a R_2 y un 30 % emigra a R_3.
    En R_2, un 10 % emigra a R_1, un 80 % permanece en R_2 y un 10 % emigra a R_3.
    En R_3, un 10 % emigra a R_1, un 20 % emigra a R_2 y un 70 % permanece en R_3.
    Además la situación inicial de 100 aves que es la población total, que el 30 % viven en R_1, un 20 % viven en R_2 y un 50 % viven en R_3.

    a) Modele el problema.

    b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

    c) Determine los valores y vectores propios.

d) Indique si la distribución de renta es estable.

14. Consideremos una población de animales hembras que tienen una esperanza máxima de vida de 24 meses. Dicha población está dividida en tres grupos de edad: las crías que tienen menos de 8 meses, las jóvenes que tienen al menos 8 meses y menos de 16 meses y las adultas que tienen al menos 16 meses y menos de 24. Se hacen recuentos periódicos de la población cada 8 meses. Se supone que todas las adultas mueren al pasar de uno a otro recuento. Se sabe que en cada período $\frac{1}{4}$ de las crías llegan a jóvenes y $\frac{2}{3}$ de las jóvenes llegan a adultas. Las crías no se reproducen, el número medio de crías hembras por cada hembra joven es de 2 y por cada hembra adulta es de 3. Inicialmente hay 200 crías, 100 jóvenes y 80 adultas.

    a) Modele el problema.

    b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

    c) Determine los valores y vectores propios.

    d) Indique la evolución de dicha población.

15. Supongamos que al realizar estudios climáticos en una determinada zona obtenemos los siguientes datos. Si un día es caluroso, entonces la probabilidad de que el día siguiente sea también caluroso es $\frac{3}{5}$, y la probabilidad de que haga frío $\frac{2}{5}$. Por otro lado, si un día es frío, entonces $\frac{1}{5}$ es la probabilidad de que el día siguiente siga siendo frío y $\frac{4}{5}$ de que sea un día caluroso. Inicialmente tenemos que $(1,0)T$.

    a) Modele el problema.

    b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

    c) Determine los valores y vectores propios.

    d) Indique la probabilidad de un día sea frío o caluroso.

16. Considere la ecuación $x^2 - sen^2(x) = 0$, la cual tiene una raíz $\alpha \in \Omega = [0,1]$. Se pretende calcular esa raíz a través de la aplicación del método iterativo de punto fijo con una función iteradora de la forma $g(x) = x - \lambda(x - sen(x+1))$ con $\lambda \neq 0$.

    a) Verifique que la raíz α es de hecho un punto fijo de la función g en el intervalo Ω.

    b) Considerando $\lambda = 0{,}5$, demuestre que el método iterativo de punto fijo asociado a g converge para α cualquiera que sea el punto inicial $x_0 \in \Omega$.

    c) Determine el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación x_n con un error absoluto no superior a 10^{-6}.

17. Considere la función $f(x) = x^N - A$ donde N y A son enteros positivos mayores que 1. Se puede resolver la ecuación $f(x) = 0$ usando la siguiente fórmula recursiva $x_{k+1} = \dfrac{(N-1)x_k + A/x_k^{N-1}}{N}$ para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Se pide:

a) Demuestre que el esquema definido constituye una función de punto fijo y si converge lo hace a la solución exacta.

b) Determine el orden de convergencia de esta iteración estableciendo el parámetro al término principal de error.

c) Use la iteración para determinar el valor de $\sqrt[3]{7}$ y con 4 decimales de exactitud al menos, iniciando con $x_0 = 3$.

18. Considere el sistema mostrado:

$$\begin{aligned} x^2 + x - y^2 &= 1 \\ y - sen(x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Determine una raíz del sistema considerando como punto inicial $x^{(0)} = (0{,}7, 0{,}5)$ y hacer iteraciones hasta obtener tres cifras decimales exactas, tanto para x como para y.

19. Use el método de Newton para encontrar una raíz del sistema no lineal:

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y + 52x &= 19 \\ 169x^2 + 3y^2 + 11x - 10y &= 10. \end{aligned}$$

20. Comenzando en $(0, 0, 1)$, efectúe una iteración del método de Newton para sistemas no lineales con el sistema:

$$\begin{aligned} xy - z^2 &= 1 \\ xyz - x^2 + y^2 &= 2 \\ e^x - e^y + z &= 3. \end{aligned}$$

Explique los resultados.

21. Efectúe dos iteraciones del método de Newton con los siguientes sistemas:

a) Comenzando en $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} 4x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ 4x_1x_2^2 - x_1 &= 1. \end{aligned}$$

b) Comenzando en $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} xy^2 + x^2y + x^4 &= 3 \\ x^3y^5 - 2x^5y - x^2 &= -2. \end{aligned}$$

22. Considere el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} -x_1^2 + 8x_1 - x_2^2 - 6 &= 0 \\ -x_1^2x_2 - x_1 + 8x_2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

a) Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.

b) Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.

c) Demuestre (sin iterar) que el método de Newton converge a alguna solución del sistema. ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos?

d) Realice 2 iteraciones con el método propuesto, comenzando con $(0,0)$ (especifique cual de los métodos está usando).

23. Aplíquese el método del punto fijo para sistemas no lineales para aproximar la solución de los sistemas no lineales siguientes, iniciando en $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ e iterando hasta que $||P_{i+1} - P_i|| \leq 10^{-5}$.

    a) $P_0 = (0{,}1, 0{,}1, -0{,}1)$

$$\begin{aligned} 3x_1 - cos(x_2x_3) + \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 - 0{,}1)^3 + sen(x_3) + 1{,}06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{(10\pi - 3)}{3} &= 0 \end{aligned}$$

    b) $P_0 = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2cos(x_2x_3) - 1 &= 0 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + sen(x_3) + 1{,}06} + 0{,}9 &= 0 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 &= 0 \end{aligned}$$

24. Considere el sistema lineal $Ax = b$ donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ siendo A una matriz invertible. Si aplicamos el método de Newton para sistemas no lineales, ¿Cuántas iteraciones se irán a realizar?

25. Suppose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ has continuous first derivatives, and x^* is a fixed point of g such that:

$$\left|\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_l}\right| < \frac{1}{5}$$

    for $j = 1, 2$ and $l = 1, 2$.
    Show that there exists an $\varepsilon > 0$ such that for all $x^{(0)} \in \overline{B}_\varepsilon(x^*)$ the sequence $\{x^{(k)}\}, x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ converges to x^* and satisfies:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|_\infty}{\|x^{(k)} - x^*\|_\infty} < \frac{1}{2}$$

    for all k. Recall that $\overline{B}_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - x^*\|_\infty \leq \varepsilon\}$.

26. Consider a 2D fixed point iteration of the form:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= g(x_k, y_k) \end{aligned}$$

    Assume that the vector-value function $h(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ is continuously differentible, and the infinity norm of the Jacobian matrix is less than 1 at a unique fixed point (x_∞, y_∞).
    Now consider the *nonlinear Gauss-Seidel* version of the iteration:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= g(x_{k+1}, y_k) \end{aligned}$$

    Prove that the *nonlinear Gauss-Seidel* version is convergent, to the same fixed point, for initial conditions sufficiently close to the fixed point.

27. Using Newton's method for nonlinear systems, solve for all roots of the following nonlinear system. Use graphs to estimate initial guesses:

a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0, \quad x+y-2xy=0.$

b) $x^2+2xy+y^2-x+y-4=0, \quad 5x^2-6xy+5y^2+16x-16y+12=0.$

28. Use functional iteration to find solutions to the following nonlinear systems, accurate to within 10^{-5}, using the l_∞ norm:

$$\begin{aligned} x_1^2+2x_2^2-x_2 2x_3 &= 0\\ x_1^2-8x_2^2+10x_3 &= 0\\ \frac{x_1^2}{7x_2x_3}-1 &= 0 \end{aligned}$$

29. Use Broyden's method with $x^{(0)}=(-1,-2,1)^T$ to compute $x^{(2)}$ for each of the following nonlinear systems:

$$\begin{aligned} x_1^3+x_1^2x_2-x_1x_3+6 &= 0\\ e^{x_1}+e^{x_2}-x_3 &= 0\\ x_2^2-2x_1x_3 &= 4 \end{aligned}$$

30. Use Broyden's method with $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ to compute $x^{(2)}$ for each of the following nonlinear systems:

$$\begin{aligned} 6x_1-2cos(x_2x_3)-1 &= 0\\ 9x_2+\sqrt{x_1^2+sen(x_3)+1{,}06}+0{,}9 &= 0\\ 60x_3+3e^{-x_1x_2}+10\pi-3 &= 0 \end{aligned}$$

31. Use Broyden's method to approximate solutions to the following nonlinear systems. Iterate until $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<10^{-6}$.

$$\begin{aligned} 15x_1+x_2^2-4x_3 &= 13\\ x_1^2+10x_2-x_3 &= 11\\ x_2^3-25x_3 &= -22 \end{aligned}$$

32. Use Broyden's method to approximate solutions to the following nonlinear systems. Iterate until $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<10^{-6}$.

$$\begin{aligned} 10x_1-2x_2^2+x_2-2x_3-5 &= 0\\ 8x_2^2+4x_3^2-9 &= 0\\ 8x_2x_3+4 &= 0 \end{aligned}$$

33. Use the continuation method and Runge-Kutta method of order two on the following nonlinear systems:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1-cos(x_2x_3)-\frac{1}{2} &= 0\\ 4x_1^2-625x_2^2+2x_2-1 &= 0\\ e^{-x_1x_2}+20x_3+\frac{10\pi-3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2-37 &= 0\\ x_1-x_2^2-5 &= 0\\ x_1+x_2+x_3-3 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13 \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11 \\ x_2^3 - 25x_3 &= -22 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0 \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0 \\ 8x_2x_3 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

34. Use the continuation method and Runge-Kutta method of order four on the following nonlinear systems:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13 \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11 \\ x_2^3 - 25x_3 &= -22 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0 \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0 \\ 8x_2x_3 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

35. Solve the system of equations:

$$x - 2y + y^2 + y^3 - 4 = -x - y + 2y^2 - 1 = 0,$$

by the homotopy method, starting with the point $(0, 0)$.

36. If the homotopy method is to be used on the system:

$$sen(x) + cos(y) + e^{xy} = \arctan(x + y) - xy = 0,$$

starting at $(0, 0)$, what is the system of differential equations that will govern the path?

21 de Junio del 2023