Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Curso: CM4F1 - Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Calificada Nro. 2

1. **Considere un computador con longitud de palabra de 12 bits. Se considera la representación IEEE 754 donde considera 1 bit para el signo, 5 bits para el exponente y los bits restantes para la mantisa. Se pide:**

   (a) **Represente 5 en este computador. [0.5 pto.]**

   (b) **Represente $\frac{3}{13}$ en este computador. [0.5 pto.]**

   (c) **Usando los items anteriores, resuelva la ecuación: [2 ptos.]**

   $$x - \frac{3}{13} = 5.$$

   (d) **Exprese en base 10 la solución obtenida y calcule el error relativo, sabiendo que la solución exacta es: $\frac{68}{13} \approx 5.23077$. [1 pto.]**

   Solución:

   En representación IEEE754 se considera base 2 y el sesgo $S = 2^{n-1} - 1$ donde n es el número de bits asociados al exponente. En este caso, $n = 5$, entonces el sesgo $S = 2^4 - 1 = 15$. La solución de la ecuación es:

   $$x = 5 + \frac{3}{13}.$$

   Luego:

   $$5 = 101_2 = 1.01 \times 2^2, \quad \text{y} \quad \frac{3}{13} = 0.001110110001\ldots_2 = 1.110110001\ldots_2 \times 2^{-3}$$

   Su representación en el computador:

   (a) **Para 5:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Signo	*Exponente*					*Mantisa*					
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0

   (b) **Para $\frac{3}{13}$:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Signo	*Exponente*					*Mantisa*					
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0

(c) Del item anterior se tiene:

$$\mathrm{fl}(5) = 0.101 \times 2^3 \quad \text{y} \quad \mathrm{fl}\left(\frac{3}{13}\right) = 0.111011 \times 2^{-2}$$

La solución viene dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}(5) + \mathrm{fl}\left(\frac{3}{13}\right) &= \mathrm{fl}(0.101 \times 2^3 + 0.111011 \times 2^{-2}) \\
&= \mathrm{fl}(0.1010000000 \times 2^3 + 0.00000111011 \times 2^3) \\
&= \mathrm{fl}(0.10100111011 \times 2^3) \\
&= 0.1010100 \times 2^3
\end{aligned}$$

(d) El resultado, en base 10 es:

$$0.1010100 \times 2^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right) \times 2^3 = 5.25,$$

por tanto, el error relativo es:

$$ER = \frac{5.23077 - 5.25}{5.23077} \approx -0.003676$$

2. Muestre que la siguiente sucesión:

$$I_0 = \log\left(\frac{6}{5}\right), \quad I_k = \frac{1}{k} - 5I_{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

no es apropiada para aproximar la integral:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x}\, dx,$$

a pesar que funciona en aritmética infinita. [4 ptos.]

Solución:

Sea $\tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon$ el valor aproximado de I_0. Luego, a partir de:

$$I_k = \frac{1}{k} - 5I_{k-1}$$

se obtiene:

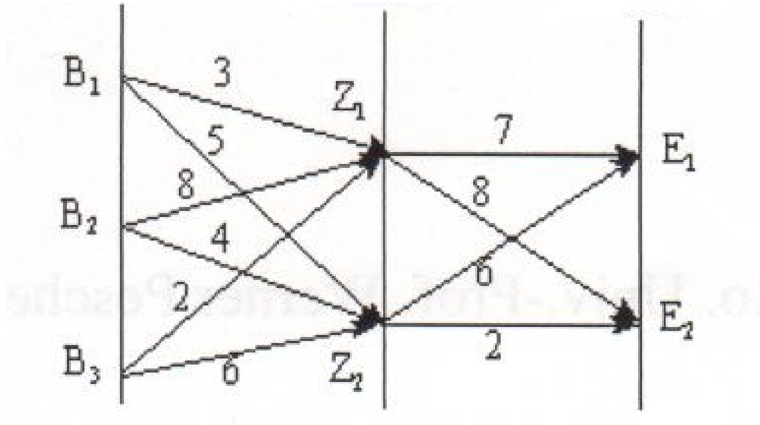
$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \frac{1}{1} - 5\tilde{I}_0 = 1 - 5(I_0 + \varepsilon) = I_1 - 5\varepsilon \\
\tilde{I}_2 &= \frac{1}{2} - 5\tilde{I}_1 = \frac{1}{2} - 5(I_1 - 5\varepsilon) = I_2 + 5^2\varepsilon \\
\tilde{I}_3 &= \frac{1}{3} - 5\tilde{I}_2 = \frac{1}{3} - 5(I_2 + 5\varepsilon) = I_3 - 5^3\varepsilon \\
&\vdots \\
\tilde{I}_n &= \frac{1}{n} - 5\tilde{I}_{n-1} = \frac{1}{n} - 5(I_{n-1} + 5\varepsilon) = I_n + (-1)^{n-1}5^{n-1}\varepsilon
\end{aligned}$$

Usando inducción se prueba que:

$$\tilde{I}_n = I_n + (-1)^{n-1}5^{n-1}\varepsilon$$

Observe que el error crece según las potencias de 5. Por ello, el algoritmo no es estable.

3. Una fábrica utiliza tres productos primarios (B_i) para producir dos productos intermedios (Z_i), que a su vez estos producirán dos productos finales (E_i). Las cantidades requeridas para la producción son:



La demanda externa de unidades es cinco de B_1, diez de B_3, cinco de Z_1, dos de Z_2, tres de E_1 y cuatro de E_2. Determine la demanda total que se necesita por cada producto según los siguientes requerimientos.

(a) [1 *pto.*] Indique las variables.

(b) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(c) [1 *pto.*] La solución aproximada usando las transformaciones de Gauss-Jordan.

(d) [1 *pto.*] Qué puede decir de la solución encontrada.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

x_1 : **Cantidad total de demanda requerido de B_1.**
x_2 : **Cantidad total de demanda requerido de B_2.**
x_3 : **Cantidad total de demanda requerido de B_3.**
x_4 : **Cantidad total de demanda requerido de Z_1.**
x_5 : **Cantidad total de demanda requerido de Z_2.**
x_6 : **Cantidad total de demanda requerido de E_1.**
x_7 : **Cantidad total de demanda requerido de E_2.**

(b) [1 *pto.*] La demanda total es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

El sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] Por las transformaciones de Gauss-Jordan, y la solución aproximada son:

$$A^{-1} = T_7T_6T_5T_4T_3T_2T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 51 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & 80 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 50 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 319 \\ 576 \\ 294 \\ 58 \\ 28 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Donde $T_1 = I = T_2 = T_3$ y conjuntamente con los demás lo debe dar el programa.

(d) [1 *pto.*] Debemos tener:

$$R = Ax - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

además $Cond_\infty(A) = 2640$, $\|b\|_\infty = 10$ y $\|R\|_\infty = 0$, el error relativo de la solución es:

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{Cond_\infty(A)\|b\|_\infty} \leq E_r \leq Cond_\infty(A)\frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0$$

Se concluye que la solución aproximada es la exacta.

4. Determine un polinomio de tercer grado tal que:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 6,\ f'(1) = 5 \ \wedge \ f''(2) = -6.$$

según los siguientes requerimientos:

(a) [1 *pto.*] Indique las variables.

(b) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(c) [1 *pts.*] La solución aproximada usando los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

(d) [1 *pto.*] Qué puede decir de la solución encontrada.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} a &: \text{ Coeficiente del término cúbico.} \\ b &: \text{ Coeficiente del término cudrático.} \\ c &: \text{ Coeficiente del término lineal.} \\ d &: \text{ Coeficiente del término constante.} \end{aligned}$$

(b) [1 *pto.*] Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$.

Evaluando

$x = 1$: $f(1) = 2 = a + b + c + d$ y $f'(1) = 5 = 3a + 2b + c$.

$x = 2$: $f(2) = 6 = 8a + 4b + 2c + d$ y $f''(2) = -6 = 12a + 2b$.

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(c) [1 *pto.*] Por el método de Gauss, tenemos:

$$\begin{aligned} E = E_3E_2E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.25 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$E * [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.25 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El polinomio de tercer grado es $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.

Por el método de Gauss-Jordan, tenemos:

$$\begin{aligned}
T = T_4T_3T_2T_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.25 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \\ 4.5 & -4.5 & 5.5 & 1.25 \\ -1 & 2 & -3 & -0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$T * [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El polinomio de tercer grado es $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.

(d) [1 *pto.*] **Como ambos métodos coinciden, tenemos:**

$$R = Bx - d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

además $Cond_\infty(A) = 236.25$, $\|b\|_\infty = 6$ y $\|R\|_\infty = 0$, el error relativo de la solución es:

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{Cond_\infty(A)\|b\|_\infty} \leq E_r \leq Cond_\infty(A)\frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0$$

Se concluye que la solución aproximada es la exacta.

UNI, 26 de Abril del 2023*

*Hecho en LaTeX