Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2023-1

[Análisis y Modelamiento Numérico I - CM4F1]
[Prof: Los Profesores] UNI, 12 de julio de 2023

Examen Final

1. Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R}$, de hecho f es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, y 0 es la única raíz de f. Demuestre que si $x_0 = 10^{-4}$, se necesitan más de cien millones de iteraciones del método de Newton para llegar por debajo de 5×10^{-5}. [5 ptos]

Solución: Por la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

Escribimos la iteración estándar del método de Newton. Los términos e^{-1/x_n^2} se cancelan y obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{2} \quad \text{o equivalentemente} \quad x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^3}{2}.$$

Observamos que si x_n está cerca de 0, entonces x_{n+1} está muy cerca de x_n, lo que significa que en cada iteración ganamos muy poca precisión. Considerando $x_0 = 10^{-4}$. Es fácil ver que $x_n > 0$ para todo n. Para $x_1 = x_0(1 - x_0^2/2)$, y en particular $0 < x_1 < x_0$. La misma idea muestra que $0 < x_2 < x_1$, y luego $0 < x_3 < x_2$, y así sucesivamente:

$$0 < \cdots < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1.$$

La diferencia $x_n - x_{n+1}$ siempre será positiva e igual a $x_n^3/2$, y en particular menor o igual a

$$(10^{-4})^3/2 = 5 \times 10^{-13}.$$

Así que en cada iteración existe una reducción de como máximo 5×10^{-13}. Luego, para pasar de 10^{-4} a 5×10^{-5} debemos reducir a lo más en

$$10^{-4} - 5 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-5}.$$

Por tanto, necesitaremos más de $(5 \times 10^{-5})/(5 \times 10^{-13})$, es decir, 10^8 iteraciones. (Más, porque a medida que nos acercamos a 5×10^{-5}, la reducción por iteración es menor de lo que estimamos).

2. Dado el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 - x + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - y + z^2 - 4 = 0 \\ f_3(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 + z - 6 = 0. \end{aligned}$$

Resolver el sistema utilizando el método de punto fijo con punto inicial $P_0 = [0\,0\,0]^t$, aproximación y analice su convergencia. [5 ptos]

Solución: Hacer $F(\underline{x}) = \underline{x} - G(\underline{x})$ donde $\underline{x} = (x, y, z)$ y $F = (f_1, f_2, f_3)$. Si

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial x}\right| < 1$$
$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial y}\right| < 1$$
$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial z}\right| < 1$$

El esquema numérico es $\underline{x}^{k+1} = G(\underline{x}^k)$. Debido a la continuidad de G, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} G(\underline{x}^{(k)}) = G(\underline{x}^*).$$

Con la norma Euclideana se mide el error

$$\text{Error} = \sqrt{(x^{(k)} - x^{(k-1)})^2 + (y^{(k)} - y^{(k-1)})^2 + (z^{(k)} - z^{(k-1)})^2} \to 0.$$

La solución aproximada es $\underline{x}^* = (-0{,}8471, 0{,}1529, 1{,}8471)$.

3. Dada la siguiente tabla de valores, para la Temperatura T ($°C$) y densidad del agua ρ (kg/m^3) Código

T	50	60	65	68	75	80
ρ	988	985.7	980.5	?	974.5	971.6

Mediante un polinomio cuadrático del método de interpolación de la forma de Newton con diferencias divididas halle la aproximación de la densidad ρ del agua para $T = 68$. [5 ptos]

Solución: Sea el polinomio de aproximación

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0 \cdots x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j),$$

donde

$$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k} \quad \text{para } k \in [0, n-i].$$

Por tanto, evaluando obtenemos

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 980.5 + (-0.6)(x - 65) + \left(\frac{0.02}{15}\right)(x - 65)(x - 75) \\ &= -0.6x + 1019.5 + \left(\frac{0.02}{15}\right)(x^2 - 140x + 4875). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_2(68) = -40.8 + 1019.5 + \left(\frac{0.02}{15}\right)(4624 - 9520 + 4875) \approx 978.672\ °C.$$

4. Dado 9 puntos $(x_i, f(x_i))$ con $x_i = 4 - i$, $i = 0, \cdots, 8$ y

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Mediante la interpolación de Lagrange, grafique la función exacta y la aproximada obtenida mediante la interpolación de Lagrange. [5 ptos]

Solución: Dada la base $\{L_i\}$ de polinomios de Lagrange del espacio de polinomios de grado a lo más n:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

El polinomio de interpolación P_n de f se puede expresar como

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x).$$

La gráfica de p y f es