Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Cuarta Práctica Calificada

1. **Un ejercicio realizado en clase consta de 16 preguntas. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio.**

   (a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

   (b) **[2 *pts.*] Determine la solución aproximada, usando el método de SOR.**

   (c) **[1 *pto.*] De (b). Indique cuando converge el método con $w < 1$ o $w > 1$.**

   Solución:

   (a) **[1 *pto.*] Sean**

$$\begin{aligned} x &: \text{ Número de respuestas correctas.} \\ y &: \text{ Número de respuestas mal contestadas.} \end{aligned}$$

   Donde, el sistema correcto es

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 32 \\ x & + & y & = & 16 \end{array}$$

   (b) **[2 *pts.*] Por el método de SOR, tenemos:**

$$L = D^{-1}E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \wedge U = D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   con

$$G(w) = \begin{bmatrix} 1-w & 0.6w \\ -w(1-w) & (-0.6w-1)w+1 \end{bmatrix} \wedge c = \begin{bmatrix} 6.4w \\ (16-6.4w)w \end{bmatrix}$$

   donde

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & 0.6w \\ -w(1-w) & (-0.6w-1)w+1 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 6.4w \\ (16-6.4w)w \end{bmatrix}$$

Considerando $w = 0.8$, la tabla es:

k	x_k	y_k	$Error$
0	0	0	
1	5.120000000	8.704000000	8.704000000
2	10.321920000	6.283264000	5.201920000
3	10.200350720	5.896372224	0.386891776
4	9.990328812	5.987011396	0.210021908
$\vdots$			
12	10.00000001	5.999999952	0.000000523

(c) [1 *pto.*] Al analizar los valores de w se observa que converge cuando $w = 0.8$.

2. Un barco que se halla en situación de emergencia, efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana, únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara la altura máxima del destello lo alcanza a 320 metros sobre el nivel del mar, transcurridos 8 segundos desde el disparo. Ayudale a los de la base naval, enviar la ayuda al barco.

   (a) [1 *pto.*] Modele el problema.

   (b) [2 *pts.*] Determine la solución usando el método de Descenso Rápido con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

   (c) [1 *pto.*] Escribe el algoritmo que satisface la condición de los métodos.

   Solución:

   (a) [1 *pto.*] Sean a, b y c los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &: \quad f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 \quad &: \quad f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 \quad &: \quad f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [2 *pts.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	-0.7961693	-0.1499104	
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.04648
2	-5.0000951	80.001895	-0.0094232	0.0000143	-0.000008	-0.0019375	0.0090598	0.05117
$\vdots$								
9	-5.0000558	80.001294	-0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

(c) [1 *pto.*] Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Si} & A == A' \\
\text{entonces} & \\
 & B \leftarrow A; \\
 & c \leftarrow b; \\
\text{sino} & \\
 & B \leftarrow A' \cdot A; \\
 & c \leftarrow A' \cdot b; \\
\text{fin si.} &
\end{array}
$$

3. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) [1 *pto.*] Si x, y son no nulos y $A-$ortogonales, siendo A semidefinida positiva, entonces x e y son linealmente independientes.

(b) [1.5 *pts.*] Una 3×3 matriz con ceros en su diagonal admite una permutación de sus columnas de manera que a la nueva matriz resultante se le puede aplicar el algoritmo Gauss-Seidel.

(c) [1.5 *pto.*] Dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, existe $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible tal que se genera una secuencia $\{x^k\}$ convergente, obtenida del sistema $Qx^{k+1} = (Q - A)x^k + b$, inicializando con $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución:

(a) [1 *pto.*] (F) Considerar $A = 0_{2\times 2}$ que es semidefinida positiva y $x = y = (1, 0)$ no nulos l.d. los cuales cumplen que $\langle Ax, y\rangle = 0$.

(b) [1.5 *pts.*] (F) Se puede aplicar el algoritmo si la matriz asociada tiene terminos diagonales no nulos. Considerando $A = 0_{3\times 3}$ no existe matriz de permutación que cambie los valores nulos de su diagonal.

Si adicionamos la hipótesis de ser invertible entonces es (V). Para ello es necesario obtener 3 terminos no nulos de A (las cuales serán las nuevas diagonales) con distintas filas y distintas columnas, entonces $\exists P$ matriz de permutación tal que PA cumple que $(PA)_{ii} \neq 0$.
-)Si $A_{i,j} \neq 0, \forall i \neq j$ entonces podemos obtener los 3 terminos pedidos.
-)Si $\exists A_{i,j} = 0$ con $i \neq j$, entonces $det(A) = A_{i,j} det(M_{i,j})$ siendo $M_{i,j}$ la submatriz con al menos un termino 0, luego como $det(A) \neq 0$, se obtienen los 3 terminos pedidos.

(c) [1.5 *pts.*] (V) Se tiene la secuencia $x^{k+1} = (I - Q^{-1}A)x^k + b$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la cual es convergente si y solo si $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$. Por tanto basta determinar un Q adecuado tal que $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$ que puede ser $Q = \frac{1}{2}A$, obteniendo lo pedido.

4. (a) [2 *pts.*] Muestre que dado $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no nula simetrica semidefinida positva y $b \in Im(A)$. Es posible aplicar el algoritmo del gradiente conjugado al sistema $Ax = b$, inicializando con x_0 tal que $Ax_0 \neq b$. Obteniendo en la primera iteración el vector dirección p^k igual a cero.

   (b) [2 *pts.*] Dados los vectores $c_1 = [1, 2, 3]$, $c_2 = [1, 1, 1]$, sea la matrix $M = c_1^t c_1 + 2c_2^t c_2 + I_{3\times 3}$. Mostrar que M es definida positiva, luego aplicar el algoritmo del gradiente conjugado al sistema $Mx = [6, 9, 11]^t$.

Solución:

(a) [2 *pts.*] La posibilidad de aplicar el algoritmo equivale a que $\langle p^k, Ap^k\rangle \neq 0, \forall k = 0, \cdots, n-2$, al ser $A \geq 0$ simetrica lo anterior equivale a que $p^k \notin Ker(A)$. En el caso $n = 2$, basta mostrar que $p^0 \notin Ker(A)$, lo cual se cumple pues $0 \neq b - A(x_0) = p^0 \in Im(A) = (Ker(A))^\perp$.
Ahora mostraremos que $p^1 = 0$. Al ser $\langle p^0, Ap^0\rangle \neq 0$ se tiene que $\langle p^1, Ap^0\rangle = 0$, luego como $dim(ImA) = 1$, entonces $Ap^1 \in (Im(A))^\perp \cap Im(A)$, por tanto $p^1 \in Ker(A)$ y como $p^1 = r^0 + \alpha_0 Ap^0 + \beta_0 p^0 \in Im(A)$, se obtiene finalmente que $p^1 \in Ker(A) \cap Im(A) = \{0\}$.

(b) [2 *pts.*] Se tiene que $\langle Mx, x\rangle = (c_2x)^2 + 2(c_1x)^2 + ||x||^2 > 0, \forall x \neq 0$, por tanto $M > 0$ y simetrica. Aplicando el algoritmo de la gradiente conjugada obtenemos los iterados

$$x^{(1)} = (0.2951, 0.4427, 0.5410); \quad x^{(2)} = (0.5421, 0.7281; \quad x^{(3)} = (0.4545; 0.8181, 0.1818).$$

22 de Junio del 2022