Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I] **Examen Parcial.**
[Prof: L. Roca, I. Mantilla, C. Salinas.] **Duración:** 110 **minutos.**

---

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   a) If A is nonsingular, then has LU factoring. [1 pt.]

   b) If $A_{n\times n}$ is positive definite, then $\det(A) > 0$. [1 pt.]

   c) Gaussian elimination transforms a matrix into an upper triangle. [1 pt.]

   Solución.

   a) False, by example $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) True. Let $B(t) = tI + (1-t)A$, $t \in [0,1]$, $f(t) = \det(B(t))$, $f(0) = \det(A)$, $f(1) = 1$. For $X \neq 0$, $X^T B(t) X = tX^T X + (1-t)X^T A X > 0$ implies B is non-singular, $\det(B) \neq 0$ and f not is zero. Since f is continuous and $f(1) > 0$ then $\det(A) = f(0) > 0$.

   c) True. In general $A = PLU$, P is a permutation matrix, L is lower triangle, and U is upper triangle.

   $\square$

2. El coeficiente binomial $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, describe el número de maneras de escoger un subconjunto de k objetos en un conjunto de m elementos.

   a) Si los números de maquina son de la forma $\pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \times 10^n$, $|n| \leq 15$, ¿cual es el mayor valor de m para el cual $\binom{m}{k}$ puede calcularse para todo k sin error de desbordamiento? [2 pts]

   b) Si $\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\dots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$, ¿cual es el mayor valor de m para el cual $\binom{m}{3}$ puede calcularse sin error de desbordamiento? [2 pts]

   Solución.

   a) El mayor número de maquina es $0{,}9999 \times 10^{15} \approx 10^{15}$, como $10^{14} < 17! < 10^{15}$ entonces $m = 17$.

   b) $\binom{m}{3} = \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{1}\right)$. entonces buscamos que $\binom{m}{3} \approx 10^{15}$, $m \approx \sqrt{6} \times 10^5$.

   $\square$

3. *a*) Obtenga una factorización LU de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ [2 pts]

   b) Sean $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ simétrica y $A = LU$ una factorización LU. Muestre que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ la columna k de L y la fila k de U son l.d. [3 pts]

   Solución.

a) Podemos tomar por ejemplo $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & -0{,}2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 3,6 \end{bmatrix}$

b) Recordemos las relaciones existentes en la factorización LU:

$$l_{i,i}u_{i,i} = a_{i,j} - \sum_{k<i} l_{i,k}u_{k,i} \tag{1}$$

$$l_{i,i}u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k<i} l_{i,k}u_{k,j}, \quad \text{para } i < j \tag{2}$$

$$u_{j,j}l_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k<j} l_{i,k}u_{k,j}, \quad \text{para } j < i \tag{3}$$

Además, denotando $i \wedge j := \text{mín}\{i,j\}$, como A es simétrica tenemos

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ [A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{i\wedge j} l_{i,k}u_{k,j} = \sum_{k=1}^{i\wedge j} u_{k,i}l_{j,k} = [A^t]_{i,j} \tag{4}$$

Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ fijo verifiquemos que:

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ u_{i,i}l_{j,i} - l_{i,i}u_{i,j} = 0. \tag{5}$$

En caso afirmativo ésto respondería a la pregunta inicial pues tendríamos:

$$u_{i,i}(\text{columna } i \text{ de L}) - l_{i,i}(\text{fila } i \text{ de U}) = \text{vector } 0.$$

1) Caso $i = j$: Reemplazando tenemos

$$u_{i,i}l_{i,i} - l_{i,i}u_{i,i} = 0$$

2) Caso $j < i$: Usando que $l_{j,i} = u_{i,j} = 0$ para $j < i$ tenemos

$$u_{i,i}l_{j,i} - l_{i,i}u_{i,j} = 0$$

3) Caso $i < j$: Usando las ecuaciones (3) (cambiando i por j) y (2), además de la simetría de A y (4) tenemos:

$$\begin{aligned} u_{i,i}l_{j,i} - l_{i,i}u_{i,j} &= a_{j,i} - \sum_{k<i} l_{j,k}u_{k,i} - \left[a_{i,j} - \sum_{k<i} l_{i,k}u_{k,j}\right] \\ &= \sum_{k<i} l_{i,k}u_{k,j} - \sum_{k<i} l_{j,k}u_{k,i} \\ &= \sum_{k\le i} l_{i,k}u_{k,j} - \sum_{k\le i} l_{j,k}u_{k,i} = 0. \end{aligned}$$

donde en la última línea se usó fuertemente el hecho que $i < j$ para completar el índice $k = i < j$.

$\square$

4. Dada la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre los valores de α y β, para los cuales

a) A es estrictamente dominante. [1 pt.]

b) A es singular. [1 pt.]

c) A sea simétrica. [1 pt.]

d) A sea definida positiva. [1 pt.]

Solución.

a) Tenemos las condiciones: $|\alpha| > 1 > |\beta|$. Es decir $\alpha \in \langle -\infty, -1\rangle \cap \langle 1, +\infty\rangle$, $\beta \in \langle -1, 1\rangle$

b) $\det(A) = 0 \iff 3\alpha = 2\beta$.

c) $A = A^T \iff \alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1$.

d) Con $\beta = 1$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ entonces completando cuadrados

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \alpha x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_2 \\ &= \alpha \left(x_1 + \frac{x_2}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) x_2^2 + 2\left(x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Como $x^T Ax > 0$ para $x \neq 0$ entonces podemos escoger $x_2 \neq 0$, $x_1 = -\frac{x_2}{\alpha}$,$x_3 = -\frac{x_2}{2}$, luego $x^T Ax = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) x_2^2 > 0 \implies \alpha > \frac{2}{3}$

□

5. Dados los siguientes sistema de ecuaciones $AX = B$ y la condición inicial $X_0 = (0, 0)^t$, halle el vector X_k, para $k = 1, 2, 3$.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ con el método de Jacobi y evaluar la convergencia con la norma $\|\|_2$. [2 pts]

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ con el método de Gauss-Seidel y evaluar la convergencia con la norma $\|\|_2$. [2 pts]

Solución.

a) $X_1 = (-1, -1)^t$, $X_2 = (-4, -4)^t$, $X_3 = (-13, -13)^t$. La matriz de iteración de Jacobi es $I - Q^{-1}A$ donde $Q = diag([1/a_{11}, 1/a_{22}]))$. La sucesión no converge pues vemos que $\rho(I - Q^{-1}A) = 3 > 1$.

b) $X_1 = (3{,}75, 1{,}05)^t$, $X_2 = (4{,}0125, 0{,}9975)^t$, $X_3 = (3{,}9901, 1{,}000)^t$. La sucesión converge la solución exacta $X = (4, 1)^t$, pues A es tiene diagonal estrictamente dominante.

□

UNI, 9 de mayo de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX