**Universidad Nacional de Ingeniería**
**Facultad de Ciencias**
**Escuela Profesional de Matemática** **Ciclo 2024-2**

**[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]** **Práctica Calificada 4**
**[Prof: L. Roca, A. Ramirez, M. Quiñones. ]** **Duración: 110 minutos.**

SOLUCIONARIO

---

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   *a*) If $A$ is non-singular and has orthogonal factorization $QR$ then $R$ is invertible and the least-squares solution for $Ax = b$ is $x = R^{-1}Q^Tb$. (1pts)

   *b*) If $Q_1$ and $Q_2$ are orthogonal matrices then $Q_1 \cdot Q_2^T$ is also orthogonal. (1pts)

   *c*) The constants $a$ and $b$ of the model $y = \frac{b\sqrt{x}}{x+a}$ can be found by solving a least squares problem. (1pts)

   *d*) If $A$ is a square matrix and has orthogonal factorization $QR$ then $|\det(A)| = |\det(R)|$. (1pts)

*Solución.*

*a*) True. If $A = QR$ then $R = Q^TA$ is non-singular and $R^{-1} = A^{-1}Q$. If $x = R^{-1}Q^Tb$

$$Ax = A(R^{-1}Q^Tb) = A(A^{-1}QQ^Tb) = b$$

*b*) True, by definition. $(Q_1Q_2^T)(Q_1Q_2^T)^T = Q_1Q_2^TQ_2Q_1^T = I$

*c*) True. Si $(x_i, y_i)$ is data then

$$y_ix_i + ay_i = b\sqrt{x_i}$$

By change variables $b_i = x_iy_i$, $Y_i = -y_i$, $X_i = \sqrt{x_i}$ get

$$aY_i + bX_i = b_i$$

*d*) True. $QQ^T = I$ then $\det(Q)^2 = 1$ and $|\det(Q)| = 1$. If $A = QR$ then $|\det(A)| = |\det(Q)||\det(R)|$

$\square$

2. Let $H$ be the Householder matriz with vector $v = x + \|x\|_2e_m$, where $x, e_m \in \mathbb{R}^n$ and $e_m$ is the $m-$th unit vector (the $m-$th entry is 1), the rest entries are equal to 0. Show that:

$$Hx = -\|x\|_2e_m$$

(4pts)

*Solución.*
Siendo la matriz de Householder:

$$Hx = \left(I - 2\frac{vv^T}{\|v\|_2^2}\right)x$$

y reemplazando $v = x + \|x\|_2e_m$, resulta:

$$Hx = x - 2\frac{\|x\|_2^2 + \|x\|_2\langle x, e_m\rangle}{\|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\langle x, e_m\rangle + \|x\|_2^2}(x + \|x\|_2e_m)(x + \|x\|_2e_m) = x - (x + \|x\|_2e_m) = -\|x\|_2e_m$$

$\square$

3. Dada la matriz de Givens, $m \times m$, de la forma

$$G_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & \cdots & S & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -S & \cdots & C & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

Con $C^2 + S^2 = 1$, $C \neq 0$, $1 \leq i \leq k \leq m$. Una rotación de Givens, se distingue de la matriz identidad, solamente por los elementos de las posiciones $(i,i)$, $(i,k)$, $(k,i)$, $(k,k)$.

*a*) Demuestre que $G_{ik}$ son matrices ortogonales. (1pts)

*b*) Dado $x \in \mathbb{R}^m$, demuestre que $y = G_{ik}x$ está dado por:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ Cx_i + Sx_k \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ -Sx_i + Cx_k \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{cases} Cx_i + Sx_k, & \text{para } j = i \\ -Sx_i + Cx_k, & \text{para } j = k \\ x_j & \text{para } j \neq i, k \end{cases}$$

(1pts)

*c*) Encuentre la matriz de Givens, $G_{12}$ que anula la entrada (1,2) de la matriz $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 63 & 41 & -88 \\ 42 & 60 & 51 \\ 0 & -28 & 56 \\ 126 & 82 & -71 \end{bmatrix}$$

(1pts)

*d*) ¿Que efecto hace $G_{12}$ sobre la matriz $A$? (1pts)

*Solución.*

*a*) En efecto: $G_{ik}(G_{ik})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & C^2+S^2 & \cdots & -CS+CS & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & -CS+CS & \cdots & C^2+S^2 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$

*b*) Aplicando el producto de matrices $G_{ik}x$ tenemos

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ Cx_i + Sx_k \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ -Sx_i + Cx_k \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

*c*) Para $y = [41, 60, -28, 82]^T$ tenemos que $G_{12}y = \begin{bmatrix} 41C + 60S \\ -41S + 60C \\ -28 \\ 82 \end{bmatrix}$, si $41C + 60S = 0$ entonces $S = -\frac{41}{60}C$ y como $C^2 + S^2 = 1$ entonces $C = \frac{60}{\sqrt{5281}} = 0{,}825645$, luego $S = -\frac{41}{\sqrt{5281}} = -0{,}56419$.

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0{,}825645 & -0{,}56419 & 0 & 0 \\ 0{,}56419 & 0{,}825645 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*d*) $G_{12}A = \begin{bmatrix} 28{,}3197 & 0{,}0000 & -101{,}4304 \\ 70{,}2211 & 72{,}6705 & -7{,}5408 \\ 0 & -28{,}0000 & 56{,}0000 \\ 126{,}0000 & 82{,}0000 & -71{,}0000 \end{bmatrix}$

□

4. Considere la siguiente tabla de datos

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_k$ | 2.1 | 4.9 | 10.1 | 17.3 | 26.2 |

Para hacer el ajuste mínimos cuadrados probamos dos modelos:

- Modelo 1: $y = D/(x + C)$, con el cambio de variable $X = xy$, $Y = y$, nos lleva a $Y = (-1/C)X + (D/C)$.
- Modelo 2: $y = 1/(Ax + B)$, con el cambio de variable $X = x$, $Y = 1/y$, nos lleva a $Y = Ax + B$

*a*) Explique y aplique el procedimiento para calcular las constantes $A$, $B$, $C$, $D$. (2pts)

*b*) ¿Que modelo es el adecuado?, justifique el porque. (2pts)

*Solución.*

*a*) Para el modelo 1, el cambio de variable nos da la tabla siguiente

| $X_k$ | 2.1000 | 9.8000 | 30.3000 | 69.2000 | 131.0000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_k$ | 2.1 | 4.9 | 10.1 | 17.3 | 26.2 |

lleva al sistema

$$M \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1000 & 1 \\ 9{,}8000 & 1 \\ 30{,}3000 & 1 \\ 69{,}2000 & 1 \\ 131{,}0000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 4{,}9 \\ 10{,}1 \\ 17{,}3 \\ 26{,}2 \end{bmatrix} = b$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0{,}01385658 & -0{,}62576846 & -0{,}3140312 & -0{,}41664501 & -0{,}57966643 \\ -0{,}06466403 & -0{,}57376361 & -0{,}33193774 & 0{,}08266826 & 0{,}74134822 \\ -0{,}19993063 & -0{,}43530912 & 0{,}874647 & -0{,}05994727 & ,0439621 \\ -0{,}45660725 & -0{,}1725833 & -0{,}11921484 & 0{,}80457667 & -0{,}31649491 \\ -0{,}86438656 & 0{,}24480632 & -0{,}10946322 & -0{,}41065266 & 0{,}11085101 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -1{,}51552565e + 02 & -1{,}59944505e + 00 \\ -3{,}01471540e - 14 & -1{,}56261817e + 00 \\ -1{,}23327950e - 14 & -8{,}32667268e - 17 \\ -1{,}23800371e - 14 & 2{,}77555756e - 17 \\ -2{,}95884858e - 14 & 3{,}33066907e - 16 \end{bmatrix}$$

entonces $\alpha = 0{,}18275831 = -1/C, \beta = 3{,}25987703 = D/C$ y por lo tanto $C = -5{,}471707354195164$, $D = -17{,}837093132845403$.

El modelo 1 esta dado por: $y = -\dfrac{17{,}837093132845403}{x - 5{,}471707354195164}$ Para el modelo 2, el cambio de variable nos da la tabla siguiente

| $X_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_k$ | 0.47619048 | 0.20408163 | 0.0990099 | 0.05780347 | 0.03816794 |

lleva al sistema

$$M\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}000 & 1\\2{,}000 & 1\\3{,}000 & 1\\4{,}000 & 1\\5{,}000 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}47619048\\0{,}20408163\\0{,}0990099\\0{,}05780347\\0{,}03816794\end{bmatrix}=b$$

$$Q=\begin{bmatrix}-0{,}13483997 & -0{,}76277007 & -0{,}37361263 & -0{,}36508193 & -0{,}35655124\\-0{,}26967994 & -0{,}47673129 & -0{,}00758313 & 0{,}37111404 & 0{,}74981122\\-0{,}40451992 & -0{,}19069252 & 0{,}86173399 & -0{,}15883518 & -0{,}17940435\\-0{,}53935989 & 0{,}09534626 & -0{,}20626808 & 0{,}66465596 & -0{,}46441999\\-0{,}67419986 & 0{,}38138504 & -0{,}27427015 & -0{,}51185289 & 0{,}25056436\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}-7{,}41619849e+00 & -2{,}02259959e+00\\-6{,}10006729e-16 & -9{,}53462589e-01\\2{,}43177821e-17 & -2{,}08166817e-17\\-5{,}29012338e-16 & -1{,}11022302e-16\\-1{,}94164039e-16 & -2{,}77555756e-16\end{bmatrix}$$

entonces $A=-0{,}10223232$, $B=0{,}48174766$.

El modelo 2 esta dado por: $y=\dfrac{1}{-0{,}10223232x+0{,}48174766}$

*b*) Ambos modelos deben estar bien definidos en el intervalo [1,5], sin embargo el modelo 2 tiene una asíntota vertical o discontinuidad cuando $-0{,}10223232x+0{,}48174766=0$, es decir para $x=4{,}71228335618325$, eso no pasa con el modelo 1 donde $x=5{,}471707354195164\notin[1,5]$. Por lo tanto el modelo que debe emplearse es el modelo 1.

$\square$

5. Trabajo de laboratorio (4pts)

UNI, 23 de octubre de 2024[1]

[1] Hecho en LaTeX