



Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2023-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 03

1. Una compañía minera trabaja en 3 minas, cada una de las cuales produce minerales de tres clases. La primera mina puede producir 4 toneladas del mineral *A*, 3 toneladas del mineral *B*, y 5 toneladas del mineral *C*; la segunda mina puede producir 1 tonelada de cada uno de los minerales y la tercera mina, 2 toneladas del *A*, 4 toneladas del *B* y 3 toneladas del *C*, por cada hora de funcionamiento. Se desea satisfacer los tres pedidos siguientes:

| Pedidos | Mineral A | Mineral B | Mineral C |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| P_1 | 19 | 25 | 25 |
| P_2 | 13 | 16 | 16 |
| P_3 | 8 | 12 | 10 |

- a) Modele el sistema ha resolver.
- b) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
2. Determine el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.
- a) Modele el sistema.
- b) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
3. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
- b) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
4. En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El

gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:

- a) Modele el sistema.
 - b) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
5. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
 - b) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
6. En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. Determine el número de coches y motos que hay según el requerimiento siguiente.
- a) Modele el problema.
 - b) Determine la norma matricial de A .
 - c) Determine el número de condicionamiento de A .
 - d) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
7. Un fabricante de bombillas gana 0,3 dolares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0,4 dolares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,4 dolares. Determine el número de bombillas buenas y defectuosa según el requerimiento siguiente.
- a) Modele el problema.
 - b) Determine la norma matricial de A .
 - c) Determine el número de condicionamiento de A .
 - d) Resolver usando el método de Factorización LDL^T y Cholesky.
8. Sean dos números tales que la suma de un tercio del primero más un quinto del segundo sea igual a 13 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtiene 247 como suma de los dos productos. Determine los números según el requerimiento siguiente.
- a) Modele el problema.
 - b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .
 - c) Determine el condicionamiento de A .
 - d) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.
9. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo según el requerimiento siguiente.

- a) Modele el problema.
 - b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .
 - c) Determine el condicionamiento de A .
 - d) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid..
10. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 8,80 soles. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 16,40 soles. Determine el costo de kilo del plátano y de la pera según el requerimiento siguiente.
- a) Modele el problema.
 - b) Determine la norma matricial de A y A^{-1} .
 - c) Determine el condicionamiento de A .
 - d) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.
11. En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
 - b) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.
12. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
 - b) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.
13. Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Determine el número de hombres, mujeres y niños según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
 - b) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.
14. Un fabricante de coches ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A , B y C). El precio de venta de cada modelo es 1,5, 2 y 3 millones de soles, respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por coche para el modelo A , de 1,5 para el modelo B y de 2 para el C . El coste

total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de coches vendidos 140. Determine el número de coches vendidos de cada modelo según el siguiente requerimiento:

a) Modele el sistema.

b) Resuelve el sistema usando el método de Parlet y Reid.

15. Find singular value decomposition of a matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

16. Consider the matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Find a nonsingular P such that $P^{-1}AP$ is diagonal.

17. Let A be a real $m \times n$ matrix with singular value decomposition (SVD): $A = U\Sigma V^T$. Denote the nonzero diagonal entries of Σ by $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Let:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T$$

be the pseudo inverse of A , where $\Sigma^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$ of size $m \times n$. Show that:

$$AA^+A = A \quad \text{and} \quad (A^+A)^T = A^+A.$$

18. Dados: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz inversa de A resolviendo $UX^j = L^{-1}I^{(j)}$ para $j = 1, 2, 3$.

19. Encuentre la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

20. Demuestre que la matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene descomposición LU pero la matriz $A - I$ si tiene descomposición LU .

21. Determine cual de las siguientes matrices son definidas positivas:

$$a) A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el sistema usando descomposición LU de Doolittle.

b) Resuelva el sistema usando descomposición LU de Crout.

23. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Sin calcular, demostrar que existe la descomposición de Cholesky de A .

b) Determine la descomposición de Cholesky de A .

24. Encuentre la descomposición LU de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Muestre todos los detalles.

25. Encuentre la factorización de Cholesky de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 25 & 19 \\ 10 & 19 & 62 \end{pmatrix}$$

.

26. Sea $a > 0$ una constante. Se tiene la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & \frac{2}{3}a^3 \\ 0 & \frac{2}{3}a^3 & 0 \\ \frac{2}{3}a^3 & 0 & \frac{2}{5}a^5 \end{pmatrix}$

a) Demuestre que A tiene descomposición de Cholesky y úsela para calcular A^{-1} .

b) Calcule el número de condición de la matriz A , en términos de a y determine cuando ella está bien condicionada.

c) Si $b = (0, -1, 1)^T$, usando la descomposición anterior para resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$.

27. Nobot Robotics Company produces three toy robots, models Dot, Lea and Liz. To manufacture each toy robot, the company must use labor hours for coding, assembly and painting. The amounts for each robot are shown in the table below:

| | Dot | Lea | Liz |
|----------|-----|-----|-----|
| Coding | 4 | 5 | 1 |
| Assembly | 7 | 9 | 2 |
| Painting | 4 | 2 | 1 |

There are 165 labor hours available for coding, 295 labor hours available for assembly and 150 labor hours available for painting each day. How many of each model should be produced in a day, if all labor hours are used? Use Gaussian Elimination Method with partial pivoting using $PA = LU$ factorization.

28. Determine la factorización de Parlet de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 10 & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & 10 & -6 & 9 \\ -6 & -6 & -6 & 26 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -19 \end{pmatrix}.$$

29. Determine la factorización de Parlet de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

30. Find a SVD for the following matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

03 de Mayo del 2023