Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 05

---

1. **Paula y Andrés se pesan en una báscula por separado y el resultado es 20 kg y 45 kg, respectivamente. A continuación se pesan juntos y el resultado es 80 kg. Ante la perplejidad de los chicos, su tío matemático estima los pesos de Paula y Andrés minimizando el error en el sentido de mínimos cuadrados. Modele el problema y obtener los pesos aproximados usando la transformación de Householder.**

2. **Se desea ajustar a una cónica de ecuación $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ la siguiente tabla de datos experimentales:**

x	-1	0	1	2
y	1	2	1	0

   Modele el problema y obtener la cónica usando la transformación de Householder.

3. **En un sistema de control automático la variable de salida $y(t)$ en cada instante t depende de los valores de la variable de entrada x en el instante t y en un instante anterior $t-1$, según la relación lineal $y(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t-1)$. Se hacen varias medidas, obteniéndose para los valores de entrada $x(0) = 1$, $x(1) = 1$, $x(2) = 2$, $x(3) = 0$ los valores de salida $y(1) = 2$, $y(2) = 2$, $y(3) = 1$. Modele el problema y obtener los valores a_0 y a_1 usando la transformación de Householder.**

4. **Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:**

   a) **Modele el sistema.**

   b) **Resuelve el sistema usando el método de Relajación y Descenso más Rápido.**

5. **En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se**

sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:

a) **Modele el sistema.**

b) **Resuelve el sistema usando la transformación de Householder.**

6. **En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:**

   a) **Modele el sistema.**

   b) **Resuelve el sistema usando la transformación de Householder.**

7. **Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:**

   a) **Modele el sistema.**

   b) **Resuelve el sistema usando la transformación de Householder.**

8. **Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.**

$$f(x) = 10e^{\frac{t}{2}}Cos(2t) - 10 = 0.$$

9. **Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.**

$$f(x) = x + e^{-x} = 0.$$

10. **Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.**

$$x\ln(x) = 1.$$

11. **Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.**

$$e^{-x} - x = 0.$$

12. **Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.**

$$f(x) = xe^{x} - 1 = 0.$$

13. Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$f(x) = 10e^{\frac{t}{2}}Cos(2t) - 4 = 0.$$

14. Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$f(x) = e^{x} - x = 0.$$

15. Determinar gráficamente el número de raíces reales de la ecuación no lineal y resuelve usando los métodos de Bisección, regla falsa y regla falsa modificada para $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$f(x) = x^6 + x - 5 = 0.$$

16. Use el método de la bisección para determinar las dos menores raíces negativas de la ecuación:

$$2xcos(2x) - (x+1)^2 = 0.$$

Dar su respuesta con 3 dígitos exactos.

17. Una caja con la parte superior abierta es construida a partir de una placa de acero rectangular de lados de $25\,cm$ y $40\,cm$. Para obtener la caja, se debe de cortar cuadrados en cada esquina de la placa de metal. Si la caja debe tener $250\,cm^3$ de volumen, ¿cuántas iteraciones se necesitarán si aplicamos el método de la bisección iniciando en $[20, 30]$ para aproximar la longitud del lado de los cuadrados con una tolerancia de 10^{-6}.?

18. Determine la solución por mínimos cuadrados en cada uno de los casos según corresponda.

$a)\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$c)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$d)\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$e)\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$f)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$g)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$h)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

19. Determine la solución por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales:

$a)$
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

20. Determine la solución por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales:

$a)$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

21. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (0,1,1)^T$.

22. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1,0,1)^T$.

23. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1,1,-1)^T$.

24. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-2, 1, -1)^T$.

25. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & \alpha & 7 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 1, -2)^T$.

26. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (1, 1, -2)^T$.

27. Determine el menor valor de α positivo de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & \alpha \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 1, 0)^T$.

28. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Hacer cero la entrada $(4, 2)$ usando matrices de Givens.

29. Let the matrix Q be a rotation matrix of the form:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

a) Show that the matrix Q above is orthogonal.

b) Find the value of θ such that:

$$Q^T \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

where α is a non-zero scalar.

30. Describe un algorithm for QR factorization based on Givens rotations instead of Householder reflections and give an example.

31. If R is upper triangular and invertible, show that there exists a diagonal matrix D with diagonal entries ± 1 such that $R_1 = DR$ is invertible, upper triangular, and has positive diagonal entries.

32. If A has a independent columns, let $A = QR$ where Q has orthonormal columns and R is invertible and upper triangular. Show that there is a diagonal matrix D with diagonal entries ± 1 such that $A = (QD)(DR)$.

33. Si a, b y c son números distintos, entonces el sistema es inconsistente porque las gráficas de las ecuaciones son planos paralelos:

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= a \\ x - 2y + 5z &= b \\ x - 2y + 5z &= c. \end{aligned}$$

Muestre que el conjunto de todas las soluciones por mínimos cuadrados es precisamente el plano cuya ecuación es $x - 2y + 5z = (a + b + c)/3$.

34. Determine la solución de mínimos cuadrados a cada uno de los siguientes sistemas $Ax = b$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Use las ecuaciones normales y la factorización QR.

07 de Junio del 2023