Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2022-2

[**Análisis y Modelamiento Numérico I - CM4F1**]
[**Los profesores**] UNI, 23 de setiembre de 2022

Primera Práctica Dirigida

1. Sea la sucesión recurrente definida por:
$$a_1 = 1 \ \wedge \ a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2},$$
demuestre que:
   a) $a_n \leq 2$, para todo número natural.
   b) La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y determine su límite.

2. Sea la sucesión definida por:
$$a_1 = \sqrt{2} \ \wedge \ a_n = \sqrt{2a_{n-1}},$$
demuestre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y determine su límite.

3. Sea la sucesión definida por:
$$a_1 = 7 \ \wedge \ a_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2 + 2}{a_n + 2}},$$
demuestre que:
   a) $\{a_n\} \geq 1$, para todo número natural.
   b) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y determine su límite.

4. *a*) Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por:
$$a_1 = 1 \ \wedge \ a_n = 4n + a_{n-1},$$
demuestre que $|a_n - 2n^2| < 2n$.
   b) A partir de la sucesión anterior se define la sucesión $b_n = \dfrac{a_n}{2n^2}$. Estudie la acotación de $\{b_n\}$ y determine su límite.

5. Siendo
$$a_1 = \sqrt{3},\ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}},\ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \cdots .$$
Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. Sea la sucesión $\{x_n\}$ definida por:
$$x_n = cos\left(\frac{1}{n}\right),$$
converge linealmente a $x = 1$, y $\{p_n\}$ con
$$p_n = cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\left(cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{cos\left(\frac{1}{n+2}\right) - 2cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$
que es el método Δ^2 de Aitken, compruebe que converge linealmente a $x = 1$ más rápidamente.

7. Sea la sucesión $\{x_n\}$ definida por:
$$x_n = 2^{-n}$$
Determine los valores de la sucesión usando el método Δ^2 de Aitken.

8. Sea la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_n = 0{,}25e^n, x_0 = 0{,}1$$

Determine los valores de la sucesión usando el método Δ^2 de Aitken.

9. Sea la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_n = e^{-n}, x_0 = 0{,}5$$

Determine los valores de la sucesión usando el método Δ^2 de Aitken.

10. Dada la sucesión definida por:

$$u_0 = 3/2, \quad u_1 = 5/3, \quad \text{y } u_{n+1} = 2003 - \frac{6002}{u_n} + \frac{4000}{u_n u_{n-1}}$$

Determine los valores de la sucesión usando el método Δ^2 de Aitken.

11. Implemente un programa en Python para convertir los siguientes números binarios con signo de 8 bits a base 10:

   a) $(10111000)_2$
   b) $(01010101)_2$
   c) $(11111111)_2$
   d) $(00011011)_2$

12. Implemente un programa en Python para convertir los siguientes números decimales a binarios con signo de 8 bits:

   a) 56
   b) 85
   c) 127
   d) 27

13. Implemente en Python un registro de 5 bits. Encuentre la suma de los siguientes números usando el complemento a 2:

   a) -1011 y -0101
   b) $+0111$ y -0011
   c) $+0011$ y -0101
   d) $+0100$ y -0111
   e) –0011 y –0101
   f) -0111 y –0010

14. Dado el siguiente sistema numérico de punto flotante, con las siguientes características:

   i) Una base β
   ii) n dígitos de la mantisa, $0 < n < +\infty$,
   iii) un exponente: $m \leq e \leq M$,

   donde β, n, m, e y M son enteros. Defina la forma normalizada de un número y en especial la del cero. Halle el número total de números que se puede expresar en este sistema.

15. Del sistema de punto flotante, halle el número cuyo valor absoluto es el más pequeño, su sucesor inmediato y la distancia entre ellos.

16. Demuestre que 4/5 no se puede representar de manera exacta como número de máquina. ¿Cuál será el número de máquina más cercano?.

17. Encuentre el número de máquina de 32 bits que está a la derecha de 1/9.

18. Determine el mayor, menor elemento positivo, números de elementos del conjunto $\mathbb{F}(10, 6, -9, 9)$, así coma las siguientes operaciones $x+y$, $x-y$, xy y x/y, donde $x = \pi = 3.141592653589\ldots$ e $y = e = 2.7182818284590\ldots$.

19. Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) Si la cantidad de elementos del conjunto $\mathbb{F}$, con $\mathbb{F}(2, t. - 1, 2)$ es 33, entonces los dígitos en la mantisa son 4.
   b) En un computadora de doble precisión su sistema de números puntos flotantes está distribuido en 11 bits para la mantisa y 52 para el exponente.

20. Probar que el cardinal del sistema de números de punto flotante normalizado $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ es

$$\text{card}(\mathbb{F}) = 2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1.$$

En particular, para $\mathbb{F}(10, 3, -2, 3)$, calcular x_{min}, x_{max}, ϵ_M.