Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-2**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Práctica Calificada N° 6

1. **El producto de las edades actuales de dos amigos es 42 y dentro de 5 años será 132. Ayudale ha saber que edades tienen los amigos.**

   (a) **[1 *pto.*] Modele el problema.**

   (b) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Newton con $x_0 = (3\ \ 4)^T$ y $tol = 10^{-5}$.**

   (c) **[1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Cuasi Newton con $x_0 = (3\ \ 4)^T$ y $tol = 10^{-5}$.**

   (d) **[1 *pto.*] Indique que método recomienda.**

   Solución:

   (a) **[1 *pto.*] Sean:**

$$
\begin{aligned}
x &: \text{ Edad del amigo 1.}\\
y &: \text{ Edad del amigo 2.}
\end{aligned}
$$

   Las funciones generadas son:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) = x \cdot y - 42 &= 0\\
f_2(x,y) = (x+5)\cdot(y+5) - 132 &= 0
\end{aligned}
$$

   (b) **[1 *pto.*] La matiz Jacobiana y su inversa son:**

$$
JF(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ y+5 & x+5 \end{bmatrix} \ \wedge \ JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{5(y-x)} \begin{bmatrix} x+5 & -x \\ -y-5 & y \end{bmatrix}
$$

   La tabla de método de Newton es:

k	x_k	y_k	Error
0	3	4	
1	15	-2	8
2	10.76470588235294201	2.23529411764705888	3.76470588235294201
$\vdots$			
8	7.00000028345050396	5.99999971654949427	0.00000028345050573

(c) [1 *pto.*] La tabla del método de Cuasi Newton es:

k	x_k	y_k	Error
0	3	4	3
1	15	-2	9
2	3.38709677419353916	9.61290322580645018	2.61290322580646084
$\vdots$			
10	5.99980530025116909	7.00019469974883357	0.00019469974883357
11	5.99999900259624930	7.00000099740375514	0.00000099740375514

(d) [1 *pto.*] Se recomienda para el problema el método de Newton, porque se logra la solución en menos iteración.

2. [4 *pts.*] Dado el sistema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0,$$

tiene dos soluciones,

$$P_1 = (0.625204094; 2.179355825) \quad \wedge \quad P_2 = (2.109511920; -1.334532188).$$

Implemente el método de continuación de homotopía para aproximar la solución del sistema no lineal comenzando en el punto inicial:

(a) $P_0 = (0, 0)$

(b) $P_0 = (3, -2)$

Solución:

El método de continuación de homotopía se aplica para obtener soluciones de la ecuación:

$$F(x, y) = (x^2 - y^2 + 2y, 2x + y^2 - 6) = (0, 0).$$

Dado el punto inicial x_0 definimos la homotopía $G : [0, 1] \times \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}^{\nvDash}$

$$G(t, x) = tF(x) + (1 - t)[F(x) - F(x_0)].$$

Buscamos una función diferenciable $t \to x(t)$ que empiece su recorrido en el punto $x(0) = x_0$, el cuál es solución de $G(0, x) = 0$ y llegue al punto $x(1)$ (por determinar) que será una solución de $G(1, x) = 0$, es decir una solución de $F(x) = 0$. Como F es diferenciable, obtenemos el determinante de su matriz jacobiana:

$$det(JF(x, y)) = \begin{vmatrix} 2x & -2y + 2 \\ 2 & 2y \end{vmatrix} = 4xy + 4y - 4.$$

Claramente la matriz jacobiana no es singular para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{\not{\epsilon}}$, por lo que no se puede justificar la existencia y unicidad de $x(t)$ tal que $G(t, x(t)) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Y que cumpla además

$$\begin{cases} x'(t) &=& -[JF(x(t)]^{-1}F(x_0), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) &=& x_0 \end{cases}.$$

Consulte el Teorema 10.10 del Burden, pag 675. Sin embargo, al menos podemos verificar las condiciones de este Teorema localmente. De todas maneras aplicamos el método de Continuación y resolvemos el sistema EDO usando el método de Runge-Kutta de orden 4. Obtenemos los siguientes resultados:

```
Item a
Punto inicial:  [0, 0]
1 [ 2.30398796 -2.00109948] error = 2.70e+00
la solucion aproximada es: [ 2.30398796 -2.00109948]
1 [ 0.42489283 -0.08659096] error = 5.14e+00
2 [ 0.81515371 -0.29026545] error = 4.29e+00
3 [ 1.14894385 -0.52327943] error = 3.43e+00
4 [ 1.43426458 -0.74854607] error = 2.57e+00
5 [ 1.68374278 -0.95838808] error = 1.71e+00
6 [ 1.90672959 -1.15311636] error = 8.57e-01
7 [ 2.10953755 -1.33461778] error = 2.91e-04
la solución aproximada es: [ 2.10953755 -1.33461778]
Item b
Punto inicial:  [3, -2]
1 [ 2.10944599 -1.33456326] error = 4.23e-04
la solución aproximada es: [ 2.10944599 -1.33456326]
1 [ 2.88703763 -1.91167365] error = 3.43e+00
2 [ 2.77013123 -1.82123046] error = 2.86e+00
3 [ 2.64887498 -1.72857291] error = 2.29e+00
4 [ 2.52279513 -1.63361423] error = 1.71e+00
5 [ 2.39133479 -1.53629019] error = 1.14e+00
6 [ 2.2538351  -1.4365787 ] error = 5.71e-01
7 [ 2.10951188 -1.33453222] error = 3.03e-07
la solución aproximada es: [ 2.10951188 -1.33453222]
```

En cada ítem hemos aplicado el método con un mallado de $N + 1$ puntos, para $N = 1$ y $N = 7$. Se observa que partiendo de los puntos $(0, 0)$ y $(3, -2)$ obtenemos soluciones aproximadas de P_2. El segundo punto converge más rápidamente, posiblemente porque está más cerca a P_2. Si utilizamos el punto $(1, 1)$ obtenemos una solución aproximada para P_1.

3. [4 *pts.*] Usando el método de potencia inverso desplazado, calcule el valor propio mas pequeño de la matriz de Pascal 20×20. Implemente el algoritmo.

Solución:

Teóricamente la matriz triangular inferior de Pascal tiene como único valor propio a $\lambda = 1$ y los vectores propios son múltiplos del vector canónico e_n, donde la n-ésima componente es 1. Debido a que ésta matriz está mal condicionada (Véase Proposición 1 de [2]) es necesario aplicar el método lo más cerca posible del valor propio, porque convergerá más rápido. Por tanto, buscamos el valor propio más cercano a $q = 0.9999999$, obteniendo los siguientes resultados:

```
MATRIZ DE PASCAL 20x20
1: autovalor: 1.0000, autovector :
[6.86e-32 -6.86e-25  7.73e-25 -1.21e-24  2.53e-24 -3.67e-24  2.70e-24
6.39e-25 -2.74e-24 -1.21e-24  7.68e-24 -5.34e-25 -2.20e-23  4.82e-24
8.67e-23  1.04e-24 -5.60e-22  2.92e-17 -5.26e-09  1.00e+00],
error: 1.00e+00
2: autovalor: 1.0000, autovector :
[-2.03e-32 -6.44e-26  5.99e-25 -9.54e-25  1.75e-24 -2.52e-24  1.73e-24
1.01e-24 -2.56e-24 -1.33e-24  7.10e-24 -6.32e-26 -2.00e-23  1.69e-24
8.10e-23  1.25e-23 -5.22e-22  6.45e-18 -3.21e-09  1.00e+00],
error: 2.05e-09
3: autovalor: 1.0000, autovector :
[-7.04e-33  2.76e-27  3.78e-25 -5.87e-25  1.15e-24 -1.75e-24  8.57e-25
1.91e-24 -3.26e-24 -1.16e-24  7.26e-24  2.66e-25 -1.99e-23 -3.33e-24
8.90e-23  2.65e-23 -5.57e-22 -2.02e-17  2.62e-10  1.00e+00],
error: 3.47e-09

Valor propio mas pequeño: 1.0000
```

El vector propio calculado es aproximadamente el vector canónico. Véase algoritmo 9.3 de [1], pag 594.

References

[1] **R. L. Burden, J. D. Faires and A. M. Burden. Numerical Analysis. Boston, MA : Cengage Learning, Tenth edition (2016).**

[2] **J.M. Carnicer, Y. Khiar and J.M. Peña. Optimal interval length for the collocation of the Newton interpolation basis. Numer Algor 82, 895?908 (2019).** `https://arxiv.org/pdf/1709.06787.pdf`

4. **La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores, obreros especializados y obreros no especializados. Así, en cada generación k la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías. Supongamos que:**

(a) Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.

(b) El 50% de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25% pasa a ser obrero especializado y el 25% restante es obrero no especializado.

(c) Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30%, 40% y 30%.

(d) Para los hijos de obreros no especializados las proporciones de reparto entre las categorías son 50%, 25% y 25%.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine el polinomio característico, usando el método de Krylov.

(c) [2 *pts.*] Determine los valores y vectores propios usando los método dados en clase.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

x	Trabajadores técnico superior
y	Trabajadores obreros especializados
z	Trabajadores obreros no especializados

Donde:

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.50 \\ 0.25 & 0.40 & 0.25 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix} x^k$$

Con

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] Por el método de Krylon se tiene:

$$p(A) = A^3y + b_1A^2y + b_2Ay + b_3y.$$

Luego:

$$z = Ay = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad z_1 = Az = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.2875 \\ 0.2625 \end{bmatrix} \quad Az_1 = \begin{bmatrix} 0.4425 \\ 0.293125 \\ 0.264375 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el sistema ha resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0.45 & 0.5 & 1 \\ 0.2875 & 0.25 & 0 \\ 0.2625 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4425 \\ -0.293125 \\ -0.264375 \end{bmatrix}$$

por el método de Eliminación de Gauss, tenemos:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1.15\lambda^2 + 0.15\lambda.$$

(c) [2 *pts.*] Por el método de potencia se tiene, la tabla es:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_1(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	$Error$
0					1	1	1	
1	1.3	0.9	0.8	1.3	1	0.6923077	0.6153846	0.3846154
2	1.0153846	0.6807692	0.6115385	1.0153846	1	0.6704545	0.6022727	0.0218531
3	1.0022727	0.6687500	0.6017045	1.0022727	1	0.6672336	0.6003401	0.0032210
4	1.0003401	0.6669785	0.6002551	1.0003401	1	0.6667517	0.6000051	0.0004819
5	1.0000510	0.6667134	0.6000383	1.0000510	1	0.6666794	0.6000077	0.0000723
	$\vdots$							
9	1.0000000	0.6666667	0.6000000	1.0000000	1	0.6666667	0.6000000	0.0000000

La solución del valor y vector propios son $\lambda_1 = 1$ y $x_1 = [1\ 0.6666667\ 0.6]^T$.

Por el método de potencia inversa desplazado con $\overline{\lambda} = -0.1$, se tiene la tabla siguiente:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_3(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	$Error$
0					1	1	1	
1	−1.0909091	1.2727273	2.5454545	2.5454545	−0.4285714	0.5000000	1.0000000	1.4285714
2	−7.1038961	1.0259740	7.0519481	−7.1038961	1.0000000	−0.1444241	−0.9926874	1.9926874
3	9.7171348	−0.4530497	−9.3887319	9.7171348	1.0000000	−0.0466238	−0.9662037	0.0978003
4	9.7086394	−0.1748338	−9.5454670	9.7086394	1.0000000	−0.0180081	−0.9831931	0.0286157
5	9.8635791	−0.0709403	−9.7937307	9.8635791	1.0000000	−0.0071921	−0.9929186	0.0108159
	$\vdots$							
13	9.9999053	−0.0000474	−9.9998579	9.9999053	1.0000000	−0.0000047	−0.9999953	0.0000071

Donde el valor y vector propios son $\lambda_3 = 0.0000009$ y $x_3 = [1\ -0.0000047\ -0.9999953]^T$.

Por el método de potencia inversa desplazado con $\overline{\lambda} = 0.25$, se tiene la tabla siguiente:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	$\lambda_3(k)$	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	$Error$
0					1	1	1	
1	4.0000000	0.00000000	0.0000000	4.0000000	1.00000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
2	−4.0000000	3.3333333	−0.5000000	−4.0000000	1.0000000	−0.8333333	−0.5000000	0.8333333
3	−10.6666670	7.2222222	3.0000000	−10.6666670	1.0000000	−0.6770833	−0.2812500	0.2187500
4	−9.4166667	6.9097222	2.5625000	−9.4166667	1.0000000	−0.7337758	−0.2721239	0.0566925
5	−9.8702065	7.3180924	2.5442478	−9.8702065	1.0000000	−0.7494793	−0.2505226	0.0143534
	$\vdots$							
13	−9.9998931	7.4998663	2.5000267	−9.9998931	1.0000000	−0.7499947	−0.2500053	0.0000080

Donde el valor y vector propios son $\lambda_2 = \frac{1}{-9.9998931} + 0.25 = 0.149998931$ y $x_2 = [1\ -0.7499947\ -0.2500053]^T$.

Siendo la proporción de la población sanos y enfermos de 1 a 2