Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2024–II

PRÁCTICA CALIFICADA 6
ANÁLISIS Y MODELAMIENTO NUMÉRICO I
CM4F1 A

---

1. Determine if the following statement is true or false. If the statement is true, then prove it. If the statement is false, then give one example where the statement fails, or prove that it is false.

   a) If A is a symmetric complex matrix then their eigenvalues are real numbers. (1pts)

   b) If the eigenvalues are ordered by module and $\lambda_1 \approx \lambda_2$ then the power method converges slowly. (1pts)

   c) If $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ and $x^{(k)}$ is a eigenvector with eigenvalue λ_2 then the power method fail. (1pts)

   d) If $v = a + ib$, $b \neq 0$ is an eigenvalue of A then $(x - a - ib)$, $(x - a + ib)$ are factors of characteristic polynomial of A. (1pts)

   Solución.

   a) False, by example $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ has eigenvalue $\lambda = i$.

   b) True, the rate of convergence depend of quotient $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

   c) True, $x^{(k+2)} = (\lambda_2)^2 x^{(k)}$ and the approaches become stationary: $x^{(k+n)}$ is parallel to $x^{(k)}$, $\forall n > 0$.

   d) False, by example $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ has eigenvalue $v = i$ but $\overline{v} = -i$ it is not eigenvalue.

   □

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

   a) Demuestre que A es diagonalizable.

   b) Determine el signo de los valores propios de A y deducir que A es invertible.

Solución.
Calculemos los discos de Gerschogorin:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-6| \leq 4\} \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-14| \leq 3\} \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+9| \leq 5\} \\ C_4 &= \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z+20| \leq 3\} \end{aligned}$$

Graficando los círculos:

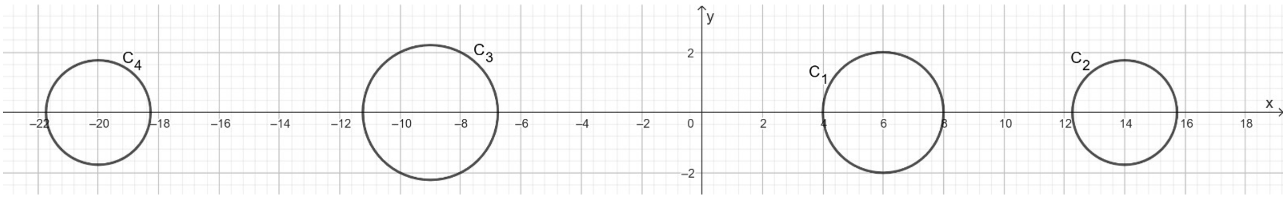

Figura 1: Discos de Gerschgorin

En la Figura (1) se observa que los discos son disjuntos, por tanto, se puede concluir que A tiene 4 autovalores distintos y son números reales.
Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$ y todos son reales, entonces, concluimos que A es diagonalizable.
Observe también que:

$$\lambda_1 \in [2,10] \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_2 \in [11,17] \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_3 \in [-14,-4] \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_4 \in [-23,-17] \subset \mathbb{R}$$

por tanto, λ_1 y λ_2 son positivos, mientras que λ_3 y λ_4 son negativos. Además, $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1,2,3,4$.
Entonces:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \neq 0$$

es decir, A es invertible. $\square$

3. Considere el siguiente algoritmo

Input: A , x, M
Output: x, k, r
for $k := 1$ **to** M **do**
    $y := Ax$;
    $r := \phi(y)/\phi(x)$;
    $x := y/\|y\|$;

a) Escriba un programa mediante el código dado que calcule el autovalor dominante y su vector propio con los siguientes datos iniciales: $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $x = [-1,1,1]^T$, $M = 28$ iteraciones, $\phi([x_1,x_2,x_3]) = x_2$, además utilice la norma euclidiana.

b) Demuestre que ϕ es lineal

Solución.

a)
```python
import numpy as np

#Definir matriz A
A = np.array([
    [6, 5, -5],
    [2, 6, -2],
    [2, 5, -1]
])

#Definir vector inicial
x = np.array([-1,1,1], dtype=float)

#Definir funcion para normalizar
def normalize1(v):
    norm=np.linalg.norm(v)
    if norm==0:
        return(v)
    return v/norm
print("unitario es",normalize1(x))
#print("normalizacion",normalize1(x))
def comp(f):
    return f[1]
#print("es la segunda componente del vector",comp(x))
#Definir el numero de iteraciones
num_iter = 28

#Regresa el valor propio
print("la respuesta a es: ")
for k in range(num_iter):
    k=KeyError
    y=np.dot(A,x)
    r=comp(y)/comp(x)
    x=normalize1(y)
    print("vector valor propio", k, x, r)
  # print("la respuesta b es: ")


#Calcular valor aproximado del radio espectral
#rho_A_approx = np.linalg.norm(np.dot(A, x), ord=np.inf)

#print("Vector aproximado despues de 28 iteraciones:", x)
#print("Estimacion del radio espectral p(A) =", rho_A_approx)

#Comprobacion
print("Valores propios de A: ",np.linalg.eigvals(A))
```

```
unitario es [-0.57735027  0.57735027  0.57735027]
la respuesta a es:
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.90453403  0.30151134  0.30151134] 2.0
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.98787834 -0.10976426 -0.10976426] -2.0
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.86647123 -0.3530068  -0.3530068 ] 22.0
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.75986863 -0.45967362 -0.45967362] 8.909090909090912
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.69250445 -0.51011645 -0.51011645] 7.306122448979915
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.65103742 -0.53672632 -0.53672632] 6.715083798882682
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.62509981 -0.55192854 -0.55192854] 6.425956738768719
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.60857702 -0.56108556 -0.56108556] 6.265147591921284
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.59790107 -0.56679551 -0.56679551] 6.1692841792031725
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.590933   -0.57043763 -0.57043763] 6.109759365453668
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.58635335 -0.57279567 -0.57279567] 6.071858388449325
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.58332927 -0.57433743 -0.57433743] 6.047338645832732
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.58132605 -0.57535208 -0.57535208] 6.031312052196946
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57999626 -0.57602272 -0.57602272] 6.020766328736409
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57911225 -0.57646726 -0.57646726] 6.01379646882311
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57852403 -0.57676249 -0.57676249] 6.009176545228714
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57813238 -0.57695882 -0.57695882] 6.006108354553835
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.5778715  -0.57708948 -0.57708948] 6.004068094808316
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57769768 -0.57717649 -0.57717649] 6.002710225629743
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57758184 -0.57723445 -0.57723445] 6.001806001307989
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57750463 -0.57727307 -0.57727307] 6.001203638576519
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57745317 -0.57729881 -0.57729881] 6.000802264778205
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57741887 -0.57731597 -0.57731597] 6.000534771680723
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.577396   -0.5773274 -0.5773274] 6.00035648268101
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57738076 -0.57733503 -0.57733503] 6.000237641001521
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57737059 -0.57734011 -0.57734011] 6.000158421059791
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.57736382 -0.57734349 -0.57734349] 6.000105611251352
vector valor propio <class 'KeyError'> [-0.5773593  -0.57734575 -0.57734575] 6.000070406261621
Valores propios de A:  [6. 4. 1.]
```

b) Probamos la linealidad:

$$\begin{aligned}\phi([x_1,x_2,x_3]+[y_1,y_2,y_3]) &= \phi([x_1+y_2,x_2+y_2,x_3+y_3])\\ &= x_2+y_2\\ &= \phi([x_1,x_2,x_3])+\phi([y_1,y_2,y_3])\end{aligned}$$

$$\phi(c[x_1,x_2,x_3]) = \phi([cx_1,cx_2,cx_3]) = cx_2 = c\phi([x_1,x_2,x_3])$$

□

4. En cierta especie de mosquitos el 50 % muere antes del mes de vida, luego un 60 % de los que sobreviven llegan a cumplir 2 meses, y de estos el 75 % llegan a los tres meses y son adultos. Considere que cada mes nacen 40 mosquitos por cada 100 adultos.

   a) ¿Cuan efectivo debe ser un plaguicida que solo afecta a los adultos, de modo que la población de mosquitos en cada etapa de su ciclo vital, se mantenga constante?. (2pts)

   b) Si el plaguicida demuestra tener una efectividad del 90 %, calcule la proporción de mosquitos en cada etapa de su vida por cada 100 adultos. (2pts)

Solución.
Sea $x_1^{(k)}$: mosquitos antes del primer año, $x_2^{(k)}$: mosquitos en el primer año, $x_3^{(k)}$: mosquitos en el tercer año, $x_4^{(k)}$: mosquitos adultos. La efectividad del plaguicida es p.

a) Si $X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}]^T$ entonces

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4\\ 0.50 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.60 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.75 & 1-p\end{bmatrix} X^{(k)} = A\cdot X^{(k)}$$

para que la población sea constante entonces $AX^{(k)} = X^{(k)}$, entonces $\lambda = 1$ debe ser un autovalor de A. El polinomio caraterístico de A es

$$p(x) = x^3(x+p-1) - 0.09 \implies p = 0.09$$

es decir la efectividad deber de ser del 9 %.

b) La iteración $X^{(k+1)} = A \cdot X^{(k)}$ es el método de la potencia y converge al autovalor dominante y su autovector asociado.

Si $p = 0.90$ entonces $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.10 \end{bmatrix}$ y aplicamos el método de la potencia con tolerancia de 10^{-5} y 134 iteraciones, de modo que $\lambda_1 = 0.5745082080418888$ y $v = [0.4640477, 0.40376671, 0.42149314, 0.66631502]$, entonces

$$100\frac{x_1}{x_4} = 69.64, \quad 100\frac{x_2}{x_4} = 60.59, \quad 100\frac{x_3}{x_4} = 63.25,$$

$\square$

5. Trabajo de laboratorio (4pts)

Los profesores[1]
Lima, 04 de Diciembre del 2024.

[1] Hecho en LaTeX