Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida Nro 04

---

1. **La suma de tres números es 37. El menor disminuído en 1 equivale a $\frac{1}{3}$ de la suma el mayor y el mediano; la diferencia entre 3 veces el mediano y 2 veces el menor equivale al mayor disminuído en 13, según el siguiente requerimiento.**

   a) **Modele el sistema ha resolver.**

   b) **Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.**

2. **Determine el número de un polígono convexo de n lados, con valor inicial en el origen, según el siguiente requerimiento.**

   a) **Modele el sistema ha resolver.**

   b) **Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.**

3. **Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:**

   a) **Modele el sistema ha resolver.**

   b) **Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.**

4. **En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:**

   a) **Modele el sistema ha resolver.**

   b) **Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.**

5. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:

   a) Modele el sistema ha resolver.

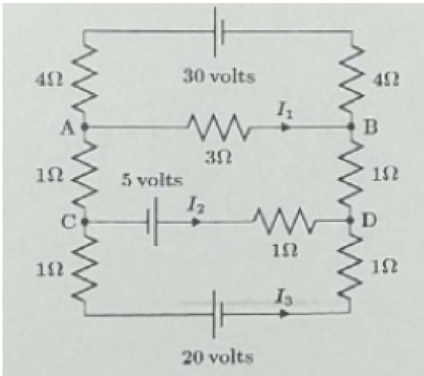
   b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

6. Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. Determine la medida de cereal ue contiene un fardo de cada tipo, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

7. Dado el circuito de una red.



   Determine la solución aproximada del circuito, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

8. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de S/ 500 (sin impuestos). El valor del vino es S/ 60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IGV del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la factura total con impuestos sea de S/ 592,4, determine la cantidad invertida en cada tipo de bebida, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

9. Un negociante internacionl necesita en promedio, cantidades fijas de yenes, francos y marcos para cada uno de sus viajes de negocio. Este año viajó tres veces. La primera vez cambió un total de $ 434 a la siguiente paridad: 100 yenes, 1,5 francos y 1,2 marcos por dolar. La segunda vez, cambió un total de $ 406 con las siguentes tasas: 100 yenes, 1,2 francos y 1,5 marcos por dolar. La tercera vez cambió $ 434 en total, a 125 yenes, 1,2 francos y 1,2 marcos por dolar. Determine la cantidad de yenes, francos y marcos que compró, según el siguiente requerimiento.

   a) Modele el sistema ha resolver.

   b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

10. Tres industrias interrelacionadas I_1 I_2 y I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente: Cada unidad de I_1 requiere 0,3 unidades de I_1, 0,2 unidades de I_2 y 0,3 unidades de I_3. Cada unidad producida de I_2 necesita 0,1 unidades de I_1, 0,2 de I_2 y 0,3 de I_3, y cada unidad de I_3 precisa 0,2, 0,5 y 0,1 unidades producidas en I_1, I_2 e I_3 respectivamente. Si las demandas exteriores son 45, 50 y 51 unidades de I_1, I_2 e I_3, determine los niveles de producción que permiten el equilibrio de esta economía, según el siguiente requerimiento.

    a) Modele el sistema ha resolver.

    b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

11. Una compañia minera trabaja en 3 minas, cada una de las cuales produce minerles de tres clases. La primera mina puede producir 4 toneladas del mineral A, 3 toneladas del mineral B, y 5 toneladas del mineral C; la segunda mina puede producir 1 tonelada de cada uno de los minerales y la tercera mina, 2 toneladas del A, 4 toneladas del B y 3 toneladas del C, por cada hora de funcionamiento. Se desea satisfacer los tres pedidos siguientes:

Pedidos	Mineral A	Mineral B	Mineral C
P_1	19	25	25
P_2	13	16	16
P_3	8	12	10

    Determine

    a) Modele el sistema ha resolver.

    b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

12. Determine el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.

    a) Modele el sistema.

    b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

13. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 aõs, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:

a) Modele el sistema.

b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

14. En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:

a) Modele el sistema.

b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

15. En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 soles. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 soles. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 soles. Determine el precio de cada uno según el siguiente requerimiento:

a) Modele el sistema.

b) Resolver usando los programas los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y Gradiente conjugado.

16. Consider the iterative method:

$$u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + y \tag{1}$$

and the related iterative method:

$$u^{(n+1)} = \gamma[Gu^{(n)} + y] + (1-\gamma)u^{(n)} \tag{2}$$

for the solution of a linear system $Ax = b$. Assume that the iteration matrix G is symmetric and that its eigenvalues satisfy:

$$-c = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq 0$$

for some positive constant c.

a) For what values of c will the method (1) converge to the solution of the linear system?

b) Determine values of γ for which method (2) converges to the solution of the system for all values of c.

17. Consider the SOR method for solving the general 2×2 system:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

a) Find the iteration matrix B and its eigenvalues (as functions of a_{11}, a_{12}, a_{21} and a_{22}).

b) b) Find the value of w that results in the two eigenvalues being the same. (This is the value of w that minimizes $\|B\| = |\lambda_{max}|$). This w is a function of a_{11}, a_{12}, a_{21} and a_{22}. What is the single eigenvalue (with algebraic multiplicity 2) in this case?

c) For the w found in (??), what conditions on a_{11}, a_{12}, a_{21} and a_{22} guarantee that $\|B\| = |\lambda_{max}| < 1$?

18. We are given a linear system of the form:

$$(I + uu^T)x = b,$$

where $I \in \mathbb{R}^{\ltimes\times\ltimes}$ is the $n-$dimensional identity matrix, and $u \in \mathbb{R}^{\ltimes}\backslash\{\nvdash\}$ is some given non-zero vector. Assume we apply the $CG-$ method for solving this system. How many iterations do you expect the method to take until convergence is reached? Justify yous answer.

19. Consider now in particular the system:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Use the $CG-$method with initialisation $x^{(0)} = 0$ for solving this system. Iterate until you have reached convergence.

20. Solve the following system of simultaneous linear equations by carrying out two iterations of the Gauss-Seidel method using the initial vector $(0{,}3, 0{,}3, 0{,}25)^T$:

$$\begin{pmatrix} 20 & -8 & 0 \\ -4 & 20 & 4 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Show that the Gauss-Seidel method will converge from any initial vector x_0 for this set of equations.

21. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de los métodos iterativos (Richardson, Gauss-Jacobi, Gauss–Seidel) converge?

22. Considere el sistema lineal $Ax = b$ con la matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) Escribir un sistema lineal equivalente $Ax = b$ tal que el método de Gauss Seidel converge.

b) Aplique el método de Gauss Seidel para resolver $Ax = b$ utilizando $x^{(0)} = [00]$ y $\epsilon = 0{,}1$.

c) Considere un sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{\nvDash\times\nvDash}$ tal que $|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{21}| > |a_{22}|$ y $\left|\frac{a_{11}}{a_{12}}\right| > \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|$

23. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Gauss–Jacobi y Gauss-Seidel aplicados a resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

24. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + ay &= a \\ ax + y + bz &= b \\ by + z &= c \end{aligned}.$$

a) Determine los valores de a y b para que el sistema tenga solución única.

b) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss–Jacobi.

c) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss–Seidel.

25. Considere el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ 2y + az &= 0 \\ -x + 2z &= 3 \end{aligned}$$

con $a < 0$.

a) Determine todos los valores del parámetro a que garanticen la convergencia del método de G-S cuando se aplica al sistema.

b) Para $a = -1$, efectúe dos iteraciones del referido método, indicando una estimativa para el error cometido.

26. Considere el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que el polinomio característico asociado a la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel, cuando es aplicado al sistema, es:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda.$$

b) ¿El método de Gauss-Seidel, aplicado al sistema anterior, es convergente?.

c) Determine la segunda aproximación generada por el método de Gauss-Seidel, cuando es aplicado al sistema anterior.

27. Considere el siguiente polinomio característico $P(\lambda) = -\lambda^3 + 1{,}08\lambda - 0{,}432$. Suponga que $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz de iteración M de alguno de los métodos iterativos estudiados (Gauss-Jacobi o Gauss-Seidel), cuando es aplicado al sistema lineal $Ax = b$, responda las siguientes preguntas:

a) Indigue, justificando adecuadamente, ¿cuál es el método estudiado?

b) Averigue si el método en estudio es convergente.

c) Sabiendo que $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & b \\ b & b & d \end{pmatrix}$, determine los valores de a, b, c y d.

d) Suponiendo que los elementos de la diagonal de la matriz A del sistema son todos iguales a 5, determine los elementos restantes de A.

28. Considere un sistema de dos ecuaciones $Ax = b$ en la forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

a) Demostrar que los métodos iterativos de G-J y G-S convergen para cualquier punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ si y solamente si $|m| < 1$, donde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) Considerando $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, verifique si el método de Jacobi converge.

c) Sabiendo que al aplicar el método de Jacobi a un sistema lineal $Ax = b$, donde A es una matriz estrictamente diagonal dominante, demostrar que:

$$||x^{(k+1)} - x||_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty,$$

donde x es la solución exacta del sistema y $\alpha = \max\left\{\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right\}$. Utilice este método para obtener una aproximación para la solución del sistema dado con un error inferior a 0,05.

29. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 20x + 2y + 6z &= 38 \\ x + 20y + 9z &= -23 \\ 2x - 7y - 20z &= -57 \end{aligned}$$

a) Descomponga la matriz del sistema teniendo en cuenta que se va a utilizar el método de G-S para la resolución aproximada del sistema.

b) Verifique si el método es convergente.

c) Calcule, aplicando el método de Gauss-Seidel, una aproximación de la solución del sistema con un error inferior a 0,02.

30. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde $x, b \in \mathbb{R}^{\nvDash}$, se propone el siguiente método iterativo:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b, \quad k \geq 0$$

donde $B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, c \in \mathbb{R}.$

a) ¿Para qué valores de λ y c el método iterativo propuesto es convergente?.

b) Sea $\hat{x}$ el punto fijo de la iteración. Calcule $||\hat{x} - x^{(k)}||_\infty$ y $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty$ cuando $k \to \infty$. ¿Es la convergencia al punto fijo independiente de c?. Justifique.

31. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 4x - y - z &= 2 \\ x + ky + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

a) Determine los valores del parámetro k para los cuales el sistema tiene solución única.

b) Para $k = 0$, ¿se podrá aplicar el método de Gauss-Seidel?. Justifique su respuesta.

c) Determine los valores de k para los cuales esté garantizada la convergencia del método de G-J.

d) Calcule dos aproximaciones para la solución del sistema, utilizando el método de G-J, con $k = 0$.

32. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determine el radio espectral de A.

b) Se pretende resolver el sistema $Ax = b$ por el método de G-J. ¿Qué conclusiones puede obtener del resultado del inciso anterior respecto a la convergencia del método?.

c) Suponga que al resolver un sistema del tipo $Cx = f$, por el método de G-S, resulta como matriz de iteración, la matriz A. ¿Qué puede afirmar sobre la convergencia de este método?.

33. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Gauss-Jacobi y de Gauss-Seidel para las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \beta \\ \beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

34. Dada una matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y un vector $b \in \mathbb{R}^{\nvDash}$, se quiere resolver el sistema $Ax = b$. Para ello, se propone el método iterativo siguiente:

$$x^{(k+1)} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} b$$

a) **Demostrar que el método propuesto resulta convergente cuando se aplica a las matrices A y al vector b siguientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -20 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Use que $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/26 & -1/39 & 0 \\ 1/26 & 4/39 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}.$

b) **Considere el vector $x^{(0)} = (0\,0\,0)^T$. Encuentre el número mínimo de iteraciones necesarias $k \in \mathbb{N}$, de modo de tener una precisión $||x^{(k)} - \hat{x}||_\infty \leq 10^{-4}$.**

35. Considere el siguiente sistema $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine los valores de a para los que convergen el método de Jacobi y Gauss-Seidel.

36. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & 2 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Determine la relación entre b y c para que A sea regular.**

b) **Probar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen o divergen exactamente para los mismos valores de b y c.**

c) **En caso de converger, ¿Cuál lo hace más rápidamente?**

24 de Mayo del 2023