Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I] **Examen Final**
[Prof: L. Roca, I. Mantilla, C. Salinas.] **Duración:** 110 **minutos.**

SOLUCIONARIO

---

1. Justifique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

   a) La ecuación $x = \cos(\pi x) - \tan(\frac{\pi x}{4})$ tiene solución en $[0, 1]$. [1 pt]

   b) El método de la potencia puede converger al autovalor dominante en un número finito de iteraciones. [1 pt]

   c) Si f es impar y $f(x_0) = 2x_0 f'(x_0)$, con $x_0 \neq 0$ entonces el método de Newton diverge. [1 pt]

   d) Las partes imaginarias de los autovalores la matriz

   $$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

   están contenidas en el intervalo $[-1, 1]$. [2 pt]

   Solución.

   a) Verdadero. Si $f(x) = x - \cos(\pi x) + \tan(\frac{\pi x}{4})$ entonces $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3 > 0$, y al ser f continua en $[0, 1]$ existe c tal que $f(c) = 0$.

   b) Verdadero. Por ejemplo si $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $x_0 = [1, 1, 1]^T$ entonces $x_1 = Ax_0 = [3, 3, 3]^T$ y $x_1^T A x_1 = 3(27)$, $x_1^T x_1 = 27$ entonces $\frac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1} = 3 = \lambda_{max}$

   c) Verdadero. $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - 2a = -a$, $x_2 = -a - \frac{f(-a)}{f'(a-)} = -a + 2a = a$. El metodo solo repite los valores a, $-a$.

   d) Verdadero. Sabemos que los autovalores están contenidos en los discos $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < 1\}$, $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| < 1\}$, $R_3 \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 1\}$. Estos tres discos tiene la misma proyección $[-1, 1]$ en el eje vertical del plan complejo.

   □

2. Sea $f \in C^n[a, b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números distintos en $[a, b]$. Demuestre que existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que

   $$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

   [5 pts]

Solución.
Sabemos que existe $P_n(x)$ el polinomio interpolante de f, por lo tanto $P_n(x_i) - f(x_i) = 0$. Por aplicación del teorema de Rolle, repetidamente:

$$\frac{d}{dx}(P_n(x) - f(x)) = 0 \text{ en } n \text{ puntos distintos}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(P_n(x) - f(x)) = 0 \text{ en } n-1 \text{ puntos distintos}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(P_n(x) - f(x)) = 0 \text{ en } 1 \text{ punto } x = c$$

entonces $f^{(n)}(c) = \frac{d^n}{dx^n} P_n(c) = n! f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ □

3. Considere $f(x) = e^{x+1}$:

   a) Verifique la igualdad de los polinomios de interpolación resultado de aplicar el método de Lagrange y el método de Diferencias Divididas, con los datos de la siguiente tabla.

x_i	$f(x_i)$
0	e
1/2	$e^{3/2}$
1	e^2

   [3 pts]

   b) Si $P(x)$ es el polinomio de interpolación obtenido en el paso anterior, calcule $P(3/4)$ y determine el error absoluto y el error relativo. [2 pts]

Solución.

a) Método de Lagrange:

$$\begin{aligned} P(x) &= e\frac{(x-1/2)(x-1)}{1/2} + e^{3/2}\frac{x(x-1)}{-1/4} + e^2\frac{x(x-1/2)}{1/2} \\ &= e + (-3e + 4e^{3/2} - e^2)x + (2e - 4e^{3/2} + 2e^2)x^2 \end{aligned}$$

Método de diferencias divididas:

0	e	$2(e^{3/2} - e)$	$2(e^2 - 2e^{3/2} + e)$
1/2	$e^{3/2}$	$2(e^2 - e^{3/2})$	
1	e^2		

$$\begin{aligned} Q(x) &= e + 2(e^{3/2} - e)x + 2(e^2 - 2e^{3/2} + e)x(x - 1/2) \\ &= e + (4e^{3/2} - 3e - e^2)x + 2(e^2 - 2e^{3/2} + e)x^2 \end{aligned}$$

Vemos que $P(x) = Q(x)$.

b) Valor exacto: $f(3/4) = e^{3/4+1} = 5{,}7546$
Valor aproximado $P(3/4) = 5{,}7924$
Error absoluto : $|5{,}7924 - 5{,}7546| = 0{,}037775$
Error relativo: $|5{,}7924 - 5{,}7546|/5{,}7546 = 6{,}5643 \times 10^{-3}$

□

4. Para $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ y $|f''|$ es acotada en una vecindad de x^*, considerando la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{f(x + f(x))}{f(x)} - 1.$$

Muestre que si x_1 es cercano a x^* entonces la sucesión (x_n) converge cuadráticamente. [5 pts]

Solución. Considere la función $k(x,y,z) = \dfrac{f''(y)(f'(x) - \frac{1}{2}f''(z)(x-x^*)) + f''(z)}{2f'(x) + f''(y)f(x)}$.
Por hipótesis existe $C = \limsup_{(x,y,z)\to(x^*,x^*,x^*)} |k(x,y,z)|$.
Sea $\delta_1 > 0$ tal que $|k(x,y,z)| \leq 2C$ para $(x,y,z) \in B((x^*,x^*,x^*);\delta_1)$
Sea $\delta_2 > 0$ tal que $2|f(x)| \leq \delta_1$ para $x \in B(x^*;\delta_2)$
Sea $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\delta_1}{2}, \delta_2, \dfrac{1}{2C}\right\}$.
Todo lo anterior se puede resumir que para valores cercanos x^* las aproximaciones son buenas:.
Para $x \in B(x^*, \delta)$ y x_n por la recurrencia del dato, por Taylor tenemos $\exists \xi_n$ entre x_n y $x_n + f(x_n)$ tal que

$$f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)f(x_n) + \frac{1}{2}f''(y_n)f(x_n)^2$$

Luego $g(x_n) = f'(x_n) + \dfrac{1}{2}f''(y_n)f(x_n)$, de donde

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \dfrac{1}{2}f''(y_n)f(x_n)}$$

donde $e_n = x_n - r$.
Por Taylor

$$0 = f(x^*) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\eta_n)e_n^2$$

para algún η_n entre r y x_n. Reemplazando y reduciendo

$$e_{n+1} = -e_n^2 k(x_n, \xi_n, \eta_n)$$

por lo tanto $\left|\dfrac{e_{n+1}}{e_n}\right| \leq C + 1$. □

UNI, 3 de julio de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX