Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

[Curso: CM4F1 - Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Calificada Nro. 4

1. Let the coefficients a_{ij} of the matrix A, of order " n ", satisfy:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} < 1, \\ v_i &= \sum_{j<i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} v_j + \sum_{j>i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,\ i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Show that the Gauss-Seidel method converges. [Hint: Use infinity norm.]

Solución:

Basta demostrar que $\rho(M_{GS}) < 1$, donde:

$$M_{GS} = (D - L)^{-1} U.$$

Sea λ un autovalor cualquiera de M_{GS} y sea " x " el respectivo autovector asociado. Sin pérdida de generalidad, considere $\|x\|_\infty = 1$. Luego:

$$(D - L)^{-1} U x = \lambda x \Rightarrow \lambda (D - L) x = U x$$

Observe lo que ocurre en cada fila:

En la fila 1:

$$\lambda a_{11} x_1 = -\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \Rightarrow \lambda x_1 = -\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j$$

$$\Rightarrow |\lambda x_1| = \left| \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right| \le \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} = v_1 < 1.$$

En la fila 2:

$$\begin{aligned} \lambda a_{22} x_2 &= -\lambda a_{21} x_1 - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j \Rightarrow \lambda x_2 = -\lambda \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j, \\ |\lambda x_2| &= \left| \tfrac{a_{21}}{a_{22}} (\lambda x_1) + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j \right|, \\ &\le \tfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|} |\lambda x_1| + \sum_{j=3}^{n} \frac{|a_{2j}|}{|a_{22}|} = v_2 < 1 \end{aligned}$$

En la fila 3:

$$\begin{aligned}
\lambda a_{33} x_3 &= -\lambda a_{31} x_1 - \lambda a_{32} x_2 - \sum_{j=4}^{n} a_{3j} x_j, \\
\lambda x_3 &= -\lambda \tfrac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \lambda \tfrac{a_{32}}{a_{33}} x_2 - \sum_{j=4}^{n} \frac{a_{3j}}{a_{33}} x_j \\
|\lambda x_3| &\leq \tfrac{|a_{31}|}{|a_{33}|} |\lambda x_1| + \tfrac{|a_{32}|}{|a_{33}|} |\lambda x_2| + \sum_{j=4}^{n} \frac{|a_{3j}|}{|a_{33}|} = v_3 < 1.
\end{aligned}$$

Sea " i " el índice entre 1 y " n " tal que $\|x\|_\infty = |x_i| = 1$. Luego, en la fila " i " resulta:

$$\begin{aligned}
\lambda a_{ii} x_i &= -\lambda a_{i1} x_1 - \lambda a_{i2} x_2 - \ldots - \lambda a_{i,i-1} x_{i-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j, \\
\lambda x_i &= -\lambda \tfrac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1 - \lambda \tfrac{a_{i2}}{a_{ii}} x_2 - \ldots - \lambda \tfrac{a_{i,i-1}}{a_{ii}} x_{i-1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \\
|\lambda x_i| &\leq \tfrac{|a_{i1}|}{|a_{ii}|} |\lambda x_1| + \tfrac{|a_{i2}|}{|a_{ii}|} |\lambda x_2| + \ldots + \tfrac{|a_{i,i-1}|}{|a_{ii}|} |\lambda x_{i-1}| + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = v_i < 1.
\end{aligned}$$

Observe que todo autovalor λ de la matriz M_{GS} satisface:

$$|\lambda| = |\lambda x_i| \leq v_i < 1 \Rightarrow \rho(M_{GS}) < 1,$$

por tanto, el método de Gauss-Seidel es convergente.

2. Considere el siguiente sistema Ax = b donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de "a" para los que convergen ambos métodos, el método de Jacobi y Gauss-Seidel, [3 ptos]. Para el mayor valor entero de "a" en que los dos métodos convergen, determine el mayor valor entero de "a" para el cual ambos métodos son convergentes. [1 ptos].

Solución:

Procedemos a calcular la matriz de iteración y para ello se necesita de la matriz diagonal (D) de A, la matriz triangular superior (U) y matriz triangular inferior (L), debiéndose cumplir lo siguiente:

$$M_J = D^{-1}(L + U)$$

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \; U = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$M_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -a \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos con el cálculo de los autovalores:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -a \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -\lambda & -a \\ 0 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Operando la determinante resulta:

$$9\lambda - \lambda(\lambda^2 - 3a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 = 9 + 3a \wedge 9 + 3a \geq 0.$$

por tanto:

$$\begin{aligned} 9 + 3a \geq 0 &\Rightarrow a \geq -3, \\ |\lambda| &= \sqrt{9 + 3a} < 1 \\ 9 + 3a &< 1 \\ 3a &< -8 \\ \\ a &< -\tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, el método de Jacobi converge cuando:

$$-3 \leq a < \frac{-8}{3}.$$

Realizamos el mismo procedimiento para Gauss-Seidel, pero con el único cambio al hallar la matriz de iteración, la cuál se calculará de la siguiente manera:

$$M_{GS} = (D - L)^{-1} U$$

entonces:

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -a \\ 0 & -27 & 3a \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -a \\ 0 & -27 & 3a \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 9 - \lambda & -a \\ 0 & -27 & 3a - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Operando la determinante, resulta:

$$\lambda^2(\lambda - 9 - 3a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 9 + 3a.$$

Por tanto, el método de Gauss-Seidel es convergente cuando:

$$\rho(M_{GS}) < 1 \Leftrightarrow |9 + 3a| < 1 \Rightarrow -\frac{10}{3} < a < -\frac{8}{3}.$$

Luego, los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi convergen cuando:

$$a \in \left[-3, -\frac{8}{3}\right\rangle.$$

Por tanto, el mayor valor entero de " a " para el cual ambos métodos convergen es $a = -3$.

3. Una empresa fabrica tres productos A, B y C. El vector de precios es $x_0 = (4\ 4\ 5)^T$, pero la empresa advierte que tiene un exceso de demanda, por lo que decide aumentar los precios a la vez que aumenta su producción buscando una situación de equilibrio. Un análisis de la empresa muestra que su capacidad de producción para un vector de precios dado por x es:

$$\begin{aligned} P_A &= 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 30 \\ P_B &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 \\ P_C &= x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 20 \end{aligned}$$

Por otra parte, un estudio de mercado indica que la demanda prevista para un vector de precios x es:

$$\begin{aligned} D_A &= 140 - 8x_1 - 5x_2 - 2x_3 \\ D_B &= 107 - x_1 - 8x_2 - x_3 \\ D_C &= 78 - x_1 - x_2 - 5x_3 \end{aligned}$$

(a) [1 *pto.*] Modele el sistema ha resolver para lograr el equilibrio de los precios.

(b) [1 *pto.*] La solución aproximada usando el método de Jacobi con un $tol = 10{-}4$.

(c) [1 *pto.*] La solución aproximada usando el método de Gauss-Seidel con un $tol = 10{-}4$.

(d) [1 *pto.*] Qué puede decir de la solución encontrada.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Para el equilibrio se cumplen:

$$P_A = D_A,\ P_B = D_B\ \wedge\ P_C = D_C.$$

Luego:

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 30 = 140 - 8x_1 - 5x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 170$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 107 - x_1 - 8x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 117$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 20 = 78 - x_1 - x_2 - 5x_3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 98$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] La matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -0.9 \\ -0.5 & 0 & -0.4 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

La tabla del método de Jacobi es:

k	x_1	x_2	x_3	Error
0	4	4	5	
1	9.3	7.7	9.25	0.569892473
2	2.515	3.35	6.075	1.116872428
$\vdots$				
100	−636.184966	−434.3704308	−352.4919424	1.962768368

Vemos que el método de Jacobi no converge a la solución.

(c) [1 *pto.*] La matriz de Gauss-Seidel es:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -0.9 \\ 0 & 0.4 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

La tabla del método de Jacobi es:

k	x_1	x_2	x_3	Error
0	4	4	5	
1	9.3	5.05	7.4	0.569892473
2	6.3	5.59	7.88	0.380710660
$\vdots$				
13	5.000036918	5.99998156	7.999999998	0.000006925

Vemos que el método de Gauss-Seidel converge a la solución.

(d) [1 *pto.*] El método que nos da la solución aproximada es el método de Gauss-Seidel.

4. Un barco que se halla en situación de emergencia, efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana, únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que

se dispara la altura máxima del destello lo alcanza a 320 metros sobre el nivel del mar, transcurridos 8 segundos desde el disparo. Ayudale a los de la base naval, enviar la ayuda al barco.

(a) [1 *pto.*] Modele el problema.

(b) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Descenso Rápido con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(c) [1 *pto.*] Determine la solución usando el método de Gradiente Conjugado con $x_0 = (-5.05\ \ 80.05\ \ 0)^T$ y $tol = 10^{-5}$.

(d) [1 *pto.*] Escribe el algoritmo que satisface la condición de los métodos.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean a, b y c los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{aligned} t = 0 &: f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 &: f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 &: f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{aligned}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	−5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	−0.7961693	−0.1499104	
1	−5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.0464866
2	−5.0000951	80.001895	−0.0094232	0.0000143	−0.000008	−0.0019375	0.0090598	0.0511709
⋮								
9	−5.0000558	80.001294	−0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

(c) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	rx_k	ry_k	rz_k	Error
0	−5.05	80.05	0	0.6592089	3251.2	214.4	14.8	0.0464866
1	−5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0000858	0.0531866	−0.7961826	−0.1499114	0.0511844
2	−5.0000812	80.001881	−0.0094259	1.037491	0.0000713	−0.0017096	0.0091048	0.0094259
3	−5	80	0	0	−0.0000493	−0.0000033	−0.0000002	0
4	−5	80	0					

Donde la ecuación cudrática es $f(t) = -5t^2 + 80t$.

(d) [1 *pto.*] **Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:**

Si $\boldsymbol{A} == \boldsymbol{A}'$

entonces

$\boldsymbol{B} \leftarrow \boldsymbol{A};$

$\boldsymbol{c} \leftarrow \boldsymbol{b};$

sino

$\boldsymbol{B} \leftarrow \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A};$

$\boldsymbol{c} \leftarrow \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{b};$

fin si.

UNI, 31 de Mayo del 2023*

*Hecho en LaTeX