Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Solucionario Segunda Práctica Calificada

1. **Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:**

   (a) [1 *pto.*] Dada la sucesión $x_0 = b$ y $x_n = ax_{n-1}$ para $n \geq 1$. Luego, si $a < 1$ entonces el algoritmo es estable con error exponencialmente creciente.

   (b) [1 *pto.*] Si $f(n)$ es $o(g(n))$ entonces $f(n)$ es $O(g(n))$.

   (c) [1 *pto.*] $\log(x)$ esta bien condicionado alrededor de $x = 1$.

   (d) [1 *pto.*] Dada A matriz no singular tal que posee factorización LU dada por $A = LU$ entonces dicha factorización es única.

   Solución:

   (a) (Falso), por ejemplo para $a = -10$ el algoritmo no es estable.

   (b) (Verdadero), Si $f(n)$ es $o(g(n))$ entonce existe ϵ_n tal que $f(n) \leq \epsilon g(n)$ con $\epsilon \to 0$ de esta forma, para $C > 0$ existe n suficientemente grande podemos tenemos que existe n_0 tal que para $\geq n_0$ se tiene $f(n) \leq g(n)C$'

   (c) (Falso), $x\frac{1/x}{\log(x)}$ vemos que cerca de uno el numero de condición esta cerca de $-\infty$, por lo tanto, no esta bien condicionado cerca de 1,

   (d) (Falso), $A = LU = (L\alpha)(\alpha^{-1}U)$ vemos que hay infinitas descomposiciones dependiendo del valor de $\alpha \neq 0$.

2. **Determine un polinomio de tercer grado tal que:**

$$f(1) = 2,\ f(2) = 6,\ f'(1) = 5 \ \wedge \ f''(2) = -6.$$

   según los siguientes requerimientos:

   (a) [1 *pto.*] Indique las variables.

   (b) [1 *pto.*] Modele el sistema.

   (c) [1 *pto.*] La solución aproximada usando la Eliminación de Gauss.

(d) [1 *pto.*] Qué puede decir de la solución encontrada.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean

$$\begin{aligned} a &: \text{ Coeficiente del término cúbico.} \\ b &: \text{ Coeficiente del término cudrático.} \\ c &: \text{ Coeficiente del término lineal.} \\ d &: \text{ Coeficiente del término constante.} \end{aligned}$$

(b) [1 *pto.*] Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$.
Evaluando
$x = 1$: $f(1) = 2 = a + b + c + d$ y $f'(1) = 5 = 3a + 2b + c$.
$x = 2$: $f(2) = 6 = 8a + 4b + 2c + d$ y $f''(2) = -6 = 12a + 2b$.
El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(c) [1 *pto.*] La matriz superior es:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz $L = L_3 L_2 L_1$ es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.25 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo $c = Lb = Ux$ donde

$$c = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El polinomio de tercer grado es $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.

(d) [1 *pto.*] Debemos tener:

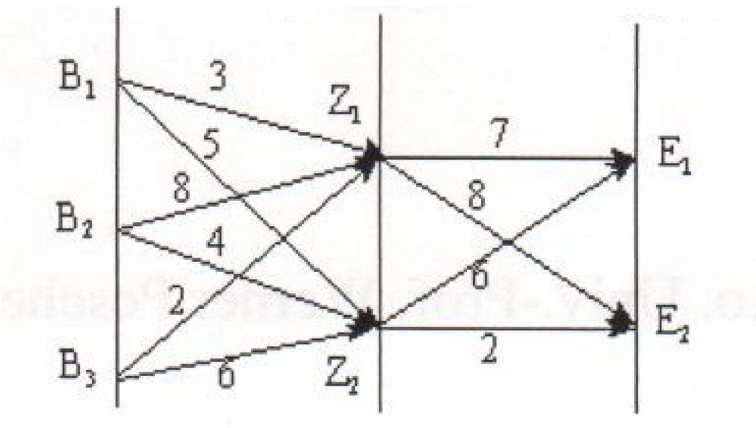
$$R = Ax - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

además $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 236.25$, $\|b\|_\infty = 6$ y $\|R\|_\infty = 0$, el error relativo de la solución es:

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{Cond_\infty(A)\|b\|_\infty} \leq E_r \leq Cond_\infty(A)\frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0$$

Se concluye que la solución aproximada es la exacta.

3. Una fábrica utiliza tres productos primarios (B_i) para producir dos productos intermedios (Z_i), que a su vez estos producirán dos productos finales (E_i). Las cantidades requeridas para la producción son:



La demanda externa de unidades es cinco de B_1, diez de B_3, cinco de Z_1, dos de Z_2, tres de E_1 y cuatro de E_2. Determine la demanda total que se necesita por cada producto según los siguientes requerimientos.

(a) [1 *pto.*] Indique las variables.

(b) [1 *pto.*] Modele el sistema.

(c) [1 *pto.*] La solución aproximada usando las transformaciones de Gauss-Jordan.

(d) [1 *pto.*] Qué puede decir de la solución encontrada.

Solución:

(a) [1 *pto.*] Sean:

x_1 : Cantidad total de demanda requerido de B_1.
x_2 : Cantidad total de demanda requerido de B_2.
x_3 : Cantidad total de demanda requerido de B_3.
x_4 : Cantidad total de demanda requerido de Z_1.
x_5 : Cantidad total de demanda requerido de Z_2.
x_6 : Cantidad total de demanda requerido de E_1.
x_7 : Cantidad total de demanda requerido de E_2.

(b) [1 *pto.*] **La demanda total es:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

El sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(c) [1 *pto.*] **Por las transformaciones de Gauss-Jordan, y la solución aproximada son:**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 51 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & 80 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 50 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 319 \\ 576 \\ 294 \\ 58 \\ 28 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(d) [1 *pto.*] **Debemos tener:**

$$R = Ax - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

además $Cond_\infty(A) = 2640$, $\|b\|_\infty = 10$ **y** $\|R\|_\infty = 0$, **el error relativo de la solución es:**

$$0 = \frac{\|R\|_\infty}{Cond_\infty(A)\|b\|_\infty} \leq E_r \leq Cond_\infty(A)\frac{\|R\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0$$

Se concluye que la solución aproximada es la exacta.

4. [4 *pts.*] Dada una matriz A de orden $n \geq 2$. Demuestre que si A se puede factorizar como $A = LL^T$ donde L es una matriz triangular inferior con diagonal estrictamente positiva entonces dicha factorización es única.

Opcional: Determine que sucede si la diagonal de L no contiene ceros.

Solución:

Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que existe L triangular inferior tal que $A = LL^T$, denotamos por $\operatorname{diag}(L) = \{d_1, \ldots, d_n\}$ donde $d_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vemos que:

(a) A es simétrica,

(b) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_i > 0$

(c) A y L son no singulares,

De otro lado, recordamos que el producto de dos matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular inferior, y de forma similar la inversa de una matriz triangular inferior es otra matriz triangular inferior. Supongamos que existe otra matriz L_1 tal que $A = L_1 L_1^T$ donde los elementos de la diagonal de L_1 son positivos.

$$LL^T = L_1 L_1^T \Rightarrow L_1^{-1} L = L_1^T (L^T)^{-1}$$

donde en $L_1^{-1} L$ es una matriz triangular inferior, y $L_1^T (L^T)^{-1}$ es una matriz triangular superior, y son iguales por lo tanto deducimos que ambos son iguales a una matriz diagonal D.

$$\begin{aligned} L_1^{-1} L = D &\Rightarrow L = L_1 D \\ L_1^T (L^T)^{-1} = D &\Rightarrow L_1^T = D L^T \\ &\Rightarrow L_1 = LD \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos:

$$L = LD^2 \Rightarrow D^2 = I$$

Con lo cual, si $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tenemos $\alpha_i = +1$ ningún elemento de la diagonal puede ser negativo dado que si alguno fuera negativo entonces de la igualdad $L_1 = LD$ tenemos que un elemento de la diagonal de L_1 sería negativo, lo cual no puede ser dado que todos sus elementos son positivos.

Por lo tanto, $D = I$ y $L = L_1$, concluimos que la descomposición es única.

5. [4 *pts.*] Identifique su grupo de exposición y la sección donde esta matriculado.

12 de Mayo del 2021