

VII. Corrigé

Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Voir figure 3.3. On se place donc dans un repère cylindrique (O, e_r, e_θ, e_z) . Un point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ) .
2. L'étude des invariances de la distribution de courant montre que la norme du champ magnétique ne dépend que de la distance au fil r . L'étude des symétries montre que le champ magnétique est orthoradial. Les lignes de champ sont des cercles concentriques centrés le fil.
3. Voir cours. L'expression du champ magnétique en un point M situé à une distance r du fil est donnée par

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} e_\theta.$$

On vérifie la dimension de cette expression. D'après le théorème d'Ampère on sait que la circulation de B sur un contour fermé est égale à $\mu_0 I$. Or la circulation de B est homogène à champ magnétique multiplié par une longueur ($B \cdot d\ell$). L'expression est donc bien homogène.

4.

$$B(M) < B_L \iff \frac{\mu_0 I}{2\pi r} < B_L \iff r > \frac{\mu_0 I}{2\pi B_L} \iff r > 10 \text{ m}$$

Si la boussole se trouve à moins de 10 m de l'éclair, elle sera désaimantée.

Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. On commence bien sûr par réaliser un schéma du système (voir Fig. 3.8). On choisit d'utiliser dans cet exercice un repère cylindrique (O, e_r, e_θ, e_z) . Un point M de l'axe (Oz) est donc repéré par ses coordonnées $(0, 0, z)$. Sous sa forme la plus générale, le champ magnétique en M s'écrit

$$B_1(M) = B_r(M)e_r + B_\theta(M)e_\theta + B_z(M)e_z.$$

Invariance : La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), B_1 ne dépend donc pas de θ . De plus, on s'intéresse à un point M situé sur l'axe, la distance r à l'axe de la spire n'entre donc pas en compte dans le problème.

Symétrie : Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, $B_1(M)$ doit donc appartenir à l'intersection de tous ces plans. $B_1(M)$ est donc colinéaire à e_z .

Finalement,

$$B_1(M) = B_z(z)e_z.$$

2. La première étape est de déterminer le champ magnétique généré par une portion $d\ell_P$ de la spire centrée au point P de coordonnées $(R, \theta, 0)$. On commence donc par exprimer $d\ell_P$ dans le système de coordonnées choisi

$$d\ell_P = R d\theta e_\theta.$$

Vient ensuite l'expression de \mathbf{PM} dans ce même référentiel

$$\mathbf{PM} = \mathbf{PO} + \mathbf{OM} = -R\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

On aboutit ainsi à l'expression du champ magnétique $\mathbf{dB}_P(M)$ généré par cette portion de spire en M

$$\mathbf{dB}_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\mathbf{dl}_P \wedge \mathbf{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R^2 \mathbf{e}_z + Rz \mathbf{e}_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta.$$

Il ne reste finalement plus qu'à sommer les contributions de toutes les portions de la spire pour aboutir au champ total $\mathbf{B}_1(M)$

$$\mathbf{B}_1(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R^2 \mathbf{e}_z + Rz \mathbf{e}_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \left(R^2 \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\theta + Rz \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r d\theta \right) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

B_0 est le champ obtenu en $z = 0$, il vaut donc

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

On obtient finalement

$$\mathbf{B}_1(M) = B_0 \times \left[1 + \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \mathbf{e}_z.$$

La figure 3.7 représente l'évolution de $B(M)/B_0$ avec z/R .

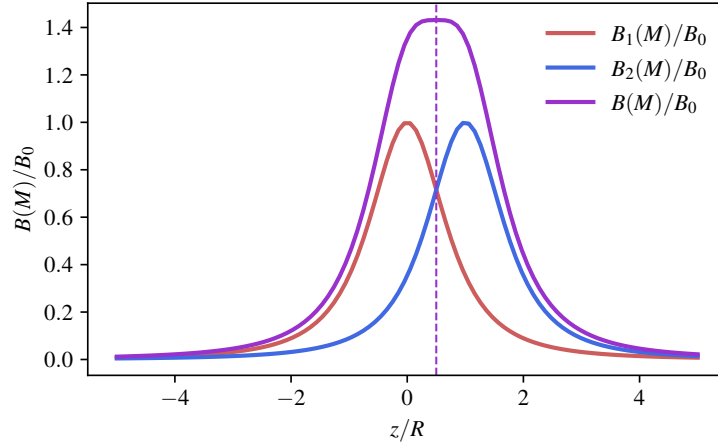


FIGURE 3.7 – $B_1(M)/B_0$, $B_2(M)/B_0$ et $B(M)/B_0$ en fonction de z/R . La ligne en pointillé correspond à l'abscisse $z/R = 1/2$.

3. On ajoute ensuite une seconde spire qui génère en M un champ magnétique $\mathbf{B}_2(M)$. La spire 2 étant identique à la première, on écrit directement que

$$\mathbf{B}_2(M) = B_0 \times \left[1 + \left(\frac{z - R}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \mathbf{e}_z.$$

En utilisant le principe de superposition, on en déduit le champ magnétique total B généré en M

$$B(M) = B_1(M) + B_2(M) = B_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z-R}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} e_z.$$

La figure 3.7 trace l'évolution de $B(M)/B_0$ en fonction de z/R . On remarque sur cette figure que la fonction est constante autour de $R/2$. Les lignes de champ seront donc parallèles autour de ce point.

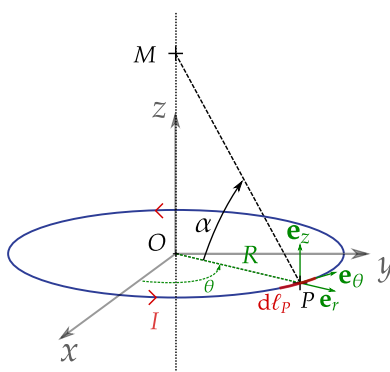


FIGURE 3.8 – Schéma de la spire.

Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- On sait d'après l'équation de Maxwell-Ampère que

$$\text{rot } B = \mu_0 j.$$

$\mu_0 \text{rot } j$ est donc homogène à un champ magnétique divisé par le carré d'une longueur.

λ est donc homogène à une longueur.

- D'après l'équation de Maxwell-Ampère, on a

$$\text{rot } B = \mu_0 j \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } B) = \mu_0 \text{rot } j.$$

En utilisant l'équation de London et l'égalité vectoriel fournie cela donne

$$\text{rot}(\text{rot } B) = -\frac{B}{\lambda^2} \iff \text{grad}(\text{div } B) - \nabla^2(B) = -\frac{B}{\lambda^2}.$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Thomson, $\text{div } B = 0$, on aboutit ainsi à

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

3. C doit obligatoirement être nul. Dans le cas contraire l'amplitude du champ magnétique divergerait lorsque x tend vers ∞ . Pour déterminer D , on utilise la continuité du champ en $x = 0$. On a donc directement

$$\mathbf{B}(x) = B_0 \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right) \mathbf{e}_z.$$

4.

x	λ	10λ	100λ
$B(x)/B_0$	0.37	4.5×10^{-5}	3.7×10^{-44}

λ correspond donc à la profondeur de pénétration de \mathbf{B} dans le supraconducteur.

Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Le système est représenté sur la figure 3.9.

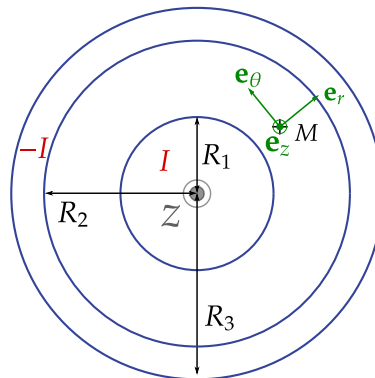


FIGURE 3.9 – Coupe du câble coaxial dans le plan (O, \mathbf{e}_r) .

2. Sous sa forme la plus générale, le champ magnétique en M s'écrit

$$\mathbf{B}(M) = B_r(M)\mathbf{e}_r + B_\theta(M)\mathbf{e}_\theta + B_z(M)\mathbf{e}_z.$$

Invariance : La distribution de courant est invariante

- par rotation autour de l'axe (Oz) , \mathbf{B} ne dépend donc pas de θ .
- par translation selon l'axe (Oz) , \mathbf{B} ne dépend donc pas de z .

Symétrie : Le plan $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courants. $\mathbf{B}(M)$ est donc orthogonal à ce plan et est donc colinéaire à \mathbf{e}_θ .

Finalement,

$$\mathbf{B}(M) = B(r)\mathbf{e}_\theta.$$

3. Si $r > R_3$, le point M se trouve à l'extérieur du câble coaxial. Si on applique le théorème d'Ampère à un cercle C de rayon r et de centre O , cela donne

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0(I - I) = 0.$$

Ici, on $d\mathbf{\ell} = r d\theta \mathbf{e}_\theta$ donc on obtient directement

$$\boxed{B(r) = 0}.$$

Le champ magnétique est donc nul en dehors du câble. Un câble coaxial permet donc d'éviter de générer un champ magnétique parasite.

4. Les vecteurs densité de courant \mathbf{j}_c et \mathbf{j}_p sont reliés à l'intensité I du courant par les relations

$$I = \iint_{S_c} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} \quad \text{et} \quad -I = \iint_{S_p} \mathbf{j}_p \cdot d\mathbf{S},$$

où S_c et S_p sont respectivement les sections de la partie centrale et de la partie périphériques. Dans la partie centrale comme dans la partie périphérique, le courant est uniforme. Les vecteurs densités de courant s'expriment donc

$$\boxed{\mathbf{j}_c = \frac{I}{\pi R_1^2} \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_p = \frac{-I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \mathbf{e}_z.}$$

5. On peut alors appliquer le théorème d'Ampère à un cercle C de rayon r et de centre O

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = I_{\text{enlac}},$$

où I_{enlac} est le courant enlacé par C .

On commence alors par exprimer le terme de gauche. On a $d\mathbf{\ell} = r d\theta \mathbf{e}_\theta$ et donc le terme de gauche vaut $2\pi r B(r)$. Pour le terme de droite, c'est un peu plus compliqué. En effet, 3 cas de figure se présentent

- Si $0 \leq r \leq R_1$, $I_{\text{enlac}} = \pi r^2 j_c = I \left(\frac{r}{R_1} \right)^2$.
- Si $R_1 \leq r \leq R_2$, $I_{\text{enlac}} = I$.
- Si $R_2 \leq r \leq R_3$, $I_{\text{enlac}} = I + \pi (R_3^2 - r^2) j_p = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$.

Finalement, on obtient l'expression du champ magnétique en tout point M de l'espace

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r > R_3 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \mathbf{e}_\theta & \text{si } R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \mathbf{e}_\theta & \text{si } 0 \leq r \leq R_1. \end{cases}}$$