VI. Corrigé

Corrigé de l'exercice 1. [Retour à l'énoncé]

1. À la surface, le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 50 µT. Le rayon de la Terre vaut approximativement 6400 km. On a donc

$$\boxed{m = \frac{4\pi B R_T^3}{\mu_0} \approx 10^{23}\ \mathrm{A\cdot m^2}.}$$

2. On fait ici l'hypothèse que tous les moments magnétiques atomiques sont alignés et orientés dans le même sens. On a alors

$$m = N\mu_B \iff \boxed{N = \frac{m}{\mu_B} = 10^{46}.}$$

3. Le noyau contient N atomes. Pour obtenir le nombre de mole n que cela représente, il suffit de diviser N par le nombre d' Avogadro $\mathcal{N}_A = 6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$. On a alors $n = N/\mathcal{N}_A$. On peut alors remonter à la masse m_N du noyau en utilisant sa masse molaire $m_N = nM$. Finalement, le volume s'écrit

$$V = \frac{m_N}{\rho} = \boxed{\frac{mM}{\mu_B \mathcal{N}_A \rho} \approx 1.2 \times 10^{17}\ \mathrm{m^3}.}$$

4. On considère que le noyau de la Terre est sphérique. Son rayon R_N s'écrit donc

$$R_N = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \approx \boxed{300\ \mathrm{km}.}$$

En réalité le noyau interne a un rayon de 1200 km. Nous avons donc sous-estimé ce dernier. En effet, notre principal erreur a été de considérer que les moments magnétiques atomiques étaient alignés alors que la température dans le noyau est très élevée !

5. La température du noyau est supérieur à la température du fer qui est alors paramagnétique. Il n'y a donc aucune raison que les moments dipolaires atomiques produisent un champ macroscopique. Le champ magnétique produit par la Terre résulte de phénomènes d'induction.

Corrigé de l'exercice 2. [Retour à l'énoncé]

1. Initialement, l'aiguille de la boussole ne ressent que le champ magnétique terrestre. Elle est donc alignée avec ce dernier (plus exactement avec la composante horizontale de ce dernier). En revanche, lorsque les bobines de Helmholtz sont alimentées, elles vont à leur tour générer un champ magnétique, non aligné avec l'aiguille, qui va induire un couple sur cette dernière et donc la faire tourner.

2. La boussole est à l'équilibre lorsque les couples induits par les deux champs magnétiques s'annulent. Cette annulation est atteinte lorsque $\boxed{B_h \sin\varphi = B_0 \cos\varphi}$, où B_0 est le champ magnétique généré par les bobines de Helmholtz et ressenti par la boussole. On a alors

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\mu_0 I}{2RB_h}.}$$

3. L'application numérique donne $\boxed{B_h = 23.5\ \mu\mathrm{T}.}$

Corrigé de l'exercice 3. [Retour à l'énoncé]

1. Le cristal se trouvant dans un champ uniforme $\boldsymbol{B}$, l'énergie magnétique d'un moment magnétique m_+ est donné par

$$\boxed{E_+ = -\boldsymbol{m}_+ \cdot \boldsymbol{B} = -\mu_B B.}$$

2. Z est $\boxed{\text{sans dimension}}$. $k_B T$ est homogène à une énergie donc k_B s'exprime en $\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ et donc en $\boxed{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s} \cdot^{-2} \mathrm{K}^{-1}}$.

3. D'après la première question, on a $\boxed{E_+ = -\mu_B B \text{ et } E_- = \mu_B B.}$ Pour déterminer l'expression de Z, il faut écrire que

$$N = N_+ + N_- \iff \boxed{Z = \frac{1}{N}\left[\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)\right]}.$$

Cette expression permet d'aboutir à

$$\boxed{N_\pm = \frac{N}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)} \exp\left(\frac{\pm\mu_0 B}{k_B T}\right).}$$

Par définition, le moment magnétique de l'échantillon est obtenu en sommant tous les moments magnétiques atomiques

$$M = N_+\mu_B - N_-\mu_B = N\mu_B \frac{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)} = \boxed{N\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T}\right)}.$$

4. L'énergie magnétique d'un moment magnétique est négligeable dès lors que

$$\mu_B B_0 \ll k_B T \iff \boxed{B \ll \frac{k_B T}{mu_B}.}$$

À temperature ambiante, $T = 300$ K, l'application numérique donne $B = 450$ T. Cette intensité de champ est impossible à obtenir expérimentalement. On peut donc raisonnablement $\boxed{\text{négliger l'énergie magnétique devant l'énergie thermique.}}$

5. L'aimantation du cristal s'obtient en écrivant

$$M_c = \frac{M}{V} = \frac{N\mu_B}{V} \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T}\right).$$

Au premier ordre, l'aimantation du cristal vaut

$$\boxed{M_c = \frac{N\mu_B^2 B_0}{k_B T V}.}$$

Dans un paramagnétique, la susceptibilité étant très faible devant 1, on a $B_0 = \mu_0 H_0$ où H_0 est l'amplitude du vecteur excitation magnétique. La susceptibilité χ s'écrit donc

$$\boxed{\chi = M_c/H_0 = \frac{N\mu_0\mu_B^2}{Vk_B T}.}$$

On retrouve bien la loi de Curie avec $\boxed{C = \frac{N\mu_0\mu_B^2}{Vk_B}.}$

6. La susceptibilité d'un cristal composé d'une mole de moments atomiques s'écrit

$$\chi = \frac{\mathcal{N}\mu_0\mu_B^2\rho}{\mathcal{M}k_B T}.$$

L'application numérique donne $\boxed{\chi = 7.51 \times 10^{-4}.}$