VI. Exercices

Exercice 1 (Orage et boussole). [Corrigé page 61]

On cherche dans cet exercice à déterminer le champ magnétique créé par un éclair lors d'un orage. En première approximation, un éclair peut-être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a = 10$ cm parcouru par un courant d'intensité constante $I = 10^5$ A.

1. Faire un schéma modélisant un éclair. Quel est le repère adapté au problème ici ?
2. De quelle(s) variable(s) dépend l'amplitude du champ magnétique ? Par quel vecteur est-il porté ? Dessiner les lignes du champ magnétique produit par cet éclair.
3. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par l'éclair. Vérifier l'homogénéité de votre expression.
4. L'aiguille d'une boussole peut se retrouver désaimantée lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B_L = 2 \times 10^{-3}$ T. À quelle distance minimale d'un éclair doit donc se trouver une boussole pour ne pas être désaimantée ?

Exercice 2 (Bobines de Helmholtz). [Corrigé page 61]

Les bobines de Helmholtz sont un dispositif expérimental constitué de deux bobines circulaires de même rayon, parallèles et placées à une distance égale à leur rayon. Dans cet exercice, on cherche à déterminer le champ magnétique généré par ce système.

On considère tout d'abord une spire de rayon R, d'axe Oz, parcouru par un courant I et placée en $z = 0$. On souhaite calculer le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1$ créé par cette spire sur son axe, le calcul en dehors de l'axe étant un peu plus difficile.

1. Étudier les symétries et invariance de la distribution de courants.
2. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique généré par la spire en un point M de son axe. Exprimer $B_1(M)$ sous la forme $B_1(M) = B_0 f(M)$ où B_0 est l'amplitude du champ au centre de la spire et f une fonction de l'espace à déterminer.
3. Étudier la fonction f.
4. On ajoute une seconde spire identique à la première en $z = R$. Déterminer le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ créé par les deux spires en un point M de l'axe (Oz) et le mettre sous la forme $B(M) = B_0 g(M)$, où g est une fonction à expliciter.
5. Tracer l'évolution de $B(M)/B_0$ avec z/R. Que peut-on dire de la forme des lignes de champs près de l'axe dans la zone $z = R/2$?

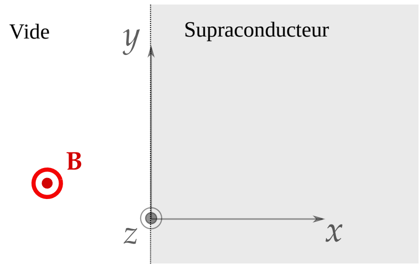

FIGURE 3.6 – Supraconducteur occupant le demi-espace $x > 0$ baignant dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_z$.

Exercice 3 (Effet Meissner). [Corrigé page 63]
Dans un matériau supraconducteur, la densité de courant **j** vérifie l'équation de London

$$\nabla \times \boldsymbol{j} = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \lambda^2},$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, λ une constante dépendant du matériau étudié et $\boldsymbol{B}$ le champ magnétique
On se place ici dans un repère carthésien $(0, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$. Un supraconducteur occupe tout le demi-espace défini par $x > 0$. À l'extérieur du supraconducteur, le champ est uniforme d'amplitude B_0 et porté par $\boldsymbol{e}_z$ (voir Fig. 3.6). On admettra ici que le champ est continu à la frontière entre le vide et le supraconducteur et qu'il ne dépend que de x à l'intérieur de ce dernier.

1. Faire une analyse dimensionnelle pour déterminer la dimension de λ.
2. Montrer qu'à l'intérieur du supraconducteur, l'évolution spatiale de l'amplitude du champ magnétique est donnée par

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

   On utilisera l'égalité vectorielle suivante, vérifiée pour tout vecteur $\boldsymbol{B}$,

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}) = \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B},$$

   où $\boldsymbol{\nabla}^2$ correspond à l'opérateur laplacien vectoriel.
3. La solution générale à cette équation différentielle est de la forme

$$B(x) = C\exp(x/\lambda) + D\exp(-x/\lambda), \tag{3.8}$$

   où C et D sont deux constantes réelles. Déterminer l'expression de C et D.
4. Pour l'aluminium, $\lambda = 16\,\mathrm{nm}$, déterminer le rapport $B(x)/B_0$ pour $x = \lambda,\ 10\lambda,\ 100\lambda$. Proposer alors une interprétation de λ.

L'impossibilité du champ magnétique externe à pénétrer dans le supraconducteur n'est pas anodine. Elle induit une force de pression qui s'exerce sur le supraconducteur et peut permettre notamment de faire léviter l'aimant à l'origine de ce champ.. Pour en apprendre plus sur les supraconducteurs et leurs propriétés, vous pouvez notamment aller voir la vidéo[a] que le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) a réalisée sur le sujet.

a. https ://www.youtube.com/watch ?v=5SF98Ph8hSU

Exercice 4 (Champ créé par un câble coaxial). [Corrigé page 64]

On considère un câble coaxial (câble de sortie d'un générateur basse fréquence) constitué d'un cylindre métallique central plein de rayon R_1 et d'une couche cylindrique de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3. Entre R_1 et R_2 se trouve une matière isolante assimilable à du vide d'un point de vue électromagnétique.

On se place dans un repère cylindrique $(O, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$. Un point M de l'espace es donc repérér par ses coordonnées (r, θ, z). Le câble d'axe (Oz) est considéré comme infiniment long. La partie conductrice centrale est parcourue par un courant uniforme d'intensité I tandis que la partie périphérique est parcourue par un courant uniforme d'intensité $-I$.

1. Réaliser un schéma du système.
2. Montrer que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au point M s'écrit

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r)\mathbf{u},$$

   où $\mathbf{u}$ est un vecteur à préciser.
3. Quelle est la valeur du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au point M si $r > R_3$? Quel est l'avantage d'un câble coaxial par rapport à un simple fil ?
4. Exprimer les vecteurs densités de courant $\boldsymbol{j}_c$ et $\boldsymbol{j}_p$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique.
5. Déterminer l'expression du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ pour un point M à l'intérieur du câble.