Analyse dimensionnelle

Objectifs

- Déterminer la dimension d'une grandeur
- Vérifier l'homogénéité d'une expression

Analyse dimensionnelle :

- L'analyse dimensionnelle est une méthode pratique permettant de vérifier **l'homogénéité** d'une formule physique en décomposant les grandeurs physiques qu'elle met en jeu en un produit de grandeurs de base : le système d'unité international (d'après *Wikipédia*).
- Deux grandeurs sont homogènes si elles s'expriment dans les mêmes unités.

I. Le système d'unité international et les unitées dérivées

Le système international est le système d'unités le plus couramment utilisé dans le monde. Il comporte 7 unités de base résumées dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Unités de base du système international (SI)

Grandeur	Unités	Symbole
Masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
distance	mètre	m
température	kelvin	K
intensité électrique	ampère	A
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

De ces unités de base, on peut dériver d'autres unités. On peut ainsi former une infinité d'unités dérivées. Le Tableau 2 fournit quelques exemples.

Table 2 – Unités dérivées du système international

Grandeur	Unité dérivée	Décomposition
Énergie	joule J	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Vitesse	$m \cdot s^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
Champ magnétique	tesla T	$kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$
Force	newton N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Charge	coulomb C	$A \cdot s$

Unité dérivée :
Une **unité dérivée** est une unité qui combine plusieurs unités fondamentales (sous la forme d'un produit de puissances de plusieurs de ces unités de base). Ces unités dérivées ont parfois leur propre nom et symbole comme le newton N. Toute unité dérivée s'exprime en fonction des unités de base du système international. (d'après *Wikipédia*)

II. Vérifier l'homogénéité d'une expression

Pourquoi s'embêter à vérifier l'homogénéité d'une expression ? La réponse est simple : cela permet **d'éviter des erreurs grossières !** En effet, si j'aboutis à l'expression $a = b$, a doit avoir la même dimension que b. Si ce n'est pas le cas, je sais qu'il faut revoir mes calculs et/ou mon raisonnement. En plus d'éviter des erreurs, la dimension d'un objet physique peut permettre de mieux comprendre à quoi il correspond.

L'homogénéité d'une expression n'assure pas sa validité !

La vérification de l'homogénéité d'une expression peut être compliquée par la présence de certaines opérations, telle que la dérivation, ou par la présence d'unités dérivés. Nous allons maintenant voir comment surmonter ces difficultés.

1. Multiplication, dérivation et intégration

Quelques règles simples à retenir

1. Si on multiplie deux grandeurs, l'unité du résultat est la multiplication des unités des grandeurs de départ. Par exemple, une surface (m^2) est homogène à une distance au carré car elle correspond au produit d'une distance par une distance.
2. Dériver une grandeur par une autre revient, en terme de dimension, à diviser l'unité de la première par l'unité de la deuxième. Une vitesse ($m \cdot s^{-1}$) est obtenue en dérivant

une distance (m) par un temps (s) et est donc homogène à une distance divisée par un temps. Pensez à la notation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ pour vous en souvenir : dériver x par rapport à t revient grossièrement à diviser une petite variation de x par une petite variation de t (Ne faites pas ça pour dériver une fonction !).

3. Inversement, lorsqu'on intègre une grandeur par rapport à une autre, cela revient à multiplier l'unité de la première par l'unité de la deuxième. Une pression ($\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$) intégrée sur une surface (m^2) est donc homogène à une force (N).

> **Remarque.**
> - Le gradient, la divergence et le rotationnel correspondent à des opérations de dérivation.
> - On ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes !

2. Les unitées dérivées

Les unités dérivées qui possèdent leur propre nom peuvent poser problème car on a tendance à oublier leur décomposition en unités SI. Comment s'en sortir dans ce cas ? Les deux exemples suivants illustrent chacun une manière de s'en sortir dans certaines situations.

2. a. Trouver une expression simple de cette unité dérivée

Imaginons que j'ai oublié comment les joules se décomposent dans le système international. Il suffit alors de me rappeler que l'énergie cinétique E_c est une énergie et s'exprime comme le produit d'une masse m par une vitesse v au carré

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

J'en conclus que $\mathrm{J} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Cette méthode peut s'appliquer à d'autres exemples

- Joule : énergie cinétique (produit d'une masse par une vitesse au carré),
- Newton : poids (produit d'une masse par une accélération),
- Pascal : pression hydrostatique (produit d'une masse volumique par une accélération et par une distance).

2. b. Se ramener à une expression connue

Un fil rectiligne infini uniformément chargé avec une densité linéïque de charge λ ($\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) créé en un point M de l'espace situé à un point r du fil, un champ électrique E

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$. Comment vérifier l'homogénéité de cette expression lorsqu'on a oublié la décomposition des Farad en unité SI ? On essaye de se ramener à une expression connue du champ électrique, celui généré par une charge Q à une distance r

$$E_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

D'après cette formule, un champ électrique est homogène à une charge divisée par ϵ_0 et une distance au carré. Pour essayer de retrouver une expression semblable, on multiplie le numérateur et le dénominateur de E par r

$$E = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

λr étant homogène à une charge, on conclut que cette expression est bien homogène.