

# 3 Magnétostatique

## Plan de ce chapitre

I.	La force de Lorentz . . . . .	46
II.	La loi de Biot et Savart . . . . .	48
III.	Équation de la magnétostatique . . . . .	50
III. 1.	Le théorème d'Ampère . . . . .	50
III. 2.	Flux du champ magnétostatique $B$ . . . . .	52
IV.	Étude des lignes de champ de $B$ . . . . .	53
V.	Calcul du champ magnétostatique . . . . .	54
V. 1.	Invariance de la distribution de courants . . . . .	55
V. 2.	Symétries de la distribution de courants . . . . .	55
V. 3.	Application du théorème d'Ampère . . . . .	56
VI.	Exercices . . . . .	58
VII.	Corrigé . . . . .	61

## Objectifs

- Connaître les équations qui contrôlent l'évolution spatiale du champ magnétostatique  $B$ .
- Faire le lien entre ces équations et une carte de champ magnétique.
- Savoir calculer le champ magnétostatique résultant d'une distribution simple de courants.

## Introduction

La magnétostatique étudie les champs magnétiques créés par des courants permanents. Le plus souvent, on cherche alors à déterminer le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  qui résulte d'une distribution de courant  $j$  connue. Nous nous intéressons dans ce chapitre au champ magnétique créé par des courants circulants dans des conducteurs. Les milieux aimantés seront abordés plus loin dans le cours.

## I. La force de Lorentz

L'interaction entre deux particules immobiles a permis de définir la force de Coulomb dans le chapitre 1. Cette interaction électrostatique ne suffit plus lorsqu'il s'agit de décrire la dynamique de charges en mouvement. En 1895, le physicien néerlandais Hendrick Antoon Lorentz propose alors l'ajout d'un second terme à la force coulombienne qui fait apparaître la champ magnétostatique  $\mathbf{B}$ .

### Champ magnétostatique :

Au même titre que le champ électrostatique, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est un champ vectoriel. Il est généré par une distribution de courant ou par un aimant. Il s'exprime en tesla, noté T ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{A}^{-1}$  en SI). On rappelle quelques ordres de grandeur du champ magnétique

Dispositif	$B(\text{T})$
Champ magnétique terrestre à la surface	$47 \times 10^{-6}$
Champ créé à 1 cm d'un fil parcouru par un courant de 10 A	$2 \times 10^{-5}$
Champ créé à 1 mm d'un aimant permanent	0.1 – 1
Électroaimant	10 – 100
Étoile à neutrons en surface	$10^{11}$

Le champ magnétique vérifie lui aussi le principe de superposition.

### Force de Lorentz :

Une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , subit une force appelée force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Cette force est donc toujours orthogonale à la vitesse de la particule. Contrairement à la force électrostatique, la force magnétique n'entraîne donc pas de variation de la vitesse de la particule, elle permet seulement de dévier sa trajectoire. En effet, la puissance magnétique  $\mathcal{P}$  vaut

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

La force magnétique ne permet donc pas de mettre une particule chargée en mouvement.

Comme pour la force électrostatique, le poids d'une particule chargée est bien souvent

négligeable devant celui de la force de Lorentz. Pour illustrer cela, prenons le cas d'un électron de masse  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg et de charge  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C se déplaçant à une vitesse  $v = 10^5$  m · s<sup>-1</sup> dans un champ magnétique uniforme  $B = 1$  T. On trouve alors

$$\frac{mg}{qvB} \approx 10^{-15}.$$

On peut alors toujours négliger le poids d'une particule chargée devant la force de Lorentz.

### Exemple 1

On s'intéresse ici au mouvement d'un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  (voir Fig. 3.1). La vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  de la particule est orthogonale au champ  $\mathbf{B}$ . La particule est donc soumise à la force de Lorentz et à son poids que nous négligeons ici.

Expérimentalement, on constate que la trajectoire de la particule est circulaire. La force de Lorentz ne travaillant pas, la norme de la vitesse reste en tout temps égale à  $v_0$ . Le mouvement de la particule est donc uniforme et circulaire.

On se place dans un référentiel polaire  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ . La position de la particule est donc repérée par ses coordonnées  $(r, \theta)$ . L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B},$$

où la notation  $\dot{\mathbf{v}}$  est utilisée pour la dérivée temporelle. Dans un référentiel polaire et pour un mouvement circulaire uniforme,  $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = v_0\mathbf{e}_\theta$  et  $\dot{\mathbf{v}} = -v_0^2/r\mathbf{e}_r$ . On obtient donc

$$m\frac{v_0^2}{r}\mathbf{e}_r = -ev_0\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_z = ev_0B\mathbf{e}_r \iff \dot{\theta} = \frac{eB}{m}$$

L'électron suit donc un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire  $eB/m$  appelée pulsation cyclotron. Dans le cyclotron de University of Michigan, le champ magnétique vaut  $B = 0.10$  T, ce qui donne une pulsation de  $1.7 \times 10^{10}$  rad · s<sup>-1</sup> pour un électron.

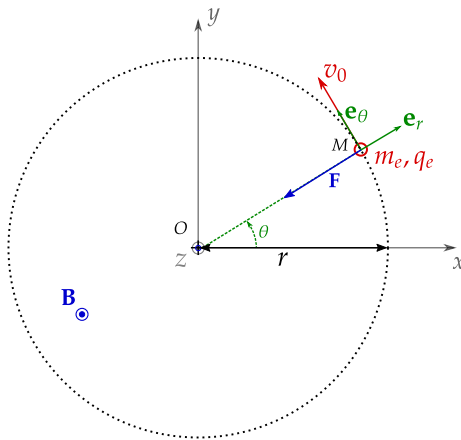


FIGURE 3.1 – Trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme.

## II. La loi de Biot et Savart

De la même manière que pour le champ électrostatique, nous commençons par définir le champ magnétique généré par une charge ponctuelle. Soit une charge ponctuelle  $q$  en un point  $P$  de l'espace se déplaçant à la vitesse  $v$  dans le référentiel du laboratoire. Expérimentalement, on observe que cette particule génère en un point  $M$  un champ magnétique  $B(M)$  tel que

$$B(M) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} v \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3},$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ .

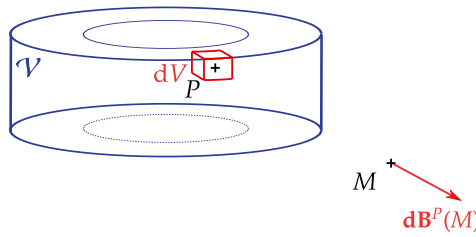


FIGURE 3.2 – Champ magnétique généré par un élément infinitésimal d'un conducteur de densité volumique de courant  $j$  en un point  $M$  de l'espace.

On considère un conducteur formant un volume  $\mathcal{V}$  (voir Fig. 3.2) parcouru par des charges mobiles de densité volumique de charge  $\rho$  se déplaçant à la vitesse  $v$ . Un élément infinitésimal  $dV$  de ce circuit centré en  $P$  génère en un point  $M$  un champ magnétique

$$dB^P(M) = \frac{\mu_0 \rho(P) dV}{4\pi} v(P) \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3},$$

où on reconnaît le vecteur densité de courant  $j(P) = \rho(P)v(P)$ . Le champ magnétique  $B$  généré par l'ensemble du circuit en  $M$  est alors obtenu en additionnant les contributions de chaque élément de ce dernier grâce au principe de superposition

$$B(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} dB^P(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} j(P) \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3} dV$$

On aboutit ainsi à la loi de Biot et Savart.

### Loi de Biot et Savart :

Le champ magnétostatique  $B(M)$  créé au point  $M$  par une distribution volumique de courant  $j$  ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  est

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{j(P) \wedge PM}{\|PM\|^3} dV, \quad (3.2)$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide.

Par un raisonnement similaire, on montre que pour une distribution surfacique de courant  $\mathbf{j}_s$  confinée sur une surface  $S$ , cette expression devient

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in S} \frac{\mathbf{j}_s(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dS. \quad (3.3)$$

Pour un circuit filiforme  $C$  parcouru par un courant  $I$ , cette expression devient

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in C} \frac{I d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}. \quad (3.4)$$

### Exemple 2

On cherche à déterminer le champ magnétique généré par un fil infini  $C$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  en un point  $M$  (voir Fig. 3.3). On se place dans un repère cylindrique  $(0, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Les points  $M$  et  $P$  ont pour coordonnées respectives  $(r, \theta, 0)$  et  $(0, 0, z_P)$ . Le champ magnétique  $d\mathbf{B}^P(M)$  généré par un élément  $d\boldsymbol{\ell}_P$  du fil centré en  $P$  s'écrit

$$d\mathbf{B}^P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{\ell}_P \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3},$$

où  $\mathbf{PM} = \mathbf{PO} + \mathbf{OM} = -z_P \mathbf{e}_z + r \mathbf{e}_r$ . Dans un repère cylindrique, un élément infinitésimal  $d\boldsymbol{\ell}_P$  du fil s'écrit  $d\boldsymbol{\ell}_P = dz_P \mathbf{e}_z$ . On a alors

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}_P \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} = \frac{rdz_P}{\|\mathbf{PM}\|^3} \mathbf{e}_\theta.$$

En remarquant que  $\|\mathbf{PM}\| = r / \cos \alpha$ , l'expression précédente devient alors

$$\frac{rdz_P}{\|\mathbf{PM}\|^3} \mathbf{e}_\theta = \frac{\cos^3 \alpha dz_P}{r^2} \mathbf{e}_\theta$$

De même, on remarque que  $z_P = r \tan \alpha$ . Par différentiation, on obtient donc

$$dz_P = d[r \tan \alpha] = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Finalement,

$$d\mathbf{B}^P(M) = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r} d\alpha \mathbf{e}_\theta.$$

Le champ  $\mathbf{B}(M)$  généré au point  $M$  par le fil s'obtient alors en utilisant le principe de superposition, ce qui revient à intégrer les champs magnétiques infinitésimaux sur l'ensemble du fil. Pour parcourir l'ensemble du fil,  $\alpha$  doit varier entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . On a alors

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.$$

On obtient un champ magnétique porté par  $\mathbf{e}_\theta$  et donc la norme ne dépend que de  $r$ . Les lignes de ce champ sont des cercles concentriques centrés sur le fil.  $\mathbf{B}$  "tourne" autour du fil.

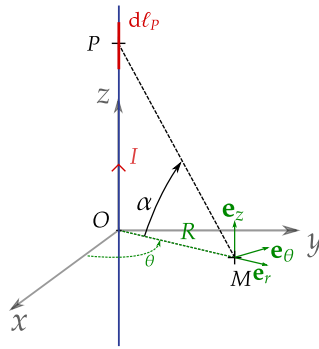


FIGURE 3.3 – Champ magnétique créé en un point  $M$  par un fil parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

#### Calcul du champ magnétique par la loi de Biot et Savart :

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, la loi de Biot et Savart peut s'avérer utile lorsqu'il s'agit de calculer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  généré par une distribution de courant. Voici en résumé la démarche à suivre

1. Réaliser un schéma du système et choisir un repère adapté.
2. Exprimer le petit volume  $dV$ , de surface  $dS$  ou de longueur  $d\ell$  dans ce système de coordonnées.
3. En multipliant cet élément par le courant ( $j$ ,  $j_s$  ou  $I$ ), on obtient le petit élément de courant associé.
4. Exprimer le vecteur  $\mathbf{PM}$  dans le système de coordonnées choisi.
5. En multipliant par  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  et en faisant le produit vectoriel par  $\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}$ , on fabrique le champ élémentaire  $d\mathbf{B}^P(M)$  généré en  $M$ .
6. Pour calculer  $\mathbf{B}(M)$ , il suffit alors d'intégrer sur la distribution de courant.

### III. Équation de la magnétostatique

On considère un fil parcouru par un courant  $I$  dans un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$  (voir Fig. 3.3). Comme vu ci-dessus, le champ magnétique créé par ce fil en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du fil est donné par

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\theta.$$

Comme pour le champ électrostatique, nous allons nous servir de cet exemple simple pour retrouver certaines propriétés du champ magnétostatique.

#### III. 1. Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est l'équivalent pour le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  du théorème de Gauss. Il va nous permettre de calculer facilement le champ magnétostatique généré par une distribution de courants simple.

Les lignes du champ  $\mathbf{B}$  créé par le fil sont des cercles dont l'axe est le fil. Nous cherchons donc dans un premier temps à calculer la circulation de  $\mathbf{B}$  sur la ligne de champ  $C$  de rayon  $r$  passant par  $M$ . On a bien pris soin au préalable d'orienter cette dernière. Dans un repère cylindrique, un petit élément  $d\boldsymbol{\ell}$  de ce contour fermé s'écrit  $d\boldsymbol{\ell} = r d\theta \mathbf{e}_\theta$ . La circulation de  $\mathbf{B}$  sur ce contour s'écrit donc

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I.$$

On constate que la circulation du champ  $\mathbf{B}$  le long du circuit  $C$  ne dépend que du courant  $I$  que ce dernier enlace. Cette propriété que nous venons de montrer pour un fil est en fait une propriété générale du champ magnétostatique.

### Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  le long d'un circuit fermé  $C$  est égale au courant **algébrique**  $I_{\text{int}}$  enlacé par ce dernier multiplié par  $\mu_0$

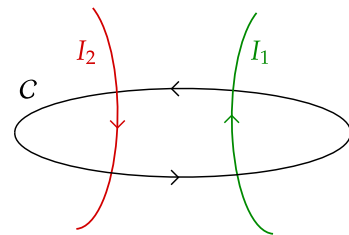
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}. \quad (3.5)$$

Le contour sur lequel est réalisée l'intégrale est appelé contour d'Ampère. Le courant enlacé  $I_{\text{int}}$  est le courant qui traverse une surface orientée qui s'appuie sur le contour d'Ampère. L'orientation de la surface se déduit de celle du contour grâce à la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

### Exemple 3

Soit deux fils électriques parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . Avec les orientations choisies, le théorème d'Ampère appliqué au contour  $C$  s'écrit

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2).$$



Le théorème d'Ampère peut-être traduit sous une forme locale : appelée **équation de Maxwell-Ampère**, qui relie alors le champ magnétostatique au vecteur densité de courant.

### Équation de Maxwell-Ampère :

L'équation de Maxwell-Ampère relie le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  au vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

Cette équation est une relation **locale**, elle permet de relier les dérivées spatiales du champ  $\mathbf{B}$  en un point de l'espace au vecteur  $\mathbf{j}$  en ce même point.

### III. 2. Flux du champ magnétostatique $B$

On cherche maintenant à calculer la divergence du champ  $B$ . En coordonnées cylindriques, cela donne

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

où  $B_r$ ,  $B_\theta$  et  $B_z$  sont les composantes de  $B$ . Dans le cas du fil infini,  $B_\theta$  est la seule composante non nulle de  $B$  et elle ne dépend pas de  $\theta$ . On a donc

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Ce résultat se généralise à un champ magnétostatique  $B$  quelconque sous la forme de l'équation de Maxwell-Thomson.

**Équation de Maxwell-Thomson :**

Un champ magnétique  $B$  vérifie toujours

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Cette relation locale est vérifiée en tout point de l'espace.

**Remarque.** La divergence de  $B$  étant nulle, l'analyse vectorielle affirme qu'il est possible dans ce cas de définir un champ vectoriel  $A$ , défini à un gradient près, tel que  $\operatorname{rot} A = B$ , appelé le potentiel vecteur.

Comme l'équation de Maxwell-Ampère, cette équation peut se mettre sous une forme intégrale, en exprimant le flux du champ magnétique à travers une surface fermée  $S$ .

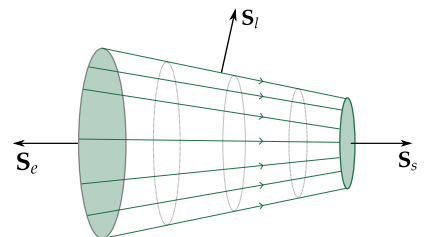
**Flux du champ magnétostatique :**

Le flux du champ magnétique  $B$  à travers une surface fermée  $S$  est nul

$$\oiint_S B \cdot dS = 0.$$

On dit que le champ  $B$  est à flux conservatif.

On peut appliquer ce résultat à une surface  $S$  particulière constituée d'une portion de tube de champ de section d'entrée  $S_e$ , de section de sortie  $S_s$  et de section latérale  $S_l$ .





**Tube de champ :**

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de champ.

D'après le théorème d'Ampère la flux de  $\mathbf{B}$  à travers cette surface est nul. Par définition du tube de champ, l'intégrale sur la surface latérale est nulle. Il reste donc

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_e = - \iint_{S_f} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_s \iff \left| \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_e \right| = \left| \iint_{S_f} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_s \right|.$$

Le flux entrant dans la surface est égal au flux sortant de cette dernière. De plus, la surface de sortie étant de taille plus importante que la surface d'entrée, on en conclut que le champ est plus intense à l'entrée du tube qu'à la sortie. Le champ  $\mathbf{B}$  étant à flux conservatif, un resserrement des lignes de champs traduit une augmentation de l'intensité de ce dernier.

**Flux conservatif et lignes de champ :**

Le champ magnétique étant à flux conservatif, ses lignes de champs se resserrent dans les zones de forte intensité. Inversement, ces dernières s'éloignent lorsqu'il devient plus faible

## IV. Étude des lignes de champ de $\mathbf{B}$

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés spatiales du champ  $\mathbf{B}$ . Nous allons voir comment les **lignes de champ** nous renseignent sur sa répartition dans l'espace.

Nous nous intéressons au champ magnétique produit par un solénoïde (voir Fig. 3.4). Les lignes de champ nous permettent de retrouver quelques propriétés du champ magnétostatique énoncées précédemment.

1. On remarque tout d'abord que les lignes de champ sont des contours fermés qui entourent les fils parcourus par un courant. Cette première observation est une conséquence directe de l'équation de Maxwell-Ampère. L'orientation de ces lignes de champ s'obtient d'ailleurs en considérant le sens du courant dans les fils et en utilisant la règle de la main droite.
2. La divergence nulle de  $\mathbf{B}$  est aussi visible sur cette carte de champ. En effet, on constate que les lignes de champ ne convergent/divergent pas en un point de l'espace, contrairement au champ électrostatique.
3. Dans le cas du champ magnétique, le resserrement des lignes de champ traduit une augmentation de la norme de ce dernier. On conclut que le champ est plus intense à l'intérieur du solénoïde qu'à l'extérieur. De plus, les lignes de champ étant parallèles à l'intérieur du solénoïde, on conclut que le champ est uniforme.
4. Grâce aux lignes de champ, on retrouve rapidement les plans de symétrie et d'antisymétrie du champ magnétique. Le plan médiateur du solénoïde est par exemple un plan de symétrie du champ magnétique. L'analyse de ces symétries sera utile pour calculer le champ magnétique résultant d'une distribution de courant.

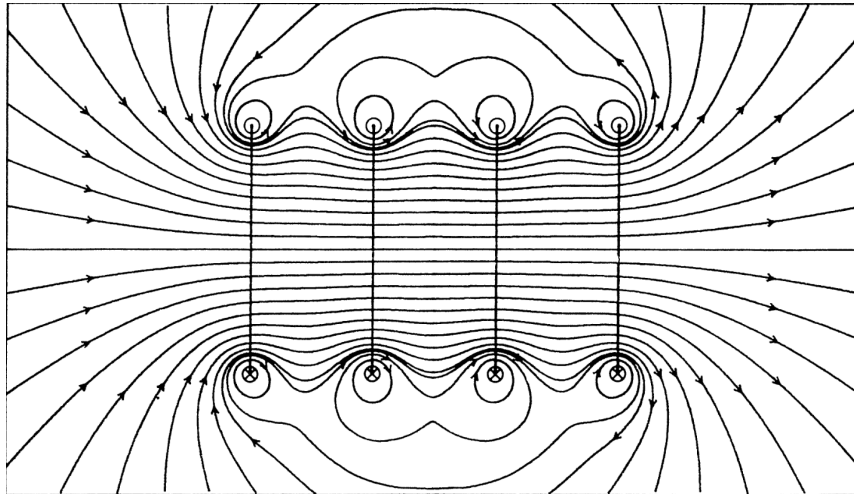


FIGURE 3.4 – Lignes du champ magnétique généré par un solénoïde constitué de 4 bobines parcourues dans le même sens par la même intensité. Cette figure est extraite de [Gié & Sarmant \(1985\)](#)

## V. Calcul du champ magnétostatique

Nous allons voir dans cette partie comment nous pouvons utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  créé par une distribution de courants simple. Nous nous intéressons ici à une bobine torique constituée d'un fil régulièrement bobiné autour d'un tore de section carré (voir Fig. 3.5). Cette bobine est caractérisée par le nombre  $N$  total de spires bobinées, son rayon intérieur  $R$  et sa hauteur  $h$ . La bobine est parcourue par un courant  $I$ .

On cherche à déterminer l'expression du champ électrique  $\mathbf{B}$  en un point  $M$  de l'espace. Pour ce faire, il suffit de suivre le mode d'emploi suivant

1. Faire un schéma du système! C'est absolument indispensable (voir Fig. 3.5)
2. Choisir un repère adapté au problème
3. Étudier les invariances de cette distribution
4. Étudier les symétries de la distribution de courants à l'origine du champ magnétostatique
5. Choisir un contour d'Ampère et appliquer le théorème d'Ampère.

Au vu de la géométrie du système, nous choisissons ici d'utiliser un repère cylindrique  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Le point  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Le champ magnétostatique en  $M$  s'écrit de manière générale

$$\mathbf{B}(M) = B_r(M)\mathbf{e}_r + B_\theta(M)\mathbf{e}_\theta + B_\varphi(M)\mathbf{e}_\varphi. \quad (3.7)$$

Le champ magnétostatique est un vecteur à trois composantes et chaque composante dépend des coordonnées de  $M$ . Pour simplifier cette expression, il est intéressant de considérer les invariances et symétries de la distribution de courant qui génère le champ  $\mathbf{B}$ .

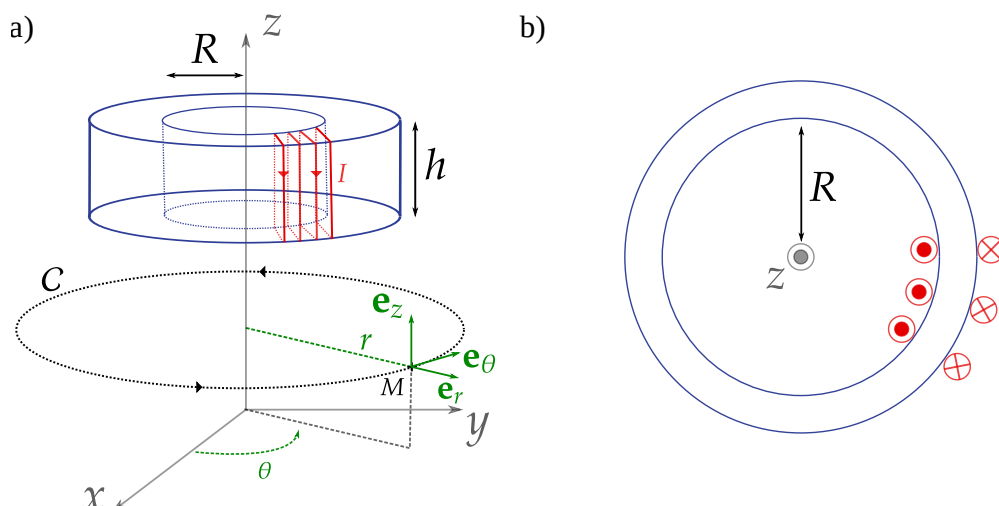


FIGURE 3.5 – Bobine torique à gauche et coupe perpendiculaire à  $(Oz)$  de cette bobine à droite.

## V. 1. Invariance de la distribution de courants

On cherche ici à savoir si la distribution de courant est modifiée sous l'effet d'une translation ou d'une rotation de l'espace. En d'autres termes, on regarde de quelles variables elle dépend. Étant donné que les spires sont uniformément réparties sur le tore, on observe que

- si je tourne le tore d'un angle  $\Delta\theta$  dans la direction  $e_\theta$ , le problème ne change pas. La distribution de courant est donc invariante par rotation selon l'angle  $\theta$ .  **$B$  ne dépend pas de  $\theta$ .**

Finalement, l'expression 3.7 du champ magnétique se simplifie donc en

$$B(M) = B_r(r, z)e_r + B_\theta(r, z)e_\theta + B_z(r, z)e_z.$$

## V. 2. Symétries de la distribution de courants

Si on applique ce principe au champ magnétique créé par une distribution de courants, cela revient à dire que les symétries de la distributions de courants doivent se retrouver dans les symétries du champ magnétique. On en déduit les règles suivantes

### Symétries de $B$ et de la distribution de courant :

- si  $(\Pi)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $B(M)$  doit appartenir à  $(\Pi)$ ,
- si  $(\Pi)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $B(M)$  doit être orthogonal à  $(\Pi)$ .

**Remarque.** Le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  appartient aux plans d'**antisymétrie** de la distribution de courant et non aux plans de symétrie comme c'est le cas pour le champ électrostatique. Le vecteur  $\mathbf{B}$  est qualifié de vecteur axial.

Pour appliquer ces règles à notre exemple, on détermine les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courants auxquels le point  $M$  appartient

- le plan  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant.  $\mathbf{B}(M)$  **doit être orthogonal à ce plan.**

$\mathbf{B}(M)$  doit être orthogonal au plan  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ , il doit donc être colinéaire à  $\mathbf{e}_\theta$

$$\mathbf{B}(M) = B_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta.$$

Nous n'avons imposé aucune condition sur la position de  $M$ , cette relation est donc vraie pour tout point  $M$  de l'espace. Maintenant que l'expression du champ magnétique a été simplifiée au maximum, on cherche à appliquer le théorème d'Ampère.

### V. 3. Application du théorème d'Ampère

La distribution de courant présente une symétrie de révolution. On choisit comme contour d'Ampère un cercle  $C$  de rayon  $r$ , de centre  $O$  et orienté dans le sens de  $\mathbf{e}_\theta$  qui passe par  $M$  (voir Fig 3.5) et on applique le théorème d'Ampère à ce dernier

$$\oint_S \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{int}},$$

où  $I_{\text{int}}$  est la courant enlacé par  $C$ . On commence par déterminer l'expression du membre de gauche. Dans un repère cylindrique,

$$d\mathbf{l} = r d\theta \mathbf{e}_\theta.$$

On obtient alors

$$\oint_C \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B(r, z) \mathbf{e}_\theta \cdot r d\theta \mathbf{e}_\theta = B(r, z) r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r, z).$$

On s'intéresse maintenant au terme de droite de l'équation. Deux cas de figure se présentent :

- $M$  est situé dans le tore : le courant enlacé par  $C$  est alors  $I_{\text{int}} = NI$ .
- $M$  est situé à l'extérieur du tore : le courant enlacé par  $C$  est donc nul. Soit parce que le contour n'enlace aucun courant, soit parce qu'il enlace autant de courants positifs que de courants négatifs.

Finalement,

- si  $M$  se trouve à l'intérieur du tore,  $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$ .
- si  $M$  est en dehors du tore,  $\mathbf{B}(M) = \mathbf{0}$ .

---

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Électromagnétisme En Régime Statique : Le Champ magnétique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 561–598, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985. Postulats de la magnétostatique, in *Électromagnétisme*, vol. 1 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 92–100, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Magnétostatique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 515–538, Pearson Education.
- Pérez, J.-P., Carles, R., & Fleckinger, R., 2002. Champ électromagnétique. propriétés, in *Électromagnétisme : Fondements et Applications*, Masson Sciences, pp. 185–208, Dunod, 4th edn.