V. Corrections

Corrigé de l'exercice 1. [Retour à l'énoncé]

1. Une exponentielle est sans dimension, $\boxed{j_0 \text{ s'exprime donc en } \mathrm{A \cdot m^{-2}}.}$ L'argument à l'intérieur d'une fonction est toujours sans dimension. $\boxed{\delta \text{ est donc homogène à une longueur.}}$ La fonction $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ tend rapidement vers 0. δ correspond donc à la profondeur de pénétration de $\boldsymbol{j}$, et donc de l'onde électromagnétique, dans le conducteur.
2. ω s'exprime en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et σ s'exprime en $S \cdot \mathrm{m}^{-1}$, c'est-à-dire en $\mathrm{A^2 \cdot s^3 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}}$. Le radian est une "fausse" unité car il correspond au rapport de deux longueurs. Le produit $\mu_0\omega\sigma$ est donc homogène à l'inverse du carré d'une longueur. δ est donc bien homogène à une longueur.
3. On cherche à savoir ici si l'onde électromagnétique plonge assez loin dans le sol pour atteindre le gisement de pyrrhotite. L'épaisseur de peau vaut dans les deux cas

   a. $\sqrt{\dfrac{2 \times 100}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^3 \times 2\pi}} = 0.16 \text{ km}$

   b. $\sqrt{\dfrac{2 \times 100}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^8 \times 2\pi}} = 50 \text{ cm}$

   Le radar ne permettrait donc pas de détecter le gisement.
4. Pour le cuivre à température ambiante, $\sigma \approx 5.9 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$. Dans ce cas, $\delta \approx 10$ nm, expliquant ainsi l'opacité du cuivre.

Corrigé de l'exercice 2. [Retour à l'énoncé]

1. Voir figure 2.8a.
2. $\boxed{\text{On distingue deux couches de résistivités respectives } \rho_1 = 29.0\ \Omega \cdot \mathrm{m} \text{ et } \rho_2 = 6.4\ \Omega \cdot \mathrm{m}.}$ L'eau salée a une résistivité plus faible que l'eau douce. La couche la plus profonde correspond donc à l'eau salée.
3. Dans notre exercice, $k \approx -0.6$. La courbe qui nous intéresse est donc celle possédant le même k dans la figure 2.7. Cette courbe passe notamment par le point $(2, 0.5)$. Pour déterminer la profondeur de l'interface eau douce - eau salée, on trace la résistivité apparente normalisée en fonction de la distance inter-électrodes normalisée pour différentes valeur de d (voir Fig. 2.8b). $\boxed{\text{On en déduit que } d \text{ est ici de l'ordre de 100 m.}}$

Corrigé de l'exercice 3. [Retour à l'énoncé]

1. Voir la figure. 2.9
2. Nous savons que le champ électrostatique $\boldsymbol{E}$ est lié au potentiel électrostatique V par la relation

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(V).$$

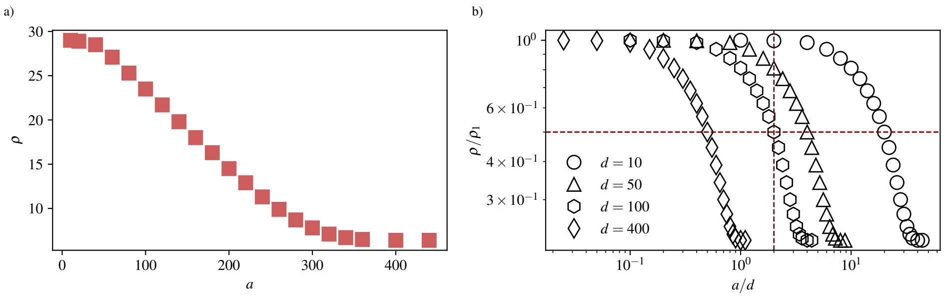

FIGURE 2.8 – Résistivité apparente ρ mesurée en fonction de la distance inter-électrodes a à gauche. Résistivité apparente normalisée par la résistivité de la couche 1 en fonction de la distance inter-électrodes normalisée par l'épaisseur de la couche 1 à droite pour différentes valeurs de d. Sur le panel de droite, les lignes en tiret se croisent au point $(2, 0.5)$.

Le champ électrique est donc dirigé des potentiels les plus élevés aux potentiels les plus faibles. La plaque 1 étant chargée positivement et la plaque 2 négativement, $\boxed{\text{$\boldsymbol{E}$ en un point situé à l'intérieur des plaques est dirigé de la plaque 1 à la plaque 2.}}$

3. Dans un repère cartésien, la forme générale du champ électrique $\boldsymbol{E}$ en un point M de l'espace de coordonnée (x, y, z) est la suivante

$$\boldsymbol{E}(M) = E_x(x, y, z)\boldsymbol{e_x} + E_y(x, y, z)\boldsymbol{e_y} + E_z(x, y, z)\boldsymbol{e_z}.$$

Pour simplifier cette expression, on commence par étudier les invariances de la distribution de charge générant le champ électrique $\boldsymbol{E}$

- les deux plaques étant infinies, le système est invariant par translation selon l'axe $\boldsymbol{e_z}$. $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de z,
- le système est invariant par translation selon $\boldsymbol{e_y}$. $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de y.

$\boxed{\text{$\boldsymbol{E}$ ne dépend donc que de x}}$.

On étudie maintenant les symétries de cette distribution de charge en considérant un point M quelconque de l'espace

- le plan $(M, \boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y})$ est un plan de symétrie de la distribution de charges. $\boldsymbol{E}(M)$ doit donc appartenir à ce plan,
- le plan $(M, \boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge. $\boldsymbol{E}(M)$ doit donc appartenir à ce plan.

$\boldsymbol{E}(M)$ doit appartenir aux plans $(M, \boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y})$ et $(M, \boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_z})$, $\boxed{\text{il est donc colinéaire à $\boldsymbol{e_x}$}}$. On a finalement

$$\boldsymbol{E}(M) = E(x)\boldsymbol{e_x}, \tag{2.18}$$

en tout point de l'espace M. Cette forme simple est propice à l'utilisation du théorème de Gauss.

4. On applique donc le théorème de Gauss aux trois surfaces fermées proposées

a. La surface fermée ne contient aucune charge, le flux de E à travers cette surface est donc nul. On a donc $E(a_1) = E(a_2)$. Comme nous n'avons imposé aucune condition sur le placement de la surface (hormis le fait qu'elle soit incluse entre les deux plaques), on peut conclure que $\boxed{\text{$\boldsymbol{E}$ est uniforme entre les deux plaques.}}$

b. Par un raisonnement analogue, on conclut que $\boldsymbol{E}$ est uniforme à l'extérieur des plaques. $\boxed{\boldsymbol{E} \text{ doit donc être nul à l'extérieur des plaques}}$ pour éviter la génération par ce système d'une énergie infinie.

c. La surface contient la charge σS. Le théorème de Gauss donne donc

$$E(c_1) - E(c_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

$E(c_2)$ étant nul on obtient finalement

$$E(c_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Relation de continuité du champ électrostatique :
Au passage d'une surface possédant une densité surfacique de charge σ,

- la composante du champ électrostatique $\boldsymbol{E}$ tangentielle à la surface est conservée,
- la composante normale à la surface est discontinue. Cette discontinuité vaut

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{2.19}$$

Finalement,

- $\boxed{\text{Le champ électrique est uniforme entre les deux plaques et vaut } \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{e}_x.}$
- $\boxed{\text{Le champ électrique est nul en dehors des plaques.}}$

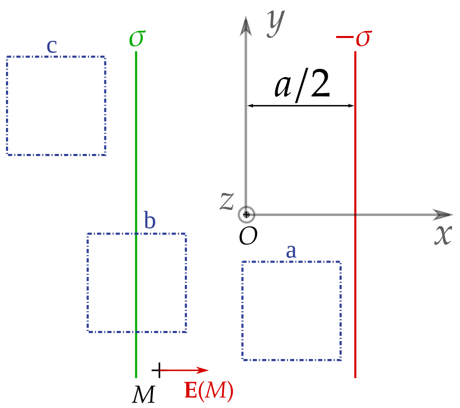

Figure 2.9 – Condensateur plan composé d'une plaque chargée positivement avec une densité surfacique de charge σ et une plaque chargée négativement avec une densité surfacique de charge $-\sigma$.