

2 Champ électrique dans un conducteur

Plan de ce chapitre

I.	Quelques rappels sur le courant électrique	30
II.	Le modèle de Drude	31
III.	Sondage résistif	33
III. 1.	Potentiel électrique d'une électrode	33
III. 2.	Le montage à 4 électrodes	34
III. 3.	Distribution de courant	35
III. 4.	Résistivité apparente	37
IV.	Exercices	39
V.	Corrections	42

Objectifs

- Comprendre comment on peut modéliser la réponse un matériau au travers d'une relation constitutive
- Connaître la notion de résistivité
- Connaître la loi d'Ohm locale
- Comprendre comment on peut sonder le sol grâce à la résistivité

Introduction

Les conducteurs contiennent des *électrons libres*, c'est-à-dire libres de se mouvoir. Ces derniers, soumis à l'agitation thermique, sont animés d'un mouvement erratique (voir Fig. 2.1). Pour générer un courant, il est nécessaire d'exercer une force sur ces derniers, de manière à créer un mouvement d'ensemble. Dans un circuit électrique par exemple, on impose une différence de potentiel entre ses bornes. Les conducteurs solides, tels que le cuivre, contiennent un nombre important d'atomes, l'étude du mouvement d'un électron devient alors difficile. Dans ce chapitre, nous allons voir comment modéliser le comportement d'un conducteur soumis à un champ électrique.

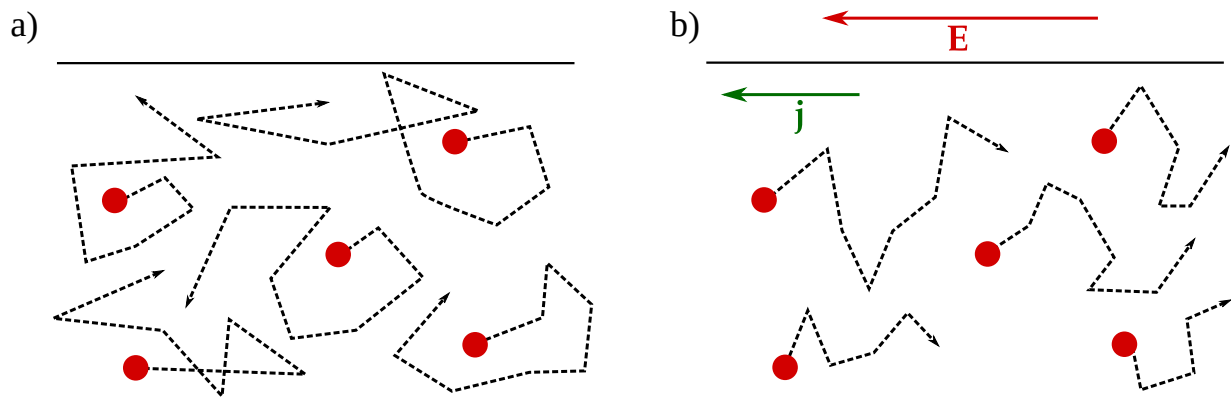


FIGURE 2.1 – Schéma du mouvement des électrons libres dans un conducteur sans champ électrique (à gauche) et avec champ électrique (à droite). Le champ électrique conduit à un mouvement d'ensemble qui génère un vecteur densité de courant j .

I. Quelques rappels sur le courant électrique

Courant électrique :

Un courant électrique est un mouvement de charges électriques. Il est caractérisé par son **intensité**, qui mesure le débit de charges électriques qui traverse une unité de surface par unité de temps. Elle se mesure en ampères (A) qui correspondent à des $C \cdot s^{-1}$ et peut-être positive ou négative.

Exemple 1

Les prises domestiques fournissent un courant dont l'intensité vaut 16 A, voire 32 A pour les plaques à induction. Pour une batterie de téléphone, l'intensité vaut 1 A environ.

Vecteur densité de courant :

En tout point de l'espace, un courant électrique est caractérisé par le vecteur densité de courant

$$j = nqv, \quad (2.1)$$

où q est la charge d'un porteur de charge (C), n est le nombre de charges mobiles par unité de volume (m^{-3}) et v la vitesse d'un porteur de charge. C'est une grandeur additive. L'intensité di qui traverse une surface élémentaire dS_P centrée sur le point P est donc donnée par

$$di = j(P) \cdot dS_P. \quad (2.2)$$

L'intensité totale I traversant une surface macroscopique S est donc donnée par

$$I = \iint_S j(P) \cdot dS_P. \quad (2.3)$$

Exemple 2

On considère un câble de chargeur de téléphone de section $S = 1 \text{ mm}^2$ alimenté par un courant $I = 1 \text{ A}$. Si on suppose que le courant est uniforme à l'intérieur du câble, on a $j = I/S = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. La partie conductrice du câble est composée principalement de cuivre. Dans le cuivre, les porteurs de charges sont des électrons avec $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$. On peut alors remonter à la vitesse de dérive des électrons $v = 60 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le vecteur densité de courant possède une propriété intéressante en régime permanent. En effet, imaginons le cas d'une sphère contenant une charge Q . En régime permanent, la charge Q contenue dans cette sphère est constante. Le débit total de charge à travers la sphère est donc nulle. Le vecteur densité de courant est donc à flux conservatif.

Flux conservatif du vecteur densité de courant :

En régime permanent, le flux du vecteur densité de courant j à travers une surface fermée S est nul

$$\oiint_S j \cdot dS = 0.$$

j est donc à **flux conservatif**. Cette égalité peut se traduire sous une forme locale

$$\nabla \cdot j = 0.$$

Remarque. La loi des nœuds en électrocinétique découle de la conservativité du flux du vecteur densité de courant.

II. Le modèle de Drude

On considère dans cette partie un fil électrique de densité volumique de porteur de charge n . En l'absence de champ électrique, le mouvement des porteurs de charge est erratique. Leur vitesse est donc nulle en moyenne et le fil n'est traversé par aucun courant. À l'instant $t = 0$, il est plongé dans un champ électrique E uniforme et constant. Un courant apparaît alors dans le fil. Dans cette partie, on cherche à relier la densité de courant j parcourant le fil et le champ électrique E imposé.

Expérimentalement, on constate que l'intensité du courant, après une certaine durée, se stabilise à une valeur constante. À partir de l'équation 2.1, on conclut que les électrons doivent atteindre une vitesse d'ensemble limite dans le fil. Pour modéliser ce comportement et par analogie avec la chute d'un corps, le physicien Paul Drude propose l'introduction d'une force de frottement qui s'opposerait à la mise en mouvement des électrons. Cette force de frottements modélise notamment la présence du réseau cristallin dans lequel évolue l'électron.

On considère alors une particule de charge q et de masse m se déplaçant à la vitesse v . Dans le référentiel du fil, supposé galiléen, cette particule est soumise à la force électrostatique qE et à la force de frottement fluide $-\alpha v$, où α est le coefficient de frottement ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) caractéristique du milieu. Pour simplifier le problème, on considère que sa vitesse

est nulle en l'absence de champ électrique. On a donc notamment, $v(t = 0) = \mathbf{0}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce porteur de charge donne

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \alpha v \iff \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{qE}{m}, \quad (2.4)$$

où $\tau = m/\alpha$ est homogène à un temps. La solution générale de cette équation s'écrit

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{q\tau}{m} E, \quad (2.5)$$

où A est une constante d'intégration. Avec la condition initiale, $v(t = 0) = \mathbf{0}$, on obtient

$$v(t) = \frac{q\tau}{m} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] E. \quad (2.6)$$

τ apparaît alors comme étant le temps de relaxation de la vitesse du porteur de charge. Dès que t est plus grand que quelques τ , le porteur de charge a atteint la vitesse limite

$$v_{\text{lim}} = \frac{q\tau}{m} E = \frac{q}{\alpha} E. \quad (2.7)$$

On peut alors établir une relation directe entre la densité volumique de courant j parcourant le fil et le champ électrique E imposé sur ce dernier, en multipliant cette vitesse par nq (voir Éq. 2.1)

$$j = \frac{nq^2\tau}{m} E = \gamma E, \quad (2.8)$$

où γ est la conductivité électrique du matériau. On définit de même la résistivité ρ

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad (2.9)$$

qui s'exprime en Ωm^{-1} .

Loi d'Ohm locale :

La loi d'Ohm locale est une relation constitutive, elle est donc spécifique au conducteur. Elle permet de décrire leur réponse à un champ électrique. Un conducteur soumis à un champ électrique E est traversé par une densité volumique de courant j telle que

$$j = \gamma E. \quad (2.10)$$

γ est la conductivité du conducteur. Elle est caractéristique du matériau considéré et s'exprime en siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$). Elle mesure la facilité d'un courant à parcourir un matériau. En l'absence de champ électrique, le courant à l'intérieur d'un conducteur est donc nul. C'est une grandeur qui dépend de la température. Le tableau 2.1 donne la conductivité de matériaux usuels.

Remarque. On remarque que le champ électrique est toujours orienté dans la même direction que le vecteur de densité volumique de courant.

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur de conductivités de matériaux usuels. Pour le cuivre et l'eau, les valeurs données sont celles obtenues à température ambiante.

Matériau	Conductivité électrique ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
Eau distillée	1.0×10^{-6} à 300 K
Cuivre	5.9×10^7 à 300 K
Basalte	$10^{-5} - 0.5$
Grès	$10^{-3} - 1$
Argile	$10^{-2} - 1$
Graphite	$5 \times 10^2 - 10^4$

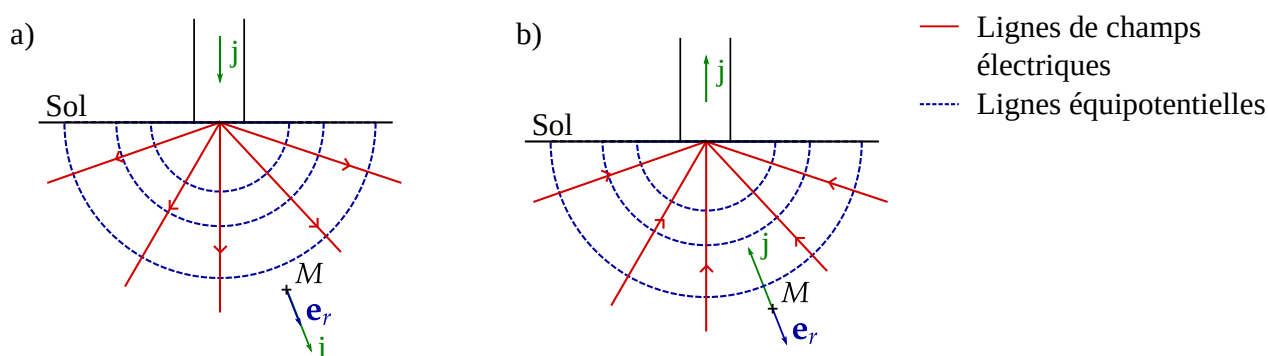


FIGURE 2.2 – Schéma d'une électrode émettrice (à gauche) et réceptrice (à droite). L'électrode est parcourue par une densité volumique de courant j . Elle génère dans le sol un champ électrique E dont on a représenté les lignes de champs en rouge. Quelques lignes équipotentielles du potentiel V résultant de ce champ sont dessinées sous la forme de lignes bleues pointillées.

III. Sondage résistif

La notion de résistivité est particulièrement intéressante en sciences de la Terre. Elle est notamment utilisée pour sonder le sol à la recherche de minerais. Comme le montre le Tableau 2.1, la résistivité des minerais tels que le cuivre est bien plus élevée que celle des roches qui le contiennent. Ce contraste de résistivité permet alors de les localiser en utilisant par exemple le montage à 4 électrodes que nous allons présenter.

III. 1. Potentiel électrique d'une électrode

On considère une électrode de section S parcourue par un courant d'intensité I et de densité volumique de courant j plantée dans un sol uniforme de résistivité ρ . (voir Fig 2.2a). Le point de contact de l'électrode avec le sol agit comme une source de courant en injectant un courant d'intensité I dans ce dernier. Le système présente une symétrie sphérique, j ne dépend donc que de la distance à l'électrode et est porté par le vecteur radial \mathbf{e}_r . La densité de courant volumique j en un point M de l'espace à une distance r de

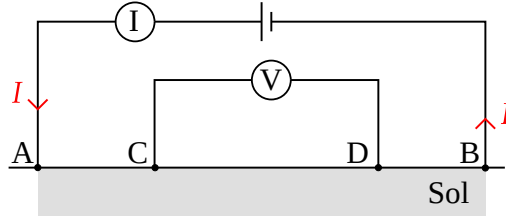


FIGURE 2.3 – Schéma du montage à 4 électrodes. Le générateur fournit un courant d'intensité I qui se distribue dans le sol en A et ressurgit en B. Un voltmètre et un ampèremètre permettent de mesurer respectivement la tension entre les points D et C et l'intensité I . Les électrode D et C ne sont parcourues par aucun courant.

la source est donnée par

$$\mathbf{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.11)$$

où $2\pi r^2$ est la surface de la demi-sphère de rayon r . Cette électrode génère donc dans le sol un champ électrique E relié à \mathbf{j} par la loi d'Ohm locale

$$\mathbf{E}(r) = \rho \mathbf{j}(r) = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.12)$$

Le potentiel électrostatique V en un point M de l'espace est donc déduit en utilisant la relation liant le champ électrique au potentiel électrostatique

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla(V) = -\frac{dV}{dr}(r) \mathbf{e}_r \iff V(r) = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad (2.13)$$

en fixant le potentiel électrostatique nul en l'infini. Le potentiel électrostatique dépend donc directement de la résistivité du milieu considéré.

III. 2. Le montage à 4 électrodes

On présente maintenant le montage à 4 électrodes qui permet de remonter à la résistivité ρ du sol. On considère ici un sol uniforme. La Figure 2.3 fournit un schéma du montage. D'après l'équation 2.13, les électrodes en A et B génèrent un potentiel en C donné par

$$V_C^A = \frac{\rho I}{2\pi |AC|} \quad \text{et} \quad V_C^B = -\frac{\rho I}{2\pi |BC|}.$$

Le signe $-$ dans l'expression de V_C^B provient de l'orientation de \mathbf{j} au point D (voir Fig. 2.2b). Finalement, le potentiel au point C résulte de la superposition de ces deux potentiels

$$V_C = V_C^A + V_C^B = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} \right).$$

De même, le potentiel de l'électrode au point D est donnée par

$$V_D = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{|AD|} - \frac{1}{|BD|} \right).$$

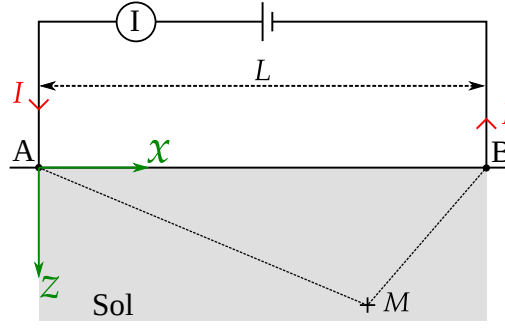


FIGURE 2.4 – Paire d'électrodes alimentées par un courant d'intensité I et séparées par une distance L .

La différence de potentiel ΔV mesurée par le voltmètre est donc donnée par

$$\Delta V = V_C - V_D = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} - \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|BD|} \right)$$

En dehors de la résistivité ρ , toutes les autres grandeurs apparaissant dans cette égalité sont connues. On peut donc remonter à la résistivité du sol

$$\rho = \frac{2\pi\Delta V}{I} \left(\frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} - \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|BD|} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

Certaines configurations d'électrodes permettent d'obtenir une formule finale simple. On peut citer par exemple la configuration de Wenner, pour laquelle $|AC| = |DB| = a$ et $|CB| = |AD| = 2a$. La formule précédente devient alors

$$\rho = 2\pi a \frac{V}{I}. \quad (2.15)$$

III. 3. Distribution de courant

On s'intéresse maintenant à la distribution de courant générée dans le sol par une paire d'électrodes émettrice-réceptrice. On cherche à connaître la profondeur maximale que permet de sonder une paire d'électrodes.

On considère donc une paire d'électrodes A et B alimentées par un courant d'intensité I et séparées par une distance L (voir Fig. 2.4). Le sol est un demi-espace infini de résistivité ρ uniforme. On se place dans un repère cartésien (O, e_x, e_y, e_z) . Un point M de l'espace est donc repéré par ses coordonnées (x, y, z) .

La paire d'électrodes génère au point M un champ électrostatique E dont la composante selon e_x vaut

$$E_x(M) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{|AM|} - \frac{1}{|BM|} \right) \right],$$

où $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $|BM| = \sqrt{(L-x)^2 + y^2 + z^2}$. On a alors

$$E_x(M) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{x}{|AM|^3} + \frac{L-x}{|BM|^3} \right).$$

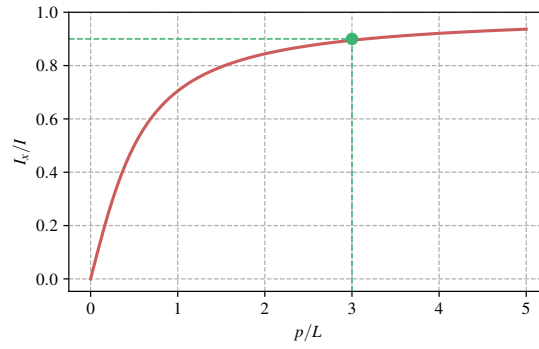


FIGURE 2.5 – Intensité relative traversant une section de sol située en $x = L/2$ jusqu'à la profondeur p en fonction du rapport de p sur la distance inter-électrode L . Le point vert correspond au point particulier (3, 0.9).

On peut alors aboutir à la composante j_x de la densité volumique de courant j en utilisant la loi d'Ohm

$$j_x(M) = \frac{E_x}{\rho} = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{x}{|AM|^3} + \frac{L-x}{|BM|^3} \right). \quad (2.16)$$

On s'intéresse maintenant au cas où le point M appartient au plan médian $x = L/2$ aux deux électrodes. Dans ce cas particulier, j_x vaut

$$j_x(M) = \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

L'intensité dI_x du courant traversant la surface élémentaire $dydz\mathbf{e}_x$ centré en M s'écrit

$$dI_x = j(M) \cdot dydz\mathbf{e}_x = j_x(M)dydz = \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dydz.$$

La fraction de courant qui traverse une section du plan médian jusqu'à une profondeur p est alors donnée par

$$\frac{I_x}{I}(p) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{z=0}^{z=p} \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dydz.$$

Comme

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty} \frac{dy}{[(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2}{[(L/2)^2 + z^2]^{3/2}},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{I_x}{I}(p) = \int_{z=0}^{z=p} \frac{IL}{\pi [(L/2)^2 + z^2]^{3/2}} dz.$$

On obtient alors finalement

$$\frac{I_x}{I}(p) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2p}{L}\right). \quad (2.17)$$

Sur la Figure 2.5, on a tracé l'évolution de l'intensité relative traversant une section de sol située en $x = L/2$ jusqu'à la profondeur p en fonction du rapport de p sur la distance inter-électrode L . On remarque que 90 % de l'intensité I traverse une section de sol s'étendant jusqu'à la profondeur $3L$. En augmentant la distance L entre les deux électrodes, on peut alors sonder le sol à une profondeur plus élevée.

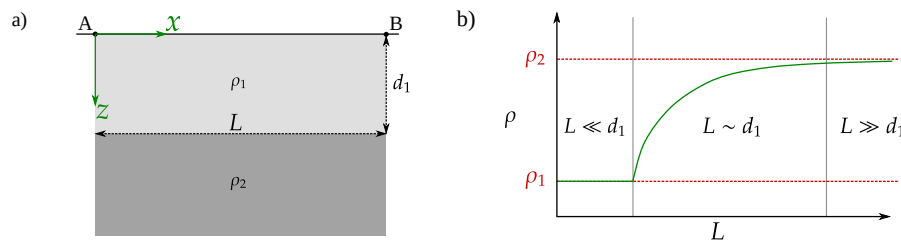


FIGURE 2.6 – Mesure de la résistivité d’un sol bicouche avec 2 électrodes avec le montage à gauche et l’évolution schématique de la résistivité apparente ρ avec la distance L entre les électrodes à droite. Les deux électrodes sont séparées d’une distance L et alimentées par un courant d’intensité I . La première couche présente une épaisseur d_1 et une résistivité ρ_1 , tandis que la seconde couche présente une résistivité ρ_2 avec $\rho_1 < \rho_2$.

III. 4. Résistivité apparente

Nous n’avons pour l’instant considéré que le cas idéal d’un sol de résistivité uniforme ρ . Dans ce cas bien précis, la méthode des 4 électrodes permet de déterminer la résistivité exacte de ce dernier.

En réalité, la résistivité d’un sol est une fonction complexe de l’espace qui résulte de sa composition, de sa température et d’autres paramètres physiques. La résistivité mesurée par la méthode des 4 électrodes est alors qualifiée d’*apparente*. Cette mesure donne néanmoins des informations utiles sur la structure du sol sondé.

Pour bien illustrer cela, on considère le cas d’un sol composé de deux couches de résistivités uniformes ρ_1 et ρ_2 , avec $\rho_2 > \rho_1$. La couche 1 s’étend sur une épaisseur d_1 (voir Fig. 2.6(a)). Pour simplifier le problème, on décide de sonder ce sol à l’aide de deux électrodes séparées d’une distance L et alimentées par un courant d’intensité I . La résistivité mesurée va alors dépendre de la distance entre les deux électrodes (voir Fig. 2.6(b))

1. lorsque $L \ll d_1$, seule la première couche de sol est sondée. La résistivité mesurée sera alors proche de ρ_1 .
2. lorsque $L \gg d_1$, la majeure partie de l’intensité traverse la seconde couche de sol. La résistivité mesurée tend vers ρ_2 .
3. lorsque $L \sim d_1$, les deux couches sont sondées de manière équivalente. La résistivité mesurée se situe entre ρ_1 et ρ_2 .

En faisant varier la distance L entre les deux électrodes, on est alors capable d’avoir une carte schématique de la résistivité du sol sondé et donc de connaître la composition de ce dernier.

Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Courant-Conducteur électrique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI**, J'intègre, pp. 525–561, Dunod.
- Lowrie, W., 2007. Earth's age, thermal and electrical properties, in *Fundamentals of Geophysics*, pp. 207–281, Cambridge University Press, 2nd edn.
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Le courant électrique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 469–485, Pearson Education.