Objectifs :

1) Connaître les EQ de l'électrostatique
2) Faire le lien entre ces EQ et les cartes de champ
3) Savoir calculer un champ $\vec{E}$

I) La loi de Coulomb

3 Observations :

1) Deux types de charge : + et −

2) . Deux charges de même signe => force répulsive
   . Deux charges de signe opposé s'attirent

3) Amplitude de la force électrique ↘ avec le carré de la distance

Loi de coulomb :

La force d'interaction électrostatique entre deux particules chargées s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} q_1 \times q_2 \, \vec{e}_{12}$$

Force électrostatique [N]

permittivité diélectrique du vide [F.m^{-1}]

Distance entre les particules [m]

Charges des particules [C]

<u>Remarque</u> : N $\Longleftrightarrow$ kg.m.s^{-2}

On a le produit entre q_1 et q_2 qui apparaît :

- $q_1 \times q_2 < 0 \Rightarrow$ force attractive
- $q_1 \times q_2 > 0 \Rightarrow$ force répulsive

Exemple 1 : Le modèle planétaire de l'H

Électrostatique : $$\left| F_{p \to e}^{elec} \right| = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = 82{,}7 \times 10^{-9}\ N$$

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

ε_0 : $4\pi \times 10^{-7}\ F.m^{-1}$

$r = 52{,}9\ pm$

Gravitation : $|F^{g}_{p\to e}| = \mathcal{G} \times \frac{m_e \times m_p}{r^2}$

$1,67 \times 10^{-27}$ kg

$52,9$ pm

$9,11 \times 10^{-31}$ kg

$6,67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

$\simeq 36.2 \times 10^{-47}\,N \ll |F^{elec}_{p\to e}|$

$\Rightarrow$ On peut négliger la force d'interact° de gravitat° devant la force électrostatique

II) Le champ électrostatique

Une particule q_1 va interagir avec une particule q_2 via son champ électrostatique

charge

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e_r}$$

vecteur radial

distance

Une particule q_2 placé à une distance r de q_1 va ressentir une force :

$$\vec{F}^{elec}_{q_1 \to q_2} = q_2 \vec{E}_{q_1}(M_2)$$

Principe de superposition

Le champ $\vec{E}$ créé par N particules est la somme des champs $\vec{E}_i$ créé par chaque particule i

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|M_iM\|^2}\vec{e}_{M_iM}$$

$\Rightarrow$ Si on place une particule Q en M elle ressentira la force : $\vec{F} = Q\vec{E}$

III) Les différentes distributions de charges

Volumique

- On découpe V en plusieurs petit volume $d\tau$

- $dq_M = \rho(M)\, d\tau_M$

charge contenue dans $d\tau$ [C]

Densité volumique de charge $[C.m^{-3}]$

Volume $[m^3]$

- $\vec{E}(P) = \iiint_{M \in V} \underbrace{\frac{\rho(M)}{4\pi\varepsilon_0 \|MP\|^2}\, \vec{e}_{PM}\, d\tau_M}_{}$

Champ $d\vec{E}$ crée par le volume $d\tau_M$

Surfacique

- On découpe S en petites surfaces dS

surface $[m^2]$

- $dq_M = \sigma(M)\, dS_M$

charge [C]

Densité surfacique de charge $[C.m^{-2}]$

- $\vec{E}(P) = \iint_{M \in S} \frac{\sigma(M)}{4\pi\varepsilon_0 \|MP\|^2}\, \vec{e}_{PM}\, dS_M$

Linéique

- On découpe le fil en portions dl_M

- $dq_M = \lambda(M)\, dl_M$

charge [C]

Densité linéique $[C.m^{-1}]$

longueur [m]

- $\vec{E}(P) = \int_{M \in C} \frac{\lambda(M)}{4\pi\varepsilon_0 \|MP\|^2}\, \vec{e}_{PM}\, dl_M$

IV Équations de l'électrostatique

On s'intéresse donc à une charge ponctuelle q placé au centre d'un repère sphérique.

1) Au flux du champ électrostatique à travers une sphère de rayon r centré en O

2) Rotationnel du champ électrostatique

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|OM\|^2} \vec{e}_{OM}$$

$\vec{e}_r$

Vecteur surface élémentaire :

À chaque point r d'une surface, on associe un vecteur élémentaire $\vec{dS}_r$ tel que :

- $\vec{dS}$ soit orthogonal à la surface
- $\vec{dS}$ soit orienté (fixé par l'expérimentateur)
- $\|\vec{dS}\|$ = petite surface $\Rightarrow [m^2]$

Dans notre cas : $\vec{dS} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$$

$$\vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{q\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}$$

② Calculer le flux total :

$$\oiint_{r\in S} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{q\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{q}{\cancel{4}_{2}\cancel{\pi}\varepsilon_0}\times\cancel{2}\cancel{\pi}\times\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_0}\times\underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{2}$$

$$\boxed{\oiint_{r\in S}\vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

charge incluse dans S

Théorème de Gauss

<u>Intégrale</u> : $$\oiint_{r \in S} \vec{E}(r) \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

champ électrique $[V . m^{-1}]$

Surface $[m^2]$

Q : charge incluse dans S $[C]$

$$Q = \iiint_{r \in V} \rho(r)\, dV$$

V : Volume délimité par S

<u>Locale</u> : $$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : Densité volumique de charge $[C . m^{-3}]$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

cartésien

2) Potentiel électrostatique et Équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\varphi)} - \cancel{\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}}\right]\vec{e_r}$$

$$+ \left[\cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}} - \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)}\right]\vec{e_\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)} - \cancel{\frac{\partial E_r}{\partial\theta}}\right]\vec{e_\varphi}$$

$$= \vec{0}$$

Le champ électrique est à rotationnel nul.

Équation de Maxwell-Faraday

Locale $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ Vérifiée en tout point de l'espace

$\vec{E}$: $[V.m^{-1}]$

Intégrale : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow$ Le champ électrique est à circulation conservative

⚠ Orientation

Le champ électrique est à rotationnel nul $\Rightarrow$ On peut définir un potentiel électrostatique tel que V

$$\ominus \overrightarrow{grad}\, V = \vec{E}$$

$[V \cdot m^{-1}]$

potentiel électrostatique $[V]$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V(A) - V(B)$$

En reportant l'expression de V dans MG

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}\,V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Équation de Poisson.

De plus, la force électrostatique est conservative $\Rightarrow$ elle dérive donc d'une énergie potentielle E_p^{elec} :

$$\vec{F}^{elec} = -\vec{\mathrm{grad}}\left(E_p^{elec}\right)$$

$\Rightarrow$ L'énergie potentielle d'une particule q dans un potentiel V est donc donnée par :

$$E_p = -qV + \underbrace{X}_{\text{cste}}$$

Exemple : Le modèle planétaire de l'hydrogène.

Pour une particule ponctuelle :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

q de l'électron

$$E_{p,e^-} = -eV = -e \times \underbrace{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{V(r)} \simeq -27{,}3\,eV$$

1.6×10^{-19} J

On a fixé $X = 0$ pour avoir une énergie nulle en ∞.

$$E_{c,e^-} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = 13{,}7\,eV$$

Finalement l'énergie totale de l'atome d'hydrogène est donnée par :

$$E = E_{p,e^-} + E_{c,e^-} \simeq -13{,}6\,eV$$

V) Carte de champs

Ligne de champ : Vecteur qui est colinéaire au champ en tout point de l'espace $\Rightarrow$ la ligne de champ est orientée.

Pour déterminer l'équation des lignes de champ $\vec{E}$, on résout l'équation : $\vec{E} \times \vec{dl} = \vec{0}$

<u>Exemple</u> : Ligne de champ d'une particule ponctuelle :

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$$

Repère sphérique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

↑ Position de la particule

$$\vec{E} \times \vec{d\ell} = \vec{0} \iff \begin{vmatrix} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix} = \vec{0}$$

En sphérique :

$$\vec{d\ell} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ \sin\theta\,\frac{d\varphi}{r} = 0 \\ d\theta/r = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, tous les points de la ligne doivent avoir le même θ et le même φ.