VIII. Corrections

Corrigé de l'exercice 1. [Retour à l'énoncé]

1. L'argument d'une fonction est toujours sans dimension. $\boxed{a \text{ est donc homogène à une longueur.}}$
Le terme
$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
correspond au potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle. On en déduit que $\boxed{Q \text{ est homogène à une charge.}}$

2. Le champ électrostatique $\boldsymbol{E}$ est lié au potentiel V par la relation suivante
$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(V),$$
qui est vraie en tout point de l'espace. On a alors
$$\boldsymbol{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}(r)\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}(r)\boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}(r)\boldsymbol{e}_\varphi = \boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)\boldsymbol{e}_r}$$

3. On considère une sphère $\mathcal{S}$ de rayon r et de centre O. Cette sphère forme une surface fermée, on peut donc lui appliquer le théorème de Gauss pour connaître la charge $q(r)$ contenue dans cette dernière
$$\oiint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q(r)}{\epsilon_0}.$$
Le vecteur surface élémentaire de $\mathcal{S}$ s'écrit
$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_r.$$
On a alors
$$E(r)r^2\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \iff E(r)\times 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \iff \boxed{q(r) = Q\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

4. **a.** $\boxed{q(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} Q}$

   b. $\boxed{q(r) \underset{r\to \infty}{\longrightarrow} 0}$

   Cela correspond à une charge ponctuelle Q située en $r = 0$ entouré d'une densité de charge négative dont la charge totale est $-Q$. a, qui est la distance de décroissance de l'exponentielle, donne donc $\boxed{\text{une taille approximative du nuage électronique}}$ qui entoure le noyau d'un atome. La présence du nuage écrante le potentiel créé par la charge centrale en accélérant sa décroissance.

Corrigé de l'exercice 2. [Retour à l'énoncé]

1. On suppose que la particule est située à l'origine O d'un repère sphérique $(O, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$. L'expression des deux champs est alors

$$\boldsymbol{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 ||OP||^2}\boldsymbol{e}_r \quad \text{et} \quad \boldsymbol{g}(M) = -\mathcal{G}\frac{m}{||OP||^2}\boldsymbol{e}_r,$$

où $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide. On en déduit l'analogie suivante

- $q \longleftrightarrow m$
- $1/4\pi\epsilon_0 \longleftrightarrow -\mathcal{G}$.

2. On peut alors en déduire un théorème de Gauss pour le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$. Soit une surface fermée $\mathcal{S}$, contenant une masse m, le flux de $\boldsymbol{g}$ à travers cette surface est donnée par

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi\mathcal{G}m}$$

3. Voir Sec. V.. On a

$$\boxed{\boldsymbol{g}(M) = g(r)\boldsymbol{e}_r.}$$

4. Voir Sec. V. pour plus de détail. Le théorème de Gauss appliqué à une sphère $\mathcal{S}$ de rayon r et de centre O_1 donne

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi\mathcal{G} \times \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho & \text{si} \quad r \leq R_1 \\ -4\pi\mathcal{G} \times \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 \rho & \text{si} \quad r \geq R_1. \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\boldsymbol{g}(M) = \begin{cases} -\dfrac{4\mathcal{G}\pi\rho}{3}\boldsymbol{OM} & \text{si} \quad r \leq R_1 \\ -\dfrac{4\mathcal{G}\pi R_1^3}{3||OM||^3}\boldsymbol{OM} & \text{si} \quad r \geq R_1. \end{cases}}$$

5. Le champ de gravitation $\boldsymbol{g}$ $(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ est homogène à une accélération. La constante universelle de gravitation s'exprime en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$, la masse volumique ρ en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et OM en m. Le résultat est bien homogène.
6. En ajoutant cette cavité vide, on perd toutes les symétries et invariances que la distribution de charge présentait. $\boxed{\text{L'utilisation du théorème de Gauss est donc peu judicieuse.}}$
7. Le modèle de Terre proposé dans l'exercice peut-être obtenue en additionnant une sphère S_1 de masse volumique uniforme ρ, de rayon R_1 et centrée en O_1 et une sphère $\mathcal{S}_1$ de masse volumique uniforme $-\rho$, de rayon R_2 et centrée en O_2. Le champ de gravitation $\boldsymbol{g}$ en un point M à l'intérieur de la cavité résulte donc de la superposition des champs générés par les sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$

$$\boldsymbol{g}(M) = \boldsymbol{g}_1(M) + \boldsymbol{g}_2(M) = -\frac{4\mathcal{G}\pi\rho}{3}(\boldsymbol{O_1M} - \boldsymbol{O_2M}) = \boxed{-\frac{4\mathcal{G}\pi\rho}{3}\boldsymbol{O_1O_2}}$$

Le champ est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

Corrigé de l'exercice 3. [Retour à l'énoncé]

Pour cet exercice, il suffit de suivre la recette donnée dans le cours (voir Sec. V.).

1. On commence donc bien sûr par réaliser un schéma du système et à choisir un repère adapté aux système, ici un repère cylindrique $(O, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$ (voir Fig. 1.10). Un point de l'espace M est défini par ses coordonnées (r, θ, z).
2. On étudie ensuite les invariances de la distribution de charge qui génère au point M un champ électrostatique

$$\boldsymbol{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_z.$$

   a. Le fil est infini, la distribution de charge est donc invariante par translation selon z. $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de z.

   b. Le fil présente une symétrie de révolution. Il est invariant par rotation autour de l'axe z. $\boldsymbol{E}$ ne dépend donc pas de θ.

   $\boldsymbol{E}$ ne dépend donc que de la distance au fil r.
3. On étudie ensuite les symétries de la distribution de charge.

   a. M appartient au plan $(M, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ qui est un plan de symétrie de la distribution de charge. $\boldsymbol{E}(M)$ appartient donc à ce plan.

   b. M appartient au plan $(M, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_z)$ qui est un plan de symétrie de la distribution de charge. $\boldsymbol{E}(M)$ appartient donc à ce plan.

   $\boldsymbol{E}(M)$ doit appartenir aux plans $(M, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ et $(M, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_z)$. On en déduit que $\boldsymbol{E}(M)$ est colinéaire à $\boldsymbol{e}_r$.

$$\boldsymbol{E}(M) = E_r(r)\boldsymbol{e}_r.$$

   Comme nous avons choisi notre point M de manière quelconque, ce résultat est vrai en tout point de l'espace.
4. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h centré sur le fil. Cette surface fermée peut-être vue comme la combinaison de 3 surfaces : la surface latérale du cylindre $\mathcal{S}_l$, le couvercle du cylindre $\mathcal{S}_c$ et le fond du cylindre $\mathcal{S}_f$. L'application du théorème de Gauss à cette surface s'écrit

$$\iint_{\mathcal{S}_l} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_l + \iint_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_f + \iint_{\mathcal{S}_c} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_c = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

   $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_f$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_c$ sont colinéaires à $\boldsymbol{e}_z$, le produit scalaire entre ces vecteurs surfaciques élémentaires et $\boldsymbol{E}$ est donc nul. Finalement, seule la première intégrale nous intéresse. Tous les points de $\mathcal{S}_l$ ont la même coordonnée radiale. Pour se déplacer sur cette surface, il suffit de faire varier θ et z. On a donc

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_l = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_r.$$

   Le terme de gauche de l'équation précédente devient donc

$$\iint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_l = E(r)r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h \mathrm{d}z = E(r)2\pi r h.$$

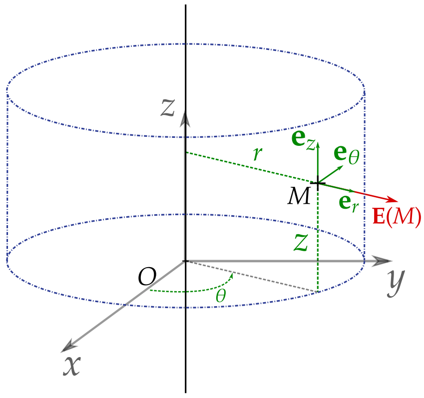

FIGURE 1.10 – Schéma du fil chargé avec le repère cylindrique associé. La surface de Gauss utilisée apparaît en tiret-pointillé bleu.

Finalement,

$$\boxed{\boldsymbol{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\boldsymbol{e_r}}$$