VI. Exercices

Exercice 1 (Émission radioactive). [Corrigé page 116]
Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point O, émet, à partir de l'instant $t = 0$, des particules α avec une vitesse v_0 supposée constante et de façon isotrope. À l'instant t, la charge électrique située en O est

$$q(t) = q_0 \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right],$$

où τ correspond au temps de demi-vie de la masse radioactive. On se place dans un repère sphérique $(O, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$. Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ). On admet que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace, ce qui se démontre par des arguments de symétrie.

1. Déterminer le champ électrique $\boldsymbol{E}(M, t)$ en un point M de l'espace pour $t > 0$. Commenter.
2. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et la densité volumique de courant $\boldsymbol{j}(M, t)$ pour $t > 0$.
3. Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et les équations de Maxwell.

Exercice 2 (OPPH dans le vide illimité). [Corrigé page 117]

1. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.
2. Les directions de l'espace sont indiquées par la base orthonormée $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$. On envisage une solution sous forme d'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement
$$\boldsymbol{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x,$$
où E_0 est l'amplitude de l'onde, ω sa pulsation temporelle et $k > 0$ la pulsation spatiale. Dans quelle direction se propage l'onde électromagnétique ? Quelle est l'état de polarisation de l'onde ?
3. Quelle relation doivent vérifier k et ω ? Utiliser l'équation de propagation de $\boldsymbol{E}$ pour aboutir à cette relation.
4. Déterminer le champ magnétique $\boldsymbol{B}(z, t)$ associé à cette onde.
5. Exprimer le vecteur de Poynting $\boldsymbol{\Pi}(z, t)$. En déduire la puissance $\mathcal{P}$ (moyennée en temps) traversant une surface d'aire S orthogonale à la direction de propagation et orientée dans le sens de la propagation.
6. Exprimer la densité volumique $u_{\text{em}}(z, t)$ d'énergie électromagnétique de l'onde. Que dire des termes électrique et magnétique ? Moyenner u_{em} en temps. Exprimer de deux manières différentes l'énergie qui passe à travers S durant une durée $\mathrm{d}t$. En déduire la vitesse v_e de propagation de l'énergie.

Exercice 3 (Onde électromagnétique plane progressive). [Corrigé page 120]
On étudie une onde électromagnétique dans un repère cartésien $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ dont le champ électrique s'exprime en notation complexe

$$\underline{\boldsymbol{E}}(x,y,z,t) = \underline{E_x}(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_x + \underline{E_y}(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_y \quad \text{avec} \quad \underline{E_x}(x,y,z,t) = E_0 \exp\left\{ i\left[\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right]\right\},$$

avec ω la pulsation temporelle de l'onde et k une constante. L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde λ vaut $\lambda = 700$ nm.

1. Calculer la fréquence de l'onde. À quel domaine du spectre électromagnétique cette onde appartient-elle ?
2. Calculer la valeur numérique de la constante k.
3. Exprimer $\underline{E_y}$ en fonction de $\underline{E_x}$.
4. Calculer le champ magnétique $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ associée à cette onde.
5. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde ainsi que sa moyenne temporelle.
6. Calculer le vecteur de Poynting $\boldsymbol{\Pi}(x,y,z,t)$ de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 4 (Onde dans un métal). [Corrigé page 122]
À suffisamment basse fréquence, un métal est localement neutre et sa conductivité γ est réelle. On peut y négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

1. Établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le métal.
2. Le métal est illimité dans l'espace. On envisage une onde dont le champ électrique s'écrit, en notation complexe,
$$\underline{\boldsymbol{E}}(z,t) = E_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}z)]\boldsymbol{e}_x, \tag{5.17}$$
où E_0 est une constante réelle positive. Établir la relation de dispersion en faisant intervenir une distance caractéristique δ (épaisseur de peau). Donner l'expression du champ électrique. Quelle est la signification de δ ?
3. Établir l'expression du champ magnétique $\underline{\boldsymbol{B}}$ de l'onde.
4. Établir l'expression du vecteur de Poynting moyenné en temps.
5. On raisonne sur un parallélépipède d'épaisseur dz, d'extension L selon x et ℓ selon y. Déterminer l'expression de la puissance $\langle \mathcal{P} \rangle$ (moyennée en temps) cédée à ce volume de métal par l'onde (effet Joule).
6. En moyenne, l'énergie contenue dans ce volume reste constante. En réalisant un bilan énergétique sur le volume, vérifier la cohérence des résultats des deux questions précédentes.