

---

# Table des matières

---

<b>1 Électrostatique</b>	<b>3</b>
I. La loi de Coulomb . . . . .	4
II. Le champ électrostatique . . . . .	6
III. Les différentes distributions de charge . . . . .	7
III. 1. Densité volumique de charges . . . . .	7
III. 2. Densité surfacique de charge . . . . .	8
III. 3. Densité linéique de charge . . . . .	9
IV. Équation de l'électrostatique . . . . .	10
IV. 1. Le théorème de Gauss . . . . .	10
IV. 2. Le potentiel électrostatique et l'équation de Maxwell-Faraday . . . . .	12
V. Étude des lignes de champ de $E$ . . . . .	15
VI. Calcul du champ électrostatique . . . . .	17
VI. 1. Invariance de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 2. Symétries de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 3. Application du théorème de Gauss . . . . .	19
VII. Exercices . . . . .	22
VIII. Corrections . . . . .	24
<b>2 Champ électrique dans un conducteur</b>	<b>29</b>
I. Quelques rappels sur le courant électrique . . . . .	30
II. Le modèle de Drude . . . . .	31
III. Sondage résistif . . . . .	33
III. 1. Potentiel électrique d'une électrode . . . . .	33
III. 2. Le montage à 4 électrodes . . . . .	34
III. 3. Distribution de courant . . . . .	35
III. 4. Résistivité apparente . . . . .	37
IV. Exercices . . . . .	39
V. Corrections . . . . .	42
<b>3 Magnétostatique</b>	<b>45</b>
I. La force de Lorentz . . . . .	46
II. La loi de Biot et Savart . . . . .	48
III. Équation de la magnétostatique . . . . .	50
III. 1. Le théorème d'Ampère . . . . .	50
III. 2. Flux du champ magnétostatique $B$ . . . . .	52
IV. Étude des lignes de champ de $B$ . . . . .	53

V.	Calcul du champ magnétostatique . . . . .	54
V. 1.	Invariance de la distribution de courants . . . . .	55
V. 2.	Symétries de la distribution de courants . . . . .	55
V. 3.	Application du théorème d'Ampère . . . . .	56
VI.	Exercices . . . . .	58
VII.	Corrigé . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Étude macroscopique de l'aimantation</b>	<b>67</b>
I.	Le dipôle magnétique . . . . .	68
I. 1.	Champ magnétique d'une spire . . . . .	68
I. 2.	Topologie d'un champ magnétique dipolaire . . . . .	70
I. 3.	Action d'un champ magnétique extérieur . . . . .	72
II.	Le vecteur aimantation . . . . .	73
II. 1.	Approche microscopique . . . . .	73
II. 2.	Approche macroscopique . . . . .	73
II. 3.	Équivalence entre aimantation et distribution de courant . . . . .	75
III.	Aimantation induite . . . . .	76
III. 1.	Paramagnétisme, diamagnétisme et ferromagnétisme . . . . .	76
III. 2.	Susceptibilité magnétique et perméabilité magnétique . . . . .	77
III. 3.	Le lien entre $H$ et $M$ pour les matériaux ferromagnétiques . . . . .	78
IV.	Étude du champ magnétique terrestre . . . . .	80
IV. 1.	Transition para-ferromagnétique . . . . .	80
IV. 2.	Aimantation thermorémanente . . . . .	81
V.	Exercices . . . . .	84
VI.	Corrigé . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Électromagnétisme en régime variable</b>	<b>89</b>
I.	Les limites des équations en régime permanent . . . . .	90
I. 1.	Équation de conservation de la charge . . . . .	90
I. 2.	Équation de Maxwell-Faraday et phénomènes d'induction . . . . .	92
II.	Les équations de Maxwell . . . . .	92
III.	Énergie électromagnétique . . . . .	94
IV.	Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	96
IV. 1.	Équation de propagation du champ magnétique . . . . .	96
IV. 2.	Solutions de l'équation de d'Alembert . . . . .	98
IV. 3.	Ondes planes progressives harmoniques . . . . .	99
V.	Système GPS et ionosphère . . . . .	103
V. 1.	Principe du GPS . . . . .	104
V. 2.	Modélisation du problème . . . . .	104
V. 3.	Conductivité complexe . . . . .	105
V. 4.	Relation de dispersion du plasma . . . . .	106
V. 5.	Paquet d'onde et dispersion . . . . .	107
V. 6.	Calcul de la distance $D$ . . . . .	108
VI.	Exercices . . . . .	110
VII.	Correction . . . . .	112

# Électrostatique

## Plan de ce chapitre

I.	La loi de Coulomb . . . . .	4
II.	Le champ électrostatique . . . . .	6
III.	Les différentes distributions de charge . . . . .	7
III. 1.	Densité volumique de charges . . . . .	7
III. 2.	Densité surfacique de charge . . . . .	8
III. 3.	Densité linéique de charge . . . . .	9
IV.	Équation de l'électrostatique . . . . .	10
IV. 1.	Le théorème de Gauss . . . . .	10
IV. 2.	Le potentiel électrostatique et l'équation de Maxwell-Faraday . . . . .	12
V.	Étude des lignes de champ de $E$ . . . . .	15
VI.	Calcul du champ électrostatique . . . . .	17
VI. 1.	Invariance de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 2.	Symétries de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 3.	Application du théorème de Gauss . . . . .	19
VII.	Exercices . . . . .	22
VIII.	Corrections . . . . .	24

## Objectifs

- Connaître les équations qui gouvernent l'évolution spatiale du champ électrostatique
- Faire le lien entre ces équations et une carte de champ électrique
- Savoir calculer le champ électrostatique résultant d'une distribution de charges simple

## Introduction

Les phénomènes électrostatiques sont connus depuis l'Antiquité. Les Grecs avaient déjà observé que l'ambre (*electron* en grec) frottée pouvait attirer des objets légers comme les copeaux de bois. Néanmoins, l'étude de ces phénomènes est longtemps restée qualitative. Il faut attendre le XVII<sup>e</sup> siècle pour que des dispositifs expérimentaux apparaissent. Ce premier chapitre s'intéresse à l'étude du champ électrique en régime permanent, c'est à

dire généré par des charges immobiles dans le référentiel d'étude. Les phénomènes décrits dans ce chapitre sont donc **indépendants du temps**.

#### Régime permanent :

On dit qu'un système fonctionne en régime permanent lorsque toutes les grandeurs relatives à une région fixe de ce système sont indépendantes du temps.

## I. La loi de Coulomb

En 1785, le physicien français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) réalise une étude quantitative de la force d'interaction entre deux particules chargées à l'aide la balance de Coulomb qu'il a mise au point. De cette expérience découlent plusieurs observations :

1. Il existe deux types de charges : les charges positives et les charges négatives.
2. Deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signes opposés s'attirent.
3. L'intensité entre les forces est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.

Ces observations expérimentales se résument dans **la loi de Coulomb**.

#### Loi de Coulomb :

La force  $F_{1 \rightarrow 2}$  électrostatique exercée par une charge  $q_1$  située en un point  $M_1$  sur une charge  $q_2$  située en  $M_2$  (voir Fig. 1.1) est donnée par

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|M_1 M_2\|^2} e_{M_1 M_2}, \quad (1.1)$$

où  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  est la permittivité diélectrique du vide et  $e_{M_1 M_2}$  le vecteur unitaire dirigé de  $M_1$  à  $M_2$ . Le farad  $\text{F} (\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  en USI) est une unité de capacité électrique. Dans la loi de Coulomb,

- ▶ la distance s'exprime en mètre,
- ▶ la charge s'exprime en coulomb noté  $\text{C} (\text{A} \cdot \text{s}^{-1})$ ,
- ▶ la force s'exprime en newton noté  $\text{N} (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  dans le système international),
- ▶ la permittivité diélectrique du vide s'exprime en  $\text{F} \cdot \text{m}^{-1} (\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  dans le système international).

On remarque une forte ressemblance entre cette loi et la loi d'interaction gravitationnelle proposée par Newton. Nous verrons que cette analogie, résumée par le Tableau 1.1, permet d'appliquer des résultats de l'électrostatique à la gravitation et inversement. Néanmoins, l'interaction électrostatique fait apparaître deux types de charges électriques et peut donc être soit attractive, soit répulsive. L'interaction gravitationnelle est quant à elle toujours attractive.

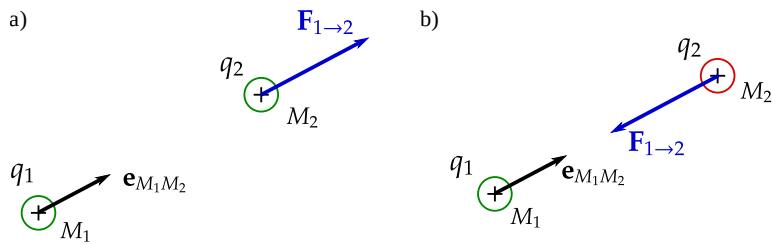
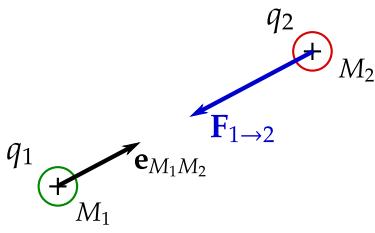
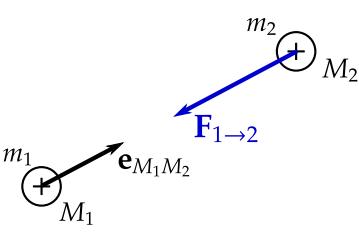


FIGURE 1.1 – Force exercée par une charge  $q_1$  sur une charge  $q_2$  dans le cas où les charges sont de même signe (à gauche) et de signe opposé (à droite)

TABLE 1.1 – Tableau d'analogie entre force d'interaction électrique et force d'interaction gravitationnelle.  $\mathcal{G}$  est la constante universelle de gravitation.

Électrostatique	Gravitation
	
$F_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\ M_1 M_2\ ^2} e_{M_1 M_2}$	$F_{1\rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\ M_1 M_2\ ^2} e_{M_1 M_2}$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$

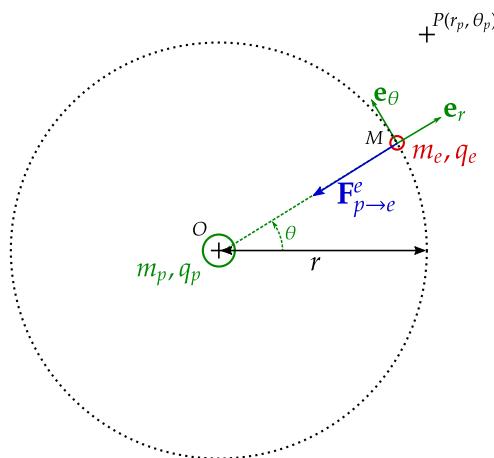


FIGURE 1.2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène. L'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  en pointillé ici.

### Exemple 1

On considère le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène (voir Fig 1.2). Un électron de charge  $-e = -1.60 \times 10^{-19}$  C et de masse  $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}$  kg décrit une orbite circulaire de rayon  $r = 52.9 \times 10^{-12}$  m autour d'un proton de charge  $e$  et de masse  $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27}$  kg. Les deux particules s'attirent car leurs charges sont de signe opposé. On cherche à déterminer l'intensité de la force électrostatique  $F_{p \rightarrow e}^e$  que le proton exerce sur l'électron. La loi de Coulomb 1.1 nous donne directement

$$|F_{p \rightarrow e}^e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \approx 82.7 \times 10^{-9} \text{ N.}$$

On peut alors comparer cette valeur à l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle  $F_{p \rightarrow e}^g$  que le proton exerce sur l'électron

$$|F_{p \rightarrow e}^g| = G \frac{m_e m_p}{r^2} \approx 36.2 \times 10^{-47} \text{ N,}$$

avec  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  la constante universelle de gravitation. On remarque que l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle est bien plus faible que celle de la force électrique, d'environ quarante ordres de grandeur. On néglige donc l'interaction gravitationnelle devant l'interaction gravitationnelle pour des particules chargées.

## II. Le champ électrostatique

L'interaction gravitationnelle et l'interaction électrique ont posé problème aux physiciens du XVII<sup>e</sup> siècle car il s'agissait d'interaction à distance sans contact. Faraday a donc introduit la notion de champ afin d'éviter ce délicat problème. En physique, un champ est une fonction qui associe à tout point de l'espace un vecteur, si le champ est vectoriel, ou un scalaire, si il est scalaire. La température est par exemple un champ scalaire et la vitesse est un champ vectoriel. Une particule chargée exerce alors une force électrostatique sur une autre particule par l'intermédiaire du *champ électrostatique* noté  $E$ .

### Le champ électrostatique :

Le champ électrostatique  $E$  créé par une particule de charge  $q$  située au point  $M$  de l'espace en un point  $P$  est donné par

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{||MP||^2} e_{MP}, \quad (1.2)$$

où  $e_{MP}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $M$  vers  $P$ . Le champ électrostatique est un champ vectoriel, à chaque point de l'espace  $P$ , il associe un vecteur  $E(P)$ . Il s'exprime en  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Connaissant le champ électrique en un point  $P$  de l'espace, il est alors facile de déterminer la force  $F$  que subirait une particule de charge  $Q$  placée en ce même point

$$F = QE(P). \quad (1.3)$$

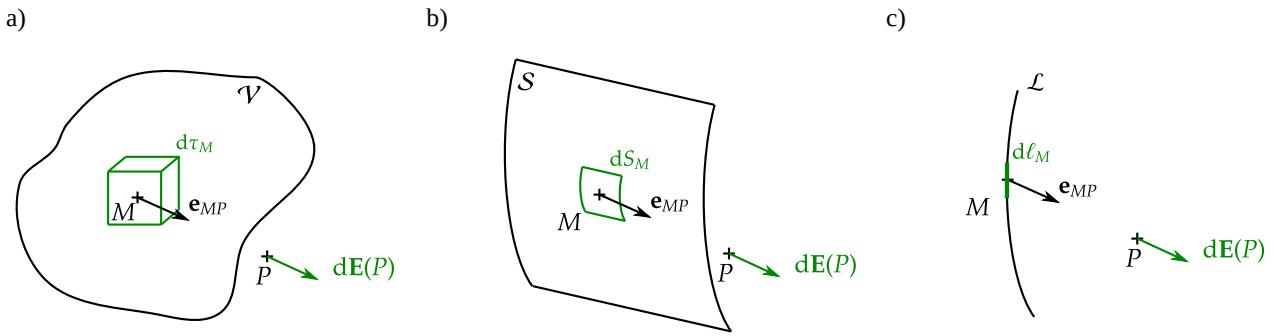


FIGURE 1.3 – Illustration de la notion de densité volumique (à gauche), surfacique (milieu) et linéaire (à droite) de charge.

On peut déterminer le champ électrostatique créé en un point  $P$  par un ensemble de  $N$  particules chargées en utilisant *le principe de superposition*. En effet, on constate expérimentalement que le champ électrostatique créé par ces  $N$  particules au point  $P$  est égal à la somme de tous les champs électrostatiques créés par toutes les charges.

#### Principe de superposition :

On considère un ensemble de  $N$  particules chargées. Chaque particule  $i$  porte la charge  $q_i$  et se trouve en un point  $M_i$  de l'espace. Chacune d'elle crée en un point  $P$  de l'espace un champ électrostatique  $E_i(P)$ . Le champ électrostatique total créé au point  $P$  est alors donné par

$$E(P) = \sum_{i=1}^N E_i(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|M_i P\|^2} e_{M_i P}. \quad (1.4)$$

De la même manière, la force  $F$  subit par une particule de charge  $Q$  située au point  $P$  est alors donnée par

$$F = Q E(P). \quad (1.5)$$

## III. Les différentes distributions de charge

Le plus souvent, la charge électrique est répartie de manière continue dans la matière. Dans ce cas, il est alors commode de définir une densité de charge qui exprimera la quantité de charge contenue dans un volume, dans une surface ou dans un fil. Chaque petit élément de volume, de surface ou de longueur renferme alors une charge notée  $dq$ . Pour déterminer le champ électrique total  $E$  en un point  $P$  de l'espace, il suffit alors de sommer les petits champs  $dE$  créés en  $P$  par chaque petite charge  $dq$ .

### III. 1. Densité volumique de charges

On considère une charge  $Q$  répartie dans un volume  $\mathcal{V}$  (voir Fig. 1.3a). On définit la **densité volumique de charge**  $\rho$  telle que pour tout point  $M$  du volume, la charge  $dq$  contenue dans un petit volume  $d\tau_M$  centré en  $M$  est donnée par  $dq = \rho(M)d\tau_M$ . Elle

s'exprime en  $C \cdot m^{-3}$  et vérifie la relation

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M) d\tau_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution volumique de charge  $\rho$  contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\rho(M) d\tau_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.6)$$

où  $\frac{\rho(M) d\tau_M}{\|MP\|^2} e_{MP}$  est le champ électrique créé par le petit volume  $d\tau_M$  au point  $P$ .

### Exemple 2

On considère un noyau d'uranium 238 de rayon  $R = 1$  fm. Il contient 92 protons portant une charge  $e$  et 146 neutrons sans charge. On considère que la charge totale  $Q$  du noyau est **uniformément répartie** dans le volume du noyau. La densité volumique de charge  $\rho$  dans le noyau d'uranium est donc donnée par

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 35 \times 10^{27} C \cdot m^{-3}$$

## III. 2. Densité surfacique de charge

On considère une charge  $Q$  répartie sur une surface  $\mathcal{S}$  (voir Fig. 1.3b). On définit **la densité surfacique de charge**  $\sigma$  telle que pour tout point  $M$  de la surface, la charge  $dq$  contenue sur une petite surface  $dS_M$  centrée en  $M$  est donnée par  $dq = \sigma(M) dS_M$ . Elle s'exprime en  $C \cdot m^{-2}$  et vérifie la relation

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \sigma(M) dS_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution surfacique de charge  $\sigma$  contenue sur une surface  $\mathcal{S}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{M \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(M) dS_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.7)$$

où  $\frac{\sigma(M)dS_M}{\|MP\|^2}e_{MP}$  est le champ électrique créé par la petite surface  $dS_M$  au point  $P$ .

### Exemple 3

Un condensateur de capacité  $C = 1 \text{ nF}$  est alimenté par une tension  $U = 10 \text{ V}$ . Cette tension induit une accumulation de charges positives et négatives à la surface des deux plaques des surfaces  $S = 2 \text{ mm}^2$  qui le constituent. Une des plaques est alors chargée positivement avec la charge  $Q = CU = 10^{-8} \text{ C}$  tandis que l'autre est chargée négativement avec la charge  $-Q$ . Si on considère que la charge est **uniformément répartie** sur ces plaques, la densité surfacique de charge de la plaque positive est donnée par

$$\sigma = \frac{Q}{S} = 5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

### III. 3. Densité linéique de charge

On considère une charge  $Q$  répartie sur un fil  $\mathcal{L}$  (voir Fig. 1.3c). On définit **la densité linéique de charge**  $\lambda$  telle que pour tout point  $M$  du fil, la charge  $dq$  contenue sur une petite portion  $d\ell_M$  centrée en  $M$  est donnée par  $dq = \lambda(M)d\ell_M$ . Elle s'exprime en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$  et vérifie la relation

$$\int_{M \in \mathcal{L}} \lambda(M)d\ell_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution surfacique de charge  $\lambda$  contenue sur un fil  $\mathcal{L}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{M \in \mathcal{L}} \frac{\lambda(M)d\ell_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.8)$$

où  $\frac{\lambda(M)d\ell_M}{\|MP\|^2}e_{MP}$  est le champ électrique créé par la petite portion  $d\ell_M$  au point  $P$ .

### Exemple 4

Cette distribution est plus difficile à imaginer. On peut par exemple la réaliser en fixant des ions métalliques sur une chaîne de polymères. On considère une chaîne de polymère présentant une longueur  $L$  de  $1 \mu\text{m}$ . On a fixé des ions  $Fe^+$  à trois atomes d'intervalle sur cette chaîne. La charge est donc répartie de manière uniforme le long du polymère. La taille d'un atome étant d'environ  $10^{-10} \text{ m}$ , la chaîne de polymère est composée d'environ  $10^4$  atomes. Elle porte donc une charge totale  $Q$  qui vaut  $10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}/3$ . On peut alors déduire la densité linéique de charge  $\lambda$  de cette chaîne

$$\lambda = \frac{Q}{L} \approx \frac{10^{-6} \times 10^{10} \times 1.6 \times 10^{-19}/3}{10^{-6}} = 5.3 \times 10^{-10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1.9)$$

où  $Q$  est la charge totale fixée sur le polymère.

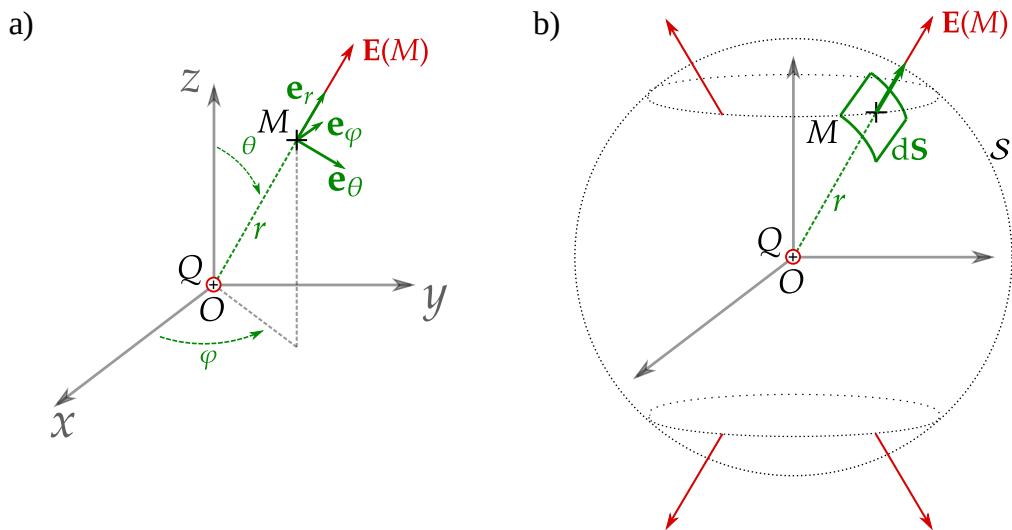


FIGURE 1.4 – Champ créé par une charge ponctuelle  $Q > 0$  située en  $O$  au point  $M$  (à gauche) et sphère  $S$  à travers laquelle on calcule le flux du champ de la charge  $Q$  (à droite).  $d\mathbf{S}$  représente un élément infinitésimal de la surface.



### Attention

Une distribution volumique de charge est en  $C \cdot m^{-3}$ , une distribution surfacique en  $C \cdot m^{-2}$  et une distribution linéaire en  $C \cdot m^{-1}$ .

## IV. Équation de l'électrostatique

On considère une charge ponctuelle  $Q$  située à l'origine d'un repère sphérique  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  (voir Fig. 1.4a). Le champ électrique créé par cette charge en un point  $M(r, \theta, \varphi)$  est donné par

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|OM\|^2} \mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Nous allons nous servir de cet exemple simple pour retrouver certaines propriétés spatiales du champ électrostatique.

### IV. 1. Le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est un outil puissant qui va nous permettre de calculer facilement le champ électrique généré par une distribution de charges simple. Pour le mettre en place, nous cherchons dans un premier temps à déterminer “la quantité” de champ électrique  $E$  qui traverse une sphère  $S$  de rayon  $r$  centrée en  $O$  à laquelle  $M$  appartient (voir Fig. 1.4b).

La surface  $\mathcal{S}$  est ici une surface **fermée**.

#### Surface fermée :

Une surface est dite fermée si elle délimite un volume intérieur et un volume extérieur. La surface d'une feuille de papier n'est par exemple pas une surface fermée alors que la surface d'un ballon de baudruche en est une.

On commence alors par déterminer l'expression du vecteur surface élémentaire  $d\mathbf{S}$ .

#### Vecteur surface élémentaire :

À chaque élément d'aire  $dS$  centré en  $M$  de la surface  $\mathcal{S}$ , on affecte un vecteur surface élémentaire  $d\mathbf{S}$  qui vérifie les propriétés suivantes

- ▶ il a pour norme l'aire du petit élément de surface centré au point  $M$ . Il est donc homogène à une surface.
- ▶ il est orthogonal à la surface.
- ▶ il doit être orienté. Cette orientation est au choix de l'utilisateur.



#### Attention

Une surface en physique doit toujours être orientée pour savoir si le flux qu'on calcule est un flux entrant ou sortant.

$\mathcal{S}$  est une sphère de rayon  $r$  fixé, pour se déplacer à la surface de cette dernière, il suffit donc de faire varier  $\theta$  et  $\varphi$ .  $d\mathbf{S}$  étant orthogonal à la surface  $\mathcal{S}$ , on a

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r.$$

Pour déterminer la quantité de champ électrique qui sort de la surface  $\mathcal{S}$ , on introduit la notion de flux. On retrouve cette notion en géographie, où le flux migratoire exprime le nombre de personnes entrant ou sortant d'un pays.

#### Flux d'un champ de vecteurs :

Soit  $M$  un point d'un surface fermée en lequel règne un champ  $E(M)$ . Soit  $d\mathbf{S}$  le vecteur surface élémentaire sortant associé à l'élément de surface centré en  $M$ . Le **flux sortant élémentaire** du vecteur  $E$  à travers  $dS$  est donné par  $E(M) \cdot d\mathbf{S}$ .

Le **flux total sortant** d'un champ de vecteur  $E$  à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est simplement la somme sur tous les éléments de la surface de tous les flux élémentaires sortants

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} E(M) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.10)$$

Il s'exprime en  $\text{V} \cdot \text{m}$ . Le flux est une grandeur algébrique qui peut-être positive ou négative. Le symbole  $\iint$  signifie que l'intégrale est réalisée sur une surface fermée, il n'est pas obligatoire.

Le flux de  $E$  à travers  $S$  s'écrit alors

$$\oint\!\!\!\oint_S E \cdot dS = \oint\!\!\!\oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi e_r \cdot e_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

Ce flux est sortant si la charge  $Q$  est positive et est entrant si la charge  $Q$  est négative. On constate alors que le flux du champ électrique à travers la sphère  $S$  de rayon  $r$  ne dépend que de la charge  $Q$  qu'elle contient et pas de son rayon. Cette propriété que nous venons de montrer pour une charge ponctuelle est en fait une propriété du champ électrique connue sous le nom de **théorème de Gauss**.

#### Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique  $E$  à travers une surface fermée  $S$ , qui délimite un volume  $\mathcal{V}$ , est égale à la charge incluse  $Q$  dans ce volume, divisé par  $\epsilon_0$

$$\oint\!\!\!\oint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.12)$$

La surface  $S$  est appelée la **surface de Gauss**.

Le théorème de Gauss peut-être traduit sous une forme locale, appelée l'**équation de Maxwell-Gauss**, qui relie alors le champ électrique à la distribution de charge.

#### Équation de Maxwell-Gauss :

L'équation de Maxwell-Gauss relie le champ électrique  $E$  à la distribution de charge  $\rho$

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

La divergence de  $E$  est une grandeur **scalaire**. Cette équation est une relation **locale**, elle permet de relier les dérivées spatiale du champ électrique en un point de l'espace à la densité volumique de charge en ce même point.

## IV. 2. Le potentiel électrostatique et l'équation de Maxwell-Faraday

On cherche maintenant à calculer le rotationnel du champ. Cela donne en coordonnées sphériques

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi} \right] e_r + \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta} \right] e_\varphi,$$

où  $E_r$ ,  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  sont respectivement les composantes de  $E$ . Ici,  $E_r$  ne dépend que de  $r$  et les composantes  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  sont nulles. On a donc

$$\operatorname{rot} E = \mathbf{0}.$$

Ce résultat se généralise à un champ électrostatique  $E$  quelconque sous la forme de l'équation de Maxwell-Faraday.

### Équation de Maxwell-Faraday :

Un champ électrique  $E$  en **régime statique**, c'est-à-dire indépendant du temps, vérifie

$$\text{rot } E = 0. \quad (1.14)$$

Le rotationnel de  $E$  est une grandeur **vectorielle**. Comme l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation de Maxwell-Faraday est une relation **locale** vérifiée en tout point de l'espace.

Comme l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation de Maxwell-Faraday peut se mettre sous une forme intégrale, en exprimant la circulation du champ électrique sur une courbe fermée  $C$ .

### Circulation d'un champ de vecteurs :

Soit  $\mathbf{W}$  un champ de vecteur et  $C$  un arc de courbe orienté dans l'espace. On appelle circulation du champ de vecteurs  $\mathbf{W}$  le long de  $C$  la quantité

$$\int_{M \in C} \mathbf{W}(M) \cdot d\ell_M.$$



#### Attention

Un contour doit toujours être orienté!

### Circulation du champ électrostatique :

La circulation du champ électrostatique  $E$  le long d'un contour fermé orienté  $C$  est nul

$$\oint_C E \cdot d\ell = 0. \quad (1.15)$$

On dit alors que le champ électrique est à circulation **conservative**.

Le champ électrostatique est donc un champ dont le rotationnel est nul en tout point de l'espace. L'analyse vectorielle affirme qu'il est possible dans ce cas de définir un champ

scalaire  $V$ , défini à une constante près, tel que  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ .

### Potentiel électrostatique :

Le champ électrostatique étant à rotationnel nul, il existe un champ scalaire  $V$ , appelé **potentiel électrostatique**, tel qu'en tout point de l'espace

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V. \quad (1.16)$$

Le potentiel électrostatique s'exprime en volts. Il est toujours défini à une constante près. La circulation du champ électrostatique entre un point  $A$  et un point  $B$  est alors donnée par

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\ell = V(A) - V(B) \quad (1.17)$$

En reportant  $\mathbf{E}$  par  $-\nabla V$  dans l'équation de Maxwell-Gauss 1.13, on obtient

$$\operatorname{div}(-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

### Équation de Poisson :

Le potentiel électrique suit l'**équation de Poisson**

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.18)$$

De plus, la force électrostatique est une **force conservative**. On peut alors définir une **énergie potentielle** qui lui est associée.

### Énergie potentielle électrostatique :

La force électrostatique  $\mathbf{F}$  est une force conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle  $E_p$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p. \quad (1.19)$$

Cette énergie est définie à une constante près. Elle s'exprime en joule ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2$  en SI). Une charge  $q$  placée en un point  $M$  de l'espace où règne un potentiel électrostatique  $V$  possède une énergie potentielle électrostatique

$$E_p = qV(M) + X,$$

où  $X$  est une constante. Elle est soumise à la force électrostatique

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p.$$

### Exemple 5

Dans l'Exemple 1 du modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, le proton génère un potentiel  $V$

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

L'électron possède donc une énergie potentielle  $E_p$  donnée par

$$E_p(r) = -eV(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + C,$$

où  $C$  est une constante. Nous posons  $C = 0$ , ce qui nous permet d'obtenir une énergie potentielle qui est nulle lorsque  $r$  tend vers l'infini. L'électron possède alors une énergie potentielle  $E_p \approx -27.3$  eV, où  $1$  eV  $\approx 1.60 \times 10^{-19}$  J. L'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron permet de déterminer la vitesse de ce dernier dans le référentiel d'étude. On peut alors en déduire son énergie cinétique

$$E_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = 13.7 \text{ eV}.$$

Finalement, l'électron possède une énergie totale de  $-13.6$  eV.

## V. Étude des lignes de champ de $E$

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés spatiales du champ  $E$ . Nous allons voir comment les **lignes de champ** nous renseignent sur sa répartition dans l'espace.

### Ligne de champ :

Une ligne de champ est une courbe tangente en chaque point au vecteur du champ de vecteurs considéré, orientée dans le sens du champ. Deux lignes de champ ne peuvent pas se croiser.

Pour déterminer l'équation de ces lignes de champ, il suffit de résoudre l'équation qui traduit la tangence en tout point de l'espace  $M$  des lignes de champ au vecteur  $E(M)$

$$E \times d\ell = 0, \quad (1.20)$$

où  $d\ell$  est un élément de la ligne de champ.

### Exemple 6

Les lignes du champ électrostatique  $E$  généré par une charge ponctuelle  $q$  sont des droites portées par un rayon de la charge (voir Fig 1.5). Si la charge est positive, elles sont orientées vers l'extérieur. À l'inverse si elle est négative, elles sont orientées vers la charge. On cherche à déterminer l'équation de ces lignes de champ. On se place dans un repère sphérique ( $e_r, e_\theta, e_\varphi$ ) centré sur le centre de la charge  $q$ . Un point de l'espace  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Un élément  $d\ell$  de la ligne de champ passant par  $M$  doit vérifier

$$E(M) \times d\ell = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} 1/r^2 & dr \\ 0 & rd\theta \\ 0 & r \sin \theta d\varphi \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ \sin \theta d\varphi / r = 0 \\ d\theta / r = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, tous les points de cette ligne de champ doivent avoir le même  $\theta$  et le même  $\varphi$ . Les lignes de champ sont donc bien portées par des rayons de la charge.

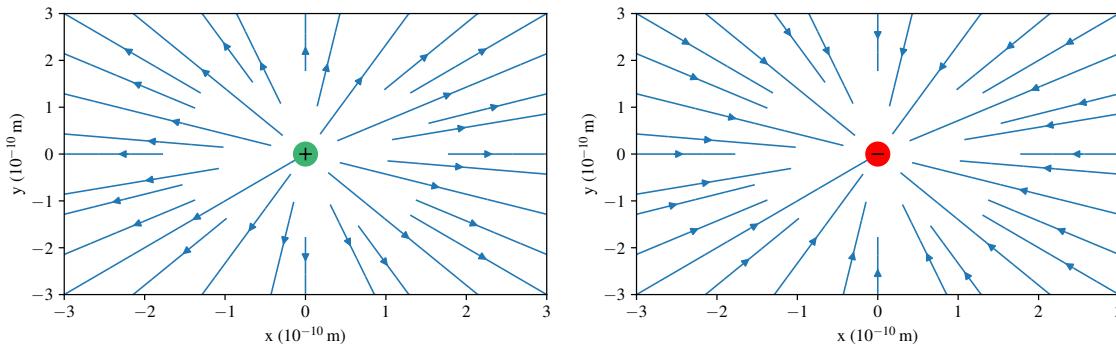


FIGURE 1.5 – Ligne du champ  $E$  créé par une charge positive (à gauche) et par une charge négative (à droite).

Nous allons maintenant considérer la cas d'un proton et d'un électron séparé par une distance de 0.2 nm (voir Fig. 1.6). Les lignes de champ nous permettent de retrouver quelques propriétés du champ électrostatique énoncées précédemment.

1. On remarque tout d'abord que les lignes de champ sont orientées de la **charge positive vers la charge négative**. Cette première observation peut être vue comme une conséquence de la relation reliant le champ électrique  $E$  et le potentiel électrostatique  $V$  (voir Eq. 2.13). En effet, le sens de  $E$  est opposé à celui du gradient de  $V$  (comme le traduit le signe  $-$  dans l'expression). La ligne de champ s'écoule donc du potentiel le plus élevé vers le moins élevé.
2. La divergence d'un champ vectoriel permet de mesurer le flux de ce dernier à travers un volume. Si elle est nulle, une ligne de champ entrant dans un volume doit absolument en ressortir. La divergence non nulle du champ électrique (voir Eq. 1.13)

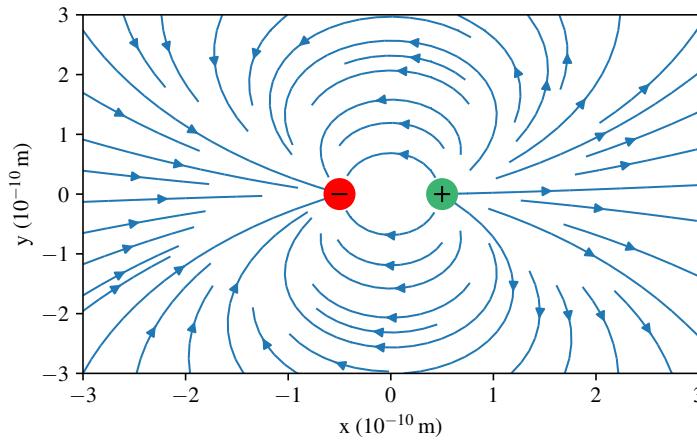


FIGURE 1.6 – Lignes du champ électrique généré par un proton (charge verte) et un électron (charge rouge).

se traduit par la possibilité pour les lignes de champ d'émerger d'un volume (du proton ici) et de converger dans un volume (l'électron ici).

3. Le rotationnel d'un champ vectoriel traduit la tendance de ce dernier à tourner autour d'un point. Le rotationnel nul du champ électrique se traduit par l'impossibilité pour les lignes de champ de tourner autour d'un point. Une ligne du champ électrique ne peut donc pas reboucler sur elle-même.
4. Grâce aux lignes de champ, on retrouve rapidement les plans de symétrie et d'antisymétrie du champ électrique. Le plan médiateur est par exemple un plan d'antisymétrie du champ électrique. L'analyse de ces symétries sera utile pour calculer le champ électrique d'une distribution de charge.

## VI. Calcul du champ électrostatique

Nous allons voir dans cette partie comment nous pouvons utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique créé par une distribution de charges simple. Nous nous intéressons ici à une boule de rayon  $R_1$  et de centre  $O_1$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho > 0$  (voir Fig. 1.7). On cherche à déterminer l'expression du champ électrique  $E$  en un point  $M$  de l'espace. Pour ce faire, il suffit de suivre le mode d'emploi suivant

1. Faire un schéma du système ! C'est absolument indispensable (voir Fig. 1.7)
2. Choisir un repère adapté au problème
3. Étudier les invariances de cette distribution
4. Étudier les symétries de la distribution de charges à l'origine du champ électrique
5. Choisir une surface de Gauss et appliquer le théorème de Gauss.

Nous choisissons ici d'utiliser un repère sphérique ( $O_1, e_r, e_\theta, e_\varphi$ ). Le point  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Le champ électrique en  $M$  s'écrit de manière générale

$$E(M) = E_r(M)e_r + E_\theta(M)e_\theta + E_\varphi(M)e_\varphi. \quad (1.21)$$

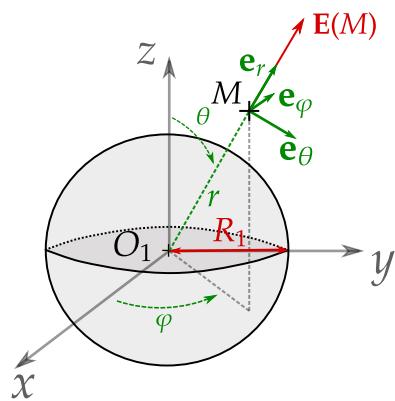


FIGURE 1.7 – Schéma de la cavité uniformément chargée.

Le champ électrique est un vecteur à trois composantes et chaque composante dépend des coordonnées de  $M$ . Pour simplifier cette expression, il est intéressant de considérer les invariances et symétries de la distribution de charge qui génère le champ  $E$ .

## VII. 1. Invariance de la distribution de charges

On cherche ici à savoir si la distribution de charge est modifiée sous l'effet d'une translation ou d'une rotation de l'espace. En d'autres termes, on regarde de quelles variables dépend la densité de charge  $\rho$ . Étant donné que la sphère est ici uniformément chargée, on observe que

- si je tourne la sphère d'un angle  $\Delta\theta$  dans la direction  $e_\theta$ , le problème ne change pas. La distribution de charge est donc invariante par rotation selon l'angle  $\theta$ .  **$E$  ne dépend pas de  $\theta$** .
- si je tourne la sphère d'un angle  $\Delta\varphi$  dans la direction  $e_\varphi$ , le problème ne change pas. La distribution de charge est donc invariante par rotation selon l'angle  $\varphi$ .  **$E$  ne dépend pas de  $\varphi$** .
- si je déplace la sphère d'une distance  $\Delta r$  dans la direction  $e_r$ , je remarque que le problème change. Par exemple si  $\Delta r$  est supérieur à  $R_1$ , le point  $O_1$  n'appartient plus à la sphère après la translation.  **$E$  dépend de  $r$** .

Finalement, l'expression 1.21 du champ électrique se simplifie

$$E(M) = E_r(r)e_r + E_\theta(r)e_\theta + E_\varphi(r)e_\varphi. \quad (1.22)$$

## VII. 2. Symétries de la distribution de charges

### Principe de Curie :

Lorsque les causes produisent des effets, les symétries présentes dans les causes doivent se retrouver dans celles des effets.

Si on applique ce principe au champ électrique créé par une distribution de charges, cela revient à dire que les symétries de la distribution de charges doivent se retrouver dans

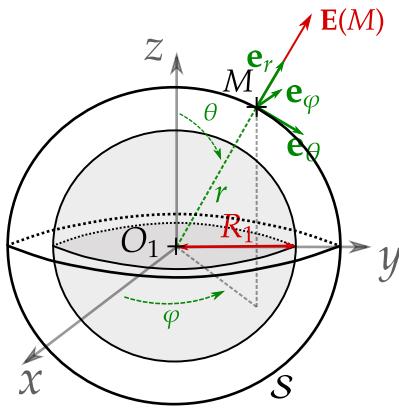


FIGURE 1.8 – Schéma de la cavité avec la surface de Gauss  $S$  qui est une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O_1$ .  $M$  appartient à cette surface.

les symétries du champ électrique. On en déduit les règles suivantes

**Symétries de  $E$  et de la distribution de charge :**

- ▶ si  $(\Pi)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $E(M)$  doit appartenir à  $(\Pi)$ ,
- ▶ si  $(\Pi)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de charge et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $E(M)$  doit être orthogonal à  $(\Pi)$ .

Pour appliquer ces règles à notre exemple, on détermine les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de charges auxquels le point  $M$  appartient

- le plan  $(M, e_r, e_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $E(M)$  **doit donc appartenir à ce plan**.
- le plan  $(M, e_r, e_\varphi)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $E(M)$  **doit donc appartenir à ce plan**.

$E(M)$  doit appartenir au plan  $(M, e_r, e_\theta)$  et au plan  $(M, e_r, e_\varphi)$ .  $E$  doit donc être colinéaire à  $e_r$

$$E(M) = E_r(r)e_r. \quad (1.23)$$

Nous n'avons imposé aucune condition sur la position de  $M$ , cette relation est donc vraie pour tout point  $M$  de l'espace. Maintenant que l'expression du champ électrique a été simplifiée au maximum, on cherche à appliquer le théorème de Gauss.

### VI. 3. Application du théorème de Gauss

La distribution de charge présente une symétrie sphérique. On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O_1$  (voir Fig 1.8) et on applique le théorème de Gauss sur cette sphère

$$\iint_S E(M) \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.24)$$

où  $Q$  est la charge contenue à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ . On commence par déterminer l'expression du membre de gauche. Comme nous l'avons vu (voir Sec. IV.1.), dans le cas d'une sphère,

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi e_r. \quad (1.25)$$

On obtient alors

$$\iint_S E(M) \cdot dS = \iint_S E(r) e_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi e_r = E(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi E(r) r^2. \quad (1.26)$$

On s'intéresse maintenant au terme de droite de l'équation V.3.. La charge  $Q$  est uniformément répartie dans la sphère de rayon  $R_1$ , on a donc

$$\rho(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r > R_1, \\ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3}, & \text{si } r \leq R_1. \end{cases} \quad (1.27)$$

On a alors deux cas de figure

1. si  $r \leq R_1$ ,  $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} e_r.$
2. si  $r > R_1$ ,  $Q = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} e_r.$

**Remarque.** Si on remplace  $\rho$  par son expression en fonction de  $Q$ ,  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R_1^3}$ , dans la deuxième situation, on retrouve le champ électrique généré par une charge ponctuelle.

---

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Électromagnétisme en régime statique : le champ électrique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 465–502, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985. Forme locale des lois de l'électrostatique, in *Électromagnétisme*, vol. 1 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 41–46, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Électrostatique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 416–448, Pearson Education.
- Pérez, J.-P., Carles, R., & Fleckinger, R., 2002. Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Théorème de Gauss, in *Électromagnétisme : Fondements et Applications*, Masson Sciences, pp. 13–25, Dunod, 4th edn.

## VII. Exercices

### Exercice 1 (Potentiel de Yukawa).

[Corrigé page 24]

Le physicien japonais Yukawa a postulé la forme d'un potentiel pour modéliser les interactions entre particules dans un noyau atomique. Nous étudions ici ce potentiel comme s'il s'agissait d'un potentiel électrostatique.

Dans un repère sphérique  $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$ , une distribution de charge à symétrie sphérique crée, à une distance  $r$ , un potentiel électrostatique de la forme

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \quad (1.28)$$

$Q$  et  $a$  étant des constantes positives.

1. Déterminer les unités de  $Q$  et de  $a$ .
2. Déterminer le champ électrostatique correspondant.
3. En déduire la charge  $q(r)$  contenue dans une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ .
4. Déterminer  $q(r)$  dans les deux cas extrêmes
  - a.  $r$  tend vers zéro,
  - b.  $r$  tend vers  $\infty$

En déduire qualitativement la nature de la distribution de charge et donner une interprétation de  $a$ .

### Exercice 2 (Champ gravitationnel dans une cavité).

[Corrigé page 24]

Un modèle de Terre de rayon  $R_1$  et de centre  $O_1$  possède une masse volumique  $\rho > 0$  uniforme sauf dans une cavité sphérique, entièrement incluse dans la boule, centrée en  $O_2$ , de rayon  $R_2$  (voir Fig 1.9).

On cherche le champ gravitationnel  $g(M)$  en un point  $M$  à l'intérieur de la cavité. Dans un premier temps, on ignore la présence de la cavité.

1. Rappeler l'expression du champ électrostatique  $E$  générée par une charge  $q$  et du champ gravitationnel  $g$  générée par une particule de masse  $m$  en un point  $P$  de l'espace. En déduire un tableau d'analogie entre interaction gravitationnelle et interaction coulombienne.
2. En déduire un théorème de Gauss pour le champ gravitationnel  $g$ .
3. Étudier les symétries et invariances du système en l'absence de la cavité creuse.
4. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ  $g$  en un point  $M$  de l'espace. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
5. Étudier les symétries et invariances du système avec la cavité. Pensez-vous qu'il soit judicieux d'utiliser le théorème de Gauss ici ?
6. En vous servant du théorème de superposition, déterminer le champ  $g$  en un point  $M$  à l'intérieur de la cavité.

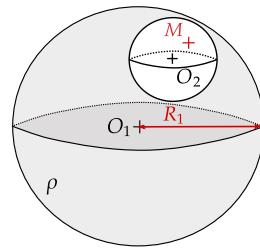


FIGURE 1.9 – Schéma de la sphère de masse volumique  $\rho$  (en gris sur le schéma) et de la cavité vide (en blanc). À l'intérieur de la cavité, la masse volumique vaut 0.

**Exercice 3 (Fil chargé).**

[Corrigé page 26]

Calculer le champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé avec une densité linéïque de charge  $\lambda$ , en tout point de l'espace.

## VIII. Corrections

**Corrigé de l'exercice 1.**

[[Retour à l'énoncé](#)]

1. L'argument d'une fonction est toujours sans dimension. a est donc homogène à une longueur.

Le terme

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

correspond au potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle. On en déduit que Q est homogène à une charge.

2. Le champ électrostatique  $E$  est lié au potentiel  $V$  par la relation suivante

$$E = -\nabla(V),$$

qui est vraie en tout point de l'espace. On a alors

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}(r)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}(r)\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}(r)\mathbf{e}_\varphi = \boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \mathbf{e}_r}$$

3. On considère une sphère  $\mathcal{S}$  de rayon  $r$  et de centre  $O$ . Cette sphère forme une surface fermée, on peut donc lui appliquer le théorème de Gauss pour connaître la charge  $q(r)$  contenue dans cette dernière

$$\iint_{\mathcal{S}} E(r) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q(r)}{\epsilon_0}.$$

Le vecteur surface élémentaire de  $\mathcal{S}$  s'écrit

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r.$$

On a alors

$$E(r)r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \iff E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \iff \boxed{q(r) = Q \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

4. a.  $q(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} Q$   
 b.  $q(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$

Cela correspond à une charge ponctuelle  $Q$  située en  $r = 0$  entouré d'une densité de charge négative dont la charge totale est  $-Q$ . a, qui est la distance de décroissance de l'exponentielle, donne donc une taille approximative du nuage électronique qui entoure le noyau d'un atome. La présence du nuage écrante le potentiel créé par la charge centrale en accélérant sa décroissance.

**Corrigé de l'exercice 2.**

[[Retour à l'énoncé](#)]

1. On suppose que la particule est située à l'origine  $O$  d'un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$ . L'expression des deux champs est alors

$$E(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\|OP\|^2}e_r \quad \text{et} \quad g(M) = -G\frac{m}{\|OP\|^2}e_r,$$

où  $G$  est la constante universelle de gravitation et  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide. On en déduit l'analogie suivante

- $q \longleftrightarrow m$
- $1/4\pi\epsilon_0 \longleftrightarrow -G$ .

2. On peut alors en déduire un théorème de Gauss pour le champ gravitationnel  $g$ . Soit une surface fermée  $S$ , contenant une masse  $m$ , le flux de  $g$  à travers cette surface est donnée par

$$\oint_S g \cdot dS = -4\pi Gm$$

3. Voir Sec. V. On a

$$g(M) = g(r)e_r.$$

4. Voir Sec. V. pour plus de détail. Le théorème de Gauss appliqué à une sphère  $S$  de rayon  $r$  et de centre  $O_1$  donne

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & \text{si } r \leq R_1 \\ -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho & \text{si } r \geq R_1. \end{cases}$$

Finalement,

$$g(M) = \begin{cases} -\frac{4G\pi\rho}{3}OM & \text{si } r \leq R_1 \\ -\frac{4G\pi R_1^3}{3\|OM\|^3}OM & \text{si } r \geq R_1. \end{cases}$$

5. Le champ de gravitation  $g$  ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) est homogène à une accélération. La constante universelle de gravitation s'exprime en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ , la masse volumique  $\rho$  en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $OM$  en m. Le résultat est bien homogène.
6. En ajoutant cette cavité vide, on perd toutes les symétries et invariances que la distribution de charge présentait. L'utilisation du théorème de Gauss est donc peu judicieuse.
7. Le modèle de Terre proposé dans l'exercice peut-être obtenue en additionnant une sphère  $S_1$  de masse volumique uniforme  $\rho$ , de rayon  $R_1$  et centrée en  $O_1$  et une sphère  $S_2$  de masse volumique uniforme  $-\rho$ , de rayon  $R_2$  et centrée en  $O_2$ . Le champ de gravitation  $g$  en un point  $M$  à l'intérieur de la cavité résulte donc de la superposition des champs générés par les sphères  $S_1$  et  $S_2$

$$g(M) = g_1(M) + g_2(M) = -\frac{4G\pi\rho}{3}(O_1M - O_2M) = \boxed{-\frac{4G\pi\rho}{3}O_1O_2}$$

Le champ est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

**Corrigé de l'exercice 3.**[\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour cet exercice, il suffit de suivre la recette donnée dans le cours (voir Sec. V.).

1. On commence donc bien sûr par réaliser un schéma du système et à choisir un repère adapté aux système, ici un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$  (voir Fig. 1.10). Un point de l'espace  $M$  est défini par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ .
2. On étudie ensuite les invariances de la distribution de charge qui génère au point  $M$  un champ électrostatique

$$\mathbf{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\mathbf{e}_z.$$

- a. Le fil est infini, la distribution de charge est donc invariante par translation selon  $z$ .  $\mathbf{E}$  ne dépend pas de  $z$ .
- b. Le fil présente une symétrie de révolution. Il est invariant par rotation autour de l'axe  $z$ .  $\mathbf{E}$  ne dépend donc pas de  $\theta$ .  
 $\mathbf{E}$  ne dépend donc que de la distance au fil  $r$ .
3. On étudie ensuite les symétries de la distribution de charge.
  - a.  $M$  appartient au plan  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  qui est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $\mathbf{E}(M)$  appartient donc à ce plan.
  - b.  $M$  appartient au plan  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$  qui est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $\mathbf{E}(M)$  appartient donc à ce plan.

$\mathbf{E}(M)$  doit appartenir aux plans  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  et  $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ . On en déduit que  $\mathbf{E}(M)$  est colinéaire à  $\mathbf{e}_r$ .

$$\mathbf{E}(M) = E_r(r)\mathbf{e}_r.$$

Comme nous avons choisi notre point  $M$  de manière quelconque, ce résultat est vrai en tout point de l'espace.

4. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  centré sur le fil. Cette surface fermée peut-être vue comme la combinaison de 3 surfaces : la surface latérale du cylindre  $\mathcal{S}_l$ , le couvercle du cylindre  $\mathcal{S}_c$  et le fond du cylindre  $\mathcal{S}_f$ . L'application du théorème de Gauss à cette surface s'écrit

$$\iint_{\mathcal{S}_l} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_l + \iint_{\mathcal{S}_f} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_f + \iint_{\mathcal{S}_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_c = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$d\mathbf{S}_f$  et  $d\mathbf{S}_c$  sont colinéaires à  $\mathbf{e}_z$ , le produit scalaire entre ces vecteurs surfaciques élémentaires et  $\mathbf{E}$  est donc nul. Finalement, seule la première intégrale nous intéresse. Tous les points de  $\mathcal{S}_l$  ont la même coordonnée radiale. Pour se déplacer sur cette surface, il suffit de faire varier  $\theta$  et  $z$ . On a donc

$$d\mathbf{S}_l = r d\theta dz \mathbf{e}_r.$$

Le terme de gauche de l'équation précédente devient donc

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_l = E(r)r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = E(r)2\pi rh.$$

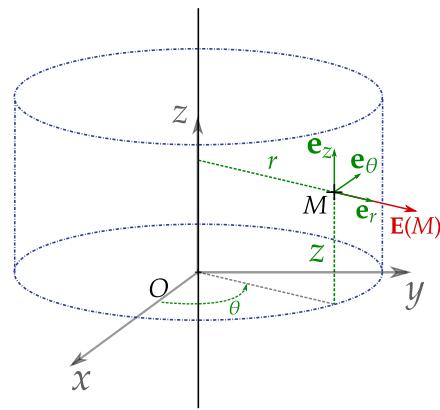


FIGURE 1.10 – Schéma du fil chargé avec le repère cylindrique associé. La surface de Gauss utilisée apparaît en tiret-pointillé bleu.

Finalement,

$$E(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$$



---

# 2 Champ électrique dans un conducteur

---

## Plan de ce chapitre

I.	Quelques rappels sur le courant électrique . . . . .	30
II.	Le modèle de Drude . . . . .	31
III.	Sondage résistif . . . . .	33
	III. 1. Potentiel électrique d'une électrode . . . . .	33
	III. 2. Le montage à 4 électrodes . . . . .	34
	III. 3. Distribution de courant . . . . .	35
	III. 4. Résistivité apparente . . . . .	37
IV.	Exercices . . . . .	39
V.	Corrections . . . . .	42

---

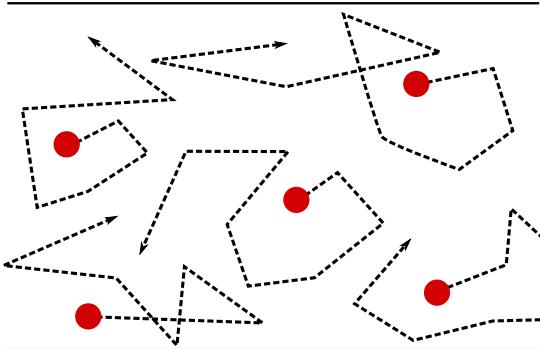
## Objectifs

- Comprendre comment on peut modéliser la réponse un matériau au travers d'une relation constitutive
- Connaître la notion de résistivité
- Connaître la loi d'Ohm locale
- Comprendre comment on peut sonder le sol grâce à la résistivité

## Introduction

Les conducteurs contiennent des *électrons libres*, c'est-à-dire libres de se mouvoir. Ces derniers, soumis à l'agitation thermique, sont animés d'un mouvement erratique (voir Fig. 2.1). Pour générer un courant, il est nécessaire d'exercer une force sur ces derniers, de manière à créer un mouvement d'ensemble. Dans un circuit électrique par exemple, on impose une différence de potentiel entre ses bornes. Les conducteurs solides, tels que le cuivre, contiennent un nombre important d'atomes, l'étude du mouvement d'un électron devient alors difficile. Dans ce chapitre, nous allons voir comment modéliser le comportement d'un conducteur soumis à un champ électrique.

a)



b)

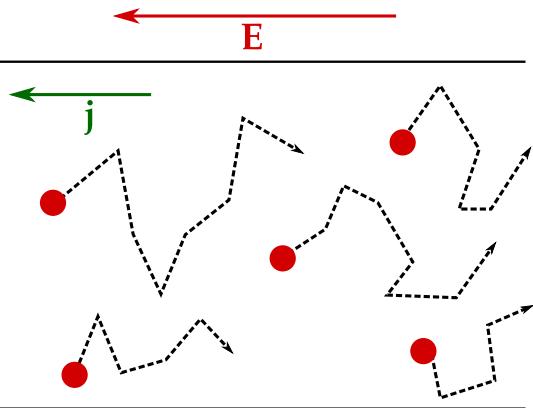


FIGURE 2.1 – Schéma du mouvement des électrons libres dans un conducteur sans champ électrique (à gauche) et avec champ électrique (à droite). Le champ électrique conduit à un mouvement d'ensemble qui génère un vecteur densité de courant  $j$ .

## I. Quelques rappels sur le courant électrique

### Courant électrique :

Un courant électrique est un mouvement de charges électriques. Il est caractérisé par son **intensité**, qui mesure le débit de charges électriques qui traverse une unité de surface par unité de temps. Elle se mesure en ampères (A) qui correspondent à des  $C \cdot s^{-1}$  et peut-être positive ou négative.

### Exemple 1

Les prises domestiques fournissent un courant dont l'intensité vaut 16 A, voire 32 A pour les plaques à induction. Pour une batterie de téléphone, l'intensité vaut 1 A environ.

### Vecteur densité de courant :

En tout point de l'espace, un courant électrique est caractérisé par le vecteur densité de courant

$$\mathbf{j} = nqv, \quad (2.1)$$

où  $q$  est la charge d'un porteur de charge (C),  $n$  est le nombre de charges mobiles par unité de volume ( $m^{-3}$ ) et  $v$  la vitesse d'un porteur de charge. C'est une grandeur additive. L'intensité  $di$  qui traverse une surface élémentaire  $dS_P$  centrée sur le point  $P$  est donc donnée par

$$di = \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S}_P. \quad (2.2)$$

L'intensité totale  $I$  traversant une surface macroscopique  $\mathcal{S}$  est donc donnée par

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S}_P. \quad (2.3)$$

### Exemple 2

On considère un câble de chargeur de téléphone de section  $S = 1 \text{ mm}^2$  alimenté par un courant  $I = 1 \text{ A}$ . Si on suppose que le courant est uniforme à l'intérieur du câble, on a  $j = I/S = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . La partie conductrice du câble est composée principalement de cuivre. Dans le cuivre, les porteurs de charges sont des électrons avec  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  et  $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$ . On peut alors remonter à la vitesse de dérive des électrons  $v = 60 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Le vecteur densité de courant possède une propriété intéressante en régime permanent. En effet, imaginons le cas d'une sphère contenant une charge  $Q$ . En régime permanent, la charge  $Q$  contenue dans cette sphère est constante. Le débit total de charge à travers la sphère est donc nulle. Le vecteur densité de courant est donc à flux conservatif.

#### Flux conservatif du vecteur densité de courant :

En régime permanent, le flux du vecteur densité de courant  $j$  à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est nul

$$\oint_S j \cdot dS = 0.$$

$j$  est donc à **flux conservatif**. Cette égalité peut se traduire sous une forme locale

$$\nabla \cdot j = 0.$$

**Remarque.** La loi des noeuds en électrocinétique découle de la conservativité du flux du vecteur densité de courant.

## II. Le modèle de Drude

On considère dans cette partie un fil électrique de densité volumique de porteur de charge  $n$ . En l'absence de champ électrique, le mouvement des porteurs de charge est erratique. Leur vitesse est donc nulle en moyenne et le fil n'est traversé par aucun courant. À l'instant  $t = 0$ , il est plongé dans un champ électrique  $E$  uniforme et constant. Un courant apparaît alors dans le fil. Dans cette partie, on cherche à relier la densité de courant  $j$  parcourant le fil et le champ électrique  $E$  imposé.

Expérimentalement, on constate que l'intensité du courant, après une certaine durée, se stabilise à une valeur constante. À partir de l'équation 2.1, on conclut que les électrons doivent atteindre une vitesse d'ensemble limite dans le fil. Pour modéliser ce comportement et par analogie avec la chute d'un corps, le physicien Paul Drude propose l'introduction d'une force de frottement qui s'opposerait à la mise en mouvement des électrons. Cette force de frottements modélise notamment la présence du réseau cristallin dans lequel évolue l'électron.

On considère alors une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $v$ . Dans le référentiel du fil, supposé galiléen, cette particule est soumise à la force électrostatique  $qE$  et à la force de frottement fluide  $-\alpha v$ , où  $\alpha$  est le coefficient de frottement ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ) caractéristique du milieu. Pour simplifier le problème, on considère que sa vitesse

est nulle en l'absence de champ électrique. On a donc notamment,  $v(t = 0) = \mathbf{0}$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce porteur de charge donne

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \alpha v \iff \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{qE}{m}, \quad (2.4)$$

où  $\tau = m/\alpha$  est homogène à un temps. La solution générale de cette équation s'écrit

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{q\tau}{m} E, \quad (2.5)$$

où  $A$  est une constante d'intégration. Avec la condition initiale,  $v(t = 0) = \mathbf{0}$ , on obtient

$$v(t) = \frac{q\tau}{m} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] E. \quad (2.6)$$

$\tau$  apparaît alors comme étant le temps de relaxation de la vitesse du porteur de charge. Dès que  $t$  est plus grand que quelques  $\tau$ , le porteur de charge a atteint la vitesse limite

$$v_{\lim} = \frac{q\tau}{m} E = \frac{q}{\alpha} E. \quad (2.7)$$

On peut alors établir une relation directe entre la densité volumique de courant  $j$  parcourant le fil et le champ électrique  $E$  imposé sur ce dernier, en multipliant cette vitesse par  $nq$  (voir Éq. 2.1)

$$j = \frac{nq^2\tau}{m} E = \gamma E, \quad (2.8)$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du matériau. On définit de même la résistivité  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad (2.9)$$

qui s'exprime en  $\Omega\text{m}^{-1}$ .

### Loi d'Ohm locale :

La loi d'Ohm locale est une relation constitutive, elle est donc spécifique au conducteur. Elle permet de décrire leur réponse à un champ électrique. Un conducteur soumis à un champ électrique  $E$  est traversé par une densité volumique de courant  $j$  telle que

$$j = \gamma E. \quad (2.10)$$

$\gamma$  est la conductivité du conducteur. Elle est caractéristique du matériau considéré et s'exprime en siemens par mètre ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Elle mesure la facilité d'un courant à parcourir un matériau. En l'absence de champ électrique, le courant à l'intérieur d'un conducteur est donc nul. C'est une grandeur qui dépend de la température. Le tableau 2.1 donne la conductivité de matériaux usuels.

**Remarque.** On remarque que le champ électrique est toujours orienté dans la même direction que le vecteur de densité volumique de courant.

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur de conductivités de matériaux usuels. Pour le cuivre et l'eau, les valeurs données sont celles obtenues à température ambiante.

Matériaux	Conductivité électrique ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ )
Eau distillée	$1.0 \times 10^{-6}$ à 300 K
Cuivre	$5.9 \times 10^7$ à 300 K
Basalte	$10^{-5} - 0.5$
Grès	$10^{-3} - 1$
Argile	$10^{-2} - 1$
Graphite	$5 \times 10^2 - 10^4$

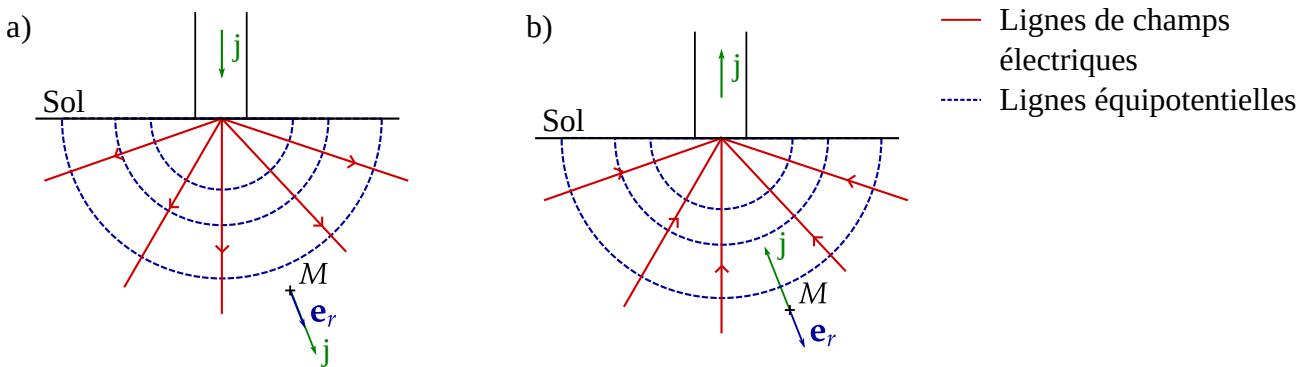


FIGURE 2.2 – Schéma d'une électrode émettrice (à gauche) et réceptrice (à droite). L'électrode est parcourue par une densité volumique de courant  $j$ . Elle génère dans le sol un champ électrique  $E$  dont on a représenté les lignes de champs en rouge. Quelques lignes équipotentielles du potentiel  $V$  résultant de ce champ sont dessinées sous la forme de lignes bleues pointillées.

### III. Sondage résistif

La notion de résistivité est particulièrement intéressante en sciences de la Terre. Elle est notamment utilisée pour sonder le sol à la recherche de minéral. Comme le montre le Tableau 2.1, la résistivité des minéraux tels que le cuivre est bien plus élevée que celle des roches qui le contiennent. Ce contraste de résistivité permet alors de les localiser en utilisant par exemple le montage à 4 électrodes que nous allons présenter.

#### III. 1. Potentiel électrique d'une électrode

On considère une électrode de section  $S$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  et de densité volumique de courant  $j$  plantée dans un sol uniforme de résistivité  $\rho$ . (voir Fig 2.2a). Le point de contact de l'électrode avec le sol agit comme une source de courant en injectant un courant d'intensité  $I$  dans ce dernier. Le système présente une symétrie sphérique,  $j$  ne dépend donc que de la distance à l'électrode et est porté par le vecteur radial  $e_r$ . La densité de courant volumique  $j$  en un point  $M$  de l'espace à une distance  $r$  de

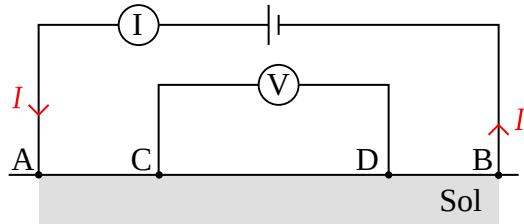


FIGURE 2.3 – Schéma du montage à 4 électrodes. Le générateur fournit un courant d'intensité  $I$  qui se distribue dans le sol en A et ressurgit en B. Un voltmètre et un ampèremètre permettent de mesurer respectivement la tension entre les points D et C et l'intensité  $I$ . Les électrodes D et C ne sont parcourues par aucun courant.

la source est donnée par

$$\mathbf{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.11)$$

où  $2\pi r^2$  est la surface de la demi-sphère de rayon  $r$ . Cette électrode génère donc dans le sol un champ électrique  $\mathbf{E}$  relié à  $\mathbf{j}$  par la loi d'Ohm locale

$$\mathbf{E}(r) = \rho \mathbf{j}(r) = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.12)$$

Le potentiel électrostatique  $V$  en un point  $M$  de l'espace est donc déduit en utilisant la relation liant le champ électrique au potentiel électrostatique

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla(V) = -\frac{dV}{dr}(r) \mathbf{e}_r \iff V(r) = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad (2.13)$$

en fixant le potentiel électrostatique nul en l'infini. Le potentiel électrostatique dépend donc directement de la résistivité du milieu considéré.

### III. 2. Le montage à 4 électrodes

On présente maintenant le montage à 4 électrodes qui permet de remonter à la résistivité  $\rho$  du sol. On considère ici un sol uniforme. La Figure 2.3 fourni un schéma du montage. D'après l'équation 2.13, les électrodes en A et B génèrent un potentiel en C donné par

$$V_C^A = \frac{\rho I}{2\pi|AC|} \quad \text{et} \quad V_C^B = -\frac{\rho I}{2\pi|BC|}.$$

Le signe – dans l'expression de  $V_C^B$  provient de l'orientation de  $\mathbf{j}$  au point D (voir Fig. 2.2b). Finalement, le potentiel au point C résulte de la superposition de ces deux potentiels

$$V_C = V_C^A + V_C^B = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} \right).$$

De même, le potentiel de l'électrode au point D est donnée par

$$V_D = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{|AD|} - \frac{1}{|BD|} \right).$$

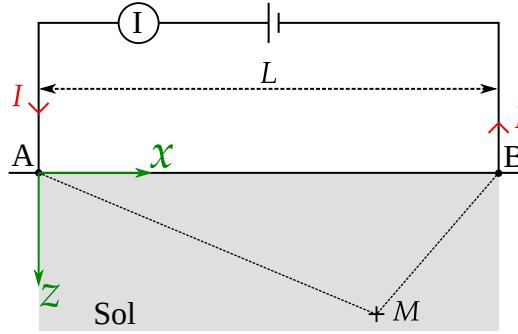


FIGURE 2.4 – Paire d'électrodes alimentées par un courant d'intensité  $I$  et séparées par une distance  $L$ .

La différence de potentiel  $\Delta V$  mesurée par le voltmètre est donc donnée par

$$\Delta V = V_C - V_D = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} - \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|BD|} \right)$$

En dehors de la résistivité  $\rho$ , toutes les autres grandeurs apparaissant dans cette égalité sont connues. On peut donc remonter à la résistivité du sol

$$\rho = \frac{2\pi\Delta V}{I} \left( \frac{1}{|AC|} - \frac{1}{|BC|} - \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|BD|} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

Certaines configurations d'électrodes permettent d'obtenir une formule finale simple. On peut citer par exemple la configuration de Wenner, pour laquelle  $|AC| = |DB| = a$  et  $|CB| = |AD| = 2a$ . La formule précédente devient alors

$$\rho = 2\pi a \frac{V}{I}. \quad (2.15)$$

### III. 3. Distribution de courant

On s'intéresse maintenant à la distribution de courant générée dans le sol par une paire d'électrodes émettrice-réceptrice. On cherche à connaître la profondeur maximale que permet de sonder une paire d'électrodes.

On considère donc une paire d'électrodes A et B alimentées par un courant d'intensité  $I$  et séparées par une distance  $L$  (voir Fig. 2.4). Le sol est un demi-espace infini de résistivité  $\rho$  uniforme. On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$ . Un point  $M$  de l'espace est donc repéré par ses coordonnées  $(x, y, z)$ .

La paire d'électrodes génère au point  $M$  un champ électrostatique  $E$  dont la composante selon  $e_x$  vaut

$$E_x(M) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{|AM|} - \frac{1}{|BM|} \right) \right],$$

où  $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $|BM| = \sqrt{(L-x)^2 + y^2 + z^2}$ . On a alors

$$E_x(M) = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{x}{|AM|^3} + \frac{L-x}{|BM|^3} \right).$$

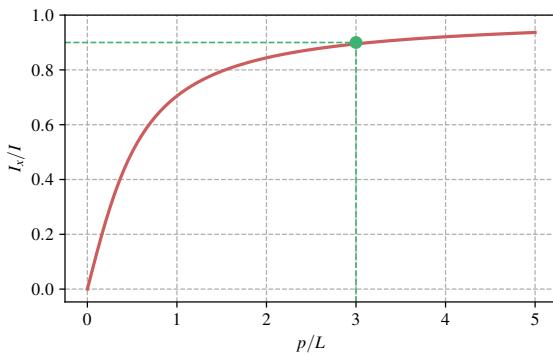


FIGURE 2.5 – Intensité relative traversant une section de sol située en  $x = L/2$  jusqu'à la profondeur  $p$  en fonction du rapport de  $p$  sur la distance inter-électrode  $L$ . Le point vert correspond au point particulier  $(3, 0.9)$ .

On peut alors aboutir à la composante  $j_x$  de la densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  en utilisant la loi d'Ohm

$$j_x(M) = \frac{E_x}{\rho} = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{x}{|AM|^3} + \frac{L-x}{|BM|^3} \right). \quad (2.16)$$

On s'intéresse maintenant au cas où le point  $M$  appartient au plan médian  $x = L/2$  aux deux électrodes. Dans ce cas particulier,  $j_x$  vaut

$$j_x(M) = \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

L'intensité  $dI_x$  du courant traversant la surface élémentaire  $dydz e_x$  centré en  $M$  s'écrit

$$dI_x = j(M) \cdot dydz e_x = j_x(M) dydz = \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dydz.$$

La fraction de courant qui traverse une section du plan médian jusqu'à une profondeur  $p$  est alors donnée par

$$\frac{I_x}{I}(p) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{z=0}^{z=p} \frac{IL}{2\pi [(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dy dz.$$

Comme

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty} \frac{dy}{[(L/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2}{[(L/2)^2 + z^2]^{3/2}},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{I_x}{I}(p) = \int_{z=0}^{z=p} \frac{IL}{\pi [(L/2)^2 + z^2]} dz.$$

On obtient alors finalement

$$\frac{I_x}{I}(p) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{2p}{L} \right). \quad (2.17)$$

Sur la Figure 2.5, on a tracé l'évolution de l'intensité relative traversant une section de sol située en  $x = L/2$  jusqu'à la profondeur  $p$  en fonction du rapport de  $p$  sur la distance inter-électrode  $L$ . On remarque que 90 % de l'intensité  $I$  traverse une section de sol s'étendant jusqu'à la profondeur  $3L$ . En augmentant la distance  $L$  entre les deux électrodes, on peut alors sonder le sol à une profondeur plus élevée.

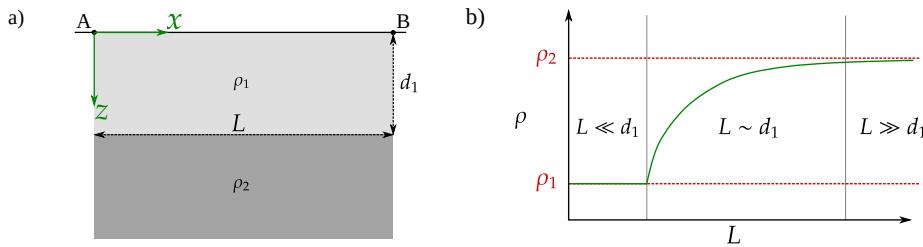


FIGURE 2.6 – Mesure de la résistivité d'un sol bicouche avec 2 électrodes avec le montage à gauche et l'évolution schématique de la résistivité apparente  $\rho$  avec la distance  $L$  entre les électrodes à droite. Les deux électrodes sont séparées d'une distance  $L$  et alimentées par un courant d'intensité  $I$ . La première couche présente une épaisseur  $d_1$  et une résistivité  $\rho_1$ , tandis que la seconde couche présente une résistivité  $\rho_2$  avec  $\rho_1 < \rho_2$ .

### III. 4. Résistivité apparente

Nous n'avons pour l'instant considéré que le cas idéal d'un sol de résistivité uniforme  $\rho$ . Dans ce cas bien précis, la méthode des 4 électrodes permet de déterminer la résistivité exacte de ce dernier.

En réalité, la résistivité d'un sol est une fonction complexe de l'espace qui résulte de sa composition, de sa température et d'autres paramètres physiques. La résistivité mesurée par la méthode des 4 électrodes est alors qualifiée d'*apparente*. Cette mesure donne néanmoins des informations utiles sur la structure du sol sondé.

Pour bien illustrer cela, on considère le cas d'un sol composé de deux couches de résistivités uniformes  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , avec  $\rho_2 > \rho_1$ . La couche 1 s'étend sur une épaisseur  $d_1$  (voir Fig. 2.6(a)). Pour simplifier le problème, on décide de sonder ce sol à l'aide de deux électrodes séparées d'une distance  $L$  et alimentées par un courant d'intensité  $I$ . La résistivité mesurée va alors dépendre de la distance entre les deux électrodes (voir Fig. 2.6(b))

1. lorsque  $L \ll d_1$ , seule la première couche de sol est sondée. La résistivité mesurée sera alors proche de  $\rho_1$ .
2. lorsque  $L \gg d_1$ , la majeure partie de l'intensité traverse la seconde couche de sol. La résistivité mesurée tend vers  $\rho_2$ .
3. lorsque  $L \sim d_1$ , les deux couches sont sondées de manière équivalente. La résistivité mesurée se situe entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

En faisant varier la distance  $L$  entre les deux électrodes, on est alors capable d'avoir une carte schématique de la résistivité du sol sondé et donc de connaître la composition de ce dernier.

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Courant-Conducteur électrique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 525–561, Dunod.
- Lowrie, W., 2007. Earth's age, thermal and electrical properties, in *Fundamentals of Geophysics*, pp. 207–281, Cambridge University Press, 2nd edn.
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Le courant électrique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 469–485, Pearson Education.

## IV. Exercices

### Exercice 1 (Effet de peau).

[Corrigé page 42]

Le demi-espace  $x < 0$  est rempli d'air tandis que le demi-espace  $x > 0$  est constitué d'un métal. Lorsqu'une onde électromagnétique venant de l'air se réfléchit sur le métal, le métal est le siège de courants volumiques de la forme

$$\mathbf{j} = j_0 \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \mathbf{e}_y,$$

où  $j_0$  et  $\delta$  sont des constantes.

1. Donner la dimension de  $j_0$  et de  $\delta$ . À quoi correspond  $\delta$ ?
2.  $\delta$  est appelé l'épaisseur de peau. Elle dépend de la conductivité en régime stationnaire  $\sigma$  du matériau considéré et de la pulsation de l'onde électromagnétique  $\omega$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}},$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$  est la perméabilité magnétique du vide. Vérifier l'homogénéité de cette expression.

3. Déterminer  $\delta$  dans le cas d'un gisement de pyrrhotite de résistivité  $\rho = 5 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$  pour 2 méthodes de prospection différentes utilisant des ondes électromagnétiques
  - a. induction électromagnétique ( $f = 1 \text{ kHz}$ )
  - b. radar ( $f = 100 \text{ MHz}$ )
 Ces méthodes permettent-elles de détecter le gisement s'il est enfoui sous un sol de 3 m d'épaisseur et ayant une résistivité de  $100 \Omega \cdot \text{m}$ ?
4. L'œil humain perçoit des ondes électromagnétiques dont la fréquence est située entre 400 et 780 THz environ. Quelle est la valeur de  $\delta$  pour ces fréquences et pour le cuivre? Quelle propriété de ce dernier cette valeur traduit-elle?

**Exercice 2 (Contamination d'un aquifère).**

[Corrigé page 42]

De l'eau de mer contamine un aquifère qui sert de source d'eau potable à une ville côtière. Les mesures suivantes de résistivité apparente ont été réalisées pour différentes distances inter électrodes avec la méthode de Wenner pour déterminer la profondeur de la contamination.

$a(\text{m})$	$\rho(\Omega \cdot \text{m})$	$a(\text{m})$	$\rho(\Omega \cdot \text{m})$	$a(\text{m})$	$\rho(\Omega \cdot \text{m})$
10	29.0	140	19.8	280	8.7
20	28.9	160	18.0	300	7.8
40	28.5	180	16.3	320	7.1
60	27.1	200	14.5	340	6.7
80	25.3	220	12.9	360	6.5
100	23.5	240	11.3	400	6.4
120	21.7	260	9.9	440	6.4

1. Tracer l'évolution de la résistivité apparente  $\rho$  en fonction de la distance inter électrode.
2. Combien de couches différentes pouvez-vous identifier grâce à cette courbe ? Quelle est leur résistivité respective ? À quelle couche correspond à l'eau salée ?
3. Identifier la courbe de résistivité apparente de la figure 2.7 qui correspond au problème. Tracer la résistivité apparente normalisée par la résistivité de la première couche en fonction de la distance inter électrode normalisée pour différentes valeurs de  $d$ . Estimer la profondeur de l'interface aquifère-eau salée.

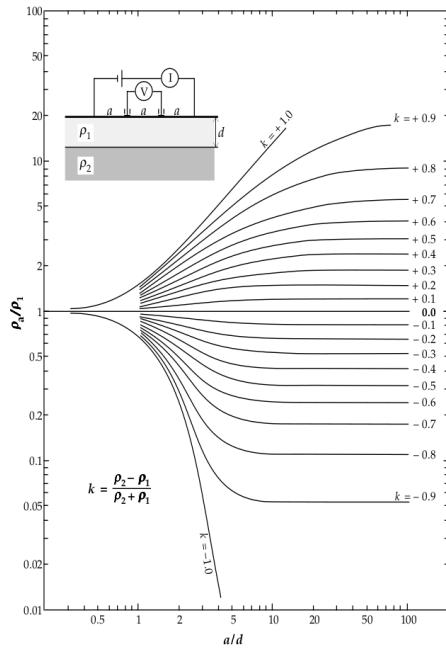


FIGURE 2.7 – Courbes caractéristiques de résistivité apparente normalisée pour un sol bicouche en fonction de la distance relative inter électrode pour le montage de Wenner. Les notations sont précisées dans la figure. L'image est extraite de Lowrie (2007)

**Exercice 3 (Le condensateur plan).**[\[Corrigé page 42\]](#)

On considère un condensateur plan composé de deux plaques conductrices infinies, parallèles et séparées par une distance  $a$ . La première plaque est chargée positivement avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ , tandis que la deuxième est chargée négativement avec une densité surfacique de charge  $-\sigma$ .

On cherche à déterminer le champ électrique généré par les deux plaques chargées.

1. Réaliser un schéma du système et choisir un repère adapté.
  2. Quelle est la direction et le sens du champ électrique en un point situé à l'intérieur des deux plaques ?
  3. Étudier les symétries et les invariances du système.
  4. En appliquant le théorème de Gauss aux trois surfaces suivantes,
    - a. un cube de section  $S$  inclus entre les deux plaques et situé entre les abscisses  $a_1$  et  $a_2$ ,
    - b. un cube de section  $S$  à l'extérieur des deux plaques entre les abscisses  $b_1$  et  $b_2$ ,
    - c. un cube de section  $S$  contenant une partie de la plaque 1 situé entre les abscisses  $c_1$  et  $c_2$ ,
- déterminer l'expression du champ électrique généré par les deux plaques en tout point de l'espace.

## V. Corrections

### Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Une exponentielle est sans dimension,  $j_0$  s'exprime donc en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ . L'argument à l'intérieur d'une fonction est toujours sans dimension.  $\delta$  est donc homogène à une longueur.  
La fonction  $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$  tend rapidement vers 0.  $\delta$  correspond donc à la profondeur de pénétration de  $j$ , et donc de l'onde électromagnétique, dans le conducteur.
2.  $\omega$  s'exprime en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\sigma$  s'exprime en  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ , c'est-à-dire en  $\text{A}^2 \cdot \text{s}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ . Le radian est une "fausse" unité car il correspond au rapport de deux longueurs. Le produit  $\mu_0 \omega \sigma$  est donc homogène à l'inverse du carré d'une longueur.  $\delta$  est donc bien homogène à une longueur.
3. On cherche à savoir ici si l'onde électromagnétique plonge assez loin dans le sol pour atteindre le gisement de pyrrhotite. L'épaisseur de peau vaut dans les deux cas
  - a.  $\sqrt{\frac{2 \times 100}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^3 \times 2\pi}} = 0.16 \text{ km}$
  - b.  $\sqrt{\frac{2 \times 100}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^8 \times 2\pi}} = 50 \text{ cm}$
 Le radar ne permettrait donc pas de détecter le gisement.
4. Pour le cuivre à température ambiante,  $\sigma \approx 5.9 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Dans ce cas,  $\delta \approx 10 \text{ nm}$ , expliquant ainsi l'opacité du cuivre.

### Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Voir figure 2.8a.
2. On distingue deux couches de résistivités respectives  $\rho_1 = 29.0 \Omega \cdot \text{m}$  et  $\rho_2 = 6.4 \Omega \cdot \text{m}$ . L'eau salée a une résistivité plus faible que l'eau douce. La couche la plus profonde correspond donc à l'eau salée.
3. Dans notre exercice,  $k \approx -0.6$ . La courbe qui nous intéresse est donc celle possédant le même  $k$  dans la figure 2.7. Cette courbe passe notamment par le point (2, 0.5). Pour déterminer la profondeur de l'interface eau douce - eau salée, on trace la résistivité apparente normalisée en fonction de la distance inter-electrodes normalisée pour différentes valeur de  $d$  (voir Fig. 2.8b). On en déduit que  $d$  est ici de l'ordre de 100 m.

### Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Voir la figure. 2.9
2. Nous savons que le champ électrostatique  $E$  est lié au potentiel électrostatique  $V$  par la relation

$$E = -\nabla(V).$$

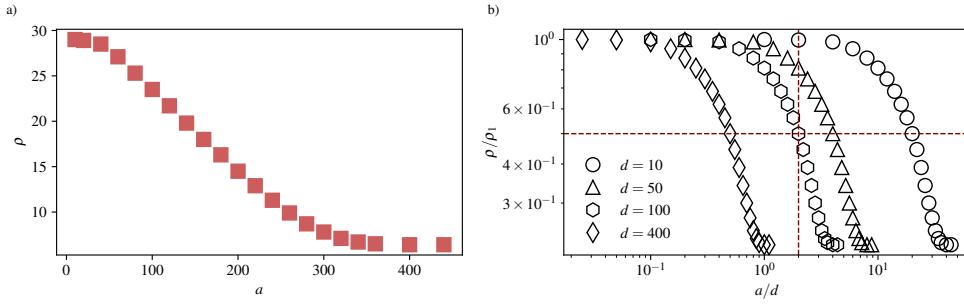


FIGURE 2.8 – Résistivité apparente  $\rho$  mesurée en fonction de la distance inter électrodes  $a$  à gauche. Résistivité apparente normalisée par la résistivité de la couche 1 en fonction de la distance inter électrodes normalisée par l'épaisseur de la couche 1 à droite pour différentes valeurs de  $d$ . Sur le panel de droite, les lignes en tiret se croisent au point  $(2, 0.5)$ .

Le champ électrique est donc dirigé des potentiels les plus élevés aux potentiels les plus faibles. La plaque 1 étant chargée positivement et la plaque 2 négativement,  $E$  en un point situé à l'intérieur des plaques est dirigé de la plaque 1 à la plaque 2.

3. Dans un repère cartésien, la forme générale du champ électrique  $E$  en un point  $M$  de l'espace de coordonnée  $(x, y, z)$  est la suivante

$$E(M) = E_x(x, y, z)e_x + E_y(x, y, z)e_y + E_z(x, y, z)e_z.$$

Pour simplifier cette expression, on commence par étudier les invariances de la distribution de charge générant le champ électrique  $E$

- les deux plaques étant infinies, le système est invariant par translation selon l'axe  $e_z$ .  $E$  ne dépend pas de  $z$ ,
- le système est invariant par translation selon  $e_y$ .  $E$  ne dépend pas de  $y$ .

$E$  ne dépend donc que de  $x$ .

On étudie maintenant les symétries de cette distribution de charge en considérant un point  $M$  quelconque de l'espace

- le plan  $(M, e_x, e_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges.  $E(M)$  doit donc appartenir à ce plan,
- le plan  $(M, e_x, e_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $E(M)$  doit donc appartenir à ce plan.

$E(M)$  doit appartenir aux plans  $(M, e_x, e_y)$  et  $(M, e_x, e_z)$ , il est donc colinéaire à  $e_x$ . On a finalement

$$E(M) = E(x)e_x, \quad (2.18)$$

en tout point de l'espace  $M$ . Cette forme simple est propice à l'utilisation du théorème de Gauss.

4. On applique donc le théorème de Gauss aux trois surfaces fermées proposées
- La surface fermée ne contient aucune charge, le flux de  $E$  à travers cette surface est donc nul. On a donc  $E(a_1) = E(a_2)$ . Comme nous n'avons imposé aucune condition sur le placement de la surface (hormis le fait qu'elle soit incluse entre les deux plaques), on peut conclure que  $E$  est uniforme entre les deux plaques.

b. Par un raisonnement analogue, on conclut que  $E$  est uniforme à l'extérieur des plaques.  $E$  doit donc être nul à l'extérieur des plaques pour éviter la génération par ce système d'une énergie infinie.

c. La surface contient la charge  $\sigma S$ . Le théorème de Gauss donne donc

$$E(c_1) - E(c_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

$E(c_2)$  étant nul on obtient finalement

$$E(c_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

#### Relation de continuité du champ électrostatique :

Au passage d'une surface possédant une densité surfacique de charge  $\sigma$ ,

- ▶ la composante du champ électrostatique  $E$  tangentielle à la surface est conservée,
- ▶ la composante normale à la surface est discontinue. Cette discontinuité vaut

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Finalement,

- Le champ électrique est uniforme entre les deux plaques et vaut  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_x$ .
- Le champ électrique est nul en dehors des plaques.

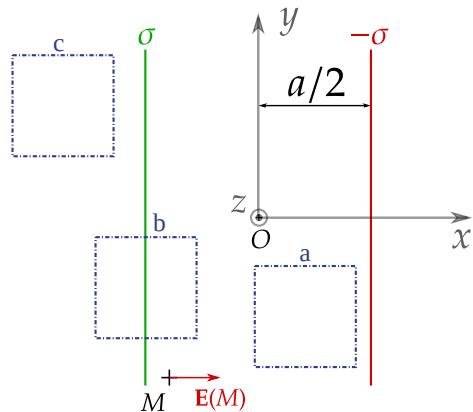


FIGURE 2.9 – Condensateur plan composé d'une plaque chargée positivement avec une densité surfacique de charge  $\sigma$  et une plaque chargée négativement avec une densité surfacique de charge  $-\sigma$ .

---

# 3 Magnétostatique

---

## Plan de ce chapitre

---

I.	La force de Lorentz . . . . .	46
II.	La loi de Biot et Savart . . . . .	48
III.	Équation de la magnétostatique . . . . .	50
	III. 1. Le théorème d'Ampère . . . . .	50
	III. 2. Flux du champ magnétostatique $B$ . . . . .	52
IV.	Étude des lignes de champ de $B$ . . . . .	53
V.	Calcul du champ magnétostatique . . . . .	54
	V. 1. Invariance de la distribution de courants . . . . .	55
	V. 2. Symétries de la distribution de courants . . . . .	55
	V. 3. Application du théorème d'Ampère . . . . .	56
VI.	Exercices . . . . .	58
VII.	Corrigé . . . . .	61

---

## Objectifs

- Connaître les équations qui contrôlent l'évolution spatiale du champ magnétostatique  $B$ .
- Faire le lien entre ces équations et une carte de champ magnétique.
- Savoir calculer le champ magnétostatique résultant d'une distribution simple de courants.

# Introduction

La magnétostatique étudie les champs magnétiques créés par des courants permanents. Le plus souvent, on cherche alors à déterminer le champ magnétostatique  $B$  qui résulte d'une distribution de courant  $j$  connue. Nous nous intéressons dans ce chapitre au champ magnétique créé par des courants circulants dans des conducteurs. Les milieux aimantés seront abordés plus loin dans le cours.

## I. La force de Lorentz

L'interaction entre deux particules immobiles a permis de définir la force de Coulomb dans le chapitre 1. Cette interaction électrostatique ne suffit plus lorsqu'il s'agit de décrire la dynamique de charges en mouvement. En 1895, le physicien néerlandais Hendrick Antoon Lorentz propose alors l'ajout d'un second terme à la force coulombienne qui fait apparaître la champ magnétostatique  $B$ .

### Champ magnétostatique :

Au même titre que le champ électrostatique, le champ magnétique  $B$  est un champ vectoriel. Il est généré par une distribution de courant ou par un aimant. Il s'exprime en tesla, noté T ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{A}^{-1}$  en SI). On rappelle quelques ordres de grandeur du champ magnétique

Dispositif	$B(\text{T})$
Champ magnétique terrestre à la surface	$47 \times 10^{-6}$
Champ créé à 1 cm d'un fil parcouru par un courant de 10 A	$2 \times 10^{-5}$
Champ créé à 1 mm d'un aimant permanent	0.1 – 1
Électroaimant	10 – 100
Étoile à neutrons en surface	$10^{11}$

Le champ magnétique vérifie lui aussi le principe de superposition.

### Force de Lorentz :

Une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $v$  dans un champ magnétique  $B$ , subit une force appelée force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Cette force est donc toujours orthogonale à la vitesse de la particule. Contrairement à la force électrostatique, la force magnétique n'entraîne donc pas de variation de la vitesse de la particule, elle permet seulement de dévier sa trajectoire. En effet, la puissance magnétique  $\mathcal{P}$  vaut

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

La force magnétique ne permet donc pas de mettre une particule chargée en mouvement.

Comme pour la force électrostatique, le poids d'une particule chargée est bien souvent

négligeable devant celui de la force de Lorentz. Pour illustrer cela, prenons le cas d'un électron de masse  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg et de charge  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C se déplaçant à une vitesse  $v = 10^5$  m · s<sup>-1</sup> dans un champ magnétique uniforme  $B = 1$  T. On trouve alors

$$\frac{mg}{qvB} \approx 10^{-15}.$$

On peut alors toujours négliger le poids d'une particule chargée devant la force de Lorentz.

### Exemple 1

On s'intéresse ici au mouvement d'un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  (voir Fig. 3.1). La vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  de la particule est orthogonale au champ  $\mathbf{B}$ . La particule est donc soumise à la force de Lorentz et à son poids que nous négligeons ici.

Expérimentalement, on constate que la trajectoire de la particule est circulaire. La force de Lorentz ne travaillant pas, la norme de la vitesse reste en tout temps égale à  $v_0$ . Le mouvement de la particule est donc uniforme et circulaire.

On se place dans un référentiel polaire ( $O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ). La position de la particule est donc repérée par ses coordonnées  $(r, \theta)$ . L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B},$$

où la notation  $\dot{\mathbf{v}}$  est utilisée pour la dérivée temporelle. Dans un référentiel polaire et pour un mouvement circulaire uniforme,  $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = v_0\mathbf{e}_\theta$  et  $\dot{\mathbf{v}} = -v_0^2/r\mathbf{e}_r$ . On obtient donc

$$m\frac{v_0^2}{r}\mathbf{e}_r = -ev_0\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_z = ev_0Be_r \iff \dot{\theta} = \frac{eB}{m}$$

L'électron suit donc un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire  $eB/m$  appelée pulsation cyclotron. Dans le cyclotron de University of Michigan, le champ magnétique vaut  $B = 0.10$  T, ce qui donne une pulsation de  $1.7 \times 10^{10}$  rad · s<sup>-1</sup> pour un électron.

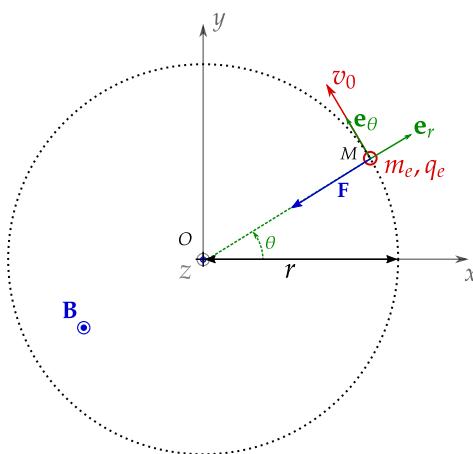


FIGURE 3.1 – Trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme.

## II. La loi de Biot et Savart

De la même manière que pour le champ électrostatique, nous commençons par définir le champ magnétique généré par une charge ponctuelle. Soit une charge ponctuelle  $q$  en un point  $P$  de l'espace se déplaçant à la vitesse  $v$  dans le référentiel du laboratoire. Expérimentalement, on observe que cette particule génère en un point  $M$  un champ magnétique  $B(M)$  tel que

$$B(M) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} v \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3},$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ .

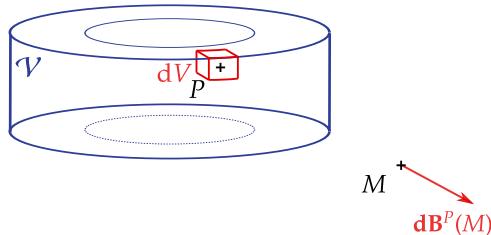


FIGURE 3.2 – Champ magnétique généré par un élément infinitésimal d'un conducteur de densité volumique de courant  $j$  en un point  $M$  de l'espace.

On considère un conducteur formant un volume  $\mathcal{V}$  (voir Fig. 3.2) parcouru par des charges mobiles de densité volumique de charge  $\rho$  se déplaçant à la vitesse  $v$ . Un élément infinitésimal  $dV$  de ce circuit centré en  $P$  génère en un point  $M$  un champ magnétique

$$\mathbf{dB}^P(M) = \frac{\mu_0 \rho(P) dV}{4\pi} v(P) \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3},$$

où on reconnaît le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}(P) = \rho(P)v(P)$ . Le champ magnétique  $B$  généré par l'ensemble du circuit en  $M$  est alors obtenu en additionnant les contributions de chaque élément de ce dernier grâce au principe de superposition

$$B(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathbf{dB}^P(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}(P) \wedge \frac{PM}{\|PM\|^3} dV$$

On aboutit ainsi à la loi de Biot et Savart.

### Loi de Biot et Savart :

Le champ magnétostatique  $B(M)$  créé au point  $M$  par une distribution volumique de courant  $j$  ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  est

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{j(P) \wedge PM}{\|PM\|^3} dV, \quad (3.2)$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide.

Par un raisonnement similaire, on montre que pour une distribution surfacique de courant  $j_s$  confinée sur une surface  $S$ , cette expression devient

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in S} \frac{j_s(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dS. \quad (3.3)$$

Pour un circuit filiforme  $C$  parcouru par un courant  $I$ , cette expression devient

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in C} \frac{I d\ell \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}. \quad (3.4)$$

### Exemple 2

On cherche à déterminer le champ magnétique généré par un fil infini  $C$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  en un point  $M$  (voir Fig. 3.3). On se place dans un repère cylindrique  $(0, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Les points  $M$  et  $P$  ont pour coordonnées respectives  $(r, \theta, 0)$  et  $(0, 0, z_p)$ .

Le champ magnétique  $\mathbf{dB}^P(M)$  généré par un élément  $d\ell_P$  du fil centré en  $P$  s'écrit

$$\mathbf{dB}^P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell_P \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3},$$

où  $\mathbf{PM} = \mathbf{PO} + \mathbf{OM} = -z_p \mathbf{e}_z + r \mathbf{e}_r$ . Dans un repère cylindrique, un élément infinitésimal  $d\ell_P$  du fil s'écrit  $d\ell_P = dz_p \mathbf{e}_z$ . On a alors

$$\frac{d\ell_P \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} = \frac{rdz_p}{\|\mathbf{PM}\|^3} \mathbf{e}_\theta.$$

En remarquant que  $\|\mathbf{PM}\| = r / \cos \alpha$ , l'expression précédente devient alors

$$\frac{rdz_p}{\|\mathbf{PM}\|^3} \mathbf{e}_\theta = \frac{\cos^3 \alpha dz_p}{r^2} \mathbf{e}_\theta$$

De même, on remarque que  $z_p = r \tan \alpha$ . Par différentiation, on obtient donc

$$dz_p = d[r \tan \alpha] = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Finalement,

$$\mathbf{dB}^P(M) = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r} d\alpha \mathbf{e}_\theta.$$

Le champ  $\mathbf{B}(M)$  généré au point  $M$  par le fil s'obtient alors en utilisant le principe de superposition, ce qui revient à intégrer les champs magnétiques infinitésimaux sur l'ensemble du fil. Pour parcourir l'ensemble du fil,  $\alpha$  doit varier entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . On a alors

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.}$$

On obtient un champ magnétique porté par  $\mathbf{e}_\theta$  et donc la norme ne dépend que de  $r$ . Les lignes de ce champ sont des cercles concentriques centrés sur le fil.  $\mathbf{B}$  "tourne" autour du fil.

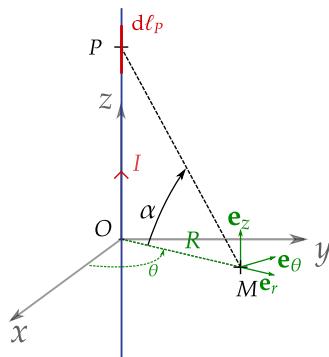


FIGURE 3.3 – Champ magnétique créé en un point  $M$  par un fil parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

#### Calcul du champ magnétique par la loi de Biot et Savart :

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, la loi de Biot et Savart peut s'avérer utile lorsqu'il s'agit de calculer le champ magnétique  $B$  généré par une distribution de courant. Voici en résumé la démarche à suivre

1. Réaliser un schéma du système et choisir un repère adapté.
2. Exprimer le petit volume  $dV$ , de surface  $dS$  ou de longueur  $d\ell$  dans ce système de coordonnées.
3. En multipliant cet élément par le courant ( $j$ ,  $j_s$  ou  $I$ ), on obtient le petit élément de courant associé.
4. Exprimer le vecteur  $PM$  dans le système de coordonnées choisi.
5. En multipliant par  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  et en faisant le produit vectoriel par  $\frac{PM}{\|PM\|^3}$ , on fabrique le champ élémentaire  $d\mathbf{B}^P(M)$  généré en  $M$ .
6. Pour calculer  $B(M)$ , il suffit alors d'intégrer sur la distribution de courant.

## III. Équation de la magnétostatique

On considère un fil parcouru par un courant  $I$  dans un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$  (voir Fig. 3.3). Comme vu ci-dessus, le champ magnétique créé par ce fil en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du fil est donné par

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.$$

Comme pour le champ électrostatique, nous allons nous servir de cet exemple simple pour retrouver certaines propriétés du champ magnétostatique.

### III. 1. Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est l'équivalent pour le champ magnétostatique  $B$  du théorème de Gauss. Il va nous permettre de calculer facilement le champ magnétostatique généré par une distribution de courants simple.

Les lignes du champ  $B$  créé par le fil sont des cercles dont l'axe est le fil. Nous cherchons donc dans un premier temps à calculer la circulation de  $B$  sur la ligne de champ  $C$  de rayon  $r$  passant par  $M$ . On a bien pris soin au préalable d'orienter cette dernière. Dans un repère cylindrique, un petit élément  $d\ell$  de ce contour fermé s'écrit  $d\ell = rd\theta e_\theta$ . La circulation de  $B$  sur ce contour s'écrit donc

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \oint_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I.$$

On constate que la circulation du champ  $B$  le long du circuit  $C$  ne dépend que du courant  $I$  que ce dernier enlace. Cette propriété que nous venons de montrer pour un fil est en fait une propriété générale du champ magnétostatique.

### Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétostatique  $B$  le long d'un circuit fermé  $C$  est égale au courant **algébrique**  $I_{\text{int}}$  enlacé par ce dernier multiplié par  $\mu_0$

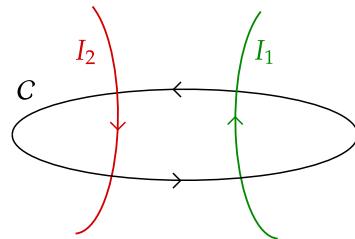
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{int}}. \quad (3.5)$$

Le contour sur lequel est réalisée l'intégrale est appelé contour d'Ampère. Le courant enlacé  $I_{\text{int}}$  est le courant qui traverse une surface orientée qui s'appuie sur le contour d'Ampère. L'orientation de la surface se déduit de celle du contour grâce à la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

### Exemple 3

Soit deux fils électriques parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . Avec les orientations choisies, le théorème d'Ampère appliqué au contour  $C$  s'écrit

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0(I_1 - I_2).$$



Le théorème d'Ampère peut-être traduit sous une forme locale : appelée **équation de Maxwell-Ampère**, qui relie alors le champ magnétostatique au vecteur densité de courant.

### Équation de Maxwell-Ampère :

L'équation de Maxwell-Ampère relie le champ magnétostatique  $B$  au vecteur densité de courant  $j$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

Cette équation est une relation **locale**, elle permet de relier les dérivées spatiales du champ  $B$  en un point de l'espace au vecteur  $j$  en ce même point.

### III. 2. Flux du champ magnétostatique $B$

On cherche maintenant à calculer la divergence du champ  $B$ . En coordonnées cylindriques, cela donne

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

où  $B_r$ ,  $B_\theta$  et  $B_z$  sont les composantes de  $B$ . Dans le cas du fil infini,  $B_\theta$  est la seule composante non nulle de  $B$  et elle ne dépend pas de  $\theta$ . On a donc

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Ce résultat se généralise à un champ magnétostatique  $B$  quelconque sous la forme de l'équation de Maxwell-Thomson.

**Équation de Maxwell-Thomson :**

Un champ magnétique  $B$  vérifie toujours

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Cette relation locale est vérifiée en tout point de l'espace.

**Remarque.** La divergence de  $B$  étant nulle, l'analyse vectorielle affirme qu'il est possible dans ce cas de définir un champ vectoriel  $A$ , défini à un gradient près, tel que  $\operatorname{rot} A = B$ , appelé le potentiel vecteur.

Comme l'équation de Maxwell-Ampère, cette équation peut se mettre sous une forme intégrale, en exprimant le flux du champ magnétique à travers une surface fermée  $S$ .

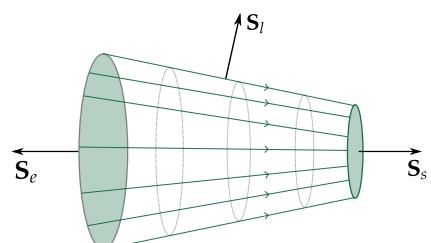
**Flux du champ magnétostatique :**

Le flux du champ magnétique  $B$  à travers une surface fermée  $S$  est nul

$$\iint_S B \cdot dS = 0.$$

On dit que le champ  $B$  est à flux conservatif.

On peut appliquer ce résultat à une surface  $S$  particulière constituée d'une portion de tube de champ de section d'entrée  $S_e$ , de section de sortie  $S_s$  et de section latérale  $S_l$ .



### Tube de champ :

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de champ.

D'après le théorème d'Ampère la flux de  $B$  à travers cette surface est nul. Par définition du tube de champ, l'intégrale sur la surface latérale est nulle. Il reste donc

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_e = - \iint_{S_f} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_s \iff \left| \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_e \right| = \left| \iint_{S_f} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_s \right|.$$

Le flux entrant dans la surface est égal au flux sortant de cette dernière. De plus, la surface de sortie étant de taille plus importante que la surface d'entrée, on en conclut que le champ est plus intense à l'entrée du tube qu'à la sortie. Le champ  $B$  étant à flux conservatif, un resserrement des lignes de champs traduit une augmentation de l'intensité de ce dernier.

### Flux conservatif et lignes de champ :

Le champ magnétique étant à flux conservatif, ses lignes de champs se resserrent dans les zones de forte intensité. Inversement, ces dernières s'éloignent lorsqu'il devient plus faible

## IV. Étude des lignes de champ de $B$

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés spatiales du champ  $B$ . Nous allons voir comment les **lignes de champ** nous renseignent sur sa répartition dans l'espace.

Nous nous intéressons au champ magnétique produit par un solénoïde (voir Fig. 3.4). Les lignes de champ nous permettent de retrouver quelques propriétés du champ magnétostatique énoncées précédemment.

1. On remarque tout d'abord que les lignes de champ sont des contours fermés qui entourent les fils parcourus par un courant. Cette première observation est une conséquence directe de l'équation de Maxwell-Ampère. L'orientation de ces lignes de champ s'obtient d'ailleurs en considérant le sens du courant dans les fils et en utilisant la règle de la main droite.
2. La divergence nulle de  $B$  est aussi visible sur cette carte de champ. En effet, on constate que les lignes de champ ne convergent/divergent pas en un point de l'espace, contrairement au champ électrostatique.
3. Dans le cas du champ magnétique, le resserrement des lignes de champ traduit une augmentation de la norme de ce dernier. On conclut que le champ est plus intense à l'intérieur du solénoïde qu'à l'extérieur. De plus, les lignes de champ étant parallèles à l'intérieur du solénoïde, on conclut que le champ est uniforme.
4. Grâce aux lignes de champ, on retrouve rapidement les plans de symétrie et d'antisymétrie du champ magnétique. Le plan médiateur du solénoïde est par exemple un plan de symétrie du champ magnétique. L'analyse de ces symétries sera utile pour calculer le champ magnétique résultant d'une distribution de courant.

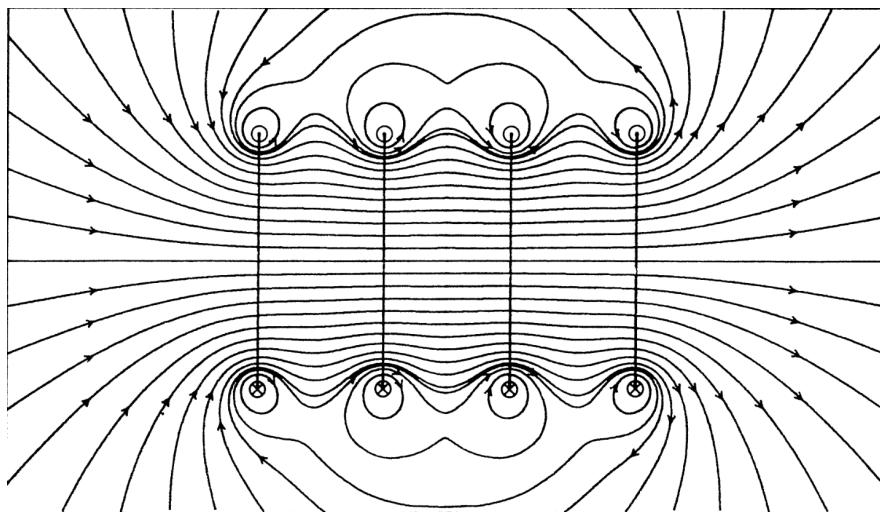


FIGURE 3.4 – Lignes du champ magnétique généré par un solénoïde constitué de 4 bobines parcourues dans le même sens par la même intensité. Cette figure est extraite de [Gie & Sarmant \(1985\)](#)

## V. Calcul du champ magnétostatique

Nous allons voir dans cette partie comment nous pouvons utiliser le théorème d’Ampère pour calculer le champ magnétostatique  $B$  créé par une distribution de courants simple. Nous nous intéressons ici à une bobine torique constituée d’un fil régulièrement bobiné autour d’un tore de section carré (voir Fig. 3.5). Cette bobine est caractérisée par le nombre  $N$  total de spires bobinées, son rayon intérieur  $R$  et sa hauteur  $h$ . La bobine est parcourue par un courant  $I$ .

On cherche à déterminer l’expression du champ électrique  $B$  en un point  $M$  de l’espace. Pour ce faire, il suffit de suivre le mode d’emploi suivant

1. Faire un schéma du système ! C’est absolument indispensable (voir Fig. 3.5)
2. Choisir un repère adapté au problème
3. Étudier les invariances de cette distribution
4. Étudier les symétries de la distribution de courants à l’origine du champ magnétostatique
5. Choisir un contour d’Ampère et appliquer le théorème d’Ampère.

Au vu de la géométrie du système, nous choisissons ici d’utiliser un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$ . Le point  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Le champ magnétostatique en  $M$  s’écrit de manière générale

$$\mathbf{B}(M) = B_r(M)e_r + B_\theta(M)e_\theta + B_\varphi(M)e_\varphi. \quad (3.7)$$

Le champ magnétostatique est un vecteur à trois composantes et chaque composante dépend des coordonnées de  $M$ . Pour simplifier cette expression, il est intéressant de considérer les invariances et symétries de la distribution de courant qui génère le champ  $B$ .

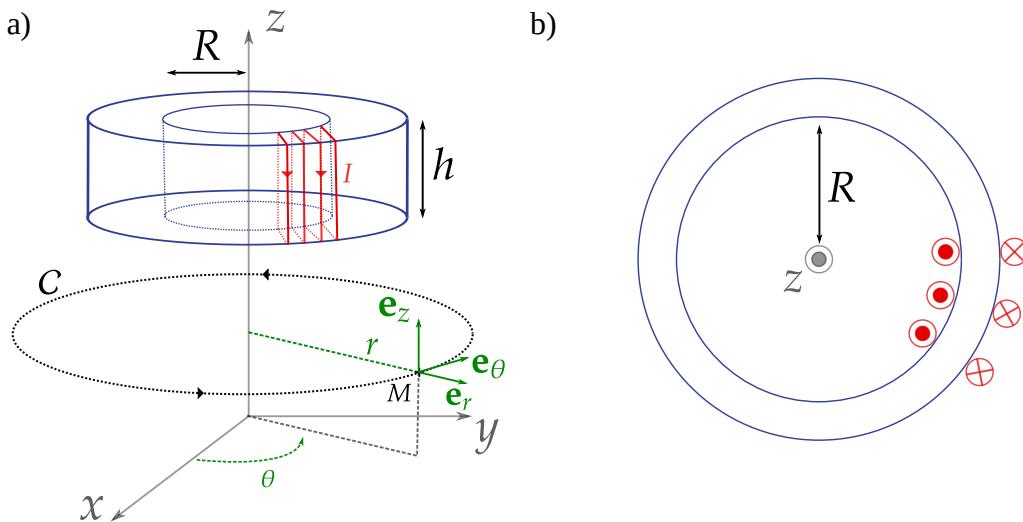


FIGURE 3.5 – Bobine torique à gauche et coupe perpendiculaire à ( $Oz$ ) de cette bobine à droite.

## V. 1. Invariance de la distribution de courants

On cherche ici à savoir si la distribution de courant est modifiée sous l'effet d'une translation ou d'une rotation de l'espace. En d'autres termes, on regarde de quelles variables elle dépend. Étant donné que les spires sont uniformément réparties sur le tore, on observe que

- si je tourne le tore d'un angle  $\Delta\theta$  dans la direction  $e_\theta$ , le problème ne change pas. La distribution de courant est donc invariante par rotation selon l'angle  $\theta$ .  **$B$  ne dépend pas de  $\theta$ .**

Finalement, l'expression 3.7 du champ magnétique se simplifie donc en

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta + B_z(r, z)\mathbf{e}_z.}$$

## V. 2. Symétries de la distribution de courants

Si on applique ce principe au champ magnétique créé par une distribution de courants, cela revient à dire que les symétries de la distributions de courants doivent se retrouver dans les symétries du champ magnétique. On en déduit les règles suivantes

### Symétries de $B$ et de la distribution de courant :

- si  $(\Pi)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $B(M)$  doit appartenir à  $(\Pi)$ ,
- si  $(\Pi)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $B(M)$  doit être orthogonal à  $(\Pi)$ .

**Remarque.** Le champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  appartient aux plans d'**antisymétrie** de la distribution de courant et non aux plans de symétrie comme c'est le cas pour le champ électrostatique. Le vecteur  $\mathbf{B}$  est qualifié de vecteur axial.

Pour appliquer ces règles à notre exemple, on détermine les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courants auquels le point  $M$  appartient

- le plan  $(M, e_r, e_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant.  $\mathbf{B}(M)$  doit être **orthogonal à ce plan**.

$\mathbf{B}(M)$  doit être orthogonal au plan  $(M, e_r, e_z)$ , il doit donc être colinéaire à  $e_\theta$

$$\mathbf{B}(M) = B_\theta(r, z)e_\theta.$$

Nous n'avons imposé aucune condition sur la position de  $M$ , cette relation est donc vraie pour tout point  $M$  de l'espace. Maintenant que l'expression du champ magnétique a été simplifiée au maximum, on cherche à appliquer le théorème d'Ampère.

### V. 3. Application du théorème d'Ampère

La distribution de courant présente une symétrie de révolution. On choisit comme contour d'Ampère un cercle  $C$  de rayon  $r$ , de centre  $O$  et orienté dans le sens de  $e_\theta$  qui passe par  $M$  (voir Fig 3.5) et on applique le théorème d'Ampère à ce dernier

$$\oint_S \mathbf{B}(M) \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{int}},$$

où  $I_{\text{int}}$  est la courant enlacé par  $C$ . On commence par déterminer l'expression du membre de gauche. Dans un repère cylindrique,

$$d\ell = r d\theta e_\theta.$$

On obtient alors

$$\oint_C \mathbf{B}(M) \cdot d\ell = \oint_C B(r, z) e_\theta \cdot r d\theta e_\theta = B(r, z) r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r, z).$$

On s'intéresse maintenant au terme de droite de l'équation. Deux cas de figure se présentent :

- $M$  est situé dans le tore : le courant enlacé par  $C$  est alors  $I_{\text{int}} = NI$ .
- $M$  est situé à l'extérieur du tore : le courant enlacé par  $C$  est donc nul. Soit parce que le contour n'enlace aucun courant, soit parce qu'il enlace autant de courants positifs que de courants négatifs.

Finalement,

- si  $M$  se trouve à l'intérieur du tore,  $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} e_\theta$ .
- si  $M$  est en dehors du tore,  $\mathbf{B}(M) = \mathbf{0}$ .

---

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Électromagnétisme En Régime Statique : Le Champ magnétique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 561–598, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985. Postulats de la magnétostatique, in *Électromagnétisme*, vol. 1 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 92–100, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Magnétostatique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 515–538, Pearson Education.
- Pérez, J.-P., Carles, R., & Fleckinger, R., 2002. Champ électromagnétique. propriétés, in *Électromagnétisme : Fondements et Applications*, Masson Sciences, pp. 185–208, Dunod, 4th edn.

## VI. Exercices

### Exercice 1 (Orage et boussole).

[Corrigé page 61]

On cherche dans cet exercice à déterminer le champ magnétique créé par un éclair lors d'un orage. En première approximation, un éclair peut-être assimilé à un fil rectiligne de rayon  $a = 10 \text{ cm}$  parcouru par un courant d'intensité constante  $I = 10^5 \text{ A}$ .

1. Faire un schéma modélisant un éclair. Quel est le repère adapté au problème ici ?
2. De quelle(s) variable(s) dépend l'amplitude du champ magnétique ? Par quel vecteur est-il porté ? Dessiner les lignes du champ magnétique produit par cet éclair.
3. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par l'éclair. Vérifier l'homogénéité de votre expression.
4. L'aiguille d'une boussole peut se retrouver désaimantée lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à  $B_L = 2 \times 10^{-3} \text{ T}$ . À quelle distance minimale d'un éclair doit donc se trouver une boussole pour ne pas être désaimantée ?

### Exercice 2 (Bobines de Helmholtz).

[Corrigé page 61]

Les bobines de Helmholtz sont un dispositif expérimental constitué de deux bobines circulaires de même rayon, parallèles et placées à une distance égale à leur rayon. Dans cet exercice, on cherche à déterminer le champ magnétique généré par ce système.

On considère tout d'abord une spire de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$ , parcouru par un courant  $I$  et placée en  $z = 0$ . On souhaite calculer le champ magnétique  $B_1$  créé par cette spire sur son axe, le calcul en dehors de l'axe étant un peu plus difficile.

1. Étudier les symétries et invariance de la distribution de courants.
2. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique généré par la spire en un point  $M$  de son axe. Exprimer  $B_1(M)$  sous la forme  $B_1(M) = B_0 f(M)$  où  $B_0$  est l'amplitude du champ au centre de la spire et  $f$  une fonction de l'espace à déterminer.
3. Étudier la fonction  $f$ .
4. On ajoute une seconde spire identique à la première en  $z = R$ . Déterminer le champ magnétique  $B$  créé par les deux spires en un point  $M$  de l'axe ( $Oz$ ) et le mettre sous la forme  $B(M) = B_0 g(M)$ , où  $g$  est une fonction à expliciter.
5. Tracer l'évolution de  $B(M)/B_0$  avec  $z/R$ . Que peut-on dire de la forme des lignes de champs près de l'axe dans la zone  $z = R/2$  ?

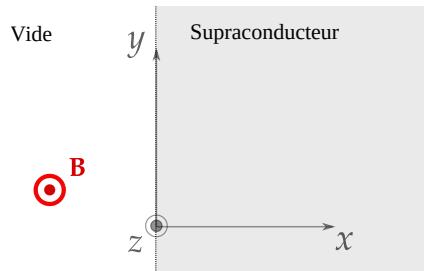


FIGURE 3.6 – Supraconducteur occupant le demi-espace  $x > 0$  baignant dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  colinéaire à  $e_z$ .

### Exercice 3 (Effet Meissner).

[Corrigé page 63]

Dans un matériau supraconducteur, la densité de courant  $\mathbf{j}$  vérifie l'équation de London

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \lambda^2},$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $\lambda$  une constante dépendant du matériau étudié et  $\mathbf{B}$  le champ magnétique

On se place ici dans un repère cartésien  $(0, e_x, e_y, e_z)$ . Un supraconducteur occupe tout le demi-espace défini par  $x > 0$ . À l'extérieur du supraconducteur, le champ est uniforme d'amplitude  $B_0$  et porté par  $e_z$  (voir Fig. 3.6). On admettra ici que le champ est continu à la frontière entre le vide et le supraconducteur et qu'il ne dépend que de  $x$  à l'intérieur de ce dernier.

1. Faire une analyse dimensionnelle pour déterminer la dimension de  $\lambda$ .
2. Montrer qu'à l'intérieur du supraconducteur, l'évolution spatiale de l'amplitude du champ magnétique est donnée par

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

On utilisera l'égalité vectorielle suivante, vérifiée pour tout vecteur  $\mathbf{B}$ ,

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B},$$

où  $\nabla^2$  correspond à l'opérateur laplacien vectoriel.

3. La solution générale à cette équation différentielle est de la forme

$$B(x) = C \exp(x/\lambda) + D \exp(-x/\lambda), \quad (3.8)$$

où  $C$  et  $D$  sont deux constantes réelles. Déterminer l'expression de  $C$  et  $D$ .

4. Pour l'aluminium,  $\lambda = 16 \text{ nm}$ , déterminer le rapport  $B(x)/B_0$  pour  $x = \lambda, 10\lambda, 100\lambda$ . Proposer alors une interprétation de  $\lambda$ .

L'impossibilité du champ magnétique externe à pénétrer dans le supraconducteur n'est pas anodine. Elle induit une force de pression qui s'exerce sur le supraconducteur et peut permettre notamment de faire léviter l'aimant à l'origine de ce champ.. Pour en apprendre plus sur les supraconducteurs et leurs propriétés, vous pouvez notamment aller voir la vidéo<sup>a</sup> que le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) a réalisée sur le sujet.

a. <https://www.youtube.com/watch?v=5SF98Ph8hSU>

**Exercice 4 (Champ créé par un câble coaxial).**[\[Corrigé page 64\]](#)

On considère un câble coaxial (câble de sortie d'un générateur basse fréquence) constitué d'un cylindre métallique central plein de rayon  $R_1$  et d'une couche cylindrique de rayon interne  $R_2$  et de rayon externe  $R_3$ . Entre  $R_1$  et  $R_2$  se trouve une matière isolante assimilable à du vide d'un point de vue électromagnétique.

On se place dans un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$ . Un point  $M$  de l'espace est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Le câble d'axe ( $Oz$ ) est considéré comme infiniment long. La partie conductrice centrale est parcourue par un courant uniforme d'intensité  $I$  tandis que la partie périphérique est parcourue par un courant uniforme d'intensité  $-I$ .

1. Réaliser un schéma du système.
2. Montrer que le champ magnétique  $B$  au point  $M$  s'écrit

$$\mathbf{B}(M) = B(r)\mathbf{u},$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur à préciser.

3. Quelle est la valeur du champ magnétique  $B$  au point  $M$  si  $r > R_3$ ? Quel est l'avantage d'un câble coaxial par rapport à un simple fil?
4. Exprimer les vecteurs densités de courant  $\mathbf{j}_c$  et  $\mathbf{j}_p$  respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique.
5. Déterminer l'expression du champ magnétique  $B$  pour un point  $M$  à l'intérieur du câble.

## VII. Corrigé

### Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Voir figure 3.3. On se place donc dans un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$ . Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ .
2. L'étude des invariances de la distribution de courant montre que la norme du champ magnétique ne dépend que de la distance au fil  $r$ . L'étude des symétries montre que le champ magnétique est orthoradial. Les lignes de champ sont des cercles concentriques centrés le fil.
3. Voir cours. L'expression du champ magnétique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du fil est donnée par

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\theta.$$

On vérifie la dimension de cette expression. D'après le théorème d'Ampère on sait que la circulation de  $\mathbf{B}$  sur un contour fermé est égale à  $\mu_0 I$ . Or la circulation de  $\mathbf{B}$  est homogène à champ magnétique multiplié par une longueur ( $\mathbf{B} \cdot d\ell$ ). L'expression est donc bien homogène.

4.

$$B(M) < B_L \iff \frac{\mu_0 I}{2\pi r} < B_L \iff r > \frac{\mu_0 I}{2\pi B_L} \iff r > 10 \text{ m}$$

Si la boussole se trouve à moins de 10 m de l'éclair, elle sera désaimantée.

### Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. On commence bien sûr par réaliser un schéma du système (voir Fig. 3.8). On choisit d'utiliser dans cet exercice un repère cylindrique  $(O, e_r, e_\theta, e_z)$ . Un point  $M$  de l'axe ( $Oz$ ) est donc repéré par ses coordonnées  $(0, 0, z)$ . Sous sa forme la plus générale, le champ magnétique en  $M$  s'écrit

$$\mathbf{B}_1(M) = B_r(M) e_r + B_\theta(M) e_\theta + B_z(M) e_z.$$

**Invariance :** La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ),  $B_1$  ne dépend donc pas de  $\theta$ . De plus, on s'intéresse à un point  $M$  situé sur l'axe, la distance  $r$  à l'axe de la spire n'entre donc pas en compte dans le problème.

**Symétrie :** Tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant,  $B_1(M)$  doit donc appartenir à l'intersection de tous ces plans.  $B_1(M)$  est donc colinéaire à  $e_z$ .

Finalement,

$$\boxed{B_1(M) = B_z(z) e_z.}$$

2. La première étape est de déterminer le champ magnétique généré par une portion  $d\ell_p$  de la spire centrée au point  $P$  de coordonnées  $(R, \theta, 0)$ . On commence donc par exprimer  $d\ell_p$  dans le système de coordonnées choisi

$$d\ell_p = R d\theta e_\theta.$$

Vient ensuite l'expression de  $\mathbf{PM}$  dans ce même référentiel

$$\mathbf{PM} = \mathbf{PO} + \mathbf{OM} = -Re_r + ze_z.$$

On aboutit ainsi à l'expression du champ magnétique  $\mathbf{dB}_P(M)$  généré par cette portion de spire en  $M$

$$\mathbf{dB}_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\mathbf{d}\ell_P \wedge \mathbf{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R^2 e_z + Rze_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta.$$

Il ne reste finalement plus qu'à sommer les contributions de toutes les portions de la spire pour aboutir au champ total  $\mathbf{B}_1(M)$

$$\mathbf{B}_1(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R^2 e_z + Rze_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \left( R^2 e_z \int_0^{2\pi} d\theta + Rz \int_0^{2\pi} e_r d\theta \right) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} e_z.$$

$B_0$  est le champ obtenu en  $z = 0$ , il vaut donc

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

On obtient finalement

$$\boxed{\mathbf{B}_1(M) = B_0 \times \left[ 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} e_z.}$$

La figure 3.7 représente l'évolution de  $B(M)/B_0$  avec  $z/R$ .

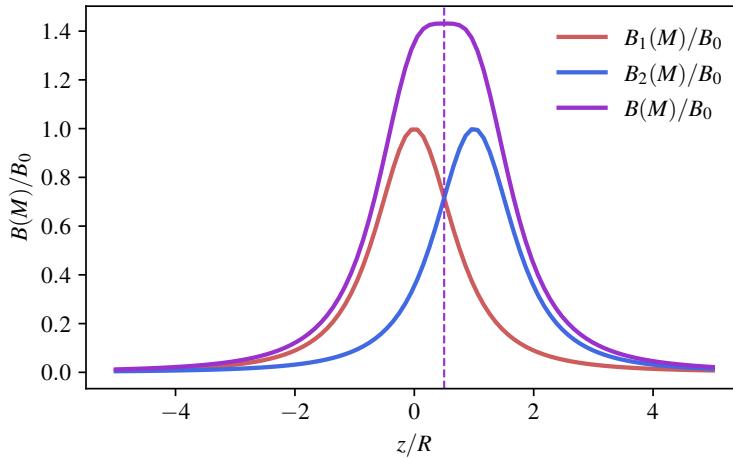


FIGURE 3.7 –  $B_1(M)/B_0$ ,  $B_2(M)/B_0$  et  $B(M)/B_0$  en fonction de  $z/R$ . La ligne en pointillé correspond à l'abscisse  $z/R = 1/2$ .

3. On ajoute ensuite une seconde spire qui génère en  $M$  un champ magnétique  $B_2(M)$ . La spire 2 étant identique à la première, on écrit directement que

$$B_2(M) = B_0 \times \left[ 1 + \left( \frac{z - R}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} e_z.$$

En utilisant le principe de superposition, on en déduit le champ magnétique total  $B$  généré en  $M$

$$\boxed{B(M) = B_1(M) + B_2(M) = B_0 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ 1 + \left( \frac{z-R}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} e_z.}$$

La figure 3.7 trace l'évolution de  $B(M)/B_0$  en fonction de  $z/R$ . On remarque sur cette figure que la fonction est constante autour de  $R/2$ . Les lignes de champ seront donc parallèles autour de ce point.

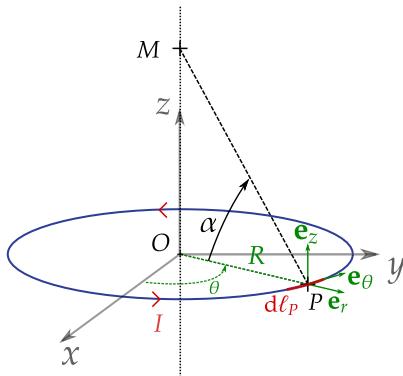


FIGURE 3.8 – Schéma de la spire.

### Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- On sait d'après l'équation de Maxwell-Ampère que

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

$\mu_0 \text{rot } \mathbf{j}$  est donc homogène à un champ magnétique divisé par le carré d'une longueur.  
 $\lambda$  est donc homogène à une longueur.

- D'après l'équation de Maxwell-Ampère, on a

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j}.$$

En utilisant l'équation de London et l'égalité vectoriel fournie cela donne

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} \iff \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \nabla^2(\mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{B}}{\lambda^2}.$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Thomson,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , on aboutit ainsi à

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{B}{\lambda^2} = 0.}$$

3. C doit obligatoirement être nul. Dans le cas contraire l'amplitude du champ magnétique divergerait lorsque  $x$  tend vers  $\infty$ . Pour déterminer  $D$ , on utilise la continuité du champ en  $x = 0$ . On a donc directement

$$\boxed{\mathbf{B}(x) = B_0 \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right) \mathbf{e}_z.}$$

4.

$x$	$\lambda$	$10\lambda$	$100\lambda$
$B(x)/B_0$	0.37	$4.5 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-44}$

$\lambda$  correspond donc à la profondeur de pénétration de  $B$  dans le supraconducteur.

#### Corrigé de l'exercice 4.

[Retour à l'énoncé]

1. Le système est représenté sur la figure 3.9.

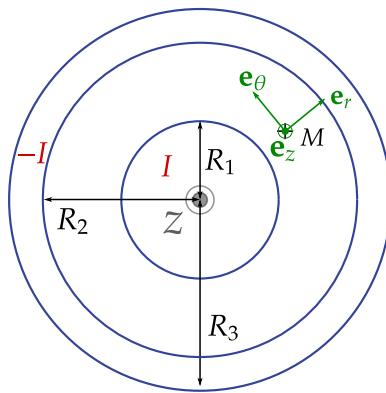


FIGURE 3.9 – Coupe du câble coaxial dans le plan  $(O, e_r, )$ .

2. Sous sa forme la plus générale, le champ magnétique en  $M$  s'écrit

$$\mathbf{B}(M) = B_r(M) \mathbf{e}_r + B_\theta(M) \mathbf{e}_\theta + B_z(M) \mathbf{e}_z.$$

**Invariance :** La distribution de courant est invariante

- par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ),  $\mathbf{B}$  ne dépend donc pas de  $\theta$ .
- par translation selon l'axe ( $Oz$ ),  $\mathbf{B}$  ne dépend donc pas de  $z$ .

**Symétrie :** Le plan  $(M, e_r, e_z)$  est plan de symétrie de la distribution de courants.  $\mathbf{B}(M)$  est donc orthogonal à ce plan et est donc colinéaire à  $\mathbf{e}_\theta$ .

Finalement,

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = B(r) \mathbf{e}_\theta.}$$

3. Si  $r > R_3$ , le point  $M$  se trouve à l'extérieur du câble coaxial. Si on applique le théorème d'Ampère à un cercle  $C$  de rayon  $r$  et de centre  $O$ , cela donne

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0(I - I) = 0.$$

Ici, on  $d\ell = rd\theta e_\theta$  donc on obtient directement

$$B(r) = 0.$$

Le champ magnétique est donc nul en dehors du câble. Un câble coaxial permet donc d'éviter de générer un champ magnétique parasite.

4. Les vecteurs densité de courant  $j_c$  et  $j_p$  sont reliés à l'intensité  $I$  du courant par les relations

$$I = \iint_{S_c} j_c \cdot dS \quad \text{et} \quad -I = \iint_{S_p} j_p \cdot dS,$$

où  $S_c$  et  $S_p$  sont respectivement les sections de la partie centrale et de la partie périphériques. Dans la partie centrale comme dans la partie périphérique, le courant est uniforme. Les vecteurs densités de courant s'expriment donc

$$j_c = \frac{I}{\pi R_1^2} e_z \quad \text{et} \quad j_p = \frac{-I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} e_z.$$

5. On peut alors appliquer le théorème d'Ampère à un cercle  $C$  de rayon  $r$  et de centre  $O$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = I_{\text{enlac}},$$

où  $I_{\text{enlac}}$  est le courant enlacé par  $C$ .

On commence alors par exprimer le terme de gauche. On a  $d\ell = rd\theta e_\theta$  et donc le terme de gauche vaut  $2\pi r B(r)$ . Pour le terme de droite, c'est un peu plus compliqué. En effet, 3 cas de figure se présentent

- Si  $0 \leq r \leq R_1$ ,  $I_{\text{enlac}} = \pi r^2 j_c = I \left( \frac{r}{R_1} \right)^2$ .
- Si  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $I_{\text{enlac}} = I$ .
- Si  $R_2 \leq r \leq R_3$ ,  $I_{\text{enlac}} = I + \pi (R_3^2 - r^2) j_p = I \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$ .

Finalement, on obtient l'expression du champ magnétique en tout point  $M$  de l'espace

$$B(M) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r > R_3 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) e_\theta & \text{si } R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\theta & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{r}{R_1} \right)^2 e_\theta & \text{si } 0 \leq r \leq R_1. \end{cases}$$



---

# 4 Étude macroscopique de l'aimantation

---

## Plan de ce chapitre

---

I.	Le dipôle magnétique . . . . .	68
I. 1.	Champ magnétique d'une spire . . . . .	68
I. 2.	Topologie d'un champ magnétique dipolaire . . . . .	70
I. 3.	Action d'un champ magnétique extérieur . . . . .	72
II.	Le vecteur aimantation . . . . .	73
II. 1.	Approche microscopique . . . . .	73
II. 2.	Approche macroscopique . . . . .	73
II. 3.	Équivalence entre aimantation et distribution de courant . . . . .	75
III.	Aimantation induite . . . . .	76
III. 1.	Paramagnétisme, diamagnétisme et ferromagnétisme . . . . .	76
III. 2.	Susceptibilité magnétique et perméabilité magnétique . . . . .	77
III. 3.	Le lien entre $H$ et $M$ pour les matériaux ferromagnétiques . . . . .	78
IV.	Étude du champ magnétique terrestre . . . . .	80
IV. 1.	Transition para-ferromagnétique . . . . .	80
IV. 2.	Aimantation thermorémanente . . . . .	81
V.	Exercices . . . . .	84
VI.	Corrigé . . . . .	86

---

## Objectifs

- Connaître la notion de dipôle magnétique
- Connaître les différents types de magnétisme et la notion d'aimantation induite
- Connaître les équations qui contrôlent l'évolution spatiale du champ magnétique dans les milieux magnétiques
- Savoir décrire un cycle d'hystérésis et donner une explication microscopique à ce dernier

# Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés magnétiques des matériaux en les abordant d'un point de vue macroscopique. Quelques rares matériaux sont capables de générer leur propre champ magnétique (les aimants par exemple). On dit alors qu'ils possèdent une **aimantation permanente**. La plupart du temps leurs propriétés magnétiques ne se manifestent que sous l'action d'un champ magnétique produit par une autre source (une boussole par exemple). Ils se mettent alors à produire un champ propre qui perturbe le champ dans lequel ils baignent initialement. On dit que ces matériaux possèdent une **aimantation induite**.

## I. Le dipôle magnétique

Lorsqu'un observateur se trouve loin d'un circuit filiforme, il devient insensible aux caractéristiques géométriques de ce dernier. Le champ magnétique perçu par ce dernier ne dépendra plus de la taille de la spire ou de sa forme. La spire pourra alors être considéré comme un **dipôle magnétique**.

### Dipôle magnétique :

Un dipôle magnétique est une source de champ magnétique (aimant ou circuit parcouru par un courant  $I$ ) de dimension typique  $a$  vu de loin, c'est-à-dire depuis une distance  $r \gg a$ .

**Remarque.** De la même manière, deux particules portant une charge opposée peuvent être assimilées à grande distance à un dipôle électrique.

Nous allons voir que ce modèle est très utile lorsqu'il s'agit de décrire le comportement magnétique de la matière.

### I. 1. Champ magnétique d'une spire

Pour illustrer la notion de dipôle magnétique, nous considérons maintenant une spire de rayon  $a$  parcourue par un courant  $I$  (voir Fig. 4.1). L'idée est de calculer une approximation du champ généré par cette spire à une distance  $r \gg a$ . On considère un point  $M$  situé dans le plan  $(O, e_y, e_z)$  et repéré par ses coordonnées polaire  $(r, \theta)$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $e_y$  et  $e_r$ .

Le champ magnétique  $\mathbf{dB}_P(M)$  généré par l'élément  $d\ell_P$  de la spire en  $M$  est obtenu grâce à loi de Biot et Savart

$$\mathbf{dB}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell_P \wedge \mathbf{PM}}{PM^3}.$$

Dans la base  $(0, e_x, e_y, e_z)$ ,  $d\ell_P = ad\psi (-\sin \psi e_x + \cos \psi e_y)$  et

$$\mathbf{PM} = \mathbf{PO} + \mathbf{OM} = -a \cos \psi e_x + (r \sin \theta - a \sin \psi) e_y + r \cos \theta e_z.$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer  $PM^3$ . Nous allons nous servir du fait que  $r \gg a$  pour

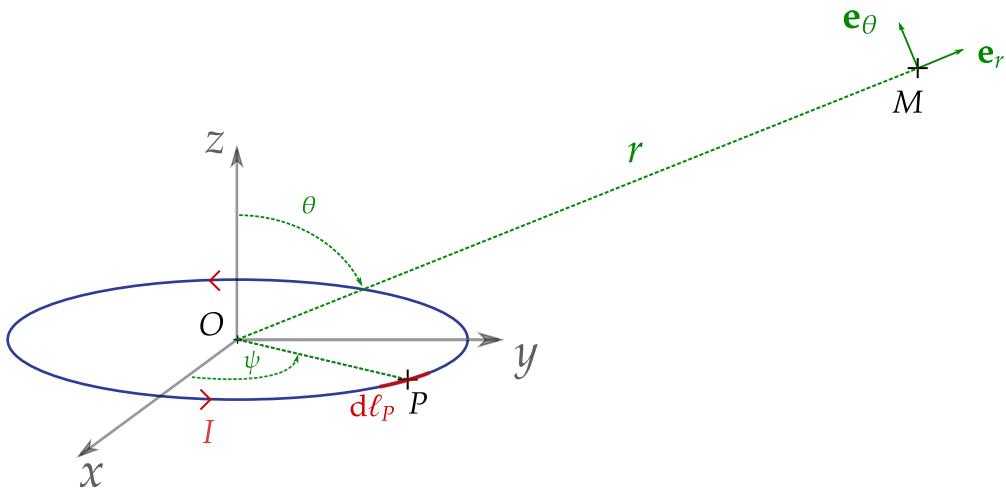


FIGURE 4.1

obtenir un expression approchée de  $PM^3$  en réalisant un développement limité. On a alors

$$PM^3 = \left[ a^2 \cos^2 \psi + (r \sin \theta - a \sin \psi)^2 + r^2 \cos^2 \theta \right]^{3/2} = r^3 \left[ 1 - 2 \sin \theta \sin \psi \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} \right]^{3/2}.$$

Comme  $r \gg a$ , on peut alors réaliser un développement limité à l'ordre 1 pour obtenir l'expression de  $PM^{-3}$

$$PM^{-3} = r^{-3} \left[ 1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r} + o\left(\frac{a}{r}\right) \right] \approx r^{-3} \left( 1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r} \right)$$

Cette expression nous montre que  $PM^3$  est égale à  $OM^3$  à des termes en  $a/r$  près. L'approximation dipolaire conduit à considérer que le point  $P$  et le point  $O$  sont quasiment confondus pour l'observateur en  $M$ . Finalement, le champ magnétique  $B(M)$  généré par la spire en  $M$  s'écrit

$$B(M) \approx \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r} \right) [r \cos \psi \sin \theta e_x - r \sin \psi \cos \theta e_y + (a - r \sin \theta \sin \psi) e_z] d\psi.$$

On commence par calculer l'intégrale qui va nous permettre d'obtenir la composante selon  $e_x$  du champ magnétique. Cela donne

$$\int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r} \right) \cos \psi d\psi = \left[ \sin \psi + \frac{3a \sin \theta \sin^2 \psi}{2r} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

La composante selon  $e_y$  est obtenue en calculant l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r} \right) \sin \psi d\psi = \left[ -\cos \psi + \frac{3a \sin \theta}{r} \left( \frac{\psi}{2} - \frac{\sin(2\psi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a \sin \theta}{r}.$$

Finalement, on obtient la composante selon  $e_z$  en calculant

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{3a \sin \theta \sin \psi}{r}\right) (a - r \sin \theta \sin \psi) d\psi &= \left[ a\psi + r \sin \theta \sin \psi - \frac{3a^2 \sin \theta \cos \psi}{r} \right]_0^{2\pi} \\ &- \left[ 3a \sin^2 \theta \left( \frac{\psi}{2} - \frac{\sin(2\psi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi a - 3\pi a \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Après ce calcul fastidieux on aboutit enfin à l'expression du champ magnétique  $B(M)$

$$B(M) = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} [3 \cos \theta \sin \theta e_y + (2 - 3 \sin^2 \theta) e_z].$$

Dans les deux composantes non nulles du champ magnétique, on voit apparaître la surface de spire  $\pi a^2$ . On définit alors le moment dipolaire  $\mathbf{m}$  de la spire  $\mathbf{m} = \pi a^2 I e_z$  où  $\pi a^2 e_z$  est le vecteur surface de la spire orienté par le sens du courant. Finalement, on aboutit à l'expression du champ magnétique dans le repère polaire

$$\boxed{B(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta]} \quad (4.1)$$

### Moment magnétique :

Soit un circuit filiforme parcourue par un courant  $I$  et ayant un vecteur surface  $S$  orienté grâce au sens du courant. On définit le moment magnétique  $\mathbf{m}$  du circuit par

$$\mathbf{m} = IS.$$

Le moment magnétique s'exprime donc en  $A \cdot m^2$ .

Dans l'approximation dipolaire, le champ magnétique  $B$  créé au point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta)$ , dans le repère polaire centré sur le circuit, est approximativement

$$B(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{m}}{r^3}$$

## I. 2. Topologie d'un champ magnétique dipolaire

On cherche maintenant à décrire la topologie d'un champ magnétique dipolaire. Pour ce faire, on détermine l'équation de ses lignes de champs.

On considère un moment magnétique  $\mathbf{m}$  colinéaire à  $e_z$ . On se place dans un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$  centré sur  $\mathbf{m}$  (voir Fig. 4.2).

Le système présentant une symétrie de révolution, nous nous plaçons ici dans un plan méridional, ce qui nous permet d'ignorer la coordonnée  $\varphi$ . Un point  $M$  de l'espace est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta)$ . L'équation des lignes de champ est obtenue en écrivant qu'en tout point  $M$ , l'élément de ligne  $d\ell$  centré en  $M$  vérifie

$$B(M) \wedge d\ell = 0 \iff \frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} \iff \frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{rd\theta}{\sin \theta} \iff r = r_0 \sin^2 \theta,$$

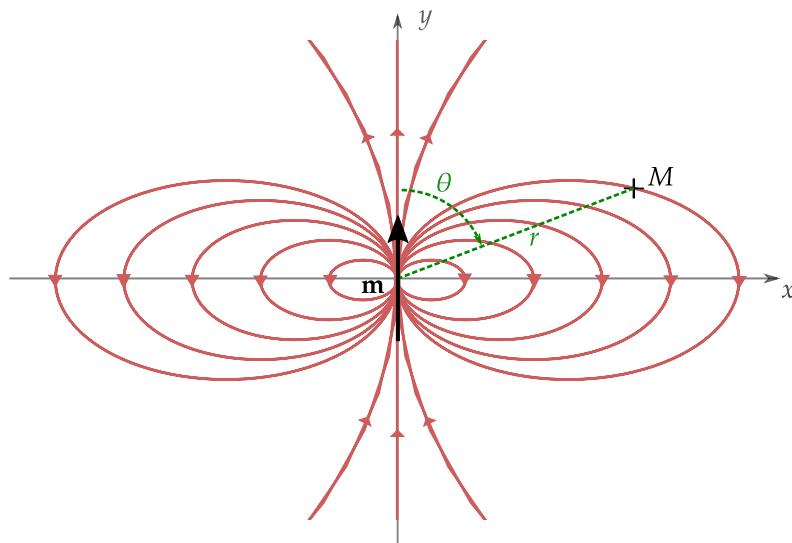


FIGURE 4.2 – Champ magnétique généré par un moment dipolaire magnétique. Les lignes rouges représentent les lignes de ce champ.

où  $B_r$  et  $B_\theta$  sont respectivement les composantes de  $\mathbf{B}$  selon  $e_r$  et  $e_\theta$  et  $r_0$  le rayon de la ligne de champ en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Ces lignes sont représentées en rouge sur la figure 4.2. Sur cette figure, l'orientation de  $\mathbf{m}$  définit les pôles Nord et Sud de la spire.

**Remarque.** L'étude des lignes de champ dans un repère 2D suffit ici car le système présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ .

#### Pôles magnétiques :

Les lignes de champ magnétique quittent le pôle Nord et reviennent par le pôle Sud.

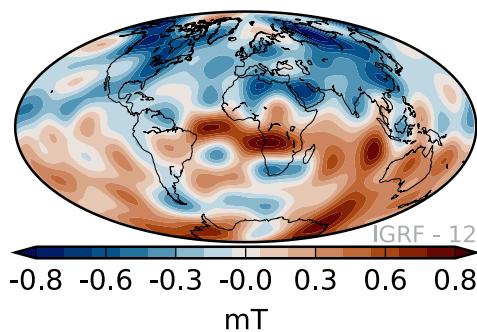


FIGURE 4.3 – Composante radiale du champ géomagnétique à la frontière noyau-manteau d'après le International Geomagnetic Reference Field (IGRF). Les lignes de champ sortent du pôle Sud et rentrent dans le pôle Nord.

**Exemple 1**

Le dipôle magnétique est un modèle puissant qui permet de décrire le comportement d'objets micro et macroscopiques. On peut donner deux exemples de dipôle magnétique

**Le champ magnétique terrestre :** Le champ magnétique terrestre résulte des déplacements du fluide conducteur qui compose la partie externe du noyau de la Terre. En première approximation, on peut assimiler la Terre à un dipôle magnétique  $m = 8.3 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  placé au centre de cette dernière (voir Fig. 4.3) et présentant un angle de  $11^\circ$  avec l'axe de rotation. Il en résulte un champ magnétique dont l'amplitude atteint  $50 \mu\text{T}$  à la surface. Attention, le pôle Nord magnétique correspond en fait au pôle Sud d'un moment magnétique !

**Le magnéton de Bohr :** Le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, vu dans le Chapitre 1, a été proposé par Bohr et permet d'expliquer en partie le magnétisme de la matière. Dans ce modèle, l'électron décrit une trajectoire circulaire autour du noyau. Ce système peut alors être considéré comme une spire de courant de rayon  $r_0 = 52.9 \text{ pm}$  et de moment magnétique

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

où  $m_e$  est la masse d'un électron,  $e$  sa charge en valeur absolue et  $\hbar \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck réduite.

### I. 3. Action d'un champ magnétique extérieur

Il s'avère qu'un dipôle magnétique  $\mathbf{m}$  plongé dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$  subit de la part de ce champ une action mécanique sous la forme d'un couple  $\Gamma$

#### Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique :

Soit un dipôle magnétique  $\mathbf{m}$  plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Le champ magnétique va exercer un couple  $\Gamma$  sur le dipôle tel que

$$\Gamma = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

dont nous admettrons l'expression.

L'énergie d'interaction  $E$  entre un moment dipolaire  $\mathbf{m}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'écrit

$$E = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

Pour illustrer cette interaction, nous allons considérer le cas d'une boussole placée dans le champ magnétique terrestre orienté selon  $e_y$  (voir Fig. 4.4). Initialement, l'axe de cette boussole présente un axe  $\theta$  avec le champ magnétique. Ce dernier va alors exercer un couple  $\Gamma$  sur l'aiguille de la boussole tel

$$\Gamma = -mB \sin \theta e_z. \quad (4.3)$$

Ce couple va alors avoir pour action d'aligner  $\mathbf{m}$  avec  $\mathbf{B}$ .

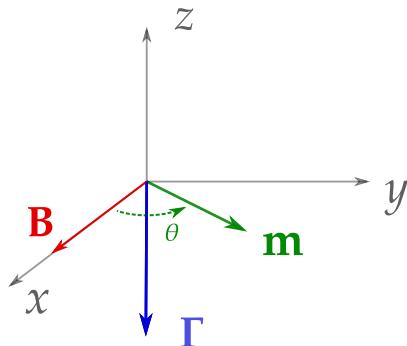


FIGURE 4.4 – Action d'un champ magnétique  $B$  sur un dipôle magnétique  $m$ .

## II. Le vecteur aimantation

Nous allons maintenant voir comment le modèle du dipôle magnétique va nous permettre de décrire les propriétés magnétiques d'un milieu via son aimantation. Nous allons notamment nous concentrer sur le lien qu'il existe entre l'aimantation et le champ magnétique.

### II. 1. Approche microscopique

Certains milieux matériels, tels que les aimants, sont capables de générer des champs magnétiques importants. Ampère suggéra alors que ces champs magnétiques étaient créés par des spires microscopiques liées à la structure du matériau. En réalité, les propriétés magnétiques d'un matériau découlent de l'existence de dipôles magnétiques atomiques qui proviennent

- d'une part du moment magnétique orbitale résultant du mouvement des électrons autour du noyau. Nous avons d'ailleurs calculé la valeur de ce moment pour l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.
- et d'autre part du spin des électrons et des nucléons, ce dernier étant un moment magnétique intrinsèque à une particule.

Malheureusement, l'étude de l'aimantation microscopique est complexe et nécessite de faire appel à une théorie quantique de la matière, ce qui sort totalement du cadre de ce cours. Nous nous limiterons donc ici à une approche macroscopique de la matière aimantée.

### II. 2. Approche macroscopique

Pour éviter de devoir nous plonger dans une théorie quantique de la matière, nous allons donc changer d'échelle, en ne regardant plus la matière à l'échelle atomique mais à une échelle plus élevée. Imaginons que nous voulions décrire les propriétés magnétiques d'un milieu occupant un volume  $\mathcal{V}$  de l'espace (voir Fig. 4.5). Pour ce faire, nous allons découper ce volume en  $N$  volumes macroscopiques  $\{dV_i\}_{i \in [1, N]}$ , centrés au point  $\{P_i\}_{i \in [1, N]}$ , tels que

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^N dV_i.$$

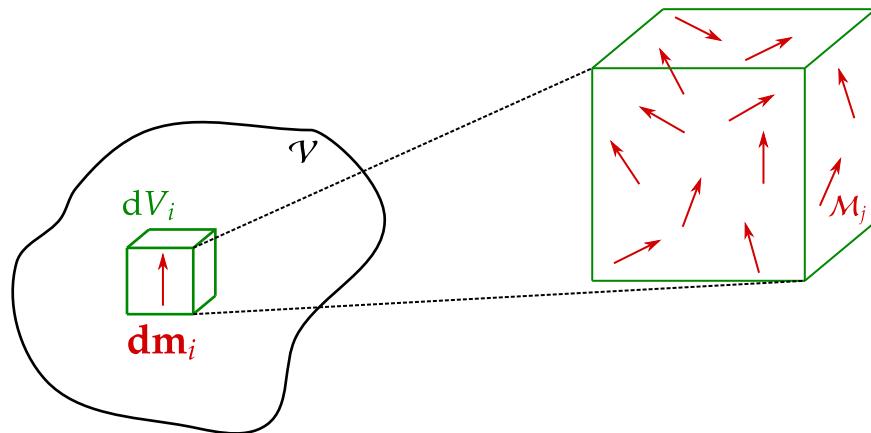


FIGURE 4.5 – Découpage d'un volume  $\mathcal{V}$  en volume macroscopique  $dV_i$ . Chaque volume  $dV_i$  possède un moment magnétique  $dm_i$  qui résulte de la superposition des moments magnétiques  $M_j$  des atomes qui le composent.

Ces volumes doivent être assez grands pour contenir un grand nombre d'atomes mais pas trop grands pour éviter que les propriétés physiques à l'intérieur de ce dernier ne varient trop. Le moment magnétique  $dm_i$  de chaque volume  $dV_i$  s'obtient alors en sommant la contribution de chaque atome

$$dm_i = \sum_j M_j,$$

où  $M_j$  est le moment magnétique du  $j$ -ème atome contenue dans le volume  $dV_i$ . Si ce volume est assez grand devant les dimensions atomiques, on peut alors introduire une densité volumique de moment dipolaire  $M$  telle que

$$dm_i = M(P_i)dV_i.$$

$M$  est aussi appelé le vecteur aimantation ou l'aimantation du milieu.

#### Vecteur aimantation :

Soit un petit élément de volume  $dV$  d'un domaine magnétique  $\mathcal{V}$ . Ce volume centré en un point  $P$  de l'espace possède un moment dipolaire  $dm$  tel que

$$dm = M(P)dV, \quad (4.4)$$

où  $M(P)$  est la densité volumique de moment dipolaire en  $P$ .  $M$  est donc un champ vectoriel qu'on appelle aussi vecteur aimantation ou aimantation. Il s'exprime en  $A \cdot m^{-1}$ .

La valeur de ce champ vectoriel au point  $P_i$  est obtenue en réalisant une moyenne spatiale des moments dipolaires atomiques inclus dans  $dV_i$

$$M(P_i) = \frac{\sum_j M_j}{dV_i}.$$

## II. 3. Équivalence entre aimantation et distribution de courant

À l'échelle macroscopique, il est possible de montrer que rien ne distingue un champ magnétique dû à des dipôles magnétiques d'un champ généré par une distribution de courant. La distribution d'aimantation peut alors être remplacé par une distribution de courant équivalente.

Soit un volume  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $\mathcal{S}$  et possédant une aimantation  $\mathbf{M}$ . Le champ magnétique généré par ce volume est équivalent à celui que produirait une distribution de courant caractérisée par

- une densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  à l'intérieur de  $\mathcal{V}$  telle que

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (4.5)$$

- une densité surfacique de courant  $j_s$  sur la surface  $\mathcal{S}$  telle que

$$j_s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}, \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\mathcal{S}$  et dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$ .

En nous appuyant sur cette équivalence, on aboutit alors à une nouvelle forme de l'équation de Maxwell-Ampère.

### Champ magnétique et aimantation :

Soit un domaine magnétique présentant une aimantation  $\mathbf{M}$ . En l'absence de courant électrique, le champ  $\mathbf{B}$  à l'intérieur du domaine vérifie alors la relation

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{M}. \quad (4.7)$$

La plupart du temps, à ce champ magnétique créé par l'aimantation  $\mathbf{M}$  vient se superposer un champ magnétique généré par une densité volumique de courant  $\mathbf{j}$ . Le champ total  $\mathbf{B}$  vérifie alors

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \text{rot } \mathbf{M} \iff \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}. \quad (4.8)$$

Il est alors commode dans ce cas de définir le vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$ .

### Vecteur excitation magnétique :

Soit un domaine aimanté  $\mathcal{D}$  caractérisé par une aimantation  $\mathbf{M}$  et une densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  qui résulte d'un mouvement de porteurs de charge. Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  à l'intérieur du domaine vérifie alors

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

On définit alors le vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  tel que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (4.9)$$

$\mathbf{H}$  a la même dimensionnalité que  $\mathbf{M}$ . Il s'exprime donc en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

L'introduction du vecteur d'excitation magnétique  $H$  permet d'aboutir à une nouvelle forme des équations de la magnétostatique.

### Équation de la magnétostatique et milieux aimantés :

Soit un domaine aimanté  $\mathcal{D}$  caractérisé par une aimantation  $M$  et une densité volumique de courant  $j$  qui résulte du mouvement des porteurs de charge. Le champ magnétique  $B$  et l'excitation magnétique  $H$  vérifient alors

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} H = j \quad \text{avec} \quad B = \mu_0 (H + M). \quad (4.10)$$

Sous forme intégrale, ces égalités deviennent

$$\iint_S B \cdot dS = 0 \quad \text{et} \quad \oint_C H \cdot d\ell = I, \quad (4.11)$$

où  $I$  est le courant enlacé par le contour fermé  $C$ .

## III. Aimantation induite

Contrairement aux aimants, la plupart des matériaux ne possèdent pas d'aimantation permanente. En revanche, sous l'action d'un champ magnétique extérieur, ces derniers vont acquérir une aimantation  $M$  qui est alors qualifiée **d'aimantation induite**. L'aimantation du matériau en un point est alors une fonction du champ magnétique totale  $B$  en ce point. La relation qui lie  $B$  à  $M$  est alors caractéristique du matériau considéré. Elle décrit la réponse de ce dernier à un champ magnétique externe. Cette relation constitue découle le plus souvent de résultats expérimentaux.

### III. 1. Paramagnétisme, diamagnétisme et ferromagnétisme

Concernant l'aimantation induite, on distingue alors deux grandes classes de matériaux

- Dans la plupart des cas, l'aimantation  $M$  découlant du champ magnétique  $B$  est faible. Le champ magnétique induit par cette aimantation est donc négligeable devant le champ magnétique imposé. L'aimantation induite peut être dans le même sens que le champ imposé, on parle alors de **paramagnétisme**, ou dans le sens opposé, on parle alors de **diamagnétisme**.
- En revanche, pour certains matériaux, l'aimantation induite va profondément modifier la structure du champ dans lequel elle se trouve. La relation liant le champ magnétique totale à l'aimantation devient alors complexe. On distingue dans cette catégorie les matériaux **ferromagnétiques**, **ferrimagnétiques** et **antiferromagnétiques**. Nous ne considérerons pas le cas des matériaux antiferromagnétiques dans ce cours.

Les ferrimagnétiques diffèrent des ferromagnétiques par la manière dont les moments dipolaires atomiques s'alignent avec le champ magnétique externe. Néanmoins, ils réagissent macroscopiquement de la même manière à un champ magnétique externe. Nous

ne ferons donc pas la distinction entre les deux et parlerons uniquement de ferromagnétisme.

### Exemple 2

Le fer à température ambiante est un exemple de matériau ferromagnétique. L'hélium à température ambiante est un gaz diamagnétique et le lithium est quant à lui un métal paramagnétique.

## III. 2. Susceptibilité magnétique et perméabilité magnétique

Expérimentalement, on constate que dans les matériaux para- et diamagnétiques l'aimantation  $M$  évolue linéairement avec le champ magnétique imposé  $B$ . On définit alors un coefficient de proportionnalité entre l'aimantation  $M$  et l'excitation magnétique  $H$ .

### Susceptibilité et perméabilité magnétique :

Soit un matériau paramagnétique ou diamagnétique plongé dans un champ magnétique  $B$ . Le champ magnétique induit une aimantation  $M$  dans le matériau qui vérifie la relation

$$M = \chi_m H, \quad (4.12)$$

où  $H$  est l'excitation magnétique et  $\chi_m$  est un nombre sans dimension appelée la **susceptibilité magnétique**. La susceptibilité dépend du matériau considéré. Le tableau ci-dessous donne la susceptibilité de métaux et minéraux usuels à température ambiante. Elle est positive pour les matériaux paramagnétiques et négative pour les matériaux diamagnétiques. Pour ces matériaux, l'aimantation redevient nulle lorsque  $H$  est nul.

Matériau	Susceptibilité magnétique
Quartz	$-1.5 \times 10^{-5}$
Eau	$-1.2 \times 10^{-5}$
Grès	$10^{-5} - 10^{-2}$

On déduit alors l'expression qui lie le champ magnétique  $B$  à l'excitation magnétique  $H$

$$B = \mu_0(M + H) \iff B = \mu_0(1 + \chi_m)H \iff B = \mu H, \quad (4.13)$$

où  $\mu$  est la perméabilité relative du milieu.

**Remarque.** Il arrive que la perméabilité relative  $\mu$  d'un milieu de susceptibilité  $\chi_m$  soit définie par  $\mu = 1 + \chi_m$ .

La relation constitutive reliant  $M$  à  $H$  est plus compliquée pour les matériaux ferromagnétiques. En effet, on conserve la notion de susceptibilité magnétique pour relier ces deux grandeurs mais elle devient une fonction non triviale de  $H$  et atteint des valeurs pouvant

aller jusqu'à  $10^6$ .  $M$  est alors liée de manière non linéaire à  $H$  et dépend même de l'histoire magnétique du matériau. Nous allons maintenant nous concentrer sur la relation liant  $M$  à  $H$  pour les matériaux ferromagnétiques.

### III. 3. Le lien entre $H$ et $M$ pour les matériaux ferromagnétiques

On considère dans cette partie le cas d'un noyau de fer ferromagnétique placé à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant  $I$  (voir Fig. 4.6). La bobine génère un champ magnétique entraînant ainsi l'aimantation du noyau de fer. Le fer étant un matériau ferromagnétique, cette aimantation perturbe le champ magnétique initial. Il en résulte un champ magnétique total beaucoup plus important.

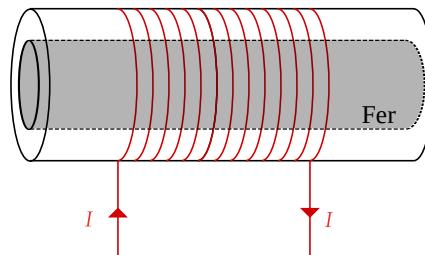


FIGURE 4.6 – Bobine parcourue par un courant  $I$  et possédant un noyau de fer (en gris sur le schéma).

On cherche ici à déterminer le lien entre l'aimantation  $M$ , l'excitation magnétique  $H$  et le champ magnétique  $B$ . On note ici  $M$ ,  $B$  et  $H$  les projections de ces vecteurs sur l'axe de la bobine. Expérimentalement, on fait varier  $H$  en faisant varier  $I$  et on mesure l'aimantation  $M$  et le champ magnétique  $B$  correspondants. On considère ici un matériau vierge de tout passé magnétique, c'est-à-dire qu'il n'a jamais été aimanté. Initialement, on a donc  $M = 0$ ,  $B = 0$  et  $H = 0$ . Que se passe-t-il lorsqu'on fait varier l'intensité du courant ? Pour répondre à cette question on trace l'évolution de  $M$  avec  $H$  et de  $B$  avec  $H$  (voir Fig. 4.7).

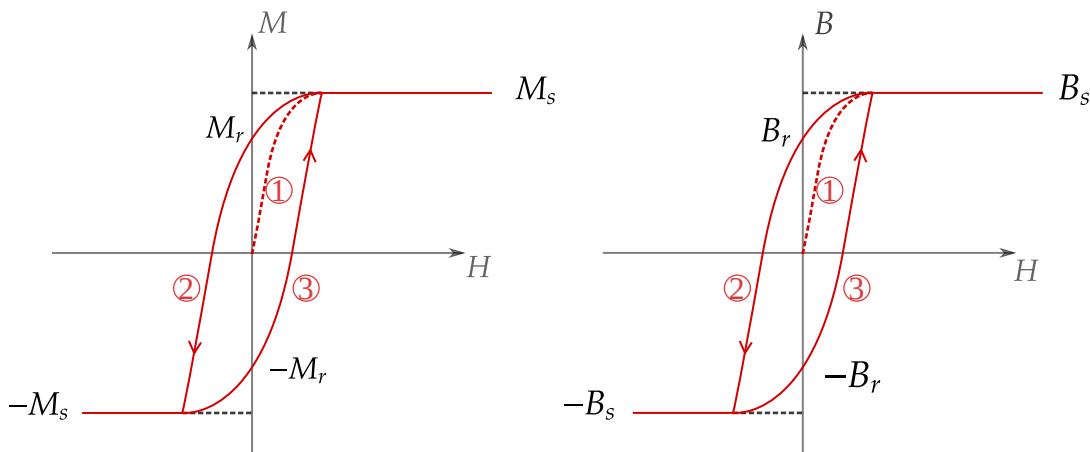


FIGURE 4.7 – Évolution de l'amplitude de l'aimantation  $M$  (à gauche) et du champ magnétique  $B$  (à droite) avec l'amplitude de l'excitation magnétique  $H$ . Les courbes de première aimantation apparaissent en pointillé.

1. L'augmentation du courant  $I$  conduit à un augmentation de  $H$ . L'amplitude de l'aimantation  $M$  et du champ magnétique  $B$  croissent de manière non-linéaire avec  $H$ . Pour des valeurs de  $H$  élevées,  $M$  et  $B$  s'aplatissent et atteignent des valeurs saturées  $M_s$  et  $B_s$ . La valeur maximale de l'aimantation est appelée **aimantation à saturation**. On vient de tracer la courbe de **première aimantation**.
2. Dans un second temps, on diminue l'intensité du courant et donc la valeur de  $H$ . Surprise ! Les courbes ne repassent pas par les mêmes points : l'aimantation du matériau dépend de son passé magnétique !  $M$  et  $B$  diminuent bien avec  $H$  mais il subsiste une **aimantation rémanente**  $M_r$  et un **champ magnétique rémanent**  $B_r$  lorsque  $H = 0$ . Le matériau est devenu lui-même un aimant. C'est ce que vous observez après avoir frotté une aiguille contre un aimant. On aboutit finalement à une saturation du matériau qui présente alors une aimantation  $-M_s$  et un champ magnétique  $-B_s$ .
3. Dans un troisième temps, on augmente de nouveau l'intensité du courant parcourant la bobine. Là encore, les courbes empruntent un chemin différent, il s'agit du phénomène d'**hystéresis**.

Le tracé de ce cycle montre à quel point le lien entre aimantation et excitation magnétique devient complexe pour les matériaux ferromagnétiques. On peut proposer une explication simplifiée du phénomène pour mieux appréhender ces courbes d'hystéresis.

Un matériaux ferromagnétiques est constitués de nombreux domaines, appelés les domaines de Weiss, dont la taille caractéristique est de l'ordre du mm (voir Fig 4.8). Chacun

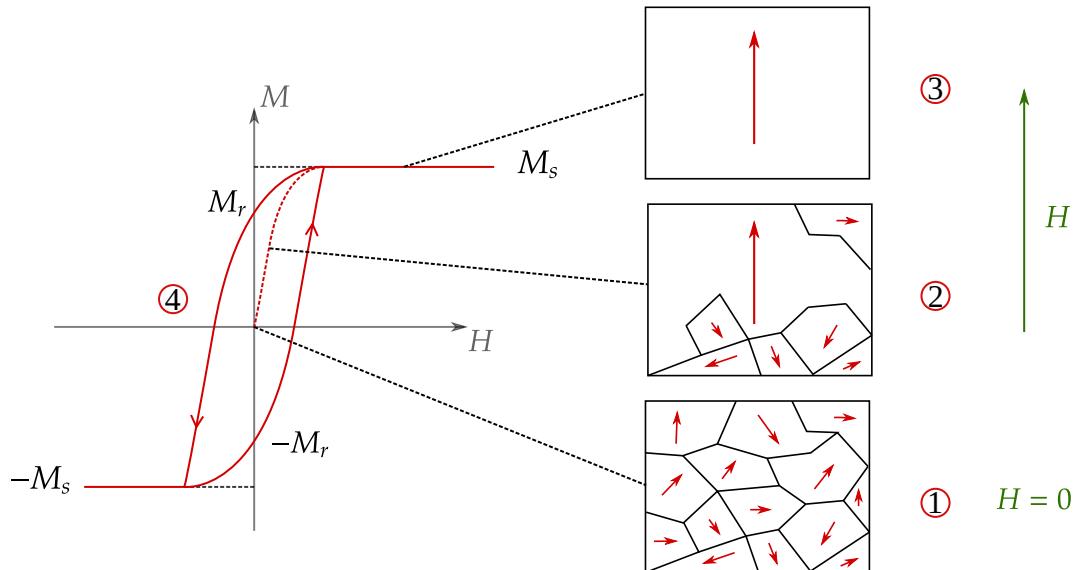


FIGURE 4.8 – Évolution des domaines de Weiss lors du parcours du cycle d'hystéresis. Le champ magnétique  $B$  appliqué est indiqué par la flèche verte.

de ses domaines possède un moment magnétique et génère donc un champ magnétique.

1. En l'absence de champ magnétique externe, les moments dipolaires s'orientent de manière quelconque sous l'effet de l'agitation thermique. L'ensemble ne présente alors aucun champ magnétique macroscopique.

2. Lorsqu'on applique un champ magnétique externe, les moments dipolaires vont s'aligner avec ce dernier comme le ferait une boussole plongée dans le champ magnétique terrestre. Les domaines étant tous différents, l'alignement des moments dipolaires avec le champ extérieur se fait progressivement. Les frontières des domaines se déplacent.
3. Lorsque tous les domaines pointent dans la même direction, le matériau est saturé. Son aimantation a atteint la valeur de saturation  $M_s$  (ou  $-M_s$ ). Il est constitué d'un seul domaine de Weiss.
4. Lorsqu'on diminue l'intensité de  $H$ , les parois séparant les domaines de Weiss se reconstruisent mais rien ne les oblige à se situer au même endroit que précédemment. Cela donne naissance au phénomène d'hystéresis.

Contrairement aux matériaux para- et diamagnétisme, il demeure une aimantation rémanente non nulle lorsque  $H = 0$  dans les matériaux ferromagnétiques. En effet, l'interaction entre les moments dipolaires atomiques est plus importante dans ce type de matériaux et permet ainsi de maintenir une aimantation spontanée.

## IV. Étude du champ magnétique terrestre

### IV. 1. Transition para-ferromagnétique

Lorsqu'un matériau para- ou ferromagnétique est soumis à un champ magnétique, deux phénomènes vont entrer en concurrence. D'un côté, le champ magnétique imposé tend à aligner les moments dipolaires atomique du matériaux. D'autre part, l'agitation thermique entraîne au contraire la fluctuation de l'orientation des moments dipolaires.

Expérimentalement, on constate alors qu'un matériau ferromagnétique soumis à une température élevée perd son aimantation spontanée à cause de cette compétition et devient paramagnétique, on parle alors d'une **transition para- ferromagnétique**. La température à laquelle cette transition survient est appelée la **température de Curie**.

#### Transition para-ferromagnétique :

Un corps ferromagnétique perd son aimantation spontanée et devient paramagnétique lorsqu'il est chauffé à une température supérieure à sa température de Curie. Cette température dépend du matériau considéré. Le tableau ci-dessous donne sa valeur pour des minéraux et métaux usuels.

Matériau	Température de Curie °C
Magnétite	570
Hématite	650
Fer	770
Cobalt	1115

**Remarque.** La température de Curie est spécifique à un matériau. Elle est d'ailleurs parfois utilisée pour identifier les minéraux ferromagnétiques qui composent une roche.

## IV. 2. Aimantation thermorémanente

Une roche est constituée d'un assemblage hétérogène de minéraux. La concentration d'une roche en minéraux ferrimagnétiques, tel que la magnétite, est souvent faible (de l'ordre de 0,01 % dans le calcaire). Néanmoins, cette faible concentration joue un rôle primordial dans les propriétés magnétiques de la roche considérée. Notamment en lui permettant d'acquérir une aimantation rémanente. Lorsque cette dernière ne résulte pas de l'application d'un champ magnétique externe par un expérimentateur on parle **d'aimantation rémanente naturelle**. Cette aimantation est très intéressante car elle peut donner des informations sur les conditions de formation de la roche et notamment sur la direction du champ magnétique à cet instant. Elle peut résulter de différents phénomènes (sédimentation, éruption, ...). Nous allons nous concentrer ici sur **l'aimantation thermorémanente**.

Pour illustrer cela, on considère le cas d'une roche magmatique qui contient une faible concentration de minéraux ferrimagnétiques, ici de magnétite. À la sortie d'un volcan la température de cette roche est supérieure à la température de Curie de la magnétite qui exhibe alors des propriétés paramagnétiques. Bien que cette roche soit soumise au champ magnétique terrestre, l'agitation thermique rend son aimantation instable en faisant fluctuer la direction des moments magnétiques atomiques. En revanche, le refroidissement de la roche entraîne une diminution de l'agitation thermique, les moments dipolaires atomiques tendent alors à s'aligner avec le champ magnétique externe. Il est alors possible grâce à des procédés expérimentaux de retrouver l'orientation du champ magnétique responsable de cette aimantation rémanente. L'aimantation thermorémanente est particulièrement intéressante car elle peut se maintenir sur des temps géologiques et permet ainsi d'étudier l'évolution du champ magnétique terrestre sur ces mêmes échelles de temps. Ce type d'étude a notamment permis de montrer que la polarité du champ magnétique s'est inversée durant son histoire.

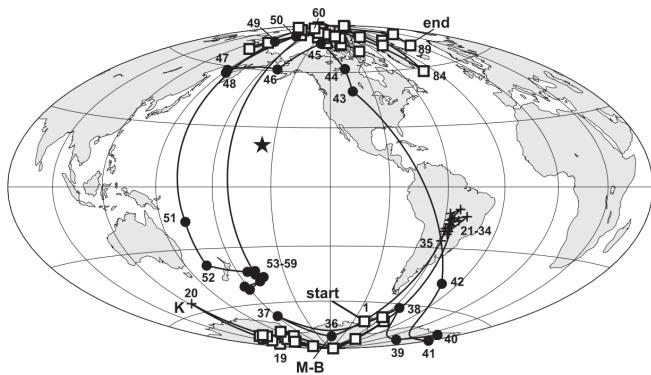


FIGURE 4.9 – Position du pôle Nord magnétique déterminé à partir des échantillons de roches magmatiques prélevées sur le volcan Haleakalā dans l'État d'Hawaï (repéré par une étoile sur la figure). Les carrés correspondent aux polarités inverse et normale de Matuyama et de Brunhes. Les croix correspondent à un événement particulier qui a précédé l'inversion, tandis que les cercles correspondent à la transition. Cette figure est extraite de Coe et al. (2004).

**Exemple 3**

Coe et al. (2004) ont analysé des roches magmatiques provenant de différentes éruptions du volcan Haleakalā situé dans l'État d'Hawaï (voir étoile sur la figure 4.9). Cette étude leur a permis de déterminer l'évolution temporelle de la position du pôle Nord magnétique en prélevant des roches s'étant formées à différentes époques. Les échantillons utilisés sont particulièrement intéressants car ils permettent de visualiser une inversion de polarité du champ magnétique, appelée l'inversion de Matuyama-Brunhes, qui s'est déroulée il y a 775 000 ans environ.

**Remarque.** Nous aurions pu aussi parler d'archéomagnétisme (voir Gallet et al., 2009) qui s'intéresse au champ géomagnétique enregistré par l'aimantation d'artefacts archéologiques (briques, four, poterie, ...).

## Bibliographie

- Bertin, M., Faroux, J., & Renault, J., 1992a. Milieux aimantés. aimantation et champ créé, in *Électromagnétisme 4 : Milieux diélectriques et milieux aimantés*, pp. 98–123, Dunod Université.
- Bertin, M., Faroux, J., & Renault, J., 1992b. Aimantation induite. Étude macroscopique, in *Électromagnétisme 4 : Milieux diélectriques et milieux aimantés*, pp. 124–145, Dunod Université.
- Bertin, M., Faroux, J., & Renault, J., 1992c. Aimantation induite. Étude macroscopique, in *Électromagnétisme 4 : Milieux diélectriques et milieux aimantés*, pp. 172–196, Dunod Université.
- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Milieux ferromagnétiques et transformateur, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 665–708, Dunod.
- Coe, R. S., Singer, B. S., Pringle, M. S., & Zhao, X., 2004. Matuyama–Brunhes reversal and Kamikatsura event on Maui : paleomagnetic directions,  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  ages and implications, *Earth and Planetary Science Letters*, **222**(2), 667–684.
- Gallet, Y., Genevey, A., Le Goff, M., Warme, N., Gran-Aymerich, J., & Lefevre, A., 2009. On the use of archeology in geomagnetism, and vice-versa : recent developments in archeomagnetism, *Comptes Rendus Physique*, **10**(7), 630–648.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985a. Étude macroscopique de l'aimantation, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 203–215, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985b. Paramagnétisme, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 222–224, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985c. Ferromagnétisme, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 227–236, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Lowrie, W., 2007. Geomagnetism and paleomagnetism, in *Fundamentals of Geophysics*, pp. 281–362, Cambridge University Press, 2nd edn.
- Pérez, J.P. and Lagoute, C. and Pujol, O. and Desmeules, É., 2011. Dipôle magnétique, in *Leçons de physique : une approche moderne*, pp. 1097–1116, de boeck, 1st edn.

## V. Exercices

### Exercice 1 (Estimation de la taille du noyau).

[Corrigé page 86]

En première approximation, le champ géomagnétique peut-être assimilé à un champ magnétique dipolaire. On imagine alors que le champ à la surface résulte de la présence d'un aimant placé au centre de la Terre.

- On note  $m$  la norme du moment magnétique de l'aimant terrestre. L'amplitude  $B$  du champ magnétique à la surface de la Terre vaut alors approximativement

$$B = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3},$$

où  $R_T$  est le rayon de la Terre. Estimer  $m$ .

- En déduire le nombre  $N$  d'atomes de la matière aimantée constituant le noyau terrestre. On considère pour cela que chaque atome porte un moment magnétique  $\mu_B \approx 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  de l'ordre du magnéton de Bohr.
- On considère que le noyau terrestre est constitué d'un mélange de fer et de nickel de masse molaire  $M = 57 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et de masse volumique  $\rho = 8 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$ . Estimer le volume  $V$  occupé par la matière aimantée.
- En déduire le rayon  $R$  du noyau de la Terre supposé sphérique. Commenter le résultat et discuter le modèle.
- La température du noyau étant de l'ordre de  $4000^\circ\text{C}$ , de quelle grosse lacune souffre notre modèle ?

### Exercice 2 (Composante horizontale du champ géomagnétique).

[Corrigé page 86]

Un instrument, destiné à mesurer la composante horizontale  $B_h$  du champ magnétique terrestre, est constitué d'une boussole dont l'aiguille horizontale est placée entre deux bobines de Helmholtz de rayon  $R = 5 \text{ cm}$ . Lorsque les bobines ne sont pas alimentées, l'aiguille de la boussole est orthogonale à leur axe de révolution. En revanche, lorsque ces enroulements sont parcourus par un courant  $I$  l'aiguille dévie d'un angle  $\varphi$  qu'un curseur orthogonal à l'aiguille permet de mesurer sur le cadran.

- Expliquer pourquoi l'aiguille dévie d'un angle  $\varphi$ .
- Quelle est la condition d'équilibre de la boussole ? En déduire une expression de  $\tan \varphi$  en fonction de  $I$ . On rappelle qu'au centre de deux bobines de Helmholtz l'amplitude du champ magnétique vaut  $B_0 = \mu_0 I / 2R$  (voir TD précédent).
- En mai 2009, à Toulouse, la mesure a donné  $\varphi = 30^\circ$  pour  $I = 1.08 \text{ A}$ . En déduire la valeur de la composante horizontale du champ magnétique à Toulouse.

**Exercice 3 (Susceptibilité et loi de Curie).**[\[Corrigé page 87\]](#)

L'objectif de cet exercice est de retrouver la loi de Curie à l'aide d'un modèle microscopique simple. Cette loi décrit la dépendance de la susceptibilité magnétique  $\chi$  d'un matériau à la température  $T$

$$\chi = \frac{C}{T},$$

où  $C$  est la constante de Curie.

On considère un cristal paramagnétique de volume  $V$  constitué d'un ensemble de  $N$  moments magnétiques atomiques  $m$  identiques et indépendants.

Le solide est plongé dans un champ magnétique  $B = Be_z$ . La projection du moment magnétique de chaque atome est quantifiée et peut prendre deux valeurs suivant l'axe ( $Oz$ ) :  $m_{\pm} = \pm\mu_B$  où  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr.

1. Donner l'expression de l'énergie magnétique  $E_+$  d'un moment magnétique  $m_+$  composant le cristal.
2. On suppose que le cristal est maintenu à une température  $T$  à l'aide d'un thermostat. Les moments magnétiques n'intéragissant pas entre eux, la physique statistique nous donne le nombre  $N_{\pm}$  de moments magnétiques  $m_{\pm}$

$$N_{\pm} = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-E_{\pm}}{k_B T}\right),$$

où  $E_+$  est l'énergie d'un moment magnétique  $m_{\pm}$ ,  $Z$  un facteur de normalisation et  $k_B = 1.23 \times 10^{-23}$  SI est la constante de Boltzmann. Cette loi est appelée la loi de Boltzmann, elle est extrêmement utile en physique. Déterminer les dimensions de  $Z$  et  $k_B$ .

3. Déterminer  $N_+$  et  $N_-$  en explicitant l'expression de  $Z$ , de  $E_+$  et  $E_-$ . En déduire le moment magnétique  $M$  du cristal.
4. Calculer la valeur du champ  $B_M$  à partir de laquelle l'énergie par moment magnétique est négligeable devant l'agitation thermique. Cette valeur vous semble-t-elle accessible expérimentalement ? Conclure.
5. L'aimantation  $M_c$  du cristal s'écrit  $M/V$ . En déduire l'expression de la susceptibilité  $\chi$  de ce dernier. On rappelle pour cela le développement limité de  $\tanh$  près de 0

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

En déduire l'expression de  $C$ .

6. Réaliser l'application numérique pour un cristal de cérium qui contient une mole de moments dipolaires atomiques. Le cérium présente une masse molaire  $\mathcal{M} = 140 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et une masse volumique  $\rho = 6.7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## VI. Corrigé

### Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- À la surface, le champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $50 \mu\text{T}$ . Le rayon de la Terre vaut approximativement 6400 km. On a donc

$$m = \frac{4\pi B R_T^3}{\mu_0} \approx 10^{23} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

- On fait ici l'hypothèse que tous les moments magnétiques atomiques sont alignés et orientés dans le même sens. On a alors

$$m = N\mu_B \iff N = \frac{m}{\mu_B} = 10^{46}.$$

- Le noyau contient  $N$  atomes. Pour obtenir le nombre de mole  $n$  que cela représente, il suffit de diviser  $N$  par le nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . On a alors  $n = N/\mathcal{N}_A$ . On peut alors remonter à la masse  $m_N$  du noyau en utilisant sa masse molaire  $m_N = nM$ . Finalement, le volume s'écrit

$$V = \frac{m_N}{\rho} = \frac{mM}{\mu_B \mathcal{N}_A \rho} \approx 1.2 \times 10^{17} \text{ m}^3.$$

- On considère que le noyau de la Terre est sphérique. Son rayon  $R_N$  s'écrit donc

$$R_N = \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} \approx 300 \text{ km.}$$

En réalité le noyau interne a un rayon de 1200 km. Nous avons donc sous-estimé ce dernier. En effet, notre principal erreur a été de considérer que les moments magnétiques atomiques étaient alignés alors que la température dans le noyau est très élevée !

- La température du noyau est supérieur à la température du fer qui est alors paramagnétique. Il n'y a donc aucune raison que les moments dipolaires atomiques produisent un champ macroscopique. Le champ magnétique produit par la Terre résulte de phénomènes d'induction.

### Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Initialement, l'aiguille de la boussole ne ressent que le champ magnétique terrestre. Elle est donc alignée avec ce dernier (plus exactement avec la composante horizontale de ce dernier). En revanche, lorsque les bobines de Helmholtz sont alimentées, elles vont à leur tour générer un champ magnétique, non aligné avec l'aiguille, qui va induire un couple sur cette dernière et donc la faire tourner.
- La boussole est à l'équilibre lorsque les couples induits par les deux champs magnétiques s'annulent. Cette annulation est atteinte lorsque  $B_h \sin \varphi = B_0 \cos \varphi$ , où  $B_0$  est le champ magnétique généré par les bobines de Helmholtz et ressenti par la boussole. On a alors

$$\tan \varphi = \frac{\mu_0 I}{2RB_h}.$$

3. L'application numérique donne  $B_h = 23.5 \mu\text{T}.$

**Corrigé de l'exercice 3.**

[[Retour à l'énoncé](#)]

1. Le cristal se trouvant dans un champ uniforme  $B$ , l'énergie magnétique d'un moment magnétique  $m_+$  est donné par

$$E_+ = -m_+ \cdot B = -\mu_B B.$$

2.  $Z$  est sans dimension.  $k_B T$  est homogène à une énergie donc  $k_B$  s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$  et donc en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ .
3. D'après la première question, on a  $E_+ = -\mu_B B$  et  $E_- = \mu_B B$ . Pour déterminer l'expression de  $Z$ , il faut écrire que

$$N = N_+ + N_- \iff Z = \frac{1}{N} \left[ \exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right) \right].$$

Cette expression permet d'aboutir à

$$N_{\pm} = \frac{N}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)} \exp\left(\frac{\pm \mu_0 B}{k_B T}\right).$$

Par définition, le moment magnétique de l'échantillon est obtenu en sommant tous les moments magnétiques atomiques

$$M = N_+ \mu_B - N_- \mu_B = N \mu_B \frac{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu_B B}{k_B T}\right)} = N \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T}\right).$$

4. L'énergie magnétique d'un moment magnétique est négligeable dès lors que

$$\mu_B B_0 \ll k_B T \iff B \ll \frac{k_B T}{\mu_B}.$$

À température ambiante,  $T = 300 \text{ K}$ , l'application numérique donne  $B = 450 \text{ T}$ . Cette intensité de champ est impossible à obtenir expérimentalement. On peut donc raisonnablement négliger l'énergie magnétique devant l'énergie thermique.

5. L'aimantation du cristal s'obtient en écrivant

$$M_c = \frac{M}{V} = \frac{N \mu_B}{V} \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T}\right).$$

Au premier ordre, l'aimantation du cristal vaut

$$M_c = \frac{N\mu_B^2 B_0}{k_B T V}.$$

Dans un paramagnétique, la susceptibilité étant très faible devant 1, on a  $B_0 = \mu_0 H_0$  où  $H_0$  est l'amplitude du vecteur excitation magnétique. La susceptibilité  $\chi$  s'écrit donc

$$\chi = M_c / H_0 = \frac{N\mu_0\mu_B^2}{V k_B T}.$$

On retrouve bien la loi de Curie avec  $C = \frac{N\mu_0\mu_B^2}{V k_B}$ .

6. La susceptibilité d'un cristal composé d'une mole de moments atomiques s'écrit

$$\chi = \frac{N\mu_0\mu_B^2 \rho}{M k_B T}.$$

L'application numérique donne  $\chi = 7.51 \times 10^{-4}$ .

---

# Électromagnétisme en régime variable

---

## Plan de ce chapitre

---

I.	Les limites des équations en régime permanent . . . . .	90
I. 1.	Équation de conservation de la charge . . . . .	90
I. 2.	Équation de Maxwell-Faraday et phénomènes d'induction . . . . .	92
II.	Les équations de Maxwell . . . . .	92
III.	Énergie électromagnétique . . . . .	94
IV.	Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	96
IV. 1.	Équation de propagation du champ magnétique . . . . .	96
IV. 2.	Solutions de l'équation de d'Alembert . . . . .	98
IV. 3.	Ondes planes progressives harmoniques . . . . .	99
V.	Système GPS et ionosphère . . . . .	103
V. 1.	Principe du GPS . . . . .	104
V. 2.	Modélisation du problème . . . . .	104
V. 3.	Conductivité complexe . . . . .	105
V. 4.	Relation de dispersion du plasma . . . . .	106
V. 5.	Paquet d'onde et dispersion . . . . .	107
V. 6.	Calcul de la distance $D$ . . . . .	108
VI.	Exercices . . . . .	110
VII.	Correction . . . . .	112

---

## Objectifs

- Comprendre pourquoi il est nécessaire de modifier les équations de Maxwell lorsqu'on s'intéresse à un système dépendant du temps
- Connaître les équations de Maxwell dans un régime dépendant du temps
- Savoir extraire un contenu physique des équations de Maxwell
- Connaître les formes locale et intégrale du bilan d'énergie électromagnétique
- Retrouver l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide en utilisant les équations de Maxwell

- Connaître la structure spatiale et les propriétés d'une onde électromagnétique progressive plane
- Comprendre comment est modifiée la propagation d'une onde électromagnétique par la présence d'un conducteur

## Introduction

### I. Les limites des équations en régime permanent

Malheureusement la forme des équations de Maxwell en régime permanent n'est pas totalement compatible avec les comportements électromagnétiques observés en régime variable. En effet, ces lois présentent des incohérences internes et ne permet pas de décrire tous les résultats expérimentaux.

#### I. 1. Équation de conservation de la charge

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation de conservation de la charge que nous allons démontrer dans le cas 1D et généraliser au cas 3D. Nous allons pour ce faire sortir temporairement du régime permanent et considérer des grandeurs dépendantes du temps.

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x)$ . La position d'un point de l'espace  $P$  est donc repérée par sa coordonnée  $x$ . On considère un volume infinitésimal de section  $S$  compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Ce volume possède une densité volumique de charge  $\rho(x, t)$ . Les charges se déplacent selon un mouvement d'ensemble caractérisé par un vecteur densité de courant électrique  $j(x, t) = j(x, t)e_x$  (voir Fig. 5.1).

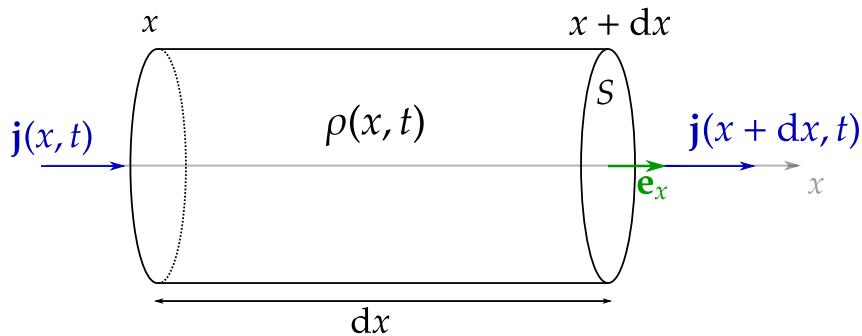


FIGURE 5.1 – Volume élémentaire  $Sdx$  sur lequel on effectue le bilan de charges électriques.

On cherche à déterminer une équation qui relie  $\rho$  à  $j$ . Pour ce faire on exprime la différence entre la charge  $Q(t + dt)$  contenue dans le volume à l'instant  $t + dt$  et la charge  $Q(t)$  contenue à l'instant  $t$  de deux manières différentes.

1.  $Q(t)$  s'obtient en multipliant la densité volumique de charge  $\rho(x, t)$  par le volume  $Sdx$ . On a alors

$$Q(t + dt) - Q(t) = [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]Sdx.$$

2. D'autre part, le mouvement d'ensemble des charges entraîne un flux entrant  $j(x, t) \cdot Sdt$  et un flux sortant  $j(x + dx, t) \cdot Sdt$  de charges à travers la surface délimitant  $V$ . On a alors

$$Q(t + dt) - Q(t) = [j(x, t) - j(x + dx, t)]Sdt.$$

Ces deux équations nous permettent d'aboutir à l'équation de conservation de la charge en 1D

$$[\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]Sdx = -[j(x + dx, t) - j(x, t)]Sdt \iff \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial j}{\partial x}}.$$

### Équation de conservation de la charge :

En tout point  $M$  de l'espace, la densité volumique de charge  $\rho$  et le vecteur densité de courant  $j$  vérifie l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} j(M, t) = 0.$$

Le vecteur densité de courant  $j$  apparaît à la fois dans l'équation de conservation de la charge et dans l'équation de Maxwell-Ampère. Ces deux équations sont-elles compatibles ?

Soit un champ magnétique  $B$  et un vecteur densité de courant  $j$  associé. L'équation locale de Maxwell-Ampère s'écrit en tout point de l'espace

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 j.$$

On peut alors déterminer l'expression de  $\operatorname{div} j$

$$\operatorname{div} j = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\operatorname{rot} B) = 0$$

car  $\operatorname{div} (\operatorname{rot} B) = 0$ . Or cette égalité n'est vérifiée qu'en régime permanent  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$  !

Maxwell proposa en 1864 d'ajouter à l'équation 3.6 un nouveau terme  $j_D$  qu'il nomme **courant de déplacement**

$$\operatorname{rot} B = \mu_0(j + j_D).$$

Quelle est alors l'expression de  $j_D$ ? D'après l'équation de conservation de la charge,  $j$  vérifie

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

où  $\rho$  est la densité volumique de charge. Or d'après l'équation de Maxwell-Ampère, la divergence de  $j$  doit aussi vérifier

$$\operatorname{div} j = \operatorname{div} \left( \frac{\operatorname{rot} B}{\mu_0} - j_D \right) = -\operatorname{div} (j_D),$$

car la divergence d'un rotationnel est nul. En utilisant l'équation locale de Maxwell-Gauss, on montre alors que  $j_D$  doit vérifier

$$\operatorname{div} \left( j_D - \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{j_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}. \quad (5.1)$$

**Remarque.**  $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ , n'est pas la seule solution à l'équation 5.1. En effet, cette solution est définie à un rotationnel près. Maxwell a choisi pour expression de  $j_D$  la solution la plus simple. Ce choix a ensuite été confirmé par des résultats expérimentaux.

Finalement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (5.2)$$

## I. 2. Équation de Maxwell-Faraday et phénomènes d'induction

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts en 1831 par Michael Faraday (1791 – 1867). Il montre alors que des courants induits se développent dans un circuit immobile plongé dans un champ magnétique variable alors que ce dernier n'est alimenté par aucun générateur. Ce phénomène n'est pas décrit par les équations de la magnétostatique et de l'électrostatique.

## II. Les équations de Maxwell

Nous allons maintenant nous concentrer sur les équations de Maxwell en régime variable et sur leur interprétation physique. Pour ce faire nous les présentons comme deux jeux de deux équations.

### Équations de Maxwell structurelles :

#### Les équations de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \iff \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.3)$$

où  $\varphi$  est le flux du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers la surface qui s'appuie sur n'importe quel contour fermé  $C$ , et **Maxwell-Thomson**

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \iff \iint_S \mathbf{B} \cdot dS = 0, \quad (5.4)$$

où  $S$  est une surface fermée quelconque, ne reliant pas les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  au vecteur densité de courant  $j$  et à la densité volumique de charge  $\rho$ . Elles sont donc indépendantes du milieu considéré.

On remarque rapidement que l'équation de Maxwell-Thomson reste inchangée par rapport à ce que nous avons vu en magnétostatique (voir Chap. 3). En revanche, l'équation de Maxwell-Faraday fait maintenant apparaître le champ magnétique ! Cette relation signifie qu'un champ magnétique variant dans le temps peut donner naissance à un champ électrique dont le rotationnel est non nul. Cette relation décrit le phénomène d'induction électromagnétique et met en avant une seconde source de champ électrique : un champ magnétique variable dans le temps.



### Attention

Si  $E$  est un champ électrique à rotationnel non nul, la relation  $E = -\nabla V$ , où  $V$  est le potentiel électrique, n'est plus valide.

### Équations de Maxwell couplées à la matière :

En revanche les équations de **Maxwell-Gauss**

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \iint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.5)$$

où  $Q$  est la charge contenue dans la surface fermée  $S$  quelconque, et de **Maxwell-Ampère**

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \iff \oint_C B \cdot d\ell = \mu_0 \left[ I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint E \cdot dS \right) \right], \quad (5.6)$$

où  $I$  est le courant enlacé par le contour fermé  $C$  quelconque, lient les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  à leur source modéliser par le vecteur densité de courant  $j$  et la densité volumique de charge  $\rho$ .

L'équation de Maxwell-Gauss reste de même inchangée par le passage en régime dépendant du temps. En revanche, l'équation de Maxwell-Ampère fait apparaître un second terme,  $j_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ , appelé **courant de déplacements**. Un champ électrique variant dans le temps devient alors, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique. Ce second terme à un rôle analogue au terme  $-\frac{\partial B}{\partial t}$  apparaissant dans l'équation de Maxwell-Faraday, il induit un couplage du champ électrique et du champ magnétique qui ne peuvent plus être dissociés comme c'était le cas en magnétostatique et en électrostatique.



### Attention

La dénomination courant de déplacement, donnée par Maxwell lui-même, pour le second terme de l'équation de Maxwell-Ampère est trompeuse car ce terme n'est associé ni à un déplacement, ni à un courant !

Il est important de remarquer que les équations de Maxwell sont linéaires. Le principe de superposition est donc toujours vérifié en régime variable.

### Exemple 1

Si les champs électromagnétiques  $(E_1, B_1)$  et  $(E_2, B_2)$  vérifient les équations de Maxwell, alors le champ électromagnétique  $(E_1 + E_2, B_1 + B_2)$  les vérifie aussi.

### III. Énergie électromagnétique

Comme un système matériel, le champ électromagnétique est caractérisé par une énergie. On constate d'ailleurs en électrocinétique que les condensateurs et les bobines sont capables de stocker de l'énergie électrique et magnétique. Le but de cette partie est donc de déterminer l'expression de cette énergie en faisant apparaître le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $B$ .

On propose de réaliser un bilan d'énergie sur un volume  $V$  de l'espace délimité par une surface  $S$  immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen (voir Fig. 5.2).

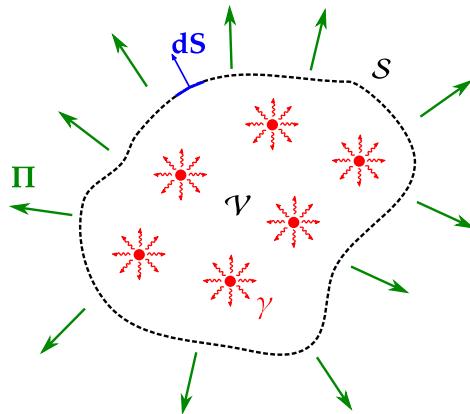


FIGURE 5.2 – Volume sur lequel on réalise le bilan d'énergie. Ce volume contient des sources internes (en rouge) de densité volumique de puissance  $\gamma$ . L'énergie qui traverse la surface  $S$  (en vert) est caractérisée par une densité surfacique de flux par unité de temps  $\Pi$ .

Comme cela a été fait pour la conservation de la charge, nous cherchons alors à déterminer comment varie l'énergie  $\mathcal{E}$  contenue dans ce volume au cours du temps entre un instant  $t$  et un instant  $t + dt$ . Cette variation  $\mathcal{E}(t + dt) - \mathcal{E}(t)$  d'énergie peut résulter

1. de la présence de sources d'énergie à l'intérieur du volume. Elles lui fournissent durant une durée  $dt$  une énergie  $\delta\mathcal{E}_{\text{source}}$

$$\delta\mathcal{E}_{\text{source}} = \iiint_{P \in V} \gamma(P, t) dV dt,$$

où  $\gamma (\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1})$  correspond à la densité volumique de puissance reçue par le volume de la part de ces sources, c'est-à-dire la quantité d'énergie reçue par unité de temps et de volume.

2. d'un flux d'énergie à travers la surface  $S$  qui délimite le volume  $V$ . On note ici  $dS$  le vecteur surface élémentaire dirigé vers l'extérieur du volume. On définit alors une densité surfacique de flux d'énergie par unité de temps  $\Pi (\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$ . L'énergie traversant la surface  $S$  par unité de temps s'écrit alors

$$\delta\mathcal{E}_{\text{flux}} = - \iint_{P \in S} \Pi(P, t) \cdot dS dt.$$

Lorsque cette quantité est positive, l'énergie est reçue par le volume. En revanche, lorsqu'elle est négative, l'énergie est transmise à l'extérieur par le volume.

Finalement, on aboutit à

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \iiint_{P \in V} \gamma(P, t) dV - \oint_{P \in \mathcal{S}} \Pi(P, t) \cdot dS.$$

### Bilan d'énergie :

Soit un volume  $V$  de l'espace immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen et délimité par une surface  $\mathcal{S}$ . La variation temporelle de l'énergie  $\mathcal{E}(M, t)$  contenue dans le volume est liée à

1. la densité volumique de puissance  $\gamma$ , mesurée en  $W \cdot m^{-3}$  ( $J \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}$ ), reçue algébriquement par le système de la part de sources internes,
2. la densité surfacique de flux d'énergie  $\Pi$ , mesurée en  $W \cdot m^{-2}$  ( $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ), traversant la surface  $\mathcal{S}$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \iiint_{P \in V} \gamma(P, t) dV - \oint_{P \in \mathcal{S}} \Pi(P, t) \cdot dS. \quad (5.7)$$

Ce bilan d'énergie est décrit localement en un point  $M$  de l'espace par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t}(M, t) = -\operatorname{div} \Pi(M, t) + \gamma(M, t), \quad (5.8)$$

où  $w$  est la densité volumique d'énergie mesurée en  $J \cdot m^{-3}$ .

Le but est maintenant d'obtenir une formule similaire pour le champ électromagnétique  $(E, B)$  afin de déterminer les expressions de  $w$ ,  $\Pi$  et  $\gamma$  dans ce cas. L'équation de Maxwell-Ampère permet d'obtenir

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \iff \operatorname{rot} B \cdot E = \mu_0 \left( j \cdot E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot E \right),$$

où  $j$  est le vecteur densité de courant. On peut alors se servir de l'identité vectorielle  $\operatorname{div}(\mathbf{W} \wedge \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Y}$ , vérifiée pour tous vecteurs  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{U}$ , pour transformer le terme de gauche de l'équation précédente

$$-\operatorname{div}(E \wedge B) + B \cdot \operatorname{rot} E = \mu_0 \left( j \cdot E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot E \right).$$

On peut alors remplacer  $\operatorname{rot} E$  en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday

$$-\operatorname{div}(E \wedge B) - B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 \left( j \cdot E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot E \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{E \wedge B}{\mu_0} \right) - j \cdot E.$$

### Bilan d'énergie électromagnétique :

Soit un volume  $V$  de l'espace immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen et délimité par une surface  $S$ . La variation temporelle de l'énergie  $\mathcal{E}_{\text{em}}(t)$  électromagnétique contenue dans le volume est liée à

1. la densité volumique de puissance électromagnétique  $-j \cdot E$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ) reçue algébriquement par le système de la part de sources internes,
2. la densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique  $\Pi$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ), appelé **vecteur de Poynting**, traversant la surface  $S$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = - \iiint_{P \in V} j(P, t) \cdot E(P, t) dV - \iint_{P \in S} \Pi(P, t) \cdot dS, \quad (5.9)$$

avec

$$\Pi(P, t) = \frac{E(P, t) \wedge B(P, t)}{\mu_0}. \quad (5.10)$$

Ce bilan d'énergie est décrit localement en un point  $M$  par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t}(M, t) = -\text{div } \Pi(M, t) + \gamma(M, t), \quad (5.11)$$

où  $w_{\text{em}}$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ) est la densité volumique d'énergie électromagnétique définie par

$$w_{\text{em}}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0}. \quad (5.12)$$

## IV. Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations de Maxwell, en plus de fournir un cadre mathématique solide à l'électromagnétisme, prévoient l'existence des ondes électromagnétiques. En effet, le couplage des champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  rend possible la propagation d'une perturbation du champ électromagnétique ( $E, B$ ).

[Gié & Sarmant \(1985b\)](#) proposent une approche intuitive du phénomène qui permet de mieux le comprendre. Imaginons la naissance d'une perturbation du champ électrique  $E$  localisée en une région de l'espace. Cette perturbation donne naissance à un champ magnétique  $B$  dans son voisinage par l'intermédiaire des courants de déplacements. Ce même champ magnétique, par l'intermédiaire de l'équation de Maxwell-Faraday, génère un champ électrique. La perturbation se propage de proche en proche.

### IV. 1. Équation de propagation du champ magnétique

Soient un champ magnétique  $B$  et un champ électrique  $E$  dans une région vide de l'espace, c'est-à-dire avec une densité volumique de charge  $\rho$  et un vecteur densité de courant  $j$  nuls en tout point de l'espace. Les évolution spatiale et temporelle de ces deux champs sont contrôlées par les équations de Maxwell dans le vide

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{rot} B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Nous allons essayer en combinant ces équations d'obtenir une équation combinant les variations temporelles et spatiales du champ magnétique. Pour cela, on commence par faire apparaître  $\operatorname{rot} E$  dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{rot} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Il est alors possible de permuter le rotationnel et la dérivée temporelle, puis de remplacer  $\operatorname{rot} E$  par son expression en se servant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Finalement, en utilisant la relation  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = -\nabla^2 B + \operatorname{grad}(\operatorname{div} B)$  et l'équation de Maxwell-Thomson, on obtient

$$\boxed{\nabla^2 B - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0}.$$

Cette équation, dite de **d'Alembert**, couple les variations temporelles et spatiales du champ magnétique  $B$ . Elle est caractéristique du phénomène de propagation d'onde. De la même manière, le champ électrique vérifie

$$\boxed{\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0}.$$

On constate la présence du facteur  $\mu_0 \epsilon_0$  dans cette équation. À quoi ce terme correspond-il ? On remarque que d'après l'équation précédente, ce facteur doit être homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. On se propose de vérifier cela avec les dimensions de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ . La permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  s'exprime en  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  tandis que la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ ,  $\epsilon_0 \mu_0$  est donc homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. Ce facteur correspond donc à la vitesse de propagation  $c$  d'une onde électromagnétique. Cette vitesse vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

correspondant ainsi à la vitesse de la lumière dans le vide.

**Remarque.** Contrairement aux ondes mécaniques, les ondes électromagnétiques ne nécessitent pas de milieux pour se propager. Elles y arrivent très bien dans le vide.

### Équation de propagation du champ électromagnétique :

Les propagations des champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  obéissent à la même équation de d'Alembert en un point  $M$  de l'espace

$$\nabla^2 E(M, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(M, t) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 B(M, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(M, t) = 0, \quad (5.13)$$

leur célérité étant donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

$c$  correspond ici à la vitesse de la lumière dans le vide. Cette équation de propagation a le bon goût d'être linéaire. De plus, si on change  $t$  en  $-t$  l'équation demeure la même.

**Remarque.** L'équation de d'Alembert est une équation caractéristique des phénomènes de propagation sans dissipation.

Les champs électriques  $E$  et magnétiques  $B$  sont des champs vectoriels. Chacune de leurs composantes vérifie l'équation de d'Alembert.

## IV. 2. Solutions de l'équation de d'Alembert

Nous considérons maintenant le cas de l'équation de d'Alembert à une dimension. On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$  et on considère un champ électrique de la forme  $E(x, t) = E(x, t)e_y$ . La propagation du champ électrique  $E$  dans ce repère vérifie alors

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x, t) = 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme

$$E(x, t) = E_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + E_- \left( t + \frac{x}{c} \right),$$

où  $E_+$  correspond à une onde électromagnétique qui se déplacent vers les  $x$  décroissants, tandis que  $E_-$  correspond à une onde se déplaçant vers les  $x$  croissants.

**Remarque.** Le phénomène de propagation correspond à un couplage du temps et de l'espace par la vitesse de propagation. En effet, on remarque que la solution générale de l'équation de d'Alembert réunit les variables temporelle et spatiale en une seule variable.

Pour mieux comprendre ce phénomène de propagation, il peut être utile de prendre le cas d'une onde mécanique. Imaginons alors une corde dont on viendrait secouer par un geste brusque et rapide une des extrémités. Ce mouvement donne alors naissance à la propagation d'une onde le long de la corde

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y)$ . Au repos, un point  $M$  de la corde occupe la coordonnée  $(x, 0)$ . À l'instant  $t = 0$ , la corde est excitée à son extrémité en  $x = 0$ . La perturbation induite par le passage de l'onde modifie la position du point  $M$  qui devient

$(x, y)$  (voir Fig. 5.3), où la variable  $y$  vérifie l'équation de d'Alembert. L'onde se propageant vers les  $x$  croissants,  $y$  est de la forme

$$y(x, t) = y\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

où  $v$  est la vitesse propagation de l'onde. On peut alors déterminer  $y$  pour  $x = x + \Delta x$  avec  $\Delta x = v\Delta t$  à l'instant  $t + \Delta t$

$$y(x + v\Delta t, t + \Delta t) = y\left(t + \Delta t - \frac{x + v\Delta t}{v}\right) = y\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

On remarque alors que l'ordonnée du point d'abscisse  $x + v\Delta t$  à l'instant  $t + \Delta t$  correspond exactement à l'ordonnée du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (voir Fig. 5.3). La perturbation s'est propagée sans déformation.

**Remarque.** Cette non-déformation de la propagation illustre la réversibilité temporelle de l'équation de d'Alembert.

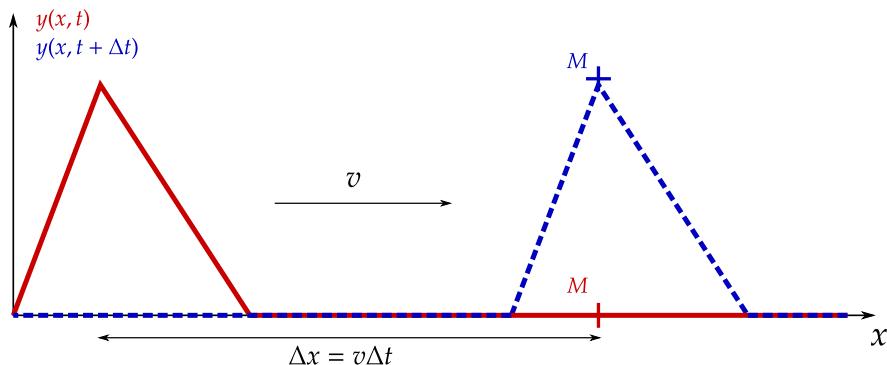


FIGURE 5.3 – Propagation d'une onde mécanique entre les dates  $t$  (en rouge) et  $t + \Delta t$  (en bleu tirets). Cette onde se propage à la vitesse  $v$ . Elle entraîne une déformation transverse de la corde.

## IV. 3. Ondes planes progressives harmoniques

### IV. 3. a. Champ électromagnétique et ondes planes progressives harmoniques

Nous allons dans ce cours nous focaliser sur une famille particulière de solutions à l'équation de d'Alembert : les **ondes planes progressives harmoniques** (OPPH). En effet, les OPPH forment une base de l'espace des solutions de l'équation de d'Alembert. Toute fonction solution de cette équation peut se décomposer en une superposition d'OPPH. Cette décomposition est rendue possible par la linéarité de l'équation de d'Alembert.

Une OPPH est caractérisée par

- sa fréquence  $f$  (en Hz) ou sa pulsation temporelle  $\omega$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ou sa période temporelle  $T$  (en s) avec

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

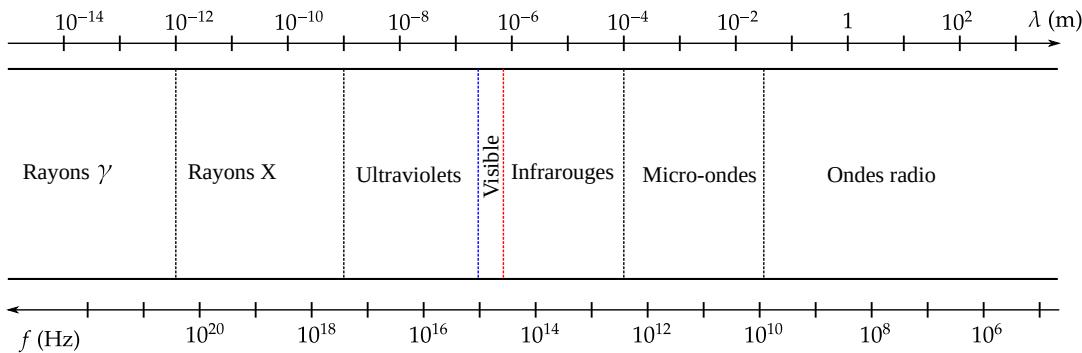


FIGURE 5.4 – Ensemble du spectre des ondes électromagnétiques en précisant la longueur d'onde  $\lambda$  et la fréquence  $f$  de chaque domaine. Le domaine du visible se situe entre 400 nm et 800 nm.

- sa pulsation spatiale  $k$  (en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ ) ou sa longueur d'onde  $\lambda$  (en m) avec

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

- sa direction de propagation  $\mathbf{u}$ .

Chaque composante  $E_i$  et  $B_i$  des champs électrique et magnétique en un point  $M$  de l'espace s'écrit alors sous la forme

$$E_i(M, t) = E_{i,0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_i) \quad \text{et} \quad B_i(M, t) = B_{i,0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \psi_i),$$

où  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  est le vecteur d'onde,  $E_{i,0}$  et  $B_{i,0}$  sont les amplitudes des champs,  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  est le vecteur position du point considéré et  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  les phases à l'origine. Dans ce cours, nous utiliserons par commodité la notation complexe

$$\boxed{E_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad \text{et} \quad B_i(M, t) = \underline{B}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]},$$

avec  $\underline{B}_{i,0} = B_{i,0} \exp(\psi_i)$  et  $\underline{E}_{i,0} = E_{i,0} \exp(\varphi_i)$ . On retrouve alors les champs réels en prenant la partie réelle des champs complexes.

**Remarque.** Les longueurs d'ondes et fréquences des ondes électromagnétiques couvrent un large domaine comme le soulignent la figure 5.4.

#### IV. 3. b. Relation de dispersion

On peut alors se demander à quelle condition une OPPH est solution de l'équation de d'Alembert. Pour ce faire, on remplace les composantes des champs électrique et magnétiques par leur expression dans l'équation de d'Alembert. Pour une composante  $\underline{E}_i$  du champ électrique en un point  $M$  de l'espace cela donne

$$\Delta \underline{E}_i(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_i}{\partial t^2}(M, t) = 0 \iff (-ik)^2 \underline{E}_i(M, t) - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_i(M, t) = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée en tout point de l'espace on aboutit à la relation

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

### Relation de dispersion de l'équation de d'Alembert :

Soit une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$ , de pulsation spatiale  $k$  se déplaçant à une vitesse  $c$ . Cette OPPH est solution de l'équation de d'Alembert si ces trois grandeurs vérifient la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.14)$$

La période temporelle  $T$  de l'onde est alors reliée à sa longueur d'onde  $\lambda$  par la relation

$$\lambda = cT. \quad (5.15)$$

En d'autres termes, la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. En résumé, la relation de dispersion relie les dimensions spatiales et temporelles de l'onde.

### IV. 3. c. Équations de Maxwell et ondes planes progressives harmoniques

Il devient alors possible d'écrire les équations de Maxwell sous une forme dite complexe. Il est pour cela nécessaire de savoir ce que deviennent les opérateurs divergence et rotationnel en notation complexe.

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$ . Soit  $\mathbf{A}$  un champ vectoriel dont les variations temporelles et spatiales de chacune de ses composantes sont décrites par une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . En un point  $M(x, y, z)$  de l'espace, chaque composante de  $\mathbf{A}$  s'écrit sous forme complexe

$$\underline{A}_i(M, t) = \underline{A}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{OM})],$$

avec  $\mathbf{k} = k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z$ ,  $\mathbf{OM} = x e_x + y e_y + z e_z$  et  $\underline{A}_{i,0}$  l'amplitude complexe de  $\underline{A}$ . On peut alors exprimer la divergence de ce champ vectoriel dans le référentiel choisi

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}}(M, t) = \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x}(M, t) + \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y}(M, t) + \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z}(M, t).$$

Si on s'intéresse à la première composante, cela donne

$$\frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x}(M, t) = \underline{A}_{x,0} \frac{\partial}{\partial x} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] = -ik_x \underline{A}_{x,0} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] = -ik_x \underline{A}_x(M, t).$$

Finalement, la divergence de  $\underline{\mathbf{A}}$  s'exprime en notation complexe

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}}(M, t) = -i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{A}}(M, t)}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\boxed{\operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}(M, t) = -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{A}}(M, t).}$$

### Équations de Maxwell en notation complexe :

Soit un champ électrique  $\underline{E}$  et un champ magnétique  $\underline{B}$  dont les variations spatiales et temporelles de chaque composante sont décrites par une OPPH de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de pulsation  $\omega$ . Ces deux champs vectoriels vérifient les équations de Maxwell qui s'écrivent en notation complexe

$$\text{Maxwell-Gauss : } \mathbf{k} \cdot \underline{E}(M, t) = 0,$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \mathbf{k} \cdot \underline{B}(M, t) = 0,$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \mathbf{k} \wedge \underline{E}(M, t) = \omega \underline{B}(M, t),$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \mathbf{k} \wedge \underline{B}(M, t) = -\frac{\omega}{c^2} \underline{E}(M, t),$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

### IV. 3. d. Structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique

Lorsque les variations temporelles et spatiales de chaque composante des champs électriques  $\underline{E}$  et magnétiques  $\underline{B}$  sont décrites par une OPPH de vecteur d'onde et de pulsation temporelle  $\omega$ , ils vérifient les équations de Maxwell en notation complexe décrites plus haut. Quelles informations ces équations nous donnent-elles sur la structure de l'onde électromagnétique ?

#### 1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson

$$\mathbf{k} \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{k} \cdot \underline{B} = 0$$

montrent que les champs électriques et magnétiques sont orthogonaux à la direction de propagation de l'onde.

#### 2. L'équation de Maxwell-Faraday

$$\mathbf{k} \wedge \underline{E} = \omega \underline{B}$$

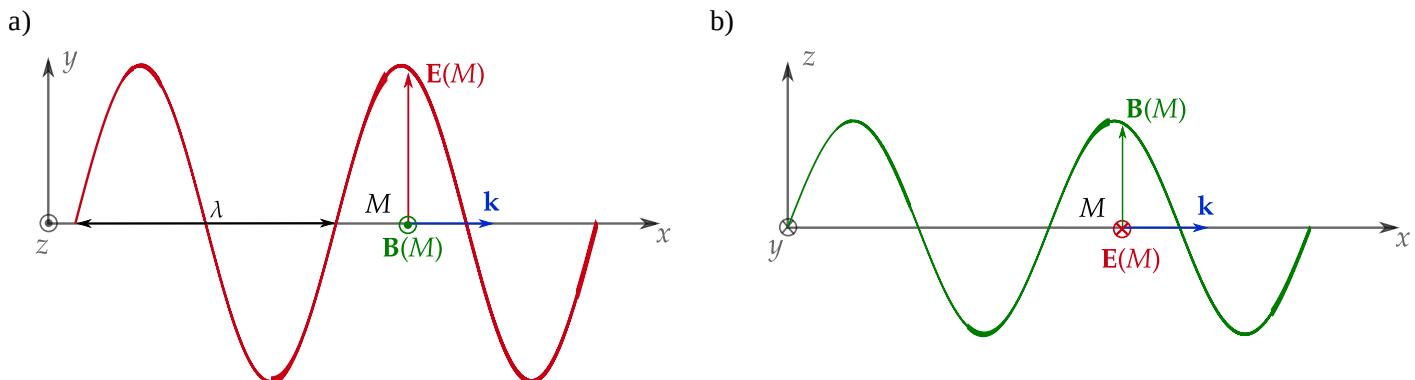


FIGURE 5.5 – Structure spatiale d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de fréquence  $f$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan  $(O, e_x, e_y)$  à gauche et dans le plan  $(O, e_x, e_z)$  à droite.

montre que  $B$  est orthogonal à  $E$  et à la direction de propagation de l'onde. Les champs  $E$  et  $B$  sont en phase. De plus, on obtient

$$\|B\| = \frac{\|E\|}{c}.$$

### Structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique :

Soit un champ électrique  $E$  et un champ magnétique  $B$  dont les variations spatiales et temporelles de chaque composante sont décrites par une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  où  $k$  est la pulsation spatiale et  $\mathbf{u}$  la direction de propagation de l'onde. La structure de l'onde électromagnétique vérifie les propriétés suivantes

- ▶ la pulsation temporelle et la pulsation spatiale vérifient la relation

$$k = \frac{\omega}{c},$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,

- ▶ les champs électrique et magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation de l'onde,
- ▶ les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et en phase,
- ▶ les normes des champs électrique et magnétique sont reliés par la relation

$$\|B\| = \frac{\|E\|}{c},$$

- ▶ Le trièdre  $(\mathbf{k}, E, B)$  est direct.
- ▶ La direction du vecteur  $E$  est appelé **polarisation** de l'onde électromagnétique.

### Exemple 2

On considère une onde électromagnétique  $(E, B)$  plane progressive harmonique de fréquence  $f$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . On se place dans un repère orthonormé tel que  $E$  soit dirigé selon  $e_y$ ,  $\mathbf{k}$  selon  $e_x$  et  $B$  selon  $e_z$ .  $(\mathbf{k}, E, B)$  formant un trièdre direct ce choix de repère est toujours possible. La figure 5.5 illustre la structure de cette onde. En un point  $M$  de l'espace, les champs électrique  $E$  et  $B$  sont orthogonaux.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est régie par l'équation de d'Alembert. Que se passe-t-il lorsque cette onde traverse un milieu conducteur ?

## V. Système GPS et ionosphère

Nous allons nous intéresser dans cette partie au système de localisation *Global Positioning System* (GPS) et sur la nécessité de prendre en compte l'existence de l'ionosphère,

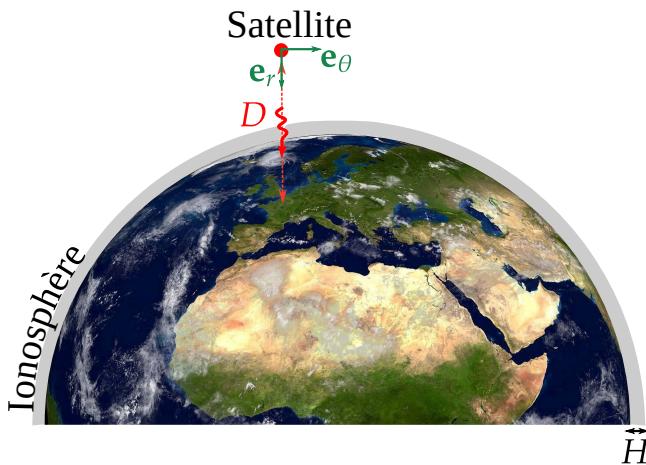


FIGURE 5.6 – Lorsqu'un satellite (point rouge) envoie une onde électromagnétique (flèche rouge) à un observateur se trouvant à une distance  $D$  sur Terre, cette dernière doit traverser l'ionosphère (en gris) d'épaisseur  $H$ .

couche de l'atmosphère ionisée située entre 60 et 1000 km d'altitude, pour assurer sa précision. Cette partie sera notamment l'occasion de nous intéresser au comportement d'une onde électromagnétique dans un conducteur et d'aborder les notions de pulsation de coupure, de vitesse de groupe, de paquet d'onde et de milieu dispersif.

## V. 1. Principe du GPS

Le système GPS offre un moyen efficace et rapide de connaître ses coordonnées géographiques et donc de se repérer dans l'espace. On se propose ici d'expliquer très grossièrement son principe de fonctionnement. Pour connaître sa position, un utilisateur reçoit via un récepteur GPS (un portable par exemple) une onde électromagnétique émise depuis un satellite. Dans ce signal est inclus l'heure d'émission de l'onde par ce satellite. Le récepteur est alors capable de déterminer la distance le séparant du satellite connaissant la vitesse de propagation  $c$  de la lumière dans le vide. En répétant l'opération avec plusieurs satellites, il peut donc déterminer précisément sa position.

Malheureusement, les distances mesurées par cette méthode sont entachées d'erreur qui doivent être corrigées. Parmi ces erreurs, on trouve notamment

- la non-synchronisation des horloges du récepteur et du satellite,
- la dégradation de l'onde à la traversée de l'atmosphère.

C'est cette deuxième erreur qui va nous intéresser dans cette partie. Nous allons essayer de déterminer l'erreur de position due à la traversée de l'ionosphère par l'onde électromagnétique.

## V. 2. Modélisation du problème

On imagine un satellite situé à une distance  $D$  de la Terre. Entre le satellite et le récepteur GPS sur Terre se trouve l'ionosphère d'épaisseur  $H$  (voir Fig. 5.6).

L'ionosphère est un plasma, un gaz ionisé, globalement neutre. Il contient :

- des électrons de masse  $m_e$ , de charge  $-e$  et de densité particulaire  $n_e$  (nombre d'électrons par unité de volume),

- d'ions de masse  $m_i$ , de charge  $e$  et de densité particulaire  $n_e$ .

On suppose ici que le plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs sont sans interaction. De plus, les ions ayant une masse beaucoup plus importantes que les électrons, nous ferons l'hypothèse que ces derniers sont fixes.

On se place dans un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$  dont l'origine est placée au niveau du satellite. On suppose que le satellite génère une onde plane progressive harmonique de vecteur d'onde complexe  $\underline{k}$  et de pulsation temporelle  $\omega$ . Les champs électriques  $\underline{E}$  et magnétiques  $\underline{B}$  en un point  $M$  de l'espace de coordonnées  $(r, 0, 0)$  s'écrivent en notation complexe

$$\underline{E}(M, t) = \underline{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}r)] \quad \text{et} \quad \underline{B}(M, t) = \underline{B}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}r)],$$

où  $\underline{E}_0$  et  $\underline{B}_0$  sont respectivement les amplitudes complexes des champs  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$ .

**Remarque.** On parle ici en réalité d'une onde pseudo progressive car le vecteur d'onde  $\underline{k}$  est complexe.

### V. 3. Conductivité complexe

Dans un premier temps, on cherche à modéliser la réponse de l'ionosphère à cette onde électromagnétique. En d'autres termes, on cherche à savoir comment vont réagir les électrons qui composent cette dernière. Comme nous l'avons fait dans le Chapitre 2, nous allons donc nous intéresser au mouvement d'un électron du plasma.

#### V. 3. a. Forces s'exerçant sur un électron du plasma

On considère un électron du plasma placé en un point  $M$ . Cet électron est soumis à

- la force de gravitation  $\mathbf{F}_G$  de la Terre,
- la force de Lorentz  $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  résultant du passage de l'onde,

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'électron. Comme nous l'avons vu précédemment dans le cours, nous pouvons négliger la force de gravitation devant celle de Lorentz étant donné la masse d'un électron. On peut de même comparer les deux termes de la force de Lorentz. Pour cela, nous allons faire l'hypothèse ici que

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{E}\|}{c}.$$

**Remarque.** Cette relation est vrai pour une OPPH électromagnétique dans le vide, mais il n'y a aucune raison qu'elle le demeure ici. Néanmoins, elle demeure une bonne approximation.

On obtient alors

$$\frac{\|\mathbf{v}\| \times \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{E}\|} \approx \frac{v}{c}.$$

On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique dès lors que la vitesse des électrons est non relativiste. Nous poursuivons donc notre étude dans un cadre non relativiste. En résumé, l'électron n'est soumis qu'à la force électrique !

### V. 3. b. Principe fondamentale de la dynamique

On applique maintenant le principe fondamentale de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé ici galiléen

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e\underline{E}.$$

L'onde électromagnétique étant harmonique, cette équation peut-être mise sous une forme complexe

$$i\omega m_e \underline{v} = -e\underline{E} \iff \underline{v} = \frac{ie\underline{E}}{\omega m_e}.$$

On peut ainsi remonter à une expression reliant le champ électrique  $\underline{E}$  et le vecteur densité de courant  $\underline{j}$

$$\underline{j} = -en_e \underline{v} = \frac{-ie^2 n_e}{\omega m_e} \underline{E}.$$

La conductivité  $\underline{\gamma}$  étant définie par  $\underline{j} = \underline{\gamma} \underline{E}$ , on obtient finalement

$$\boxed{\underline{\gamma} = -\frac{ie^2 n_e}{\omega m_e}.}$$

### V. 4. Relation de dispersion du plasma

Nous sommes maintenant capable d'écrire les équations de Maxwell pour un plasma neutre (avec une densité volumique de charge  $\rho$  nulle) en notation complexe

**Maxwell-Gauss :**  $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ ,

**Maxwell-Thomson :**  $\underline{k} \cdot \underline{B} = 0$ ,

**Maxwell-Faraday :**  $\frac{\underline{k} \wedge \underline{E}}{\omega} = \underline{B}$ ,

**Maxwell-Ampère :**  $\underline{k} \wedge \underline{B} = i\mu_0 \underline{j} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \underline{E} = \left( \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e \omega} - \frac{\omega}{c^2} \right) \underline{E}$ .

On remarque que seule l'équation de Maxwell-Ampère a été modifiée par rapport aux équations énoncées dans le vide. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\underline{k} \wedge (\underline{k} \wedge \underline{E}) = \left( \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{E}.$$

Or,  $\underline{k} \wedge (\underline{k} \wedge \underline{E}) = (\underline{k} \cdot \underline{E}) \underline{k} - \underline{k} \cdot (\underline{k} \wedge \underline{E})$  donc en utilisant Maxwell-Gauss, l'équation précédente devient alors

$$\left( \underline{k}^2 + \frac{\mu_0 n_e e^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{E} = 0.$$

On peut alors simplifier le champ électrique car ce dernier n'est pas identiquement nul. On aboutit alors à la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}}, \quad (5.16)$$

où  $\omega_p$  est appelée **pulsation de coupure du plasma**. On obtient donc une relation de dispersion qui diffère de celle du vide et qui fait notamment apparaître une pulsation spécifique  $\omega_p$ .

On peut alors se demander ce qu'induit cette nouvelle relation de dispersion physiquement. On remarque premièrement que si  $\omega < \omega_p$ , alors  $k$  est un imaginaire pur. On peut alors poser  $k = -ik''$  où  $k''$  est un réel. Dans notre cas, le champ électrique devient alors

$$\underline{E} = E_0 \exp(-k''z) \exp(i\omega t) \Rightarrow E = \Re(\underline{E}) = E_0 \exp(-k''r) \cos(\omega t),$$

où  $\Re(\underline{E})$  est la partie réelle de  $\underline{E}$ . On obtient donc une onde dont l'amplitude décroît rapidement avec  $r$ . Une onde dont la pulsation est inférieur à la pulsation de coupure du plasma est incapable de le traverser ! On considère pour la suite de l'étude que  $\omega > \omega_p$ . Dans la suite du problème, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est donc réel.

## V. 5. Paquet d'onde et dispersion

En réalité, le satellite envoie deux signaux sous la forme de trains d'ondes, c'est-à-dire des OPPH de taille spatiale finie, de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  pour corriger l'existence de l'ionosphère. Les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont choisies bien supérieures à la fréquence de coupure du plasma. Pour résoudre notre problème, il est nécessaire de connaître la vitesse de propagation des trains d'onde dans l'ionosphère.

La vitesse d'un train d'onde est donnée par la **vitesse de groupe**  $v_g$  définie par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

**Remarque.** Pour une onde, la vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie.

Dans le vide,  $v_g = c$ , mais qu'en est-il dans le plasma ? Pour déterminer son expression on différencie la relation de dispersion 5.16

$$k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2}.$$

On obtient alors la vitesse de dispersion

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} \Rightarrow \boxed{v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Dans le plasma, contrairement au vide, la vitesse de groupe dépend de la pulsation de l'onde considérée, c'est le phénomène de **dispersion**.

## V. 6. Calcul de la distance $D$

Nous avons pu constater que la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma se heurte à deux problèmes majeurs

1. la pulsation de l'onde doit être assez élevée pour se propager dans le plasma,
2. la vitesse de propagation dans le plasma dépend de la pulsation de l'onde.

Nous cherchons maintenant à déterminer l'erreur de précision du GPS induite par la présence de l'ionosphère.

Le train d'onde de fréquence  $f_1$  met une durée  $\tau$  à parcourir la distance  $D$  qui sépare le satellite du récepteur. Ce train d'onde se déplace à la vitesse  $c$  dans le vide et à la vitesse  $v_g(f_1)$  dans l'ionosphère.  $\tau$  est donc donné par

$$\tau = \frac{H}{v_g(f_1)} + \frac{D - H}{c} = \frac{H}{c} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} + \frac{D}{c} \approx \boxed{\frac{D}{c} \left[ 1 + \frac{H}{2D} \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 \right]}.$$

La présence de l'ionosphère entraîne donc une augmentation du temps nécessaire au train d'onde pour arriver au récepteur. Pour corriger l'erreur de précision du GPS, il suffit de prendre en compte ce retard ! Malheureusement, l'expression de ce dernier fait intervenir l'épaisseur de l'ionosphère et sa fréquence de coupure qui sont deux grandeurs difficilement mesurables. On cherche donc à s'en débarrasser.

On exprime l'écart  $\Delta t$  entre les temps de parcours du train d'onde de fréquence  $f_1$  et de celui de fréquence  $f_2$ . On a choisi  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $f_1 < f_2$ . En s'appuyant sur la formule précédente

$$\boxed{\Delta t = \frac{H f_p^2}{2c} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 f_1^2}}.$$

Cette relation est très intéressante car elle permet d'exprimer l'épaisseur de l'ionosphère  $H$  en fonction de  $\Delta t$  qui est une mesure plus facilement accessible au récepteur. On peut alors déterminer avec plus de précision la distance  $D$  qui le sépare du satellite

$$D = c\tau - \frac{H}{2} \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 = c\tau - \left( \frac{f_2 f_1}{f_1} \right)^2 \frac{c\Delta t}{f_2^2 - f_1^2}.$$

Pour prendre en compte l'ionosphère il suffit donc d'appliquer une correction  $d$

$$\boxed{d = f_2^2 \frac{c\Delta t}{f_2^2 - f_1^2}}.$$

On réalise l'application numérique avec  $f_2 = 1575$  MHz,  $f_1 = 1228$  MHz et  $\Delta t = 6.7 \times 10^{-7}$  s. On a alors

$$d \approx 300 \text{ m.}$$

Cette correction doit absolument être prise en compte !

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014a. Les équations de Maxwell, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 599–620, Dunod.
- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014b. Ondes électromagnétiques dans le vide, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 981–1032, Dunod.
- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014c. Ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 1067–1100, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985a. Équations de Maxwell, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 3–16, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985b. Ondes électromagnétiques dans le vide, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 53–84, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Renvoizé, V., Bellanger, É., Girardi, R., Paulin, S., Portelli, B., & Saudrais, E., 2009. Équations de Maxwell-Énergie du champ électromagnétique, in *Physique PC-PC\**, Cap Prépa, pp. 615–640, Pearson Education.
- Renvoizé, V., Bellanger, É., Archambault, P., Gonnord, H., Marchand, A., Paulin, S., Portelli, Poux, C., Ropert, J. B., & Saudrais, E., 2014. Ondes, in *Physique PC-PC\**, pp. 219–288, Pearson Education.

## VI. Exercices

### Exercice 1 (Émission radioactive).

[Corrigé page 112]

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point  $O$ , émet, à partir de l'instant  $t = 0$ , des particules  $\alpha$  avec une vitesse  $v_0$  supposée constante et de façon isotrope. À l'instant  $t$ , la charge électrique située en  $O$  est

$$q(t) = q_0 \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right],$$

où  $\tau$  correspond au temps de demi-vie de la masse radioactive. On se place dans un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$ . Un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . On admet que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace, ce qui se démontre par des arguments de symétrie.

1. Déterminer le champ électrique  $E(M, t)$  en un point  $M$  de l'espace pour  $t > 0$ . Commenter.
2. Exprimer la densité volumique de charge  $\rho(M, t)$  et la densité volumique de courant  $j(M, t)$  pour  $t > 0$ .
3. Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et les équations de Maxwell.

### Exercice 2 (OPPH dans le vide illimité).

[Corrigé page 113]

1. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.
2. Les directions de l'espace sont indiquées par la base orthonormée  $(e_x, e_y, e_z)$ . On envisage une solution sous forme d'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement

$$E(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) e_x,$$

où  $E_0$  est l'amplitude de l'onde,  $\omega$  sa pulsation temporelle et  $k > 0$  la pulsation spatiale. Dans quelle direction se propage l'onde électromagnétique ? Quelle est l'état de polarisation de l'onde ?

3. Quelle relation doivent vérifier  $k$  et  $\omega$  ? Utiliser l'équation de propagation de  $E$  pour aboutir à cette relation.
4. Déterminer le champ magnétique  $B(z, t)$  associé à cette onde.
5. Exprimer le vecteur de Poynting  $\Pi(z, t)$ . En déduire la puissance  $\mathcal{P}$  (moyennée en temps) traversant une surface d'aire  $S$  orthogonale à la direction de propagation et orientée dans le sens de la propagation.
6. Exprimer la densité volumique  $u_{\text{em}}(z, t)$  d'énergie électromagnétique de l'onde. Que dire des termes électrique et magnétique ? Moyenner  $u_{\text{em}}$  en temps. Exprimer de deux manières différentes l'énergie qui passe à travers  $S$  durant une durée  $dt$ . En déduire la vitesse  $v_e$  de propagation de l'énergie.

**Exercice 3 (Onde électromagnétique plane progressive).**[\[Corrigé page 116\]](#)

On étudie une onde électromagnétique dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$  dont le champ électrique s'exprime en notation complexe

$$\underline{E}(x, y, z, t) = \underline{E}_x(x, y, z, t)e_x + \underline{E}_y(x, y, z, t)e_y \quad \text{avec} \quad \underline{E}_x(x, y, z, t) = E_0 \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] \right\},$$

avec  $\omega$  la pulsation temporelle de l'onde et  $k$  une constante. L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde  $\lambda$  vaut  $\lambda = 700 \text{ nm}$ .

1. Calculer la fréquence de l'onde. À quel domaine du spectre électromagnétique cette onde appartient-elle ?
2. Calculer la valeur numérique de la constante  $k$ .
3. Exprimer  $\underline{E}_y$  en fonction de  $\underline{E}_x$ .
4. Calculer le champ magnétique  $\underline{B}(x, y, z, t)$  associée à cette onde.
5. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde ainsi que sa moyenne temporelle.
6. Calculer le vecteur de Poynting  $\Pi(x, y, z, t)$  de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

**Exercice 4 (Onde dans un métal).**[\[Corrigé page 118\]](#)

À suffisamment basse fréquence, un métal est localement neutre et sa conductivité  $\gamma$  est réelle. On peut y négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

1. Établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le métal.
2. Le métal est illimité dans l'espace. On envisage une onde dont le champ électrique s'écrit, en notation complexe,

$$\underline{E}(z, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]e_x, \quad (5.17)$$

où  $E_0$  est une constante réelle positive. Établir la relation de dispersion en faisant intervenir une distance caractéristique  $\delta$  (épaisseur de peau). Donner l'expression du champ électrique. Quelle est la signification de  $\delta$  ?

3. Établir l'expression du champ magnétique  $\underline{B}$  de l'onde.
4. Établir l'expression du vecteur de Poynting moyen en temps.
5. On raisonne sur un parallélépipède d'épaisseur  $dz$ , d'extension  $L$  selon  $x$  et  $\ell$  selon  $y$ . Déterminer l'expression de la puissance  $\langle \mathcal{P} \rangle$  (moyennée en temps) cédée à ce volume de métal par l'onde (effet Joule).
6. En moyenne, l'énergie contenue dans ce volume reste constante. En réalisant un bilan énergétique sur le volume, vérifier la cohérence des résultats des deux questions précédentes.

## VII. Correction

### Corrigé de l'exercice 1.

[[Retour à l'énoncé](#)]

1. La distribution de charge est à symétrie sphérique et ne dépend spatialement que de  $r$ .  $E$  est donc de la forme

$$E(M, t) = E(r, t)e_r.$$

Pour déterminer le champ électrique en un point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ , on utilise le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss  $S$  une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ . Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$\iint_{P \in S} E(P, t) \cdot dS = \frac{Q(t)}{\epsilon_0},$$

où  $Q(t)$  est la charge contenue dans  $S$  à l'instant  $t$ . Pour cette surface,  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi e_r$ . Le membre de gauche s'écrit donc

$$\iint_{P \in S} E(P, t) \cdot dS = 4\pi r^2 E(r, t).$$

Pour déterminer le membre de droite, il est nécessaire d'exprimer la charge  $Q$  contenue dans la sphère à l'instant  $t$ . On a alors deux cas de figure

- a. si  $t < \frac{r}{v_0}$ , aucune charge n'est sortie de la sphère. On a donc  $Q = 0$ ,
- b. si  $t \geq \frac{r}{v_0}$ , toutes les charges qui ont été émises à un temps antérieur à  $t - \frac{r}{v_0}$  ont eu le temps de sortir de la sphère. On a donc

$$Q(t) = q \left( t - \frac{r}{v_0} \right) = q_0 \left[ \exp \left( -\frac{t - \frac{r}{v_0}}{\tau} \right) - 1 \right].$$

Finalement, on aboutit à l'expression de  $E(M, t)$

$$E(r, t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } t < \frac{r}{v_0} \\ \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \exp \left( -\frac{t - \frac{r}{v_0}}{\tau} \right) - 1 \right] e_r & \text{si } t \geq \frac{r}{v_0}. \end{cases}$$

2. Pour déterminer  $\rho(r, t)$ , on exprime la charge  $\delta Q(t)$  contenue entre les sphères de rayon  $r$  et de rayon  $r + dr$  à l'instant  $t > \frac{r}{v_0}$  de deux manières

$$\mathbf{a.} \quad \delta Q(t) = Q(r + dr, t) - Q(r, t) = \frac{\partial Q}{\partial r}(r, t) dr = \frac{q_0}{v_0 \tau} \exp \left( -\frac{t - \frac{r}{v_0}}{\tau} \right) dr$$

$$\mathbf{b.} \quad \delta Q(t) = 4\pi r^2 dr \rho(r, t).$$

En égalant les deux expressions, on obtient

$$\rho(r, t) = \frac{q_0}{4\pi r^2 v_0 \tau} \exp\left(-\frac{t - \frac{r}{v_0}}{\tau}\right).$$

On en déduit le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j}(r, t) = \rho(r, t) v_0 \mathbf{e}_r = \frac{q_0}{4\pi r^2 \tau} \exp\left(-\frac{t - \frac{r}{v_0}}{\tau}\right) \mathbf{e}_r.$$

3. On vérifie dans un premier temps l'équation de conservation de la charge. Il est nécessaire pour cela de calculer la dérivée temporelle de  $\rho$  et la divergence de  $\mathbf{j}$ . Pour la dérivée temporelle, on a directement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(r, t) = -\frac{\rho(r, t)}{\tau}.$$

La divergence de  $\mathbf{j}$  donne

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{\tau}.$$

L'équation de conservation de la charge est vérifiée. On peut alors s'intéresser à l'équation de Maxwell-Ampère

$$\mathbf{0} = \mathbf{j}(r, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(r, t).$$

La dérivée temporelle de  $\mathbf{E}$  donne directement

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{E}}{\tau} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

L'équation de Maxwell-Ampère est bien vérifiée.

### Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Pour déterminer l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, on commence par écrire le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{E}(M, t)] = -\operatorname{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \right].$$

- On s'intéresse dans un premier temps au membre de droite de cette équation. Il est tout à fait possible de faire commuter les dérivées spatiale et temporelle ici. On peut ensuite se servir de l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide pour exprimer le rotationnel de  $\mathbf{B}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(M, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M, t).$$

Le membre de droite devient donc

$$-\mathbf{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \right] = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(M, t).$$

- Pour le membre de gauche, on se souvient de l'égalité vectorielle

$$\mathbf{rot} [\mathbf{rot} \mathbf{E}] = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

où  $\nabla^2$  est le laplacien vectoriel. Or d'après l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide ( $\rho = 0$ )

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Finalement, le membre de gauche s'écrit

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}.$$

On retrouve donc bien l'équation de propagation du champ électrique dans le vide

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}(M, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(M, t) = \mathbf{0}},$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

2. L'onde se propage selon l'axe ( $Oz$ ) vers les  $z$  croissants. Le champ électrique est dirigé selon  $e_x$ , la polarisation de l'onde est donc selon  $e_x$ .
3. On injecte l'OPPH dans l'équation de propagation de  $E$  déterminée plus haut. Il faut donc calculer le laplacien et la dérivée seconde de  $E$

**Laplaciens :** Pour le laplacien on a

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_0 \cos(\omega t - kz)] = -E_0 k^2 \cos(\omega t - kz).$$

**Dérivée seconde par rapport au temps :** De la même manière, on peut calculer la dérivée seconde de  $E$  par rapport au temps

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz) e_x.$$

L'équation de propagation devient alors

$$\left[ k^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] E_0 \cos(\omega t - kz) = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée en tout  $z$  et en tout  $t$ ! Il est donc indispensable que

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}.}$$

4. Pour déterminer l'expression du champ magnétique  $B$ , on utilise l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t).$$

Le rotationnel de  $\mathbf{E}$  se calcule directement

$$\text{rot } \mathbf{E}(M, t) = \frac{\partial}{\partial z}[E_0 \cos(\omega t - kz)]\mathbf{e}_y = E_0 k \sin(\omega t - kz)\mathbf{e}_y.$$

On en déduit

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\mathbf{e}_y.}$$

5. Le vecteur de Poynting  $\Pi$  est donné par

$$\Pi(M, t) = \frac{\mathbf{E}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{\mu_0 c} \mathbf{e}_z = \boxed{\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)\mathbf{e}_z},$$

$$\text{car } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

6. La puissance moyennée en temps traversant une surface d'aire  $S$  est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} = \langle \Pi(M, t) \rangle S = c \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} S,}$$

où  $\langle \rangle$  correspond à une moyenne temporelle et où  $T$  est la période de l'onde.

7. La densité volumique d'énergie s'exprime

$$u_{\text{em}}(z, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(z, t)}{2} + \frac{B^2(z, t)}{2\mu_0}.$$

Or,  $B = E/c$  et  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ , on obtient donc

$$\boxed{u_{\text{em}}(z, t) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz).}$$

On remarque que les contributions électrique et magnétique à la densité volumique d'énergie électromagnétique sont égales. La densité volumique d'énergie électromagnétique moyennée en temps est donnée par

$$\boxed{\langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}.}$$

8. On note  $v_e$  la vitesse de propagation de l'énergie. L'énergie traversant la surface  $S$  durant un instant  $dt$  s'exprime de deux manières équivalentes

- a. Il s'agit de la quantité d'énergie  $\delta U$  contenue dans un cylindre de section  $S$  et de longueur  $dz = v_e dt$  (voir Fig. 5.7)

$$\delta U = v_e dt \iint_S \langle u_{\text{em}} \rangle dx dy = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S v_e dt.$$

b. C'est la puissance rayonnée à travers la section  $S$  multiplié par  $dt$

$$\delta U = \langle \Pi \rangle S dt = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} dt.$$

En identifiant les deux expressions précédentes de  $\delta U$ , on trouve

$$v_e = c.$$

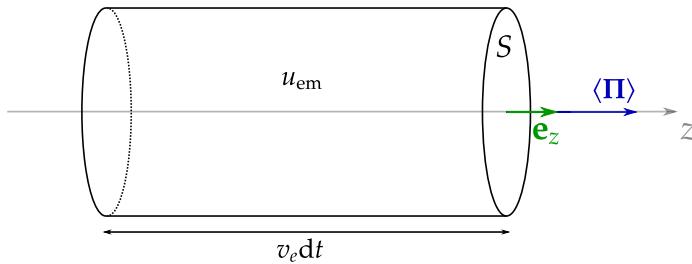


FIGURE 5.7 – L'énergie qui traverse la section  $S$  durant une durée  $dt$  est contenue dans un cylindre de section  $S$  et de longueur  $v_e dt$ .

### Vitesse d'avancée de l'énergie pour une OPPM :

Pour une OPPM dans le vide illimité, l'énergie se déplace à la vitesse de la lumière.  
Attention, ce n'est pas forcément le cas si l'onde n'est pas une OPPH.

### Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Le vecteur d'onde s'exprime  $\mathbf{k} = \frac{k}{2}(2e_x + 2e_y + e_z)$  et sa norme vaut  $k$ .  $k$  est relié à  $\lambda$  par la relation  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Or la relation de dispersion permet de relier la pulsation temporelle  $\omega$  à la pulsation spatiale  $k$

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

On obtient finalement

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = 4.2 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

Cette onde appartient au [domaine du visible](#).

- On calcule directement la valeur de  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9.0 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3. L'onde électromagnétique se déplace dans le vide, l'équation de Maxwell-Gauss devient alors

$$\operatorname{div} \underline{E} = 0.$$

On a alors

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = -i \frac{2k}{3} E_x \Rightarrow \boxed{E_y = -E_x.}$$

4. L'onde étant une OPPH, on peut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe

$$\underline{B} = \frac{\mathbf{k} \wedge \underline{E}}{w} = \begin{vmatrix} \frac{2k}{3} & E_x \\ \frac{2k}{3} & -E_x \\ \frac{k}{3} & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{E_x}{3c}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z).}$$

5. Pour déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{\text{em}}$ , il est nécessaire d'utiliser les expressions réelles  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$  des champs électrique et magnétique. On les obtient en prenant les parties réelles de  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$

$$E(x, y, z, t) = E_0 \cos \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

et

$$B(x, y, z, t) = \frac{E_0}{3c} \cos \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z)$$

On peut alors déterminer l'expression de  $u_{\text{em}}$

$$\begin{aligned} u_{\text{em}}(x, y, z, t) &= \frac{\epsilon_0 E^2(x, y, z, t)}{2} + \frac{B^2(x, y, z, t)}{2\mu_0} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] \times 2 + \frac{E_0^2}{18\mu_0 c^2} \cos^2 \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] \times 18 \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] +_0 E_0^2 \cos^2 \left[ \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right] \\ &= 2\epsilon_0 E_x^2(x, y, z, t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle u_{\text{em}} \rangle = \epsilon_0 E_0^2}$$

6. Le vecteur de Poynting  $\Pi$  est donné par

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, z, t) &= \frac{\underline{E} \wedge \underline{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{E_x^2(x, y, z, t)}{3\mu_0 c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c\epsilon_0 E_x^2(x, y, z, t)}{3} (4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{2c\epsilon_0 E_x^2(x, y, z, t)}{3} (2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

Finalement, on calcule la moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \Pi \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{3} (2e_x + 2e_y + e_z).$$

On remarque que la norme de ce vecteur vaut

$$\langle \Pi \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{3} \times 3 = c\epsilon_0 E_0^2 = c\langle u_{\text{em}} \rangle.$$

Cette relation traduit le fait que l'énergie se déplace à la vitesse  $c$  dans le vide pour une OPPH.

#### Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Le champ électrique  $E$  est relié au vecteur densité de courant  $j$  par la loi d'Ohm locale dans les conducteurs

$$j = \gamma E.$$

Le métal étant localement neutre, la densité volumique de charge  $\rho$  est nulle. Les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  vérifient les équations de Maxwell suivantes

**Maxwell-Gauss :**  $\operatorname{div} E = 0$ ,

**Maxwell-Faraday :**  $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ ,

**Maxwell-Thomson :**  $\operatorname{div} B = 0$ ,

**Maxwell-Ampère :**  $\operatorname{rot} B = \mu_0 \gamma E$ .

Comme d'habitude, il suffit ensuite de prendre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right).$$

Le terme de droite devient grâce à l'équation de Maxwell-Ampère

$$-\operatorname{rot}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Le terme de gauche devient grâce à l'équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \nabla(\operatorname{div} E) - \nabla^2 E = -\nabla^2 E.$$

Finalement, on aboutit à l'équation de diffusion du champ électrique dans le métal

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \nabla^2 E.$$

2. On injecte la forme d'onde proposée par l'énoncé dans l'équation de diffusion, on obtient alors la relation de dispersion

$$i\omega \underline{E} = \frac{(-i\underline{k})^2}{\mu_0} \underline{E} \Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega.}$$

Pour déterminer  $\underline{k}$ , on cherche alors la racine carrée de  $i$ . Pour ce faire, on écrit

$$i = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit l'expression de  $\underline{k}$

$$\underline{k} = \sqrt{\mu_0\gamma} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right] \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Cette expression se simplifie en

$$\boxed{\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}, \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}.$$

Il y a donc deux solutions possibles. On choisit ici de retenir la solution avec le signe  $-$ . Le champ électrique sous forme complexe s'écrit alors

$$\boxed{\underline{E(z,t)} = E_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] e_x}$$

En notation réelle, il devient

$$E(z,t) = E_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) e_x$$

L'onde se propage selon la direction  $e_z$  mais son amplitude s'amortit au cours de la propagation.  $\delta$  représente donc la longueur caractéristique sur laquelle le champ s'atténue.

3. La propagation de l'onde électrique est décrite par une pseudo-OPPH (le pseudo étant dû à la nature complexe de  $\underline{k}$ ). À part la nature complexe du vecteur d'onde,  $\underline{E}$  a la même forme que dans le cas d'une OPPH. L'équation de Maxwell-Ampère peut donc toujours s'écrire sous la forme

$$\boxed{\underline{B(z,t)} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E(z,t)}}{\omega}},$$

où  $\underline{B}$  est le champ magnétique. Comme  $\underline{k} = ke_z$ , on a directement

$$\boxed{\underline{B(z,t)} = E_0 \frac{1-i}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] e_y.}$$

On réécrit  $1-i$  sous forme exponentielle, cela donne

$$1-i = \sqrt{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

$\underline{B}$  peut alors se mettre sous la forme d'une exponentielle

$$\underline{B}(z, t) = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\right] e_y.$$

Sous une forme réelle, cela donne

$$B(z, t) = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) e_y.$$

électrique.

4. Le vecteur de Poynting  $\Pi$  est défini par

$$\boxed{\Pi(z, t) = \frac{\underline{E}(z, t) \wedge \underline{B}(z, t)}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) e_z.}$$

Or, en développant le second cos on obtient

$$\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}{\sqrt{2}}$$

Calculer la moyenne de  $\Pi$  va revenir à calculer l'intégrale d'un  $\cos^2$  et d'un cos multiplié par un sin sur une période temporelle. La moyenne du produit des deux fonctions trigonométriques donne 0 tandis que la moyenne de  $\cos^2$  donne  $1/2$ . Finalement, on aboutit à l'expression de la moyenne temporelle  $\langle \Pi \rangle$  du vecteur de Poynting

$$\boxed{\langle \Pi \rangle(z) = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) e_z.}$$

On remarque que contrairement aux exercices précédents  $\langle \Pi \rangle$  dépend de  $z$ .

5. La puissance cédée par unité de volume et par effet Joule au métal s'écrit  $\mathcal{P}_J = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Or, d'après la loi d'Ohm locale  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  donc

$$\boxed{\mathcal{P}_J(z, t) = \gamma E^2(z, t) = \gamma E_0^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).}$$

Moyenner  $\mathcal{P}_J$  en temps revient à moyenner un  $\cos^2$  en temps, on aboutit donc à l'expression de la moyenne temporelle de  $\mathcal{P}_J$

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle(z) = \frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)}$$

Pour déterminer  $\langle \mathcal{P} \rangle$ , il faut alors intégrer  $\langle \mathcal{P}_J \rangle$  sur le volume.  $\langle \mathcal{P}_J \rangle$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$  et la dimension  $dz$  du volume est infinitésimale, on a donc

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle L \ell dz = \frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) L \ell dz.}$$

6. On réalise un bilan énergétique sur le volume. On note  $\varphi(z)$  le flux d'énergie entrant dans le volume et  $\varphi(z + dz)$  le flux d'énergie sortant du volume. En moyenne, l'énergie contenue dans le volume se conserve, on a donc

$$\varphi(z) = \varphi(z + dz) + \langle \mathcal{P} \rangle.$$

On a donc

$$-\frac{d\varphi}{dz}(z) = \frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) L\ell.$$

Or,  $\varphi(z)$  s'obtient en intégrant la moyenne du vecteur de Poynting sur une section du volume

$$\varphi(z) = \langle \Pi \rangle L\ell = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) L\ell.$$

On a donc en dérivant et en remplaçant  $\delta$  par son expression

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{E_0^2}{\mu_0\delta^2\omega} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) L\ell = -\frac{\gamma E_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2z}{\delta} L\ell\right).$$

On retrouve bien la bonne expression.