

# Électromagnétisme en régime variable

## Plan de ce chapitre

<b>I.</b>	<b>Les limites des équations en régime permanent</b>	<b>92</b>
I. 1.	Équation de conservation de la charge	92
I. 2.	Équation de Maxwell-Faraday et phénomènes d'induction	94
<b>II.</b>	<b>Les équations de Maxwell</b>	<b>94</b>
<b>III.</b>	<b>Énergie électromagnétique</b>	<b>96</b>
<b>IV.</b>	<b>Ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>98</b>
IV. 1.	Équation de propagation du champ magnétique	98
IV. 2.	Solutions de l'équation de d'Alembert	100
IV. 3.	Ondes planes progressives harmoniques	101
<b>V.</b>	<b>Système GPS et ionosphère</b>	<b>105</b>
V. 1.	Principe du GPS	106
V. 2.	Modélisation du problème	106
V. 3.	Conductivité complexe	107
V. 4.	Relation de dispersion du plasma	108
V. 5.	Paquet d'onde et dispersion	109
V. 6.	Calcul de la distance $D$	110
<b>VI.</b>	<b>Exercices</b>	<b>112</b>
<b>VII.</b>	<b>Correction</b>	<b>114</b>

## Objectifs

- Comprendre pourquoi il est nécessaire de modifier les équations de Maxwell lorsqu'on s'intéresse à un système dépendant du temps
- Connaître les équations de Maxwell dans un régime dépendant du temps
- Savoir extraire un contenu physique des équations de Maxwell
- Connaître les formes locale et intégrale du bilan d'énergie électromagnétique
- Retrouver l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide en utilisant les équations de Maxwell

- Connaître la structure spatiale et les propriétés d'une onde électromagnétique progressive plane
- Comprendre comment est modifiée la propagation d'une onde électromagnétique par la présence d'un conducteur

## Introduction

### I. Les limites des équations en régime permanent

Malheureusement la forme des équations de Maxwell en régime permanent n'est pas totalement compatible avec les comportements électromagnétiques observés en régime variable. En effet, ces lois présentent des incohérences internes et ne permet pas de décrire tous les résultats expérimentaux.

#### I. 1. Équation de conservation de la charge

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation de conservation de la charge que nous allons démontrer dans le cas 1D et généraliser au cas 3D. Nous allons pour ce faire sortir temporairement du régime permanent et considérer des grandeurs dépendantes du temps.

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x)$ . La position d'un point de l'espace  $P$  est donc repérée par sa coordonnée  $x$ . On considère un volume infinitésimal de section  $S$  compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Ce volume possède une densité volumique de charge  $\rho(x, t)$ . Les charges se déplacent selon un mouvement d'ensemble caractérisé par un vecteur densité de courant électrique  $\mathbf{j}(x, t) = j(x, t)e_x$  (voir Fig. 5.1).

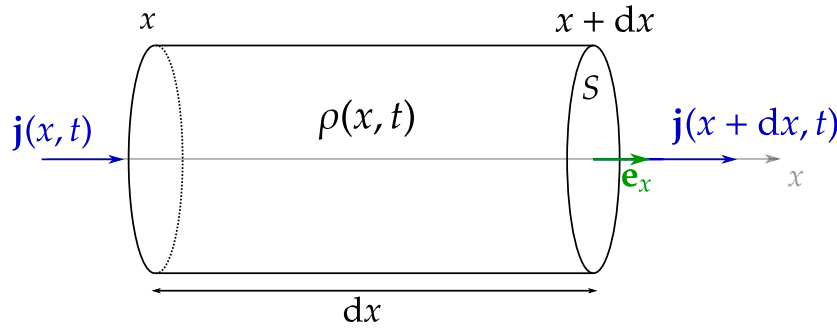


FIGURE 5.1 – Volume élémentaire  $Sdx$  sur lequel on effectue le bilan de charges électriques.

On cherche à déterminer une équation qui relie  $\rho$  à  $\mathbf{j}$ . Pour ce faire on exprime la différence entre la charge  $Q(t + dt)$  contenue dans le volume à l'instant  $t + dt$  et la charge  $Q(t)$  contenue à l'instant  $t$  de deux manières différentes.

1.  $Q(t)$  s'obtient en multipliant la densité volumique de charge  $\rho(x, t)$  par le volume  $Sdx$ . On a alors

$$Q(t + dt) - Q(t) = [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]Sdx.$$

2. D'autre part, le mouvement d'ensemble des charges entraîne un flux entrant  $j(x, t) \cdot Sdt$  et un flux sortant  $j(x + dx, t) \cdot Sdt$  de charges à travers la surface délimitant  $V$ . On a alors

$$Q(t + dt) - Q(t) = [j(x, t) - j(x + dx, t)]Sdt.$$

Ces deux équations nous permettent d'aboutir à l'équation de conservation de la charge en 1D

$$[\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]Sdx = -[j(x + dx, t) - j(x, t)]Sdt \iff \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

### Équation de conservation de la charge :

En tout point  $M$  de l'espace, la densité volumique de charge  $\rho$  et le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$  vérifie l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \text{div } \mathbf{j}(M, t) = 0.$$

Le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$  apparaît à la fois dans l'équation de conservation de la charge et dans l'équation de Maxwell-Ampère. Ces deux équations sont-elles compatibles ?

Soit un champ magnétique  $\mathbf{B}$  et un vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$  associé. L'équation locale de Maxwell-Ampère s'écrit en tout point de l'espace

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

On peut alors déterminer l'expression de  $\text{div } \mathbf{j}$

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{div } (\text{rot } \mathbf{B}) = 0$$

car  $\text{div } (\text{rot } \mathbf{B}) = 0$ . Or cette égalité n'est vérifiée qu'en régime permanent  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ !

Maxwell proposa en 1864 d'ajouter à l'équation 3.6 un nouveau terme  $\mathbf{j}_D$  qu'il nomme **courant de déplacement**

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_D).$$

Quelle est alors l'expression de  $\mathbf{j}_D$  ? D'après l'équation de conservation de la charge,  $\mathbf{j}$  vérifie

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

où  $\rho$  est la densité volumique de charge. Or d'après l'équation de Maxwell-Ampère, la divergence de  $\mathbf{j}$  doit aussi vérifier

$$\text{div } \mathbf{j} = \text{div } \left( \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{j}_D \right) = -\text{div } (\mathbf{j}_D),$$

car la divergence d'un rotationnel est nul. En utilisant l'équation locale de Maxwell-Gauss, on montre alors que  $\mathbf{j}_D$  doit vérifier

$$\text{div } \left( \mathbf{j}_D - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.} \quad (5.1)$$

**Remarque.**  $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ , n'est pas la seule solution à l'équation 5.1. En effet, cette solution est définie à un rotationnel près. Maxwell a choisi pour expression de  $j_D$  la solution la plus simple. Ce choix a ensuite été confirmé par des résultats expérimentaux.

Finalement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } B = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right). \quad (5.2)$$

## I. 2. Équation de Maxwell-Faraday et phénomènes d'induction

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts en 1831 par Michael Faraday (1791 – 1867). Il montre alors que des courants induits se développent dans un circuit immobile plongé dans un champ magnétique variable alors que ce dernier n'est alimenté par aucun générateur. Ce phénomène n'est pas décrit par les équations de la magnétostatique et de l'électrostatique.

## II. Les équations de Maxwell

Nous allons maintenant nous concentrer sur les équations de Maxwell en régime variable et sur leur interprétation physique. Pour ce faire nous les présentons comme deux jeux de deux équations.

### Équations de Maxwell structurelles :

Les équations de **Maxwell-Faraday**

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \iff \oint_C E \cdot d\ell = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.3)$$

où  $\varphi$  est le flux du champ magnétique  $B$  à travers la surface qui s'appuie sur n'importe quel contour fermé  $C$ , et **Maxwell-Thomson**

$$\text{div } B = 0 \iff \oiint_S B \cdot dS = 0, \quad (5.4)$$

où  $S$  est une surface fermée quelconque, ne relie pas les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  au vecteur densité de courant  $j$  et à la densité volumique de charge  $\rho$ . Elles sont donc indépendantes du milieu considéré.

On remarque rapidement que l'équation de Maxwell-Thomson reste inchangée par rapport à ce que nous avons vu en magnétostatique (voir Chap. 3). En revanche, l'équation de Maxwell-Faraday fait maintenant apparaître le champ magnétique ! Cette relation signifie qu'un champ magnétique variant dans le temps peut donner naissance à un champ électrique dont le rotationnel est non nul. Cette relation décrit le phénomène d'induction électromagnétique et met en avant une seconde source de champ électrique : un champ magnétique variable dans le temps.

**Attention**

Si  $E$  est un champ électrique à rotationnel non nul, la relation  $E = -\nabla V$ , où  $V$  est le potentiel électrique, n'est plus valide.

**Équations de Maxwell couplées à la matière :**

En revanche les équations de **Maxwell-Gauss**

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \oiint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.5)$$

où  $Q$  est la charge contenue dans la surface fermée  $S$  quelconque, et de **Maxwell-Ampère**

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \iff \oint_C B \cdot d\ell = \mu_0 \left[ I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint E \cdot dS \right) \right], \quad (5.6)$$

où  $I$  est le courant enlacé par le contour fermé  $C$  quelconque, lient les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  à leur source modéliser par le vecteur densité de courant  $j$  et la densité volumique de charge  $\rho$ .

L'équation de Maxwell-Gauss reste de même inchangée par le passage en régime dépendant du temps. En revanche, l'équation de Maxwell-Ampère fait apparaître un second terme,  $j_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ , appelé **courant de déplacements**. Un champ électrique variant dans le temps devient alors, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique. Ce second terme a un rôle analogue au terme  $-\frac{\partial B}{\partial t}$  apparaissant dans l'équation de Maxwell-Faraday, il induit un couplage du champ électrique et du champ magnétique qui ne peuvent plus être dissociés comme c'était le cas en magnétostatique et en électrostatique.

**Attention**

La dénomination courant de déplacement, donnée par Maxwell lui-même, pour le second terme de l'équation de Maxwell-Ampère est trompeuse car ce terme n'est associé ni à un déplacement, ni à un courant !

Il est important de remarquer que les équations de Maxwell sont linéaires. Le principe de superposition est donc toujours vérifié en régime variable.

**Exemple 1**

Si les champs électromagnétiques  $(E_1, B_1)$  et  $(E_2, B_2)$  vérifient les équations de Maxwell, alors le champ électromagnétique  $(E_1 + E_2, B_1 + B_2)$  les vérifie aussi.

### III. Énergie électromagnétique

Comme un système matériel, le champ électromagnétique est caractérisé par une énergie. On constate d'ailleurs en électrocinétique que les condensateurs et les bobines sont capables de stocker de l'énergie électrique et magnétique. Le but de cette partie est donc de déterminer l'expression de cette énergie en faisant apparaître le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $B$ .

On propose de réaliser un bilan d'énergie sur un volume  $V$  de l'espace délimité par une surface  $S$  immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen (voir Fig. 5.2).

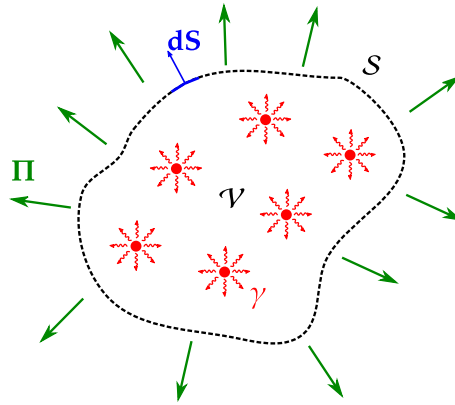


FIGURE 5.2 – Volume sur lequel on réalise le bilan d'énergie. Ce volume contient des sources internes (en rouge) de densité volumique de puissance  $\gamma$ . L'énergie qui traverse la surface  $S$  (en vert) est caractérisée par une densité surfacique de flux par unité de temps  $\Pi$ .

Comme cela a été fait pour la conservation de la charge, nous cherchons alors à déterminer comment varie l'énergie  $\mathcal{E}$  contenue dans ce volume au cours du temps entre un instant  $t$  et un instant  $t + dt$ . Cette variation  $\mathcal{E}(t + dt) - \mathcal{E}(t)$  d'énergie peut résulter

1. de la présence de sources d'énergie à l'intérieur du volume. Elles lui fournissent durant une durée  $dt$  une énergie  $\delta\mathcal{E}_{\text{source}}$

$$\delta\mathcal{E}_{\text{source}} = \iiint_{P \in V} \gamma(P, t) dV dt,$$

où  $\gamma$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ ) correspond à la densité volumique de puissance reçue par le volume de la part de ces sources, c'est-à-dire la quantité d'énergie reçue par unité de temps et de volume.

2. d'un flux d'énergie à travers la surface  $S$  qui délimite le volume  $V$ . On note ici  $dS$  le vecteur surface élémentaire dirigé vers l'extérieur du volume. On définit alors une densité surfacique de flux d'énergie par unité de temps  $\Pi$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ). L'énergie traversant la surface  $S$  par unité de temps s'écrit alors

$$\delta\mathcal{E}_{\text{flux}} = - \oiint_{P \in S} \Pi(P, t) \cdot dS dt.$$

Lorsque cette quantité est positive, l'énergie est reçue par le volume. En revanche, lorsqu'elle est négative, l'énergie est transmise à l'extérieur par le volume.

Finalement, on aboutit à

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \gamma(P, t) dV - \oint\!\!\!\oint_{P \in \text{mathcal{S}}} \boldsymbol{\Pi}(P, t) \cdot d\mathbf{S}.}$$

**Bilan d'énergie :**

Soit un volume  $V$  de l'espace immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen et délimité par une surface  $\mathcal{S}$ . La variation temporelle de l'énergie  $\mathcal{E}(M, t)$  contenue dans le volume est liée à

1. la densité volumique de puissance  $\gamma$ , mesurée en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ ), reçue algébriquement par le système de la part de sources internes,
2. la densité surfacique de flux d'énergie  $\boldsymbol{\Pi}$ , mesurée en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ), traversant la surface  $\mathcal{S}$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \gamma(P, t) dV - \oint\!\!\!\oint_{P \in \mathcal{S}} \boldsymbol{\Pi}(P, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.7)$$

Ce bilan d'énergie est décrit localement en un point  $M$  de l'espace par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t}(M, t) = -\text{div } \boldsymbol{\Pi}(M, t) + \gamma(M, t), \quad (5.8)$$

où  $w$  est la densité volumique d'énergie mesurée en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Le but est maintenant d'obtenir une formule similaire pour le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  afin de déterminer les expressions de  $w$ ,  $\boldsymbol{\Pi}$  et  $\gamma$  dans ce cas. L'équation de Maxwell-Ampère permet d'obtenir

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \iff \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \left( \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right),$$

où  $\mathbf{j}$  est le vecteur densité de courant. On peut alors se servir de l'identité vectorielle  $\text{div}(\mathbf{W} \wedge \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \cdot \text{rot } \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \text{rot } \mathbf{Y}$ , vérifiée pour tous vecteurs  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{U}$ , pour transformer le terme de gauche de l'équation précédente

$$-\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \mu_0 \left( \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right).$$

On peut alors remplacer  $\text{rot } \mathbf{E}$  en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday

$$-\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \left( \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\text{div} \left( \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.}$$

**Bilan d'énergie électromagnétique :**

Soit un volume  $V$  de l'espace immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen et délimité par une surface  $S$ . La variation temporelle de l'énergie  $\mathcal{E}_{\text{em}}(t)$  électromagnétique contenue dans le volume est liée à

1. la densité volumique de puissance électromagnétique  $-j \cdot E$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ) reçue algébriquement par le système de la part de sources internes,
2. la densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique  $\Pi$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ), appelé **vecteur de Poynting**, traversant la surface  $S$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = - \iiint_{P \in V} j(P, t) \cdot E(P, t) dV dt - \oint\!\!\!\oint_{P \in S} \Pi(P, t) \cdot dS dt, \quad (5.9)$$

avec

$$\Pi(P, t) = \frac{E(P, t) \wedge B(P, t)}{\mu_0}. \quad (5.10)$$

Ce bilan d'énergie est décrit localement en un point  $M$  par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t}(M, t) = -\text{div } \Pi(M, t) + \gamma(M, t), \quad (5.11)$$

où  $w_{\text{em}} (\text{J} \cdot \text{m})^{-3}$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique définie par

$$w_{\text{em}}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M, t)}{2} + \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0}. \quad (5.12)$$

## IV. Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations de Maxwell, en plus de fournir un cadre mathématique solide à l'électromagnétisme, prévoient l'existence des ondes électromagnétiques. En effet, le couplage des champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  rend possible la propagation d'une perturbation du champ électromagnétique  $(E, B)$ .

[Gié & Sarmant \(1985b\)](#) proposent une approche intuitive du phénomène qui permet de mieux le comprendre. Imaginons la naissance d'une perturbation du champ électrique  $E$  localisée en une région de l'espace. Cette perturbation donne naissance à un champ magnétique  $B$  dans son voisinage par l'intermédiaire des courants de déplacements. Ce même champ magnétique, par l'intermédiaire de l'équation de Maxwell-Faraday, génère un champ électrique. La perturbation se propage de proche en proche.

### IV. 1. Équation de propagation du champ magnétique

Soient un champ magnétique  $B$  et un champ électrique  $E$  dans une région vide de l'espace, c'est-à-dire avec une densité volumique de charge  $\rho$  et un vecteur densité de courant  $j$  nuls en tout point de l'espace. Les évolution spatiale et temporelle de ces deux champs sont contrôlées par les équations de Maxwell dans le vide



$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Nous allons essayer en combinant ces équations d'obtenir une équation combinant les variations temporelles et spatiales du champ magnétique. Pour cela, on commence par faire apparaître  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Il est alors possible de permuter le rotationnel et la dérivée temporelle, puis de remplacer  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  par son expression en se servant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Finalement, en utilisant la relation  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B})$  et l'équation de Maxwell-Thomson, on obtient

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}}.$$

Cette équation, dite de **d'Alembert**, couple les variations temporelles et spatiales du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Elle est caractéristique du phénomène de propagation d'onde. De la même manière, le champ électrique vérifie

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}}.$$

On constate la présence du facteur  $\mu_0 \epsilon_0$  dans cette équation. À quoi ce terme correspond-il ? On remarque que d'après l'équation précédente, ce facteur doit être homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. On se propose de vérifier cela avec les dimensions de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ . La permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  s'exprime en  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  tandis que la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ ,  $\epsilon_0 \mu_0$  est donc homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. Ce facteur correspond donc à la vitesse de propagation  $c$  d'une onde électromagnétique. Cette vitesse vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

correspondant ainsi à la vitesse de la lumière dans le vide.

**Remarque.** Contrairement aux ondes mécaniques, les ondes électromagnétiques ne nécessitent pas de milieux pour se propager. Elles y arrivent très bien dans le vide.

### Équation de propagation du champ électromagnétique :

Les propagations des champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  obéissent à la même équation de d'Alembert en un point  $M$  de l'espace

$$\nabla^2 E(M, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(M, t) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla^2 B(M, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(M, t) = \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

leur célérité étant donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

$c$  correspond ici à la vitesse de la lumière dans le vide. Cette équation de propagation a le bon goût d'être linéaire. De plus, si on change  $t$  en  $-t$  l'équation demeure la même.

**Remarque.** L'équation de d'Alembert est une équation caractéristique des phénomènes de propagation sans dissipation.

Les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  sont des champs vectoriels. Chacune de leurs composantes vérifie l'équation de d'Alembert.

## IV. 2. Solutions de l'équation de d'Alembert

Nous considérons maintenant le cas de l'équation de d'Alembert à une dimension. On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$  et on considère un champ électrique de la forme  $E(x, t) = E(x, t)e_y$ . La propagation du champ électrique  $E$  dans ce repère vérifie alors

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x, t) = 0.$$

La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme

$$E(x, t) = E_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + E_- \left( t + \frac{x}{c} \right),$$

où  $E_+$  correspond à une onde électromagnétique qui se déplace vers les  $x$  décroissants, tandis que  $E_-$  correspond à une onde se déplaçant vers les  $x$  croissants.

**Remarque.** Le phénomène de propagation correspond à un couplage du temps et de l'espace par la vitesse de propagation. En effet, on remarque que la solution générale de l'équation de d'Alembert réunit les variables temporelle et spatiale en une seule variable.

Pour mieux comprendre ce phénomène de propagation, il peut être utile de prendre le cas d'une onde mécanique. Imaginons alors une corde dont on viendrait secouer par un geste brusque et rapide une des extrémités. Ce mouvement donne alors naissance à la propagation d'une onde le long de la corde

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y)$ . Au repos, un point  $M$  de la corde occupe la coordonnée  $(x, 0)$ . À l'instant  $t = 0$ , la corde est excitée à son extrémité en  $x = 0$ . La perturbation induite par le passage de l'onde modifie la position du point  $M$  qui devient

$(x, y)$  (voir Fig. 5.3), où la variable  $y$  vérifie l'équation de d'Alembert. L'onde se propageant vers les  $x$  croissants,  $y$  est de la forme

$$y(x, t) = y\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

où  $v$  est la vitesse de propagation de l'onde. On peut alors déterminer  $y$  pour  $x = x + \Delta x$  avec  $\Delta x = v\Delta t$  à l'instant  $t + \Delta t$

$$y(x + v\Delta t, t + \Delta t) = y\left(t + \Delta t - \frac{x + v\Delta t}{v}\right) = y\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

On remarque alors que l'ordonnée du point d'abscisse  $x + v\Delta t$  à l'instant  $t + \Delta t$  correspond exactement à l'ordonnée du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (voir Fig. 5.3). La perturbation s'est propagée sans déformation.

**Remarque.** Cette non-déformation de la propagation illustre la réversibilité temporelle de l'équation de d'Alembert.

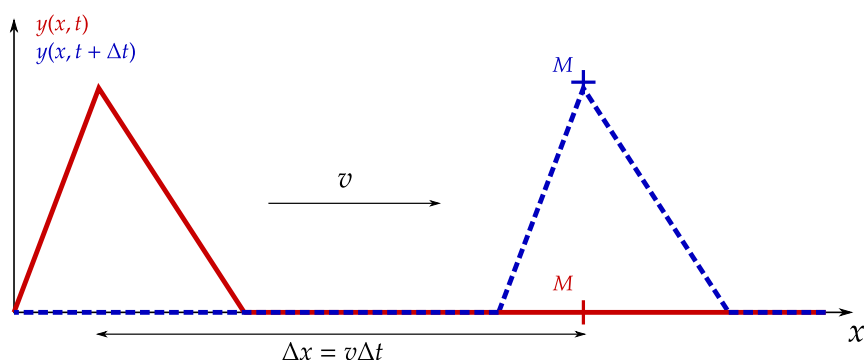


FIGURE 5.3 – Propagation d'une onde mécanique entre les dates  $t$  (en rouge) et  $t + \Delta t$  (en bleu tirets). Cette onde se propage à la vitesse  $v$ . Elle entraîne une déformation transverse de la corde.

## IV. 3. Ondes planes progressives harmoniques

### IV. 3. a. Champ électromagnétique et ondes planes progressives harmoniques

Nous allons dans ce cours nous focaliser sur une famille particulière de solutions à l'équation de d'Alembert : les **ondes planes progressives harmoniques** (OPPH). En effet, les OPPH forment une base de l'espace des solutions de l'équation de d'Alembert. Toute fonction solution de cette équation peut se décomposer en une superposition d'OPPH. Cette décomposition est rendue possible par la linéarité de l'équation de d'Alembert.

Une OPPH est caractérisée par

- sa fréquence  $f$  (en Hz) ou sa pulsation temporelle  $\omega$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ou sa période temporelle  $T$  (en s) avec

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

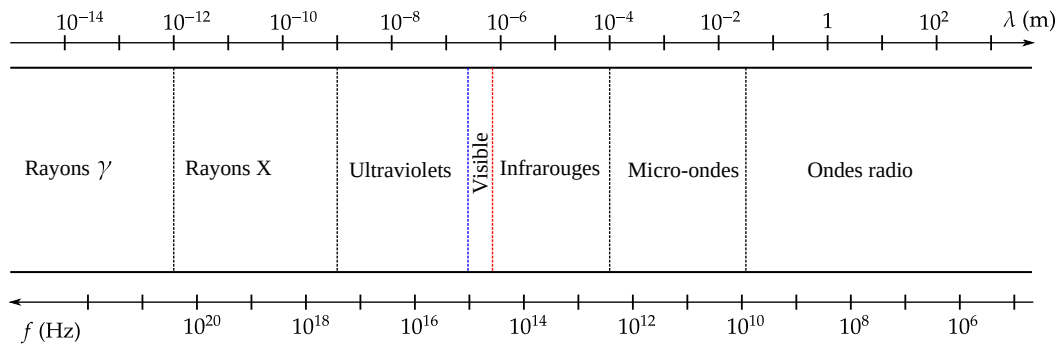


FIGURE 5.4 – Ensemble du spectre des ondes électromagnétiques en précisant la longueur d'onde  $\lambda$  et la fréquence  $f$  de chaque domaine. Le domaine du visible se situe entre 400 nm et 800 nm.

- sa pulsation spatiale  $k$  (en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ ) ou sa longueur d'onde  $\lambda$  (en m) avec

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

- sa direction de propagation  $\mathbf{u}$ .

Chaque composante  $E_i$  et  $B_i$  des champs électrique et magnétique en un point  $M$  de l'espace s'écrit alors sous la forme

$$E_i(M, t) = E_{i,0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_i) \quad \text{et} \quad B_i(M, t) = B_{i,0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \psi_i),$$

où  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  est le vecteur d'onde,  $E_{i,0}$  et  $B_{i,0}$  sont les amplitudes des champs,  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  est le vecteur position du point considéré et  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  les phases à l'origine. Dans ce cours, nous utiliserons par commodité la notation complexe

$$\underline{E}_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad \text{et} \quad \underline{B}_i(M, t) = \underline{B}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})],$$

avec  $\underline{B}_{i,0} = B_{i,0} \exp(i\psi_i)$  et  $\underline{E}_{i,0} = E_{i,0} \exp(i\varphi_i)$ . On retrouve alors les champs réels en prenant la partie réelle des champs complexes.

**Remarque.** Les longueurs d'ondes et fréquences des ondes électromagnétiques couvrent un large domaine comme le soulignent la figure 5.4.

#### IV. 3. b. Relation de dispersion

On peut alors se demander à quelle condition une OPPH est solution de l'équation de d'Alembert. Pour ce faire, on remplace les composantes des champs électrique et magnétiques par leur expression dans l'équation de d'Alembert. Pour une composante  $\underline{E}_i$  du champ électrique en un point  $M$  de l'espace cela donne

$$\Delta \underline{E}_i(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_i}{\partial t^2}(M, t) = 0 \iff (-ik)^2 \underline{E}_i(M, t) - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_i(M, t) = 0.$$

Comme cette relation est vérifiée en tout point de l'espace on aboutit à la relation

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

**Relation de dispersion de l'équation de d'Alembert :**

Soit une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$ , de pulsation spatiale  $k$  se déplaçant à une vitesse  $c$ . Cette OPPH est solution de l'équation de d'Alembert si ces trois grandeurs vérifient la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.14)$$

La période temporelle  $T$  de l'onde est alors reliée à sa longueur d'onde  $\lambda$  par la relation

$$\lambda = cT. \quad (5.15)$$

En d'autres termes, la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. En résumé, la relation de dispersion relie les dimensions spatiales et temporelles de l'onde.

**IV. 3. c. Équations de Maxwell et ondes planes progressives harmoniques**

Il devient alors possible d'écrire les équations de Maxwell sous une forme dite complexe. Il est pour cela nécessaire de savoir ce que deviennent les opérateurs divergence et rotationnel en notation complexe.

On se place dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$ . Soit  $\mathbf{A}$  un champ vectoriel dont les variations temporelles et spatiales de chacune de ses composante sont décrites par une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . En un point  $M(x, y, z)$  de l'espace, chaque composante de  $\mathbf{A}$  s'écrit sous forme complexe

$$\underline{A}_i(M, t) = \underline{A}_{i,0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{OM})],$$

avec  $\mathbf{k} = k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z$ ,  $\mathbf{OM} = x e_x + y e_y + z e_z$  et  $\underline{A}_{i,0}$  l'amplitude complexe de  $\underline{A}$ . On peut alors exprimer la divergence de ce champ vectoriel dans le référentiel choisi

$$\text{div } \underline{A}(M, t) = \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x}(M, t) + \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y}(M, t) + \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z}(M, t).$$

Si on s'intéresse à la première composante, cela donne

$$\frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x}(M, t) = \underline{A}_{x,0} \frac{\partial}{\partial x} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] = -ik_x \underline{A}_{x,0} \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] = -ik_x \underline{A}_x(M, t).$$

Finalement, la divergence de  $\underline{A}$  s'exprime en notation complexe

$$\boxed{\text{div } \underline{A}(M, t) = -i\mathbf{k} \cdot \underline{A}(M, t)}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\boxed{\text{rot } \underline{A}(M, t) = -i\mathbf{k} \wedge \underline{A}(M, t)}.$$

### Équations de Maxwell en notation complexe :

Soit un champ électrique  $\underline{E}$  et un champ magnétique  $\underline{B}$  dont les variations spatiales et temporelles de chaque composante sont décrites par une OPPH de vecteur d'onde  $\underline{k}$  et de pulsation  $\omega$ . Ces deux champs vectoriels vérifient les équations de Maxwell qui s'écrivent en notation complexe

$$\text{Maxwell-Gauss : } \underline{k} \cdot \underline{E}(M, t) = 0,$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \underline{k} \cdot \underline{B}(M, t) = 0,$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \underline{k} \wedge \underline{E}(M, t) = \omega \underline{B}(M, t),$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \underline{k} \wedge \underline{B}(M, t) = -\frac{\omega}{c^2} \underline{E}(M, t),$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

#### IV. 3. d. Structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique

Lorsque les variations temporelles et spatiales de chaque composante des champs électrique  $\underline{E}$  et magnétique  $\underline{B}$  sont décrites par une OPPH de vecteur d'onde et de pulsation temporelle  $\omega$ , ils vérifient les équations de Maxwell en notation complexe décrites plus haut. Quelles informations ces équations nous donnent-elles sur la structure de l'onde électromagnétique ?

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson

$$\underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{k} \cdot \underline{B} = 0$$

montrent que les champs électriques et magnétiques sont orthogonales à la direction de propagation de l'onde.

2. L'équation de Maxwell-Faraday

$$\underline{k} \wedge \underline{E} = \omega \underline{B}$$

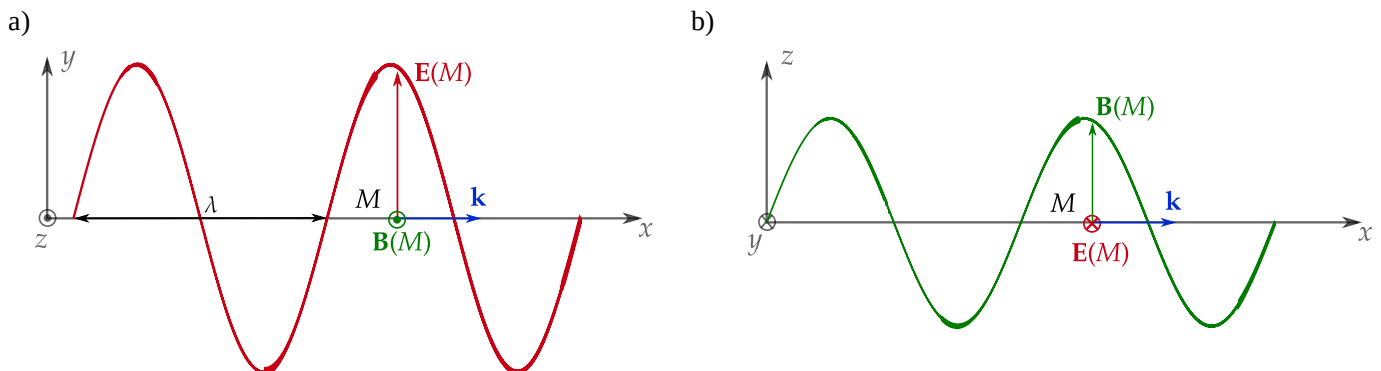


FIGURE 5.5 – Structure spatiale d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de fréquence  $f$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et de vecteur d'onde  $\underline{k}$  dans le plan  $(O, e_x, e_y)$  à gauche et dans le plan  $(O, e_x, e_z)$  à droite.

montre que  $\mathbf{B}$  est orthogonal à  $\mathbf{E}$  et à la direction de propagation de l'onde. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont en phase. De plus, on obtient

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{E}\|}{c}.$$

### Structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique :

Soit un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  dont les variations spatiales et temporelles de chaque composante sont décrites par une OPPH de pulsation temporelle  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  où  $k$  est la pulsation spatiale et  $\mathbf{u}$  la direction de propagation de l'onde. La structure de l'onde électromagnétique vérifie les propriétés suivantes

- la pulsation temporelle et la pulsation spatiale vérifient la relation

$$k = \frac{\omega}{c},$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,

- les champs électrique et magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation de l'onde,
- les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et en phase,
- les normes des champs électrique et magnétique sont reliés par la relation

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{E}\|}{c},$$

- Le trièdre  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  est direct.
- La direction du vecteur  $\mathbf{E}$  est appelé **polarisation** de l'onde électromagnétique.

### Exemple 2

On considère une onde électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  plane progressive harmonique de fréquence  $f$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . On se place dans un repère orthonormé tel que  $\mathbf{E}$  soit dirigé selon  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{k}$  selon  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{B}$  selon  $\mathbf{e}_z$ .  $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  formant un trièdre direct ce choix de repère est toujours possible. La figure 5.5 illustre la structure de cette onde. En un point  $M$  de l'espace, les champs électrique  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont orthogonaux.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est régie par l'équation de d'Alembert. Que se passe-t-il lorsque cette onde traverse un milieu conducteur ?

## V. Système GPS et ionosphère

Nous allons nous intéresser dans cette partie au système de localisation *Global Positioning System* (GPS) et sur la nécessité de prendre en compte l'existence de l'ionosphère,

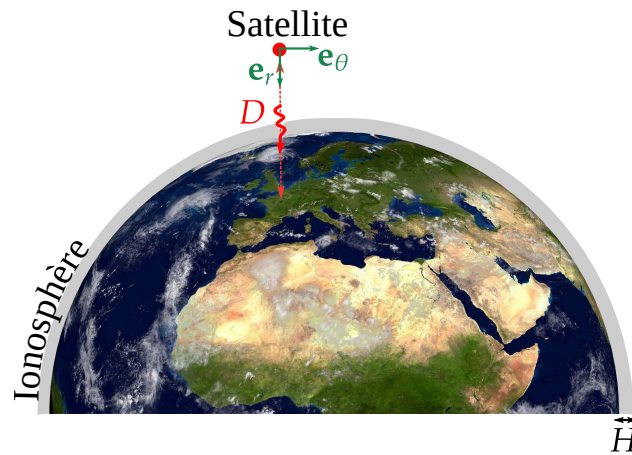


FIGURE 5.6 – Lorsqu'un satellite (point rouge) envoie une onde électromagnétique (flèche rouge) à un observateur se trouvant à une distance  $D$  sur Terre, cette dernière doit traverser l'ionosphère (en gris) d'épaisseur  $H$ .

couche de l'atmosphère ionisée située entre 60 et 1000 km d'altitude, pour assurer sa précision. Cette partie sera notamment l'occasion de nous intéresser au comportement d'une onde électromagnétique dans un conducteur et d'aborder les notions de pulsation de coupure, de vitesse de groupe, de paquet d'onde et de milieu dispersif.

## V. 1. Principe du GPS

Le système GPS offre un moyen efficace et rapide de connaître ses coordonnées géographiques et donc de se repérer dans l'espace. On se propose ici d'expliquer très grossièrement son principe de fonctionnement. Pour connaître sa position, un utilisateur reçoit via un récepteur GPS (un portable par exemple) une onde électromagnétique émise depuis un satellite. Dans ce signal est inclus l'heure d'émission de l'onde par ce satellite. Le récepteur est alors capable de déterminer la distance le séparant du satellite connaissant la vitesse de propagation  $c$  de la lumière dans le vide. En répétant l'opération avec plusieurs satellites, il peut donc déterminer précisément sa position.

Malheureusement, les distances mesurées par cette méthode sont entachées d'erreur qui doivent être corrigées. Parmi ces erreurs, on trouve notamment

- la non-synchronisation des horloges du récepteur et du satellite,
- la dégradation de l'onde à la traversée de l'atmosphère.

C'est cette deuxième erreur qui va nous intéresser dans cette partie. Nous allons essayer de déterminer l'erreur de position due à la traversée de l'ionosphère par l'onde électromagnétique.

## V. 2. Modélisation du problème

On imagine un satellite situé à une distance  $D$  de la Terre. Entre le satellite et le récepteur GPS sur Terre se trouve l'ionosphère d'épaisseur  $H$  (voir Fig. 5.6).

L'ionosphère est un plasma, un gaz ionisé, globalement neutre. Il contient :

- des électrons de masse  $m_e$ , de charge  $-e$  et de densité particulière  $n_e$  (nombre d'électrons par unité de volume),



- d'ions de masse  $m_i$ , de charge  $e$  et de densité particulière  $n_e$ .

On suppose ici que le plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs sont sans interaction. De plus, les ions ayant une masse beaucoup plus importantes que les électrons, nous ferons l'hypothèse que ces derniers sont fixes.

On se place dans un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$  dont l'origine est placée au niveau du satellite. On suppose que le satellite génère une onde plane progressive harmonique de vecteur d'onde complexe  $\underline{k}$  et de pulsation temporelle  $\omega$ . Les champs électrique  $\underline{E}$  et magnétiques  $\underline{B}$  en un point  $M$  de l'espace de coordonnées  $(r, 0, 0)$  s'écrivent en notation complexe

$$\underline{E}(M, t) = \underline{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}r)] \quad \text{et} \quad \underline{B}(M, t) = \underline{B}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}r)],$$

où  $\underline{E}_0$  et  $\underline{B}_0$  sont respectivement les amplitudes complexes des champs  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$ .

**Remarque.** On parle ici en réalité d'une onde pseudo progressive car le vecteur d'onde  $\underline{k}$  est complexe.

### V. 3. Conductivité complexe

Dans un premier temps, on cherche à modéliser la réponse de l'ionosphère à cette onde électromagnétique. En d'autres termes, on cherche à savoir comment vont réagir les électrons qui composent cette dernière. Comme nous l'avons fait dans le Chapitre 2, nous allons donc nous intéresser au mouvement d'un électron du plasma.

#### V. 3. a. Forces s'exerçant sur un électron du plasma

On considère un électron du plasma placé en un point  $M$ . Cet électron est soumis à

- la force de gravitation  $\mathbf{F}_G$  de la Terre,
- la force de Lorentz  $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  résultant du passage de l'onde,

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'électron. Comme nous l'avons vu précédemment dans le cours, nous pouvons négliger la force de gravitation devant celle de Lorentz étant donné la masse d'un électron. On peut de même comparer les deux termes de la force de Lorentz. Pour cela, nous allons faire l'hypothèse ici que

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{E}\|}{c}.$$

**Remarque.** Cette relation est vraie pour une OPPH électromagnétique dans le vide, mais il n'y a aucune raison qu'elle le demeure ici. Néanmoins, elle demeure une bonne approximation.

On obtient alors

$$\frac{\|\mathbf{v}\| \times \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{E}\|} \approx \frac{v}{c}.$$

On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique dès lors que la vitesse des électrons est non relativiste. Nous poursuivons donc notre étude dans un cadre non relativiste. En résumé, l'électron n'est soumis qu'à la force électrique !

### V. 3. b. Principe fondamentale de la dynamique

On applique maintenant le principe fondamentale de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé ici galiléen

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

L'onde électromagnétique étant harmonique, cette équation peut-être mise sous une forme complexe

$$i\omega m_e \underline{\mathbf{v}} = -e\underline{\mathbf{E}} \iff \underline{\mathbf{v}} = \frac{ie\underline{\mathbf{E}}}{\omega m_e}.$$

On peut ainsi remonter à une expression reliant le champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}$  et le vecteur densité de courant  $\underline{\mathbf{j}}$

$$\underline{\mathbf{j}} = -en_e \underline{\mathbf{v}} = \frac{-ie^2 n_e}{\omega m_e} \underline{\mathbf{E}}.$$

La conductivité  $\underline{\gamma}$  étant définie par  $\underline{\mathbf{j}} = \underline{\gamma} \underline{\mathbf{E}}$ , on obtient finalement

$$\underline{\gamma} = -\frac{ie^2 n_e}{\omega m_e}.$$

### V. 4. Relation de dispersion du plasma

Nous sommes maintenant capable d'écrire les équations de Maxwell pour un plasma neutre (avec une densité volumique de charge  $\rho$  nulle) en notation complexe

$$\text{Maxwell-Gauss : } \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \frac{\underline{\mathbf{k}} \wedge \underline{\mathbf{E}}}{\omega} = \underline{\mathbf{B}},$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \underline{\mathbf{k}} \wedge \underline{\mathbf{B}} = i\mu_0 \underline{\mathbf{j}} + i\omega\mu_0\epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} = \left( \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e \omega} - \frac{\omega}{c^2} \right) \underline{\mathbf{E}}.$$

On remarque que seule l'équation de Maxwell-Ampère a été modifiée par rapport aux équations énoncées dans le vide. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\underline{\mathbf{k}} \wedge (\underline{\mathbf{k}} \wedge \underline{\mathbf{E}}) = \left( \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\mathbf{E}}.$$

Or,  $\underline{\mathbf{k}} \wedge (\underline{\mathbf{k}} \wedge \underline{\mathbf{E}}) = (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{E}})\underline{\mathbf{k}} - k^2 \underline{\mathbf{E}}$  donc en utilisant Maxwell-Gauss, l'équation précédente devient alors

$$\left( \underline{\mathbf{k}}^2 + \frac{\mu_0 n_e e^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}.$$

On peut alors simplifier le champ électrique car ce dernier n'est pas identiquement nul. On aboutit alors à la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m'}} \quad (5.16)$$

où  $\omega_p$  est appelée **pulsation de coupure du plasma**. On obtient donc une relation de dispersion qui diffère de celle du vide et qui fait notamment apparaître une pulsation spécifique  $\omega_p$ .

On peut alors se demander ce qu'induit cette nouvelle relation de dispersion physiquement. On remarque premièrement que si  $\omega < \omega_p$ , alors  $\underline{k}$  est un imaginaire pur. On peut alors poser  $\underline{k} = -ik''$  où  $k''$  est un réel. Dans notre cas, le champ électrique devient alors

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \exp(-k''z) \exp(i\omega t) \Rightarrow E = \Re(\underline{E}) = E_0 \exp(-k''r) \cos(\omega t),$$

où  $\Re(\underline{E})$  est la partie réelle de  $\underline{E}$ . On obtient donc une onde dont l'amplitude décroît rapidement avec  $r$ . Une onde dont la pulsation est inférieure à la pulsation de coupure du plasma est incapable de le traverser! On considère pour la suite de l'étude que  $\omega > \omega_p$ . Dans la suite du problème, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est donc réel.

## V. 5. Paquet d'onde et dispersion

En réalité, le satellite envoie deux signaux sous la forme de trains d'ondes, c'est-à-dire des OPPH de taille spatiale finie, de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  pour corriger l'existence de l'ionosphère. Les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont choisies bien supérieures à la fréquence de coupure du plasma. Pour résoudre notre problème, il est nécessaire de connaître la vitesse de propagation des trains d'onde dans l'ionosphère.

La vitesse d'un train d'onde est donnée par la **vitesse de groupe**  $v_g$  définie par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

**Remarque.** Pour une onde, la vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie.

Dans le vide,  $v_g = c$ , mais qu'en est-il dans le plasma? Pour déterminer son expression on différencie la relation de dispersion 5.16

$$kdk = \frac{\omega d\omega}{c^2}.$$

On obtient alors la vitesse de dispersion

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} \Rightarrow v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

Dans le plasma, contrairement au vide, la vitesse de groupe dépend de la pulsation de l'onde considérée, c'est le phénomène de **dispersion**.

## V. 6. Calcul de la distance $D$

Nous avons pu constater que la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma se heurte à deux problèmes majeurs

1. la pulsation de l'onde doit être assez élevée pour se propager dans le plasma,
2. la vitesse de propagation dans le plasma dépend de la pulsation de l'onde.

Nous cherchons maintenant à déterminer l'erreur de précision du GPS induite par la présence de l'ionosphère.

Le train d'onde de fréquence  $f_1$  met une durée  $\tau$  à parcourir la distance  $D$  qui sépare le satellite du récepteur. Ce train d'onde se déplace à la vitesse  $c$  dans le vide et à la vitesse  $v_g(f_1)$  dans l'ionosphère.  $\tau$  est donc donné par

$$\tau = \frac{H}{v_g(f_1)} + \frac{D-H}{c} = \frac{H}{c} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} + \frac{D}{c} \approx \frac{D}{c} \left[ 1 + \frac{H}{2D} \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 \right].$$

La présence de l'ionosphère entraîne donc une augmentation du temps nécessaire au train d'onde pour arriver au récepteur. Pour corriger l'erreur de précision du GPS, il suffit de prendre en compte ce retard ! Malheureusement, l'expression de ce dernier fait intervenir l'épaisseur de l'ionosphère et sa fréquence de coupure qui sont deux grandeurs difficilement mesurables. On cherche donc à s'en débarrasser.

On exprime l'écart  $\Delta t$  entre les temps de parcours du train d'onde de fréquence  $f_1$  et de celui de fréquence  $f_2$ . On a choisi  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $f_1 < f_2$ . En s'appuyant sur la formule précédente

$$\Delta t = \frac{H f_p^2}{2c} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 f_1^2}.$$

Cette relation est très intéressante car elle permet d'exprimer l'épaisseur de l'ionosphère  $H$  en fonction de  $\Delta t$  qui est une mesure plus facilement accessible au récepteur. On peut alors déterminer avec plus de précision la distance  $D$  qui le sépare du satellite

$$D = c\tau - \frac{H}{2} \left( \frac{f_p}{f_1} \right)^2 = c\tau - \left( \frac{f_2 f_1}{f_1} \right)^2 \frac{c\Delta t}{f_2^2 - f_1^2}.$$

Pour prendre en compte l'ionosphère il suffit donc d'appliquer une correction  $d$

$$d = f_2^2 \frac{c\Delta t}{f_2^2 - f_1^2}.$$

On réalise l'application numérique avec  $f_2 = 1575$  MHz,  $f_1 = 1228$  MHz et  $\Delta t = 6.7 \times 10^{-7}$  s. On a alors

$$d \approx 300 \text{ m.}$$

Cette correction doit absolument être prise en compte !

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014a. Les équations de Maxwell, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 599–620, Dunod.
- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014b. Ondes électromagnétiques dans le vide, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 981–1032, Dunod.
- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014c. Ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 1067–1100, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985a. Équations de Maxwell, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 3–16, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985b. Ondes électromagnétiques dans le vide, in *Électromagnétisme*, vol. 2 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 53–84, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Renvoizé, V., Bellanger, É., Girardi, R., Paulin, S., Portelli, B., & Saudrais, E., 2009. Équations de Maxwell-Énergie du champ électromagnétique, in *Physique PC-PC\**, Cap Prépa, pp. 615–640, Pearson Education.
- Renvoizé, V., Bellanger, É., Archambault, P., Gonnord, H., Marchand, A., Paulin, S., Portelli, Poux, C., Ropert, J. B., & Saudrais, E., 2014. Ondes, in *Physique PC-PC\**, pp. 219–288, Pearson Education.