Potentiel de Yukawa

On se place dans un repère sphérique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

C

distance

V

permittivité diélectrique du vide

m

1) a est en m

Le potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle : $V_q(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ← charge (C)

=> Q est une charge et s'exprime en C.

2) But : Déterminer $\vec{E}(r)$

Méthode : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta}} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}}$$

car V ne dépend ni de θ ni de φ.

$$= \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right)\vec{e_r}$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)\vec{e_r}}$$

charge ponctuelle

3) <u>But</u> : Calculer la charge $q(r)$ incluse dans une sphère de rayon r et de centre O.

<u>Méthode</u> : Théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

charge incluse dans S

vecteur surface élémentaire

On a $\vec{dS} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)\vec{e}_r \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right) \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2}$$

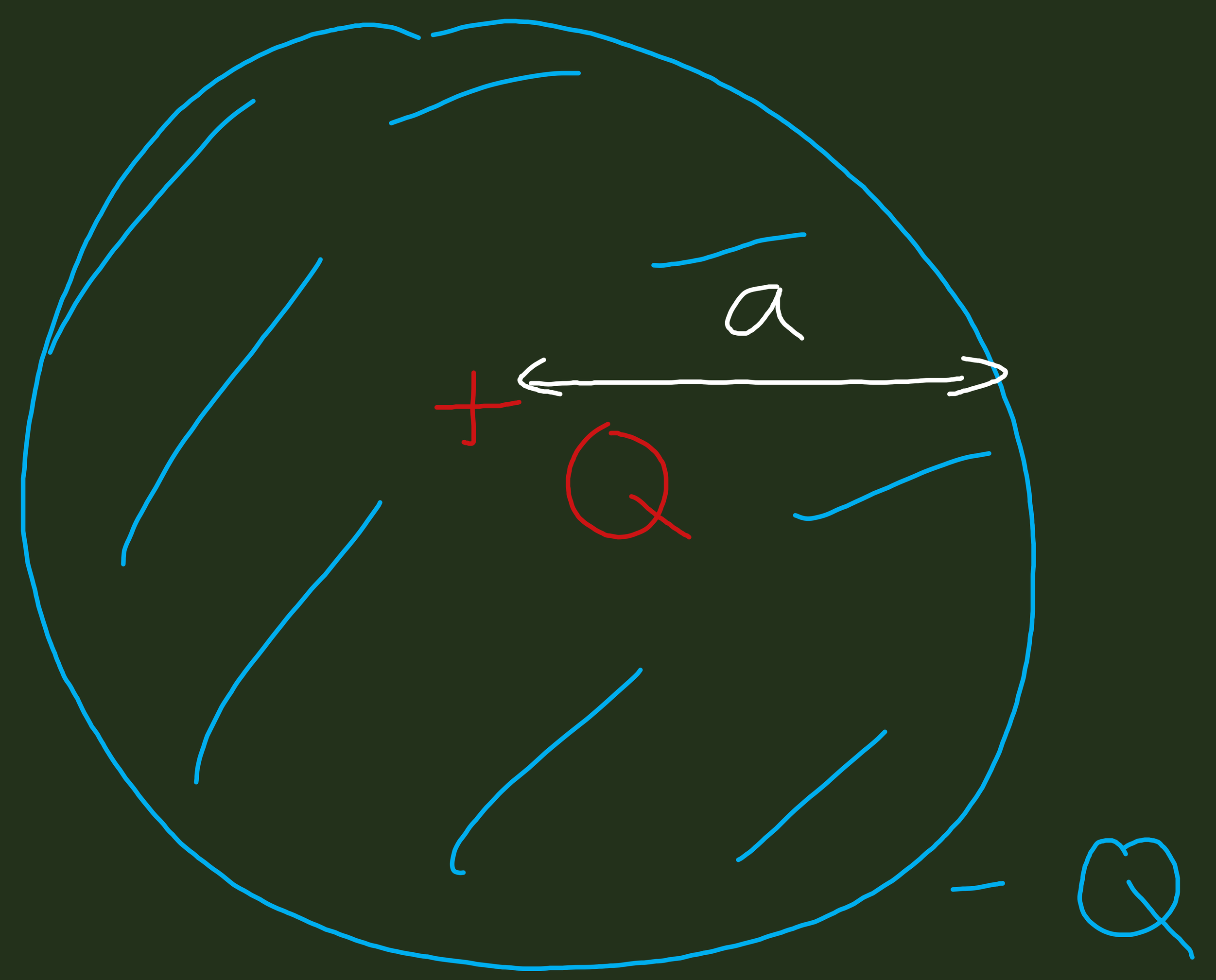
$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)}$$

$$q(r) = Q \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

4) $q(r) = Q \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{r}{a}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} q(r) \xrightarrow[r \to 0]{} Q \\ q(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \end{array}}$$

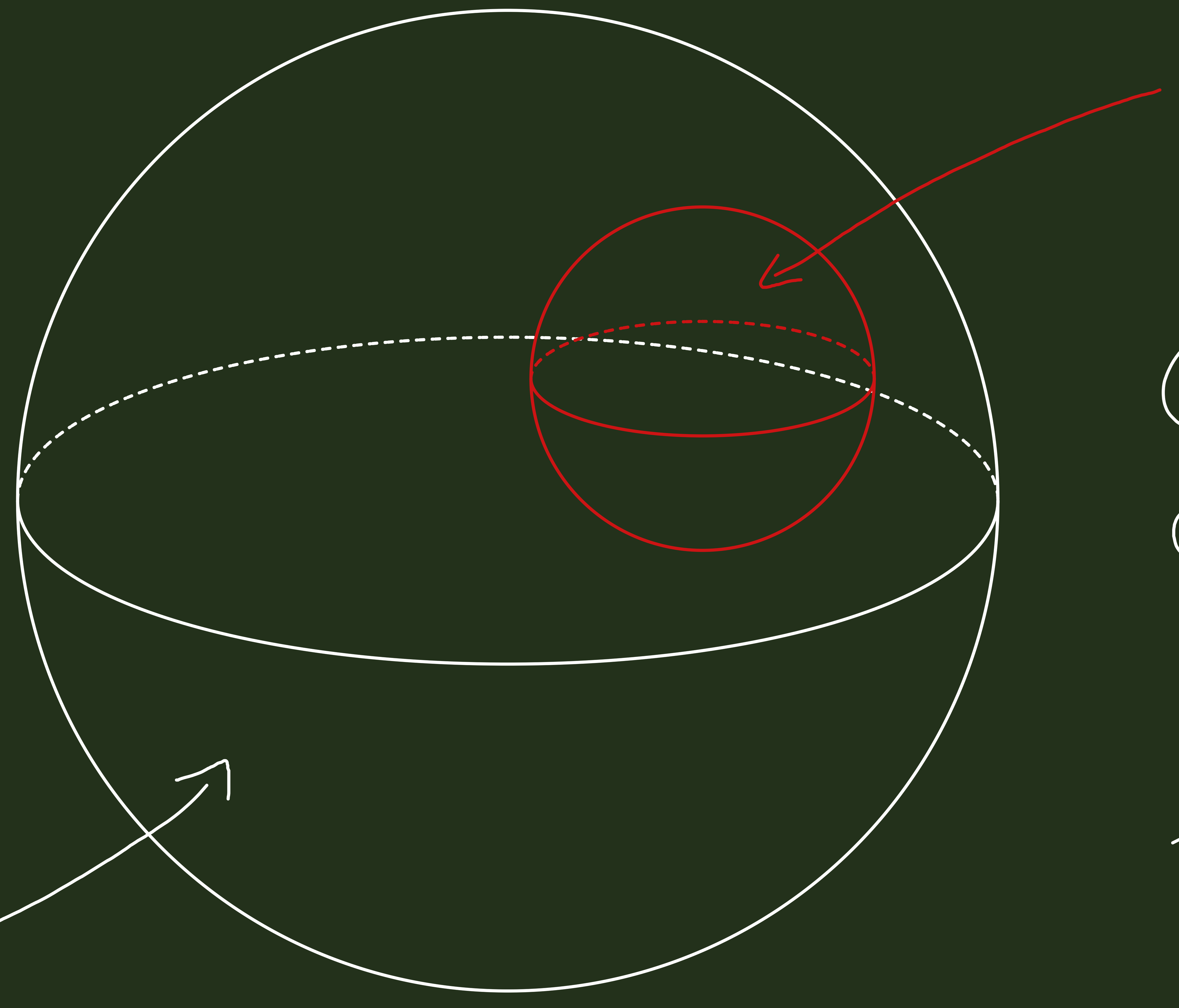
À quoi ressemble la distribution de charge ?



a est la taille du nuage électronique.

Champ gravitationnel dans une cavité

vide, $\rho = 0$



masse volumique $\rho = \text{cste}$

Quel est le champ gravitationnel $g(r)$ pour un point r à l'intérieur de la cavité ?

1) Analogie entre champ électrostatique et champ de gravitation

$\vec{E}$ | $\vec{g}$

constante universelle de gravitation

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \longleftrightarrow \vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G} m}{r^2}\vec{e}_r$$

$$q \longleftrightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \longleftrightarrow -\mathcal{G}$$

2) Théorème de Gauss pour $\vec{g}$?

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi m \mathcal{G}}$$

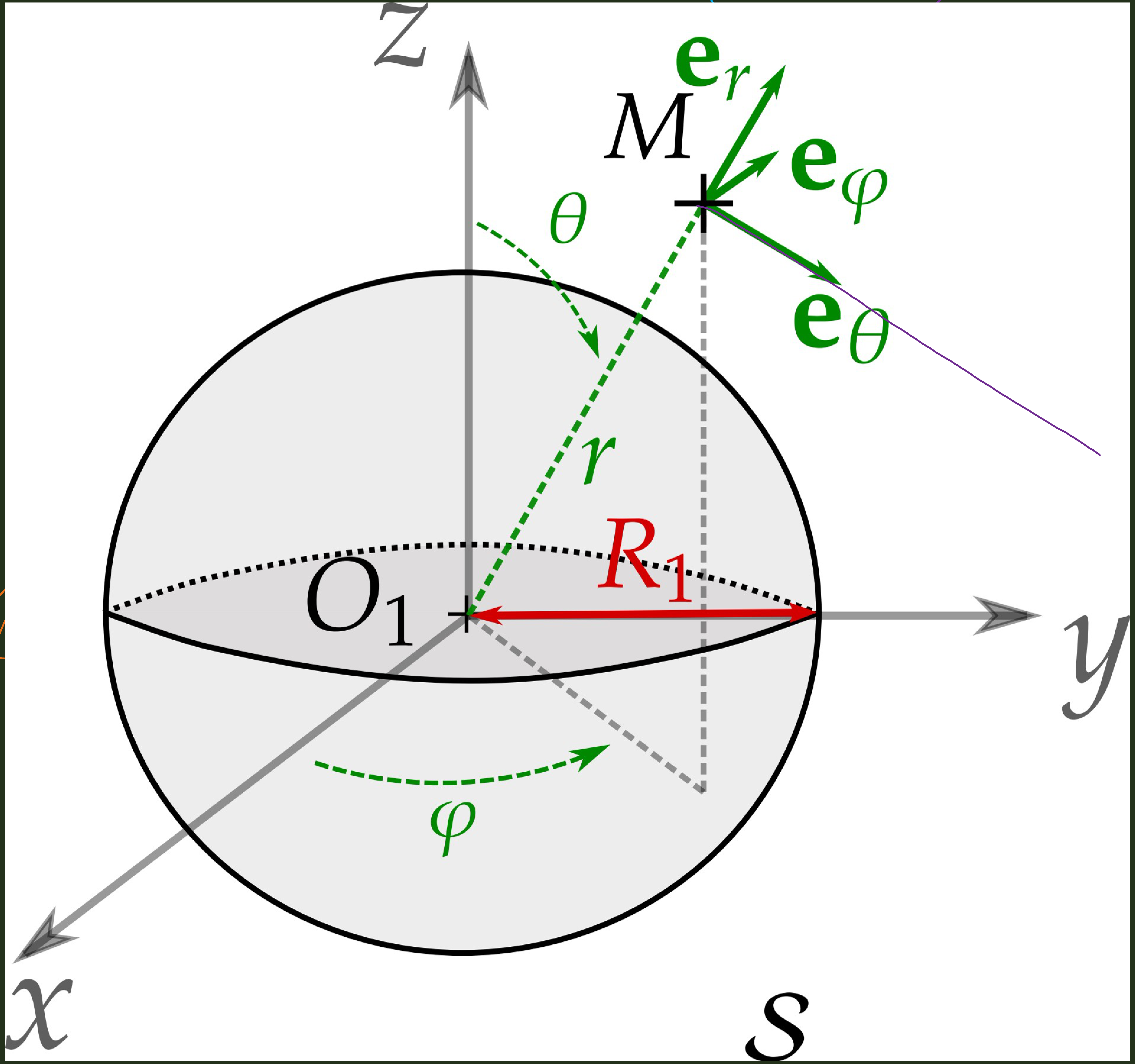
Théorème de Gauss pour la gravitation

Rappel : Calculer $\vec{g}$ / $\vec{E}$ connaissant la distribution de masse/charge.

① Réaliser un schéma et de choisir un repère adapté

② Etudier les symétries et invariance de la distribution de charges/masses

③ Appliquer le théorème de Gauss / Principe de superposition



On choisit un repère sphérique. Un point M est donc repéré par ses coordonnées (r, θ, φ).

. Le champ $\vec{g}$ en M s'écrit :

$$\vec{g}(r) = g_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + g_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta + g_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi$$

<u>But</u> : Simplifier $\vec{g}(r)$

<u>Méthode</u> : Étude des invariances et symétrie

La distribution de masse a pour plans de symétrie :

- $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Rightarrow \vec{g}$ doit appartenir $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
- $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) \Rightarrow \vec{g}$ doit appartenir $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$

Rq : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie mais il ne nous intéresse pas

Principe Curie : Les symétries des causes doivent se retrouver dans les conséquences

distribut° de masse

$\vec{g}$

$\Rightarrow \vec{g}(r)$ doit être colinéaire à $\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \underline{\vec{g}(r) = g_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})\,\vec{e_r}}$$

Etude des invariances

La distribution de masse est invariante par :

- Rotation d'un angle θ
- Rotation d'un angle φ

$$\Rightarrow \underline{\vec{g}(r) = g_r(r)\,\vec{e_r}}$$

On applique le théorème de Gauss :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi G m$$

Il faut choisir la surface de Gauss S !

↳ on choisit une sphère de rayon r qui passe par M

- $\vec{dS} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_r}$
- Quelle est la masse incluse dans S ?

On a deux cas de figure. On pose ρ la masse volumique

1. $r \geq R_1$, $m = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho$ Rappel : $m = \iiint_{r \in V} \rho(r)\, dV$

2. $r < R_1$, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\oiint_S \vec{g} \cdot \vec{dS} = \oiint_S g_r(r)\vec{e_r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_r}$$

$$= g(r)\, r^2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta = 4\pi r^2 g(r)$$

Théorème de Gauss $\Rightarrow$ $\cancel{4\pi} r^2 g(r) = \begin{cases} -\cancel{4\pi}\, \mathcal{G} \times \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho, & r \geq R_1 \\ -\cancel{4\pi}\, \mathcal{G}\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3, & r < R_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{g(r) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi \mathcal{G} \frac{R_1^3}{r^2}\rho, & r \geq R_1 \\ -\frac{4}{3}\pi \mathcal{G}\, r\rho, & r < R_1 \end{cases}}$$

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi \mathcal{G} \frac{R_1^3}{\|Or\|^3}\rho\, \vec{Or}, & r \geq R_1 \\ -\frac{4}{3}\pi \mathcal{G}\rho\, \underbrace{\vec{Or}}_{r\vec{e}_r}, & r < R_1 \end{cases}$$

Au niveau dimension :

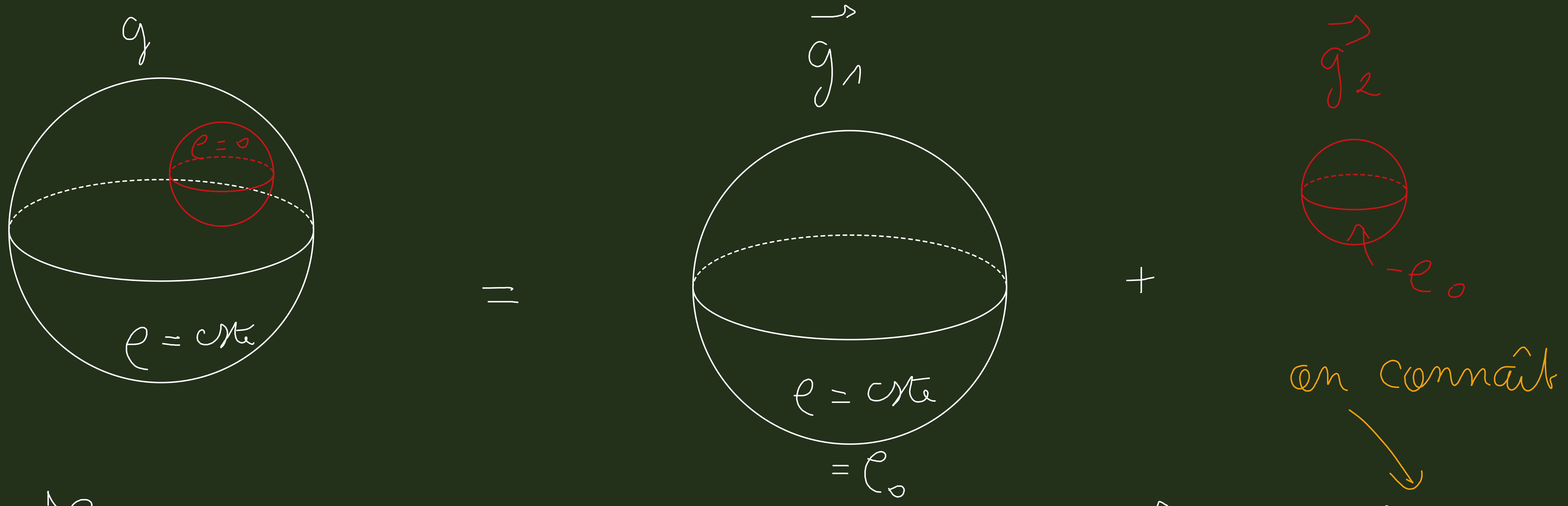
$$\underbrace{g}_{m.s^{-2}}(r) = -\frac{4}{3}\pi \underbrace{G}_{\cancel{m^3}.s^{-2}.\cancel{kg^{-1}}} \overbrace{r}^{m} \underbrace{\rho}_{\cancel{kg}.\cancel{m^{-3}}}$$

5) Plans de symétrie de la distribut° de masse ?

- Plan de symétrie : Tout plan qui contient $(O_1 O_2)$
- Invariances : RIEN

$\Rightarrow$ On ne peut pas appliquer le théorème de Gauss !

6) Théorème de Superposition :



En point M interne à la cavité : $\vec{g}(M) = \vec{g}_1(M) + \vec{g}_2(M)$

À l'intérieur de la cavité :

- $\vec{g}_1(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 \overrightarrow{O_1 r}$
- $\vec{g}_2(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 \overrightarrow{O_2 r}$

$$\Rightarrow \vec{g}(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 \left(\overrightarrow{O_2 r} - \overrightarrow{O_1 r}\right)$$

$$\boxed{\vec{g}(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 \overrightarrow{O_2 O_1}}$$

Le champ de gravitation est uniforme à l'intérieur de la cavité !