

# Électrostatique

## Plan de ce chapitre

I. La loi de Coulomb . . . . .	4
II. Le champ électrostatique . . . . .	6
III. Les différentes distributions de charge . . . . .	7
III. 1. Densité volumique de charges . . . . .	7
III. 2. Densité surfacique de charge . . . . .	8
III. 3. Densité linéique de charge . . . . .	9
IV. Équation de l'électrostatique . . . . .	10
IV. 1. Le théorème de Gauss . . . . .	10
IV. 2. Le potentiel électrostatique et l'équation de Maxwell-Faraday . . .	12
V. Étude des lignes de champ de $E$ . . . . .	15
VI. Calcul du champ électrostatique . . . . .	17
VI. 1. Invariance de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 2. Symétries de la distribution de charges . . . . .	18
VI. 3. Application du théorème de Gauss . . . . .	19
VII. Exercices . . . . .	22
VIII. Corrections . . . . .	24

## Objectifs

- Connaître les équations qui gouvernent l'évolution spatiale du champ électrostatique
- Faire le lien entre ces équations et une carte de champ électrique
- Savoir calculer le champ électrostatique résultant d'une distribution de charges simple

## Introduction

Les phénomènes électrostatiques sont connus depuis l'Antiquité. Les Grecs avaient déjà observé que l'ambre (*electron* en grec) frottée pouvait attirer des objets légers comme les copeaux de bois. Néanmoins, l'étude de ces phénomènes est longtemps restée qualitative. Il faut attendre le XVII<sup>e</sup> siècle pour que des dispositifs expérimentaux apparaissent. Ce premier chapitre s'intéresse à l'étude du champ électrique en régime permanent, c'est à

dire généré par des charges immobiles dans le référentiel d'étude. Les phénomènes décrits dans ce chapitre sont donc **indépendants du temps**.

### Régime permanent :

On dit qu'un système fonctionne en régime permanent lorsque toutes les grandeurs relatives à une région fixe de ce système sont indépendantes du temps.

## I. La loi de Coulomb

En 1785, le physicien français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) réalise une étude quantitative de la force d'interaction entre deux particules chargées à l'aide la balance de Coulomb qu'il a mise au point. De cette expérience découlent plusieurs observations :

1. Il existe deux types de charges : les charges positives et les charges négatives.
2. Deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signes opposés s'attirent.
3. L'intensité entre les forces est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.

Ces observations expérimentales se résument dans **la loi de Coulomb**.

### Loi de Coulomb :

La force  $F_{1 \rightarrow 2}$  électrostatique exercée par une charge  $q_1$  située en un point  $M_1$  sur une charge  $q_2$  située en  $M_2$  (voir Fig. 1.1) est donnée par

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|M_1 M_2\|^2} e_{M_1 M_2}, \quad (1.1)$$

où  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  est la permittivité diélectrique du vide et  $e_{M_1 M_2}$  le vecteur unitaire dirigé de  $M_1$  à  $M_2$ . Le farad F ( $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  en USI) est une unité de capacité électrique. Dans la loi de Coulomb,

- la distance s'exprime en mètre,
- la charge s'exprime en coulomb noté C ( $\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$ ),
- la force s'exprime en newton noté N ( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  dans le système international),
- la permittivité diélectrique du vide s'exprime en  $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$  ( $\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  dans le système international).

On remarque une forte ressemblance entre cette loi et la loi d'interaction gravitationnelle proposée par Newton. Nous verrons que cette analogie, résumée par le Tableau 1.1, permet d'appliquer des résultats de l'électrostatique à la gravitation et inversement. Néanmoins, l'interaction électrostatique fait apparaître deux types de charges électriques et peut donc être soit attractive, soit répulsive. L'interaction gravitationnelle est quant à elle toujours attractive.

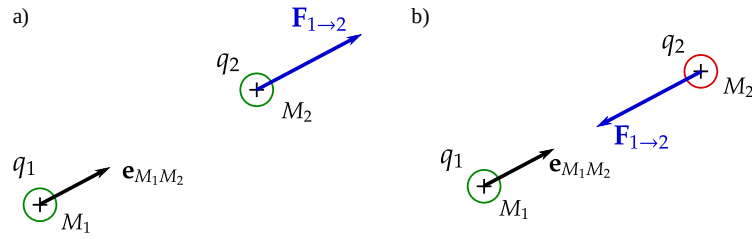
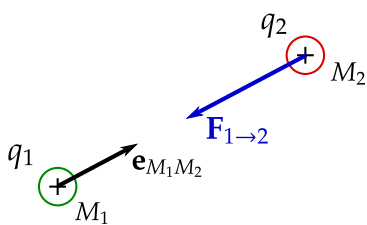
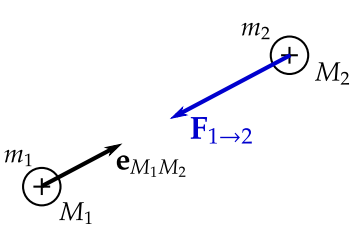


FIGURE 1.1 – Force exercée par une charge  $q_1$  sur une charge  $q_2$  dans le cas où les charges sont de même signe (à gauche) et de signe opposé (à droite)

TABLE 1.1 – Tableau d’analogie entre force d’interaction électrique et force d’interaction gravitationnelle.  $\mathcal{G}$  est la constante universelle de gravitation.

Électrostatique	Gravitation
 $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\ M_1 M_2\ ^2} \mathbf{e}_{M_1 M_2}$	 $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\ M_1 M_2\ ^2} \mathbf{e}_{M_1 M_2}$
$q_1$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$m_1$ $-\mathcal{G}$

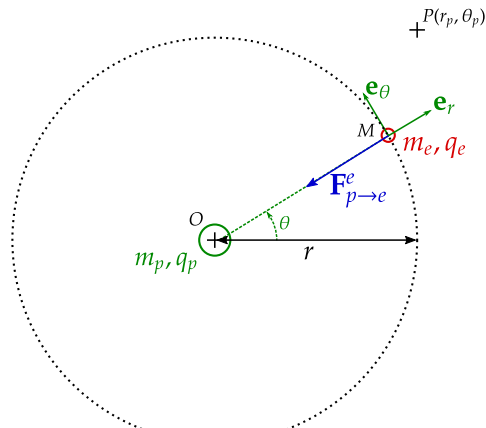
  


FIGURE 1.2 – Modèle planétaire de l’atome d’hydrogène. L’électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  en pointillé ici.

**Exemple 1**

On considère le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène (voir Fig 1.2). Un électron de charge  $-e = -1.60 \times 10^{-19}$  C et de masse  $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}$  kg décrit une orbite circulaire de rayon  $r = 52.9 \times 10^{-12}$  m autour d'un proton de charge  $e$  et de masse  $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27}$  kg. Les deux particules s'attirent car leurs charges sont de signe opposé. On cherche à déterminer l'intensité de la force électrostatique  $F_{p \rightarrow e}^e$  que le proton exerce sur l'électron. La loi de Coulomb 1.1 nous donne directement

$$|F_{p \rightarrow e}^e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \approx 82.7 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

On peut alors comparer cette valeur à l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle  $F_{p \rightarrow e}^g$  que le proton exerce sur l'électron

$$|F_{p \rightarrow e}^g| = \mathcal{G} \frac{m_e m_p}{r^2} \approx 36.2 \times 10^{-47} \text{ N},$$

avec  $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  la constante universelle de gravitation. On remarque que l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle est bien plus faible que celle de la force électrique, d'environ quarante ordres de grandeur. On néglige donc l'interaction gravitationnelle devant l'interaction gravitationnelle pour des particules chargées.

## II. Le champ électrostatique

L'interaction gravitationnelle et l'interaction électrique ont posé problème aux physiciens du XVII<sup>e</sup> siècle car il s'agissait d'interaction à distance sans contact. Faraday a donc introduit la notion de champ afin d'éviter ce délicat problème. En physique, un champ est une fonction qui associe à tout point de l'espace un vecteur, si le champ est vectoriel, ou un scalaire, si il est scalaire. La température est par exemple un champ scalaire et la vitesse est un champ vectoriel. Une particule chargée exerce alors une force électrostatique sur une autre particule par l'intermédiaire du *champ électrostatique* noté  $E$ .

### Le champ électrostatique :

Le champ électrostatique  $E$  créé par une particule de charge  $q$  située au point  $M$  de l'espace en un point  $P$  est donné par

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.2)$$

où  $e_{MP}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $M$  vers  $P$ . Le champ électrostatique est un champ vectoriel, à chaque point de l'espace  $P$ , il associe un vecteur  $E(P)$ . Il s'exprime en  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Connaissant la champ électrique en un point  $P$  de l'espace, il est alors facile de déterminer la force  $F$  que subirait une particule de charge  $Q$  placée en ce même point

$$F = QE(P). \quad (1.3)$$

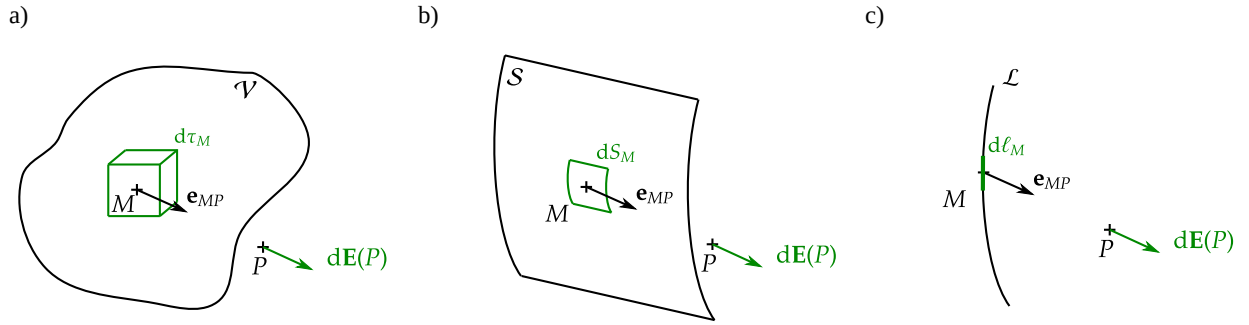


FIGURE 1.3 – Illustration de la notion de densité volumique (à gauche), surfacique (milieu) et linéique (à droite) de charge.

On peut déterminer le champ électrostatique créé en un point  $P$  par un ensemble de  $N$  particules chargées en utilisant *le principe de superposition*. En effet, on constate expérimentalement que le champ électrostatique créé par ces  $N$  particules au point  $P$  est égal à la somme de tous les champs électrostatiques créés par toutes les charges.

**Principe de superposition :**

On considère un ensemble de  $N$  particules chargées. Chaque particule  $i$  porte la charge  $q_i$  et se trouve en un point  $M_i$  de l'espace. Chacune d'elle crée en un point  $P$  de l'espace un champ électrostatique  $E_i(P)$ . Le champ électrostatique total créé au point  $P$  est alors donné par

$$E(P) = \sum_{i=1}^N E_i(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|M_i P\|^2} e_{M_i P}. \quad (1.4)$$

De la même manière, la force  $F$  subit par une particule de charge  $Q$  située au point  $P$  est alors donnée par

$$F = QE(P). \quad (1.5)$$

### III. Les différentes distributions de charge

Le plus souvent, la charge électrique est répartie de manière continue dans la matière. Dans ce cas, il est alors commode de définir une densité de charge qui exprimera la quantité de charge contenue dans un volume, dans une surface ou dans un fil. Chaque petit élément de volume, de surface ou de longueur renferme alors une charge notée  $dq$ . Pour déterminer le champ électrique totale  $E$  en un point  $P$  de l'espace, il suffit alors de sommer les petits champs  $dE$  créés en  $P$  par chaque petite charge  $dq$ .

#### III. 1. Densité volumique de charges

On considère une charge  $Q$  répartie dans un volume  $\mathcal{V}$  (voir Fig. 1.3a). On définit la **densité volumique de charge**  $\rho$  telle que pour tout point  $M$  du volume, la charge  $dq$  contenue dans un petit volume  $d\tau_M$  centré en  $M$  est donnée par  $dq = \rho(M)d\tau_M$ . Elle

s'exprime en  $C \cdot m^{-3}$  et vérifie la relation

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M) d\tau_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution volumique de charge  $\rho$  contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\rho(M) d\tau_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.6)$$

où  $\frac{\rho(M) d\tau_M}{\|MP\|^2} e_{MP}$  est le champ électrique créé par le petit volume  $d\tau_M$  au point  $P$ .

### Exemple 2

On considère un noyau d'uranium 238 de rayon  $R = 1$  fm. Il contient 92 protons portant une charge  $e$  et 146 neutrons sans charge. On considère que la charge totale  $Q$  du noyau est **uniformément répartie** dans le volume du noyau. La densité volumique de charge  $\rho$  dans le noyau d'uranium est donc donnée par

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 35 \times 10^{27} C \cdot m^{-3}$$

## III. 2. Densité surfacique de charge

On considère une charge  $Q$  répartie sur une surface  $\mathcal{S}$  (voir Fig. 1.3b). On définit la **densité surfacique de charge**  $\sigma$  telle que pour tout point  $M$  de la surface, la charge  $dq$  contenue sur une petite surface  $dS_M$  centrée en  $M$  est donnée par  $dq = \sigma(M) dS_M$ . Elle s'exprime en  $C \cdot m^{-2}$  et vérifie la relation

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \sigma(M) dS_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution surfacique de charge  $\sigma$  contenue sur une surface  $\mathcal{S}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{M \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(M) dS_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.7)$$

où  $\frac{\sigma(M)dS_M}{\|MP\|^2}e_{MP}$  est le champ électrique créé par la petite surface  $dS_M$  au point  $P$ .

### Exemple 3

Un condensateur de capacité  $C = 1 \text{ nF}$  est alimenté par une tension  $U = 10 \text{ V}$ . Cette tension induit une accumulation de charges positives et négatives à la surface des deux plaques des surface  $S = 2 \text{ mm}^2$  qui le constituent. Une des plaques est alors chargée positivement avec la charge  $Q = CU = 10^{-8} \text{ C}$  tandis que l'autre est chargée négativement avec la charge  $-Q$ . Si on considère que la charge est **uniformément répartie** sur ces plaques, la densité surfacique de charge de la plaque positive est donnée par

$$\sigma = \frac{Q}{S} = 5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

## III. 3. Densité linéique de charge

On considère une charge  $Q$  répartie sur un fil  $\mathcal{L}$  (voir Fig. 1.3c). On définit **la densité linéique de charge**  $\lambda$  telle que pour tout point  $M$  du fil, la charge  $dq$  contenue sur une petite portion  $d\ell_M$  centrée en  $M$  est donnée par  $dq = \lambda(M)d\ell_M$ . Elle s'exprime en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$  et vérifie la relation

$$\int_{M \in \mathcal{L}} \lambda(M)d\ell_M = Q$$

En utilisant le principe de superposition, le champ électrostatique  $E(P)$  créé au point  $P$  de l'espace par une distribution surfacique de charge  $\lambda$  contenue sur un fil  $\mathcal{L}$  est

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{M \in \mathcal{L}} \frac{\lambda(M)d\ell_M}{\|MP\|^2} e_{MP}, \quad (1.8)$$

où  $\frac{\lambda(M)d\ell_M}{\|MP\|^2}e_{MP}$  est le champ électrique créé par la petite portion  $d\ell_M$  au point  $P$ .

### Exemple 4

Cette distribution est plus difficile à imaginer. On peut par exemple la réaliser en fixant des ions métalliques sur une chaîne de polymères. On considère une chaîne de polymère présentant une longueur  $L$  de  $1 \text{ } \mu\text{m}$ . On a fixé des ions  $Fe^+$  à trois atomes d'intervalle sur cette chaîne. La charge est donc répartie de manière uniforme le long du polymère. La taille d'un atome étant d'environ  $10^{-10} \text{ m}$ , la chaîne de polymère est composée d'environ  $10^4$  atomes. Elle porte donc une charge totale  $Q$  qui vaut  $10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}/3$ . On peut alors déduire la densité linéique de charge  $\lambda$  de cette chaîne

$$\lambda = \frac{Q}{L} \approx \frac{10^{-6} \times 10^{10} \times 1.6 \times 10^{-19}/3}{10^{-6}} = 5.3 \times 10^{-10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1.9)$$

où  $Q$  est la charge totale fixée sur le polymère.

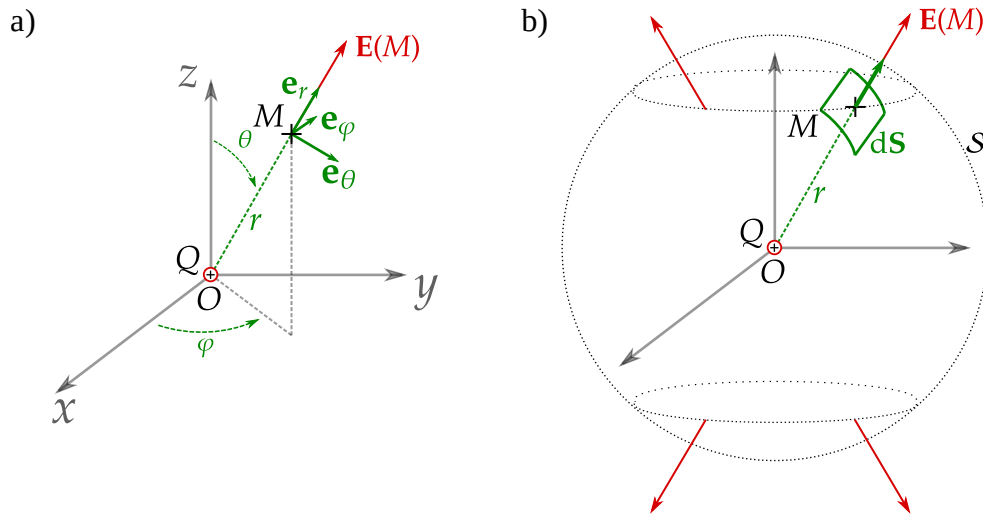


FIGURE 1.4 – Champ créé par une charge ponctuelle  $Q > 0$  située en  $O$  au point  $M$  (à gauche) et sphère  $S$  à travers laquelle on calcule le flux du champ de la charge  $Q$  (à droite).  $dS$  représente un élément infinitésimal de la surface.



#### Attention

Une distribution volumique de charge est en  $C \cdot m^{-3}$ , une distribution surfacique en  $C \cdot m^{-2}$  et une distribution linéique en  $C \cdot m^{-1}$ .

## IV. Équation de l'électrostatique

On considère une charge ponctuelle  $Q$  située à l'origine d'un repère sphérique  $(O, e_r, e_\theta, e_\varphi)$  (voir Fig. 1.4a). Le champ électrique créé par cette charge en un point  $M(r, \theta, \varphi)$  est donné par

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|OM\|^2} e_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r.$$

Nous allons nous servir de cet exemple simple pour retrouver certaines propriétés spatiales du champ électrostatique.

### IV. 1. Le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est un outil puissant qui va nous permettre de calculer facilement le champ électrique généré par une distribution de charges simple. Pour le mettre en place, nous cherchons dans un premier temps à déterminer “la quantité” de champ électrique  $E$  qui traverse une sphère  $S$  de rayon  $r$  centrée en  $O$  à laquelle  $M$  appartient (voir Fig. 1.4b).



La surface  $\mathcal{S}$  est ici une surface **fermée**.

### Surface fermée :

Une surface est dite fermée si elle délimite un volume intérieur et un volume extérieur. La surface d'une feuille de papier n'est par exemple pas une surface fermée alors que la surface d'un ballon de baudruche en est une.

On commence alors par déterminer l'expression du vecteur surface élémentaire  $d\mathbf{S}$ .

### Vecteur surface élémentaire :

À chaque élément d'aire  $dS$  centré en  $M$  de la surface  $\mathcal{S}$ , on affecte un vecteur surface élémentaire  $d\mathbf{S}$  qui vérifie les propriétés suivantes

- ▶ il a pour norme l'aire du petit élément de surface centré au point  $M$ . Il est donc homogène à une surface.
- ▶ il est orthogonal à la surface.
- ▶ il doit être orienté. Cette orientation est au choix de l'utilisateur.



### Attention

Une surface en physique doit toujours être orientée pour savoir si le flux qu'on calcule est un flux entrant ou sortant.

$\mathcal{S}$  est une sphère de rayon  $r$  fixé, pour se déplacer à la surface de cette dernière, il suffit de faire varier  $\theta$  et  $\varphi$ .  $d\mathbf{S}$  étant orthogonal à la surface  $\mathcal{S}$ , on a

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r.$$

Pour déterminer la quantité de champ électrique qui sort de la surface  $\mathcal{S}$ , on introduit la notion de flux. On retrouve cette notion en géographie, où le flux migratoire exprime le nombre de personnes entrant ou sortant d'un pays.

### Flux d'un champ de vecteurs :

Soit  $M$  un point d'une surface fermée en lequel règne un champ  $E(M)$ . Soit  $d\mathbf{S}$  le vecteur surface élémentaire sortant associé à l'élément de surface centré en  $M$ . **Le flux sortant élémentaire** du vecteur  $E$  à travers  $d\mathbf{S}$  est donné par  $E(M) \cdot d\mathbf{S}$ .

**Le flux total sortant** d'un champ de vecteur  $E$  à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est simplement la somme sur tous les éléments de la surface de tous les flux élémentaires sortants

$$\oint_{M \in \mathcal{S}} E(M) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.10)$$

Il s'exprime en  $V \cdot m$ . Le flux est une grandeur algébrique qui peut-être positive ou négative. Le symbole  $\oint$  signifie que l'intégrale est réalisée sur une surface fermée, il n'est pas obligatoire.

Le flux de  $E$  à travers  $S$  s'écrit alors

$$\oiint_S E \cdot dS = \oiint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi e_r \cdot e_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

Ce flux est sortant si la charge  $Q$  est positive et est entrant si la charge  $Q$  est négative. On constate alors que le flux du champ électrique à travers la sphère  $S$  de rayon  $r$  ne dépend que de la charge  $Q$  qu'elle contient et pas de son rayon. Cette propriété que nous venons de montrer pour une charge ponctuelle est en fait une propriété du champ électrique connue sous le nom de **théorème de Gauss**.

**Théorème de Gauss :**

Le flux du champ électrique  $E$  à travers une surface fermée  $S$ , qui délimite un volume  $\mathcal{V}$ , est égale à la charge incluse  $Q$  dans ce volume, divisé par  $\epsilon_0$

$$\oiint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.12)$$

La surface  $S$  est appelée la **surface de Gauss**.

Le théorème de Gauss peut-être traduit sous une forme locale, appelée l'**équation de Maxwell-Gauss**, qui relie alors le champ électrique à la distribution de charge.

**Équation de Maxwell-Gauss :**

L'équation de Maxwell-Gauss relie le champ électrique  $E$  à la distribution de charge  $\rho$

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

La divergence de  $E$  est une grandeur **scalaire**. Cette équation est une relation **locale**, elle permet de relier les dérivées spatiales du champ électrique en un point de l'espace à la densité volumique de charge en ce même point.

## IV. 2. Le potentiel électrostatique et l'équation de Maxwell-Faraday

On cherche maintenant à calculer le rotationnel du champ. Cela donne en coordonnées sphériques

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi} \right] e_r + \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta} \right] e_\varphi,$$

où  $E_r$ ,  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  sont respectivement les composantes de  $E$ . Ici,  $E_r$  ne dépend que de  $r$  et les composantes  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  sont nulles. On a donc

$$\operatorname{rot} E = 0.$$

Ce résultat se généralise à un champ électrostatique  $E$  quelconque sous la forme de l'équation de Maxwell-Faraday.

**Équation de Maxwell-Faraday :**

Un champ électrique  $E$  en **régime statique**, c'est-à-dire indépendant du temps, vérifie

$$\text{rot } E = 0. \quad (1.14)$$

Le rotationnel de  $E$  est une grandeur **vectorielle**. Comme l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation de Maxwell-Faraday est une relation **locale** vérifiée en tout point de l'espace.

Comme l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation de Maxwell-Faraday peut se mettre sous une forme intégrale, en exprimant la circulation du champ électrique sur une courbe fermée  $C$ .

**Circulation d'un champ de vecteurs :**

Soit  $W$  un champ de vecteur et  $C$  un arc de courbe orienté dans l'espace. On appelle circulation du champ de vecteurs  $W$  le long de  $C$  la quantité

$$\int_{M \in C} W(M) \cdot d\ell_M.$$



**Attention**

Un contour doit toujours être orienté!

**Circulation du champ électrostatique :**

La circulation du champ électrostatique  $E$  le long d'un contour fermé orienté  $C$  est nul

$$\oint_C E \cdot d\ell = 0. \quad (1.15)$$

On dit alors que le champ électrique est à circulation **conservative**.

Le champ électrostatique est donc un champ dont le rotationnel est nul en tout point de l'espace. L'analyse vectorielle affirme qu'il est possible dans ce cas de définir un champ

scalaire  $V$ , défini à une constante près, tel que  $E = -\text{grad } V$ .

**Potentiel électrostatique :**

Le champ électrostatique étant à rotationnel nul, il existe un champ scalaire  $V$ , appelé **potentiel électrostatique**, tel qu'en tout point de l'espace

$$E = -\text{grad } V. \quad (1.16)$$

Le potentiel électrostatique s'exprime en volts. Il est toujours défini à une constante près. La circulation du champ électrostatique entre un point  $A$  et un point  $B$  est alors donnée par

$$\int_A^B E \cdot d\ell = V(A) - V(B) \quad (1.17)$$

En reportant  $E$  par  $-\nabla V$  dans l'équation de Maxwell-Gauss 1.13, on obtient

$$\text{div}(-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

**Équation de Poisson :**

Le potentiel électrique suit l'**équation de Poisson**

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.18)$$

De plus, la force électrostatique est une **force conservative**. On peut alors définir une **énergie potentielle** qui lui est associée.

**Énergie potentielle électrostatique :**

La force électrostatique  $F$  est une force conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle  $E_p$

$$F = -\text{grad } E_p. \quad (1.19)$$

Cette énergie est définie à une constante près. Elle s'exprime en joule ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  en SI). Une charge  $q$  placée en un point  $M$  de l'espace où règne un potentiel électrostatique  $V$  possède une énergie potentielle électrostatique

$$E_p = qV(M) + X,$$

où  $X$  est une constante. Elle est soumise à la force électrostatique

$$F = -\text{grad } E_p.$$

**Exemple 5**

Dans l'Exemple 1 du modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, le proton génère un potentiel  $V$

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

L'électron possède donc une énergie potentielle  $E_p$  donnée par

$$E_p(r) = -eV(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + C,$$

où  $C$  est une constante. Nous posons  $C = 0$ , ce qui nous permet d'obtenir une énergie potentielle qui est nulle lorsque  $r$  tend vers l'infini. L'électron possède alors une énergie potentielle  $E_p \approx -27.3$  eV, où  $1 \text{ eV} \approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ . L'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron permet de déterminer la vitesse de ce dernier dans le référentiel d'étude. On peut alors en déduire son énergie cinétique

$$E_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = 13.7 \text{ eV}.$$

Finalement, l'électron possède une énergie totale de  $-13.6$  eV.

## V. Étude des lignes de champ de $E$

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés spatiales du champ  $E$ . Nous allons voir comment les **lignes de champ** nous renseignent sur sa répartition dans l'espace.

### **Ligne de champ :**

Une ligne de champ est une courbe tangente en chaque point au vecteur du champ de vecteurs considéré, orientée dans le sens du champ. Deux lignes de champ ne peuvent pas se croiser.

Pour déterminer l'équation de ces lignes de champ, il suffit de résoudre l'équation qui traduit la tangence en tout point de l'espace  $M$  des lignes de champ au vecteur  $E(M)$

$$E \times d\ell = 0, \tag{1.20}$$

où  $d\ell$  est un élément de la ligne de champ.

### Exemple 6

Les lignes du champ électrostatique  $E$  générées par une charge ponctuelle  $q$  sont des droites portées par un rayon de la charge (voir Fig 1.5). Si la charge est positive, elles sont orientées vers l'extérieur. À l'inverse si elle est négative, elles sont orientées vers la charge. On cherche à déterminer l'équation de ces lignes de champ. On se place dans un repère sphérique  $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$  centré sur le centre de la charge  $q$ . Un point de l'espace  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Un élément  $d\ell$  de la ligne de champ passant par  $M$  doit vérifier

$$E(M) \times d\ell = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} 1/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ \sin \theta d\varphi / r \\ d\theta / r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta d\varphi / r = 0 \\ d\theta / r = 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, tous les points de cette ligne de champ doivent avoir le même  $\theta$  et le même  $\varphi$ . Les lignes de champ sont donc bien portées par des rayons de la charge.

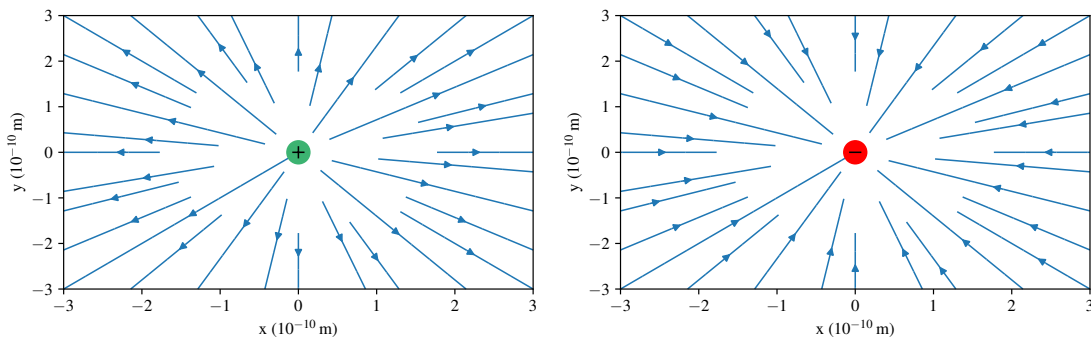


FIGURE 1.5 – Ligne du champ  $E$  créé par une charge positive (à gauche) et par une charge négative (à droite).

Nous allons maintenant considérer le cas d'un proton et d'un électron séparés par une distance de 0.2 nm (voir Fig. 1.6). Les lignes de champ nous permettent de retrouver quelques propriétés du champ électrostatique énoncées précédemment.

1. On remarque tout d'abord que les lignes de champ sont orientées de la **charge positive vers la charge négative**. Cette première observation peut être vue comme une conséquence de la relation reliant le champ électrique  $E$  et le potentiel électrostatique  $V$  (voir Eq. 2.13). En effet, le sens de  $E$  est opposé à celui du gradient de  $V$  (comme le traduit le signe  $-$  dans l'expression). La ligne de champ s'écoule donc du potentiel le plus élevé vers le moins élevé.
2. La divergence d'un champ vectoriel permet de mesurer le flux de ce dernier à travers un volume. Si elle est nulle, une ligne de champ entrant dans un volume doit absolument en ressortir. La divergence non nulle du champ électrique (voir Eq. 1.13)

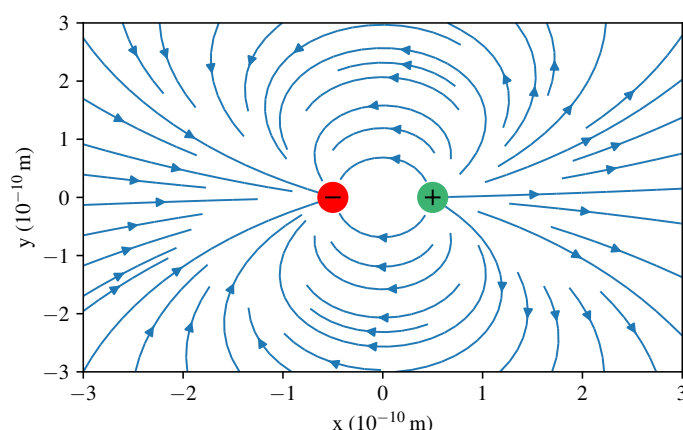


FIGURE 1.6 – Lignes du champ électrique générées par un proton (charge verte) et un électron (charge rouge).

se traduit par la possibilité pour les lignes de champ d'émerger d'un volume (du proton ici) et de converger dans un volume (l'électron ici).

3. Le rotationnel d'un champ vectoriel traduit la tendance de ce dernier à tourner autour d'un point. Le rotationnel nul du champ électrique se traduit par l'impossibilité pour les lignes de champ de tourner autour d'un point. Une ligne du champ électrique ne peut donc pas reboucler sur elle-même.
4. Grâce aux lignes de champ, on retrouve rapidement les plans de symétrie et d'antisymétrie du champ électrique. Le plan médiateur est par exemple un plan d'antisymétrie du champ électrique. L'analyse de ces symétries sera utile pour calculer le champ électrique d'une distribution de charge.

## VI. Calcul du champ électrostatique

Nous allons voir dans cette partie comment nous pouvons utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique créé par une distribution de charges simple. Nous nous intéressons ici à une boule de rayon  $R_1$  et de centre  $O_1$  uniformément chargée avec une densité volumique de charge  $\rho > 0$  (voir Fig. 1.7). On cherche à déterminer l'expression du champ électrique  $E$  en un point  $M$  de l'espace. Pour ce faire, il suffit de suivre le mode d'emploi suivant

1. Faire un schéma du système! C'est absolument indispensable (voir Fig. 1.7)
2. Choisir un repère adapté au problème
3. Étudier les invariances de cette distribution
4. Étudier les symétries de la distribution de charges à l'origine du champ électrique
5. Choisir une surface de Gauss et appliquer le théorème de Gauss.

Nous choisissons ici d'utiliser un repère sphérique ( $O_1, e_r, e_\theta, e_\varphi$ ). Le point  $M$  est donc repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Le champ électrique en  $M$  s'écrit de manière générale

$$E(M) = E_r(M)e_r + E_\theta(M)e_\theta + E_\varphi(M)e_\varphi. \quad (1.21)$$

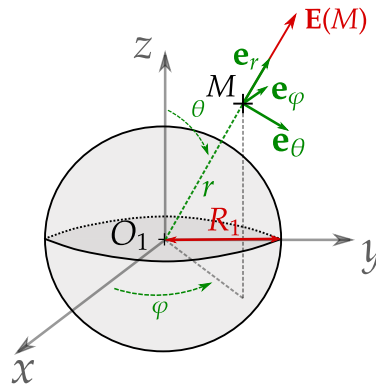


FIGURE 1.7 – Schéma de la cavité uniformément chargée.

Le champ électrique est un vecteur à trois composantes et chaque composante dépend des coordonnées de  $M$ . Pour simplifier cette expression, il est intéressant de considérer les invariances et symétries de la distribution de charge qui génère le champ  $E$ .

### VI. 1. Invariance de la distribution de charges

On cherche ici à savoir si la distribution de charge est modifiée sous l'effet d'une translation ou d'une rotation de l'espace. En d'autres termes, on regarde de quelles variables dépend la densité de charge  $\rho$ . Étant donné que la sphère est ici uniformément chargée, on observe que

- si je tourne la sphère d'un angle  $\Delta\theta$  dans la direction  $e_\theta$ , le problème ne change pas. La distribution de charge est donc invariante par rotation selon l'angle  $\theta$ .  **$E$  ne dépend pas de  $\theta$ .**
- si je tourne la sphère d'un angle  $\Delta\varphi$  dans la direction  $e_\varphi$ , le problème ne change pas. La distribution de charge est donc invariante par rotation selon l'angle  $\varphi$ .  **$E$  ne dépend pas de  $\varphi$ .**
- si je déplace la sphère d'une distance  $\Delta r$  dans la direction  $e_r$  je remarque que le problème change. Par exemple si  $\Delta r$  est supérieur à  $R_1$ , le point  $O_1$  n'appartient plus à la sphère après la translation.  **$E$  dépend de  $r$ .**

Finalement, l'expression 1.21 du champ électrique se simplifie

$$E(M) = E_r(r)e_r + E_\theta(r)e_\theta + E_\varphi(r)e_\varphi. \quad (1.22)$$

### VI. 2. Symétries de la distribution de charges

#### Principe de Curie :

Lorsque les causes produisent des effets, les symétries présentes dans les causes doivent se retrouver dans celles des effets.

Si on applique ce principe au champ électrique créé par une distribution de charges, cela revient à dire que les symétries de la distribution de charges doivent se retrouver dans



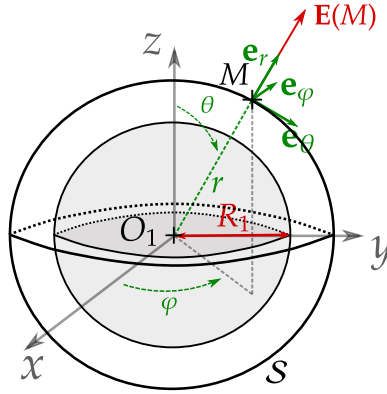


FIGURE 1.8 – Schéma de la cavité avec la surface de Gauss  $S$  qui est une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O_1$ .  $M$  appartient à cette surface.

les symétries du champ électrique. On en déduit les règles suivantes

**Symétries de  $E$  et de la distribution de charge :**

- si  $(\Pi)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $E(M)$  doit appartenir à  $(\Pi)$ ,
- si  $(\Pi)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de charge et que  $M$  appartient à  $(\Pi)$ , alors obligatoirement  $E(M)$  doit être orthogonal à  $(\Pi)$ .

Pour appliquer ces règles à notre exemple, on détermine les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de charges auxquels le point  $M$  appartient

- le plan  $(M, e_r, e_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $E(M)$  **doit donc appartenir à ce plan.**
- le plan  $(M, e_r, e_\phi)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge.  $E(M)$  **doit donc appartenir à ce plan.**

$E(M)$  doit appartenir au plan  $(M, e_r, e_\theta)$  et au plan  $(M, e_r, e_\phi)$ .  $E$  doit donc être colinéaire à  $e_r$

$$E(M) = E_r(r)e_r. \quad (1.23)$$

Nous n'avons imposé aucune condition sur la position de  $M$ , cette relation est donc vraie pour tout point  $M$  de l'espace. Maintenant que l'expression du champ électrique a été simplifiée au maximum, on cherche à appliquer le théorème de Gauss.

### VI. 3. Application du théorème de Gauss

La distribution de charge présente une symétrie sphérique. On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O_1$  (voir Fig 1.8) et on applique le théorème de Gauss sur cette sphère

$$\oiint_S E(M) \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.24)$$

où  $Q$  est la charge contenue à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ . On commence par déterminer l'expression du membre de gauche. Comme nous l'avons vu (voir Sec. IV. 1.), dans le cas d'une sphère,

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi e_r. \quad (1.25)$$

On obtient alors

$$\oiint_{\mathcal{S}} E(M) \cdot dS = \oiint_{\mathcal{S}} E(r) e_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi e_r = E(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi E(r) r^2. \quad (1.26)$$

On s'intéresse maintenant au terme de droite de l'équation V. 3.. La charge  $Q$  est uniformément répartie dans la sphère de rayon  $R_1$ , on a donc

$$\rho(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r > R_1, \\ \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3}, & \text{si } r \leq R_1. \end{cases} \quad (1.27)$$

On a alors deux cas de figure

1. si  $r \leq R_1$ ,  $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} e_r$ .
2. si  $r > R_1$ ,  $Q = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} e_r$ .

**Remarque.** Si on remplace  $\rho$  par son expression en fonction de  $Q$ ,  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R_1^3}$ , dans la deuxième situation, on retrouve le champ électrique généré par une charge ponctuelle.

---

## Bibliographie

- Cardini, S., Ehrhard, E., Guerillot, A., Guillot, T., Morvan, B., & Sanz, M.-N., 2014. Électromagnétisme en régime statique : le champ électrique, in *Physique Tout-En-Un PSI-PSI\**, J'intègre, pp. 465–502, Dunod.
- Gié, H. & Sarmant, J.-P., 1985. Forme locale des lois de l'électrostatique, in *Électromagnétisme*, vol. 1 of **Collection de Sciences Physiques**, pp. 41–46, Technique et Documentation (Lavoisier).
- Perez, J., Bellanger, É., Ducros, X., Renvoizé, V., & Roux, P., 2009. Électrostatique, in *Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Cap Prépa, pp. 416–448, Pearson Education.
- Pérez, J.-P., Carles, R., & Fleckinger, R., 2002. Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Théorème de Gauss, in *Électromagnétisme : Fondements et Applications*, Masson Sciences, pp. 13–25, Dunod, 4th edn.