

# CÔNG NGHỆ CHUỖI KHỐI

## BÀI TẬP LÝ THUYẾT NHÓM

Ngày 3 tháng 12 năm 2023

**Bài 1.** Cho  $p$  là một số nguyên tố, ta kí hiệu  $\mathbb{Z}_p^*$  là tập các số dư khác 0 của các số nguyên khi chia cho  $p$ . Ta định nghĩa phép toán nhân  $(*)$  trong  $\mathbb{Z}_p^*$  như sau:

$$x, y \in \mathbb{Z}_p^* : x * y = (xy) \% p.$$

Chúng tỏ rằng  $(\mathbb{Z}_p^*, *)$  là một nhóm.

**Bài 2.** Cho tập  $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ và } ad - bc \neq 0 \right\}$  với phép toán cộng  $(+)$  và nhân  $(\cdot)$  hai ma trận thông thường. Hãy chứng tỏ  $(G, +)$  và  $(G, \cdot)$  là các nhóm.

**Bài 3.** Cho  $(G, \cdot)$  là một nhóm hữu hạn và  $a \in G$ . Số nguyên dương  $d$  nhỏ nhất thỏa  $a^d = e$  được gọi là cấp của phần tử  $a$  trong  $G$ . Chứng tỏ rằng nếu  $d$  là cấp của  $a$  và  $k$  là số nguyên thỏa  $a^k = e$  thì  $k$  chia hết cho  $d$ .

**Bài 4.** Cho  $G$  là nhóm đơn sinh hữu hạn cấp  $n$  có phần tử sinh là  $a$ , phần tử  $b = a^k$ . Chứng tỏ rằng:

- Cấp của  $b$  là  $\frac{n}{d}$ , với  $d = (n, k)$ .
- $b$  là phần tử sinh của  $G$  khi và chỉ khi  $(n, k) = 1$ .
- Số lượng phần tử sinh của nhóm  $G$  là  $\varphi(n)$  ( $\varphi(n)$  là số các số nguyên dương nhỏ hơn  $n$  và nguyên tố cùng nhau với  $n$ ).

**Chú ý:**  $a$  được gọi là phần tử sinh của nhóm đơn sinh  $G$  nếu  $G = \langle a \rangle$ .

**Bài 5.** Áp dụng bài tập 4, thực hiện các yêu cầu sau:

- Hãy chứng tỏ nhóm  $\mathbb{Z}_{10}^*$  gồm các số nguyên dương nhỏ hơn 10 và nguyên tố cùng nhau với 10 là nhóm đơn sinh, chỉ ra các phần tử sinh của  $\mathbb{Z}_{10}^*$  và cấp của tất cả các phần tử của nhóm.
- Hãy chứng tỏ nhóm  $\mathbb{Z}_{17}^*$  là nhóm đơn sinh, chỉ ra tất cả các phần tử sinh của  $\mathbb{Z}_{17}^*$ .

**Deadline: 24h ngày 9-12-2023, anh chị scan thành file pdf và đặt tên file theo cấu trúc "Họ tên\_MSHV" và nộp theo link sau**

<https://forms.gle/DRoT9tQn98Z4Umhq6>