

本週實習將運用奇異值分解(singular value decomposition) 來壓縮影像。
用活腳本作答。

我們在網上找了 2400x3840 pixel(像素)，就是 9 百萬像素(megapixel)的紅鶴圖(flamingo)*。

紅鶴 Flamingo



每個像素會賦予一組由 0 到 255 之間所成的三個數字，其數字分別對應於紅色(Red)，綠色(Green)和藍色(Blue)三色。因此，該紅鶴圖本身會對應到三個 2400x3840 顏色矩陣 R; G; B，其值域在 0 到 255 之間。原圖本來可用 uint8 資料型態存檔，但為了運算方便可以將其資料型態轉成 double (將 uint8 的值 除以 255)。另外，你也許會認為函式 imsplit 有用。

假設我們奇異值分解 $R = U \Sigma V^T$ 。然後取 k 個最大奇異值， $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ 以及向量 u_1, \dots, u_k 和 v_1, \dots, v_k 我們可以建立 矩陣 R_k

$$\widetilde{R}_k = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & \dots & u_k \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & \dots & v_k \\ | & | & | \end{bmatrix}^T$$

我們需要分別對這三個顏色矩陣來執行奇異值分解，利用 K 個最大的奇異值來壓縮該圖像。請用 1, 10, 25, 50, 100, 和 200 個奇異值產生出壓縮(近似)的圖像。何

*紅鶴，又名火鶴或火烈鳥。為一種大型水鳥，主要分布於非洲、中南美洲，以及印度等部分亞熱帶地區。

時你不再能區別出該圖像與原版紅鶴圖？

分析步驟可略分為下：

- (1) 分別對三個顏色矩陣來執行奇異值分解
- (2) 奇異值分解後的 U, S, V 矩陣？
- (3) U, S, V 矩陣的資料大小(與原圖比 約占百分之多少?)
- (4) 利用 U, S, V 重建圖型

用 1, 10, 25, 50, 100, 和 200 個最大奇異值所產生的相似圖討論。

建議可用 `svds` 函式運算

*紅鶴，又名火鶴或火烈鳥。為一種大型水鳥，主要分布於非洲、中南美洲，以及印度等部分亞熱帶地區。