Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 9 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe partielle Ableitung, Tangentialebene, Gradient, totales Differential, Satz von Schwarz, Hesse-Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partiellen Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen berechnen.
- Sie können die Tangentialebene in einem Punkt an ein Skalarfeld bestimmen.
- Sie können den Gradienten, das totale Differential und die Hesse-Matrix von Skalarfeldern bestimmen.

---

1. Aussagen über partielle Ableitungen

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Unter einer partiellen Ableitung von f versteht man die Ableitung nach einer der n Variablen, wobei die anderen Variablen wie Konstanten betrachtet werden.	X	
b) Die partiellen Ableitungen können mit Hilfe des Differenzquotienten bestimmt werden.	X	
c) Die Rechenregeln für Ableitungen von einer Funktion in einer Variablen gelten auch für partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen.	X	
d) Jede in einem Punkt P differenzierbare Funktion f ist dort partiell differenzierbar.	X	
e) Aus der Existenz von $grad(f(\vec{x}))$ folgt: die Tangentialebene an f ist in $\vec{x}$ berechenbar.	X	

2. Ableitungswerte von Funktionen in zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen allgemein und an den gegebenen Stellen (x_0,y_0).

a) $f(x,y) = \sqrt{2x + 3xy + 4y}, (x_0, y_0) = (1; 1)$
b) $f(x,y) = \cos(e^{xy} + xy)\,, (x_0, y_0) = (0; 1)$
c) $f(x,y) = x^{2y}, (x_0, y_0) = (2; 1)$

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

d) $z = f(x,y) = (2x - 3y^2)^5$
e) $z = f(x,y) = (x^3 - y^2) \cdot \cosh(xy)$
f) $z = f(x,y) = \ln(2x + e^{3y})$

a)
Mit der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = \frac{2+3y}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3xy+4y}} + \frac{3}{2}\frac{y}{\sqrt{2x+3xy+4y}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{3x+4}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} = \frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+3xy+4y}} + \frac{2}{\sqrt{2x+3xy+4y}}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(1,1) = \frac{5}{6} \text{ und } f_y(1,1) = \frac{7}{6}.$$

b)
Ebenfalls aus der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = -\sin\left(e^{xy} + xy\right)\left(ye^{xy} + y\right),$$

$$f_y(x,y) = -\sin\left(e^{xy} + xy\right)\left(xe^{xy} + x\right).$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(0,1) = -2\sin(1) \text{ und } f_y(0,1) = 0.$$

c)
Hier verwenden wir $f(x,y) = e^{2y\ln x}$ und erhalten

$$f_x(x,y) = 2y \cdot x^{2y-1},$$

$$f_y(x,y) = 2\ln x \cdot e^{2y\ln x} = 2\ln x \cdot x^{2y}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(2,1) = 4 \text{ und } f_y(2,1) = 8\ln 2.$$

d)
Differenziert wird mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \underbrace{(2x - 3y^2)}_{u}{}^5 = u^5 \quad \text{mit} \quad u = 2x - 3y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 5u^4 \cdot 2 = 10u^4 = 10(2x - 3y^2)^4$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 5u^4 \cdot (-6y) = -30yu^4 = -30y(2x - 3y^2)^4$$

e)
Differenziert wird jeweils nach der *Produktregel*, wobei die (partiellen) Ableitungen des Faktors $\cosh(xy)$ mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet werden:

$$z = \underbrace{(x^3 - y^2)}_{u} \cdot \underbrace{\cosh(xy)}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^3 - y^2 \quad \text{und} \quad v = \cosh\underbrace{(xy)}_{t} = \cosh t \quad \text{mit} \quad t = xy$$

$$u_x = 3x^2, \quad u_y = -2y \quad \text{und} \quad v_x = (\sinh t) \cdot y = y \cdot \sinh(xy), \quad v_y = (\sinh t) \cdot x = x \cdot \sinh(xy)$$

$$z_x = u_x v + v_x u = 3x^2 \cdot \cosh(xy) + y \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$

$$= 3x^2 \cdot \cosh(xy) + (x^3 y - y^3) \cdot \sinh(xy)$$

$$z_y = u_y v + v_y u = -2y \cdot \cosh(xy) + x \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$

$$= -2y \cdot \cosh(xy) + (x^4 - xy^2) \cdot \sinh(xy)$$

f)
Wir benötigen jeweils die *Kettenregel*:

$$z = \ln\underbrace{(2x + e^{3y})}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2x + e^{3y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cdot e^{3y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2x + e^{3y}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 3 \cdot e^{3y} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{u} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{2x + e^{3y}}$$

3. Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a) $z = f(x, y) = x \cdot e^y - y \cdot e^x$

b) $z = f(x, y) = \ln(2y - x^2)$

c) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy}$.

a)
Alle Ableitungen erhält man durch *elementare* gliedweise (partielle) Differentiation.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot e^y - y \cdot e^x\right] = 1 \cdot e^y - y \cdot e^x = e^y - y \cdot e^x$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[x \cdot e^y - y \cdot e^x\right] = x \cdot e^y - 1 \cdot e^x = x \cdot e^y - e^x$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\, z_x = \frac{\partial}{\partial x}\,[\mathrm{e}^{y} - y \cdot \mathrm{e}^{x}] = 0 - y \cdot \mathrm{e}^{x} = -y \cdot \mathrm{e}^{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\, z_x = \dfrac{\partial}{\partial y}\,[\mathrm{e}^{y} - y \cdot \mathrm{e}^{x}] = \mathrm{e}^{y} - 1 \cdot \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x} \\[2ex] z_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\, z_y = \dfrac{\partial}{\partial x}\,[x \cdot \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x}] = 1 \cdot \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z_{xy} = z_{yx}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\, z_y = \frac{\partial}{\partial y}\,[x \cdot \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{x}] = x \cdot \mathrm{e}^{y} - 0 = x \cdot \mathrm{e}^{y}$$

b)

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Wir verwenden wie folgt die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2y - x^2)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{u} = \frac{-2x}{2y - x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2y - x^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

z_{xx} erhalten wir, indem wir z_x mit Hilfe der *Quotientenregel* partiell nach x differenzieren:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -2x, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2, \quad v_x = -2x$$

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{-2(2y - x^2) - (-2x)(-2x)}{(2y - x^2)^2} = \frac{-4y + 2x^2 - 4x^2}{(2y - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 4y}{(2y - x^2)^2}$$

z_{xy} erhält man aus z_x durch partielles Differenzieren nach y. Wir benötigen die *Kettenregel*:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = -2x\,\underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = -2x \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -2x(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = 4x \cdot u^{-2} = \frac{4x}{u^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Alternative: Sie differenzieren nach der *Quotientenregel*, wobei der Zähler eine *konstante*, d. h. von der Variablen y *unabhängige* Funktion ist.

z_{yx} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Quotienten-* oder *Kettenregel* partiell nach x differenzieren. Wir wollen an dieser Stelle die *Quotientenregel* verwenden:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = 0, \quad v_x = -2x$$

$$z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{0(2y - x^2) - (-2x) \cdot 2}{(2y - x^2)^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Ketten-* oder *Quotientenregel* partiell nach y differenzieren. Wir verwenden hier die *Kettenregel*:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = 2\underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = 2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial z_y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = -4u^{-2} = \frac{-4}{u^2} = \frac{-4}{(2y - x^2)^2}$$

c)

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - 2xy}}; \quad z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2xy}};$$

$$z_{xx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2xy} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y)(x - y)}{x^2 - 2xy} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2xy) - (x - y)^2}{(x^2 - 2xy)\sqrt{x^2 - 2xy}} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}};$$

$$z_{yy} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}; \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}$$

4. Ableitungen in Funktion einsetzen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z = f(x, y) = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, mit x > 0 und y > 0, die Gleichung $xz_x + yz_y = xy + z$ (bzw. in anderer Schreibweise: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy + z$) erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, t) = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x), a \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$ (andere Schreibweise: $a^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$) ist.

a)

Die Funktion wird *vor* dem Differenzieren unter Verwendung der Rechenregel $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ in eine *günstigere* Gestalt gebracht:

$$z = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) = xy + x(\ln y - \ln x) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(y + \ln y) - x \cdot \ln x$$

Gliedweises partielles Differenzieren nach x unter Verwendung der *Produktregel* liefert dann:

$$z = x\underbrace{(y + \ln y)}_{\text{konst. Faktor}} - \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = x(y + \ln y) - (uv) \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = \frac{1}{x}$$

$$z_x = 1(y + \ln y) - (u_x v + v_x u) = y + \ln y - \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\right) = y + \ln y - \ln x - 1$$

Die partielle Ableitung nach y lässt sich besonders einfach bilden:

$$z = \underbrace{x}_{\text{konst. Faktor}}(y + \ln y) - \underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{konst. Summand}} \quad \Rightarrow \quad z_y = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) - 0 = x + \frac{x}{y}$$

Wir setzen die Ausdrücke für z, z_x und z_y seitenweise in die vorgegebene Gleichung ein:

Linke Seite: $x z_x + y z_y = x(y + \ln y - \ln x - 1) + y\left(x + \dfrac{x}{y}\right) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x - x + xy + x =$

$$= 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$$

Rechte Seite: $xy + z = xy + xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$

Ein Vergleich zeigt, dass beide Seiten übereinstimmen.

b)

Wir bilden zunächst die benötigten partiellen Ableitungen f_t und f_{xx}.

Partielle Ableitung f_t

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = -\pi^2 a^2 t \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\pi^2 a^2$$

Mit der *Kettenregel* erhält man $(\sin(\pi x)$ ist ein *konstanter* Faktor):

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot (-\pi^2 a^2) = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$$

Partielle Ableitung f_{xx}

Wir differenzieren die Funktion $f(x;\, t)$ *zweimal* nacheinander partiell nach x, wobei wir jedes Mal die *Kettenregel* benutzen $(\mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$ ist dabei ein *konstanter* Faktor):

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin\underbrace{(\pi x)}_{u} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (\cos u) \cdot \pi = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (-\sin u) \cdot \pi = -\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$$

Wir multiplizieren f_{xx} mit a^2 und erhalten:

$$a^2 \cdot f_{xx} = a^2 [-\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)] = \underbrace{-\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}}_{f_t} = f_t$$

Die gegebene Funktion erfüllt somit (wie behauptet) die Differentialgleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$.

5. Tangentialebene

Bestimmen Sie die Tangentialebene zu

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{y+3}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.

b) $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0; 1)$.

c) $f(x,y) = 3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2 \cdot \cos\big(\pi(x + 2y)\big)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.

d) In welchem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ der Fläche $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 7$ verläuft die Tangentialebene parallel zur Ebene $z = f(x,y) = 8x + 2y$? Wie lautet die Gleichung dieser Tangentialebene?

a)
Wir berechnen zuerst die beiden partiellen Ableitungen

$$f_x = \frac{3x^2}{y+3}, \quad f_y = -\frac{x^3}{(y+3)^2}$$

und setzen dort den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ein:

$$f_x(2,1) = \tfrac{12}{4} = 3, \quad f_y(2,1) = -\tfrac{8}{16} = -0{,}5$$

Zusammen mit $f(2,1) = \frac{8}{4} = 2$ ergeben diese Werte die Tangentialebene

$$z = 2 + 3(x-2) - \tfrac{1}{2}(y-1)$$

b)

$$z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad z_x(0;1) = -1; \quad z_y(0;1) = 2$$

$$z - 1 = -1(x-0) + 2(y-1) \quad \Rightarrow \quad z = -x + 2y - 1$$

c)

$$z_x = 3y^{-1/2} - 2\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y); \quad z_y = -\frac{3}{2}xy^{-3/2} - 4\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y);$$

$$z_x(2;1) = 3; \quad z_y(2;1) = -3; \quad P = (2;1;8); \quad z = 3x - 3y + 5$$

d)
Die gesuchte Tangentialebene muss in der x- bzw. y-Richtung den *gleichen* Anstieg haben wie die Ebene $z = 8x + 2y$, d. h. im (noch unbekannten) Flächenpunkt P_0 müssen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung die Werte $f_x(x_0; y_0) = 8$ und $f_y(x_0; y_0) = 2$ haben. Mit $f_x(x; y) = z_x = 2x$ und $f_y(x; y) = z_y = 2y$ folgt also:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0; y_0) = 2x_0 = 8 \\ f_y(x_0; y_0) = 2y_0 = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$

Die zugehörige Höhenkoordinate ist $z_0 = f(x_0; y_0) = f(4; 1) = 16 + 1 - 7 = 10$.

Flächenpunkt: $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

Gleichung der Tangentialebene in $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 10 = 8(x-4) + 2(y-1) = 8x - 32 + 2y - 2 = 8x + 2y - 34 \quad \Rightarrow \quad z = 8x + 2y - 24$$

6. Totales Differenzial

a) Berechnen Sie das totale Differenzial dF der Funktion $F(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y - \sqrt{2}\sin y \cos z$. Durch die Gleichung F(x,y,z) = 0 ist lokal um die Stelle (1;π/2;π/4) eine Funktion z = f(x,y) gegeben. Berechnen Sie das totale Differenzial dz = df dieser Funktion an der genannten Stelle. Wie ändert sich demzufolge näherungsweise die Variable z, wenn man x und y jeweils um 0,1 erhöht?

b) Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion $u = u(x,y,z) = \ln\sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3}$.
Wie lautet es an der Stelle (-1;2;-2)? Welchen Näherungswert für die abhängige Variable u liefert das totale Differential für die Änderungen dx = 0,1, dy = -0,2 und dz = -0,1?

a)
Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 4x^3 + 2\cos(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z) \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \sqrt{2}\sin(y)\sin(z)
\end{aligned}$$

Damit:

$$dF = (4x^3 + 2\cos(y))\,dx + (-2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy + \sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz$$

Auf der Funktion f gilt:

$$\begin{aligned}
dF &= (4x^3 + 2\cos(y))\,dx + (-2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy + \sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit gilt an der betrachteten Stelle $(x,y,z) = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned}
dF\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(4 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\,dx + \left(-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\,dy \\
&\quad + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\,dz \\
&= (4 + 2\cdot 0)\,dx + \left(-2\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,dy \\
&\quad + \sqrt{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,dz \\
&= 4\,dx - 2\,dy + dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus:

$$dz = -4\,dx + 2\,dy$$

Für Änderungen $dx = dy = 0{,}1$ ergibt sich demzufolge als Änderung in z

$$dz = -4\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}1 = -0{,}4 + 0{,}2 = -0{,}2.$$

b)
Wir bringen die Funktion zunächst in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$u = \ln\sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3} = \ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^{3/2} = \frac{3}{2}\cdot\ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)$$

Rechenregel: $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Es genügt, die partielle Ableitung u_x zu bilden, denn die Funktion ist *symmetrisch* in den drei unabhängigen Variablen x, y und z. Die Ableitung u_x erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$u = \frac{3}{2}\cdot\ln\underbrace{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}_{t} = \frac{3}{2}\cdot\ln t \quad \text{mit} \quad t = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 4x$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot 4x = \frac{3}{2}\cdot\frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{3\cdot 4x}{2\cdot 2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wegen der erwähnten *Symmetrie* gilt (x wird durch y bzw. z ersetzt):

$$u_y = \frac{3y}{x^2+y^2+z^2}, \quad u_z = \frac{3z}{x^2+y^2+z^2}$$

Das *totale Differential* besitzt dann die folgende Gestalt:

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \frac{3x}{x^2+y^2+z^2}\,dx + \frac{3y}{x^2+y^2+z^2}\,dy + \frac{3z}{x^2+y^2+z^2}\,dz =$$

$$= \frac{3x\,dx + 3y\,dy + 3z\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2+y^2+z^2}$$

An der Stelle $x=-1$, $y=2$, $z=-2$ lautet das *totale Differential* wie folgt:

$$du = \frac{3(-1\,dx + 2\,dy - 2\,dz)}{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = \frac{3}{9}(-dx + 2\,dy - 2\,dz) = \frac{1}{3}(-dx + 2\,dy - 2\,dz)$$

Näherungswert für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$

$$u(x=-1;\ y=2;\ z=-2) = \frac{3}{2}\cdot\ln\left[2\cdot(-1)^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot(-2)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln(2+8+8) = \frac{3}{2}\cdot\ln 18 = 4{,}3356$$

Totales Differential für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$:

$$du = \frac{1}{3}\left[-0{,}1 + 2\cdot(-0{,}2) - 2\cdot(-0{,}1)\right] = \frac{1}{3}(-0{,}1 - 0{,}4 + 0{,}2) = \frac{1}{3}\cdot(-0{,}3) = -0{,}1$$

Näherungswert: $u + du = 4{,}3356 - 0{,}1 = 4{,}2356$

Exakter Funktionswert: $u(x=-0{,}9;\ y=1{,}8;\ z=-2{,}1) = 4{,}2427$

7. Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen

Berechnen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix der gegebenen Funktion.

a) $f(x,y) = 3x + 5y$
b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 3y^2$
c) $f(x,y) = x^2y^2 + 1$
d) $f(x,y) = 2^{3x-5y}$
e) $V(r,h) = \pi r^2 h$
f) $\psi(t,x) = A\sin(\omega t - kx)$

a)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 0 \\ 0 + 5\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} + 2\cdot 1\cdot y - 0 \\ 0 + 2x\cdot 1 - 3\cdot 2y^{2-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0 & 0 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - 0 & 0 - 6\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}}}$$

c)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} \cdot y^2 + 0 \\ x^2 \cdot 2y^{2-1} + 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot y^2 & 2x \cdot 2y^{2-1} \\ 2 \cdot 2x^{2-1} y & 2x^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}}}$$

d)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & 3 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \\ -5 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & -5 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}}}$$

e)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} V}} = \begin{bmatrix} V_{,1} \\ V_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \cdot 2r^{2-1} \cdot h \\ \pi r^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 V}} = \begin{bmatrix} V_{,1,1} & V_{,1,2} \\ V_{,2,1} & V_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \cdot 1 \cdot h & 2\pi r \cdot 1 \\ \pi \cdot 2r^{2-1} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{bmatrix}}}$$

f)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0} \\ \psi_{,1} \end{bmatrix} = A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot 1 - 0 \\ 0 - k \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \\ -k \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0,0} & \psi_{,0,1} \\ \psi_{,1,0} & \psi_{,1,1} \end{bmatrix} = -A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & \omega \cdot (0 - k \cdot 1) \\ -k \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & -k \cdot (0 - k \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega^2 & -\omega k \\ -\omega k & k^2 \end{bmatrix}}}$$

8.
Bestimmen Sie zu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2+1) - 3x$

a) den Funktionswert am Punkt (-1;0),
b) den Gradienten
c) die Hesse-Matrix
d) alle Nullstellen des Gradienten
e) die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (3;1).

a) $f(-1,0) = (-1)^3 - 1^2 \ln(0+1) - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

b) $grad\ f(x,y)^T = (3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3, -x^2 \frac{2y}{y^2+1})$

c) $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\ln(y^2+1) & -\frac{4xy}{y^2+1} \\ -\frac{4xy}{y^2+1} & -2x^2 \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$

d) $grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o} \iff 3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq 0)$

$$x^2 y = 0 \quad (\Rightarrow y = 0 \text{ wegen } x \neq 0)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \text{ bzw. } x = \pm 1$$

$grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o}$ für $(x,y) = (1,0)$ oder $(-1,0)$

e)

Gleichung der Tangentialhyperebene $y = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + grad\ f(\hat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$ für $(x,y) = (3,1)$

$$\left(\hat{x}^3 - \hat{x}^2\ln(\hat{y}^2+1) - 3\hat{x}\right) + \left(3\hat{x}^2 - 2\hat{x}\ln(\hat{y}^2+1) - 3, \quad -\hat{x}^2 \cdot \frac{2\hat{y}}{\hat{y}^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - \hat{x} \\ y - \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$= \left(3^3 - 3^2\ln(1^2+1) - 3\cdot 3\right) + \left(3\cdot 3^2 - 2\cdot 3\ln(1^2+1) - 3, \quad -3^2 \cdot \frac{2\cdot 1}{1^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -45 + 9\ln(2) + 24x - 6x\ln(2) - 9y$$

9. Volumenänderung Tonne

Das Volumen einer Tonne wird nach der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$ berechnet. Es liegen folgende Werte vor: R = 1 m, r = 0,8 m, h = 1,5 m. Wie ändert sich das Volumen V, wenn man bei unveränderter Höhe h den Radius R um 2% vergrössert und gleichzeitig den Radius r um 2,5% verkleinert?
Führen Sie sowohl eine exakte als auch eine näherungsweise Berechnung (totales Differenzial) durch.

Exakte Volumenänderung

Ausgangswerte: $R = 1\text{ m}, \; r = 0{,}8\text{ m}, \; h = 1{,}50\text{ m}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}50\,(2\cdot 1^2 + 0{,}8^2)\text{ m}^3 = 4{,}1469\text{ m}^3$$

Neue Werte: $R = 1{,}02 \cdot 1\text{ m} = 1{,}02\text{ m}, \; r = 0{,}975 \cdot 0{,}8\text{ m} = 0{,}78\text{ m}, \; h = 1{,}50\text{ m}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}50\,(2\cdot 1{,}02^2 + 0{,}78^2)\text{ m}^3 = 4{,}2242\text{ m}^3$$

Exakte Volumenänderung: $\Delta V = V_2 - V_1 = (4{,}2242 - 4{,}1469)\text{ m}^3 = 0{,}0773\text{ m}^3$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}0773\text{ m}^3}{4{,}1469\text{ m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}86\,\%$

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

Es ändern sich die Radien R und r, nicht aber die Höhe h der Tonne. Daher können wir in diesem Zusammenhang das Volumen V als eine nur von R und r abhängige Funktion betrachten (*Alternative:* V als eine von R, r und h abhängige Funktion ansehen und im totalen Differential $dh = 0$ setzen):

$$V = f(R; r) = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}dR + \frac{\partial V}{\partial r}dr = \frac{1}{3}\pi h \cdot 4R\,dR + \frac{1}{3}\pi h \cdot 2r\,dr = \frac{2}{3}\pi h(2R\,dR + r\,dr)$$

Wir verwenden noch die in der Praxis übliche Schreibweise $(dV,\ dR,\ dr \to \Delta V,\ \Delta R,\ \Delta r)$:

$$\Delta V = \frac{2}{3}\pi h(2R\,\Delta R + r\,\Delta r)$$

Mit $R = 1\,\text{m}$, $r = 0{,}8\,\text{m}$, $h = 1{,}50\,\text{m}$, $\Delta R = +0{,}02\,\text{m}$ und $\Delta r = -0{,}02\,\text{m}$ erhalten wir den folgenden *Näherungswert* für die Volumenänderung (in guter Übereinstimmung mit der *exakten* Änderung):

$$\Delta V = \frac{2}{3}\pi \cdot 1{,}50\,[2 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 0{,}8 \cdot (-0{,}02)]\,\text{m}^3 = \pi(0{,}04 - 0{,}016)\,\text{m}^3 = 0{,}0754\,\text{m}^3$$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}0754\,\text{m}^3}{4{,}1469\,\text{m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}82\,\%$

10. Aussagen über den Gradienten in 2D

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Gradient von f ist tangential an den Graphen von f.		X
b) Der Gradient von f steht senkrecht auf dem Graphen von f.		X
c) Der Gradient von f ist tangential zu den Höhenlinien von f.		X
d) Der Gradient von f steht senkrecht auf den Höhenlinien von f.	X	
e) Der Betrag des Gradienten von f ist die maximale Steigung des Graphen von f.	X	