Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 2

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Kombination, Variation und können diese erklären und anwenden.
- Sie kennen die Formeln für die Permutationen von n Elementen, für die Kombinationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung und für Variationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung und können diese anwenden.

---

1. Lehrbücher

4 Mathematik-, 3 Geschichts- und 5 Deutschbücher sollen in einem Regal eingeordnet werden.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in einem Fach nebeneinander zu stellen?

b) Wenn für jede Disziplin ein Fach vorhanden ist, wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es dann?

c) Es sollen 3 beliebige Bücher ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

d) Es sollen 3 Bücher ausgewählt werden, wobei ein bestimmtes Mathematikbuch nicht zusammen mit einem bestimmten Geschichtsbuch ausgewählt werden darf. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

a) $4 + 3 + 5 = 12$ Bücher sollten auf einem Regal eingordnet werden. Dabei gibt es $12! = 479001600$ mögliche Permutationen.

b) Wenn die Bücher im gleichen Fach eingeordnet werden müssen, sind $3!\,(4!\,3!\,5!) = 103680$ Permutationen möglich.

c) Wenn 3 Bücher ausgewählt werden müssen, dann ergeben sich $\binom{12}{3} = 220$ Kombinationen.

d) Drei Fälle sind zu unterscheiden:

→ Fall 1: Mathe 1 ist im Regal, aber Geschichte 1 nicht.

$$\binom{10}{2} = 45$$

→ Fall 2: Geschichte 1 ist im Regal, aber Mathe 1 nicht.

$$\binom{10}{2} = 45$$

→ Fall 3: Mathe 1 und Geschichte 1 sind nicht im Regal.

$$\binom{10}{3} = 120$$

→ Weil Fall 1, Fall 2, Fall 3 disjunkte Ereignisse sind, gibt es

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 45 + 45 + 120 = 210$$

Kombinationen.

2. Mathematikklausur

In einer Mathematikklausur sind 10 Aufgaben zu lösen. Die Klausur gilt dabei als bestanden, wenn mindestens 7 Aufgaben, darunter die ersten 3 Aufgaben, richtig gelöst wurden. Auf wie viele verschieden Arten lasst sich diese Minimalforderung erfüllen?

Aus den restlichen 7 Aufgaben (Aufgabe 4 bis 10) müssen 4 richtig gelöst werden (die Reihenfolge, in der die Aufgaben gelöst werden, spielt dabei *keine* Rolle → *Kombinationen* 4. Ordnung *ohne* Wiederholung). Es gibt $C(7;4) = \binom{7}{4} = 35$ verschiedene Möglichkeiten.

3. Spielwarengeschäft

In einem Schaufenster eines Spielwarengeschäftes sollen drei Puppen, fünf Teddybären und vier Affen auf einem Sofa nebeneinander dekoriert werden.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren anzuordnen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren anzuordnen, wenn die Puppen, Teddybären und Affen jeweils nicht unterschieden werden können?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren anzuordnen, wenn die Puppen, Teddybären und Affen einzeln unterscheidbar sind und alle Puppen, alle Teddybären und alle Affen jeweils unmittelbar nebeneinander platziert werden sollen?

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren anzuordnen, wenn die Puppen, Teddybären und Affen jeweils nicht unterschieden werden können und alle Puppen, alle Teddybären und alle Affen jeweils nebeneinander platziert werden sollen?

Im Schaufenster eines Spielwarengeschäftes sollen $n_\mathrm{p} = 3$ Puppen, $n_\mathrm{t} = 5$ Teddybären und $n_\mathrm{a} = 4$ Affen auf einem Sofa nebeneinander und platzfüllend dekoriert werden. Insgesamt sollen also

$$n = n_\mathrm{p} + n_\mathrm{t} + n_\mathrm{a} = 3 + 5 + 4 = 12$$

Figuren angeordnet werden.

a) Insgesamt gibt es

$$\underline{\underline{N_\mathrm{a}}} = n! = 12! = \underline{\underline{479'001'600}}$$

Möglichkeiten, um die Figuren anzuordnen.

b) Wenn die Puppen, Teddybären und Affen jeweils untereinander nicht unterschieden werden können, dann gibt es insgesamt

$$\underline{\underline{N_\mathrm{b}}} = \frac{n!}{n_\mathrm{p}! \cdot n_\mathrm{t}! \cdot n_\mathrm{a}!} = \frac{12!}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = \frac{5! \cdot 6 \ldots 12}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{1}$$
$$= \underline{\underline{27'720}}$$

Möglichkeiten, um die Figuren anzuordnen.

c) Wenn die Puppen, Teddybären und Affen einzeln unterscheidbar sind und alle Puppen, alle Teddybären bzw. Affen jeweils unmittelbar nebeneinander platziert werden sollen, dann gibt es insgesamt

$$\underline{\underline{N_\mathrm{c}}} = 3! \cdot n_\mathrm{p}! \cdot n_\mathrm{t}! \cdot n_\mathrm{a}! = 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = \underline{\underline{103'680}}$$

Möglichkeiten, um die Figuren anzuordnen.

d) Wenn die Puppen, Teddybären und Affen untereinander nicht unterschieden werden können und alle Puppen, alle Teddybären bzw. Affen jeweils unmittelbar nebeneinander platziert werden sollen, dann gibt es insgesamt

$$\underline{\underline{N_\mathrm{d}}} = 3! = \underline{\underline{6}}$$

Möglichkeiten, um die Figuren anzuordnen.

4. Lotto

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 aus 49 Zahlen nacheinander zu ziehen (Zahlenlotto)?
b) Wie gross ist die Chance für sechs Richtige?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 2 Richtige im Zahlenlotto zu haben?

a)

Vor Anwendung der obigen Formeln ist zu überprüfen, welche kombinatorische Fragestellung vorliegt:

- Da $k = 6$ Kugeln aus $n = 49$ Kugeln gezogen werden, handelt es sich um ein Auswahlproblem.
- Außerdem spielt die Anordnung keine Rolle, da die Zahlen nach erfolgter Ziehung in eine aufsteigende Reihenfolge gebracht werden.
- Beim Zahlenlotto kann jede Zahl nur einmal auftreten, da sie nach erfolgter Ziehung nicht zurückgelegt wird (ohne Wiederholung).

Es liegt also der Fall ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung (Kombination ohne Wiederholung) vor. Die Gesamtmöglichkeiten, sechs Richtige zu ziehen, betragen

$$K_o = \binom{n}{k} = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{6! \cdot 43!}$$

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816\,.$$

b)

Da hiervon nur ein Fall günstig ist, also sechs Richtige beinhaltet, gilt:

$$P(6\text{ Richtige}) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{1}{13.983.816}$$

$$= 0{,}0000000715112\,[\hat{=}\,0{,}00000715112\,\%].$$

d) 1. Möglichkeit:

Die Anzahl der möglichen Fälle ist $\binom{n}{k} = \binom{49}{6} = 13.983.816$, weil eine einmal gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird (ohne Zurücklegen) und die Lottozahlen in aufsteigender Reihenfolge angeordnet werden (ohne Beachtung der Reihenfolge). Günstig im statistischen Sinn ist es, wenn 2 aus 6 Richtigen und 4 aus 43 Falschen gezogen werden. Es gilt damit:

$$P(2\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 123.410}{13.983.816} = 0{,}132378\,[\hat{=}\,13{,}2378\,\%]\,.$$

2. Möglichkeit:

r r f f f f wäre eine Möglichkeit, 2 Richtige zu haben. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{42}{46}\cdot\frac{41}{45}\cdot\frac{40}{44}=\frac{8.815}{998.844}=0{,}008825\,[\hat{=}\,0{,}8825\,\%]\,.$$

Wie viele unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten gibt es nun bei 2 Richtigen und 4 Falschen? Laut Formel (3.2) sind dies $\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$. Jede dieser 15 Kombinationsmöglichkeiten hat die gleiche Wahrscheinlichkeit von 0,8825 %, so dass man folgende Wahrscheinlichkeit erhält:

$$P(2\text{ Richtige})=0{,}8825\,\%\cdot 15=13{,}2378\,\%\,.$$

5. Münzwurf
Eine homogene Münze wird viermal geworfen. Wir notieren dabei das jeweilige Ergebnis (also „ Zahl “ oder „Wappen“) und zwar in der Reihenfolge des Auftretens. So bedeutet z. B. Z Z Z W: Zunächst dreimal hintereinander „Zahl“ und dann im 4. Wurf „Wappen“. Wie viele verschiedene Endergebnisse sind möglich?

4 Plätze können jeweils mit „Zahl“ oder „Wappen“ belegt werden → *Variationen* 4. Ordnung *mit* Wiederholung: $V_w(2;4) = 2^4 = 16$

6. Urne
Eine Urne enthält 10 Kugeln, die durch die Ziffern 0, 1, 2, . . . , 9 unterschieden werden. Wie viele verschiedene geordnete Stichproben vom Umfang k = 3 können der Urne entnommen werden, wenn die Ziehung der Kugeln
a) ohne Zurücklegen,
b) mit Zurücklegen
erfolgt?

Es handelt sich um *Variationen* 3. Ordnung ohne bzw. mit Wiederholung ($n = 10$ verschiedenen Kugeln).

a) $V(10;3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$ b) $V_w(10;3) = 10^3 = 1000$