Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 6

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Additionssatz für Mittelwerte, Multiplikationssatz für Mittelwerte, Additionssatz für Varianzen und können diese anwenden.
- Sie können Mittelwerte und Varianzen von Kombinationen von Zufallsvariablen bestimmen.

1. Erwartungswerte von Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 besitzen die folgenden Mittel- bzw. Erwartungswerte:

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
$\mu_i = E(X_i)$	2	5	-3	1

Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Zufallsvariablen:

a) $Z_1 = X_1 + 2X_2 - 5X_4$
b) $Z_2 = X_1 + 8X_2 - 3(X_3 + X_4)$
c) $Z_3 = X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4$

Additions- bzw. *Linearitätssatz* für Mittelwerte verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 + 2\mu_2 - 5\mu_4 = 2 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 7$

b) $E(Z_2) = \mu_1 + 8\mu_2 - 3(\mu_3 + \mu_4) = 2 + 8 \cdot 5 - 3(-3 + 1) = 48$

c) $E(Z_3) = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - \mu_4 = 2 + 5 + 2(-3) - 1 = 0$

2. Erwartungswerte von Zufallsvariablen II

Die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X_i besitzen die Mittelwerte $\mu_i = E(X_i) = 2i^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Welchen Mittelwert besitzen dann die folgenden Produkte?

a) $Z_1 = X_1 * X_2 * X_3 * X_4$
b) $Z_2 = X_1 * (X_2 + X_3)$
c) $Z_3 = (X_1 - X_2) * (X_1 + X_2)$
d) $Z_4 = 3X_1 * X_4^2$

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
μ_i	2	8	18	32

Multiplikations- und *Additionssatz* für Mittelwerte verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = 2 \cdot 8 \cdot 18 \cdot 32 = 9216$

b) $E(Z_2) = \mu_1(\mu_2 + \mu_3) = 2(8 + 18) = 52$

c) $E(Z_3) = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) = \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2^2 - 8^2 = -60$

d) $E(Z_4) = 3\mu_1 \cdot \mu_4^2 = 3 \cdot 2 \cdot 32^2 = 6144$

3. Erwartungswerte und Varianzen von Zufallsvariablen

Die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 besitzen die folgenden Mittelwerte und Varianzen:

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
$\mu_i = E(X_i)$	2	8	-2	3
$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$	1	2	5	3

Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz der folgenden Linearkombinationen:

a) $Z_1 = X_1 - 3X_2 + X_4$ b) $Z_2 = X_1 + 2(X_2 – X_3)$

c) $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ d) $Z_4 = 2(X_1 – X_2) + 3X_3$

Additions- bzw. *Linearitätssätze* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 - 3\mu_2 + \mu_4 = 2 - 3 \cdot 8 + 3 = -19$

$\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma_1^2 + (-3)^2 \cdot \sigma_2^2 + \sigma_4^2 = 1 + 9 \cdot 2 + 3 = 22$

b) $E(Z_2) = \mu_1 + 2(\mu_2 - \mu_3) = 2 + 2(8 + 2) = 22$

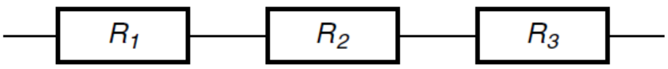
$\mathrm{Var}(Z_2) = \sigma_1^2 + 2^2 \cdot \sigma_2^2 + (-2)^2 \cdot \sigma_3^2 = 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 29$

c) $E(Z_3) = 11;\quad \mathrm{Var}(Z_3) = 11$ d) $E(Z_4) = -18;\quad \mathrm{Var}(Z_4) = 57$

4. Reihenschaltung

In der Abbildung ist eine Reihenschaltung aus drei ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3 dargestellt, die wir als voneinander unabhängige und normalverteilte Zufallsgrössen mit den folgenden Mittelwerten und Standardabweichungen auffassen können:

R_1: $\mu_1 = 200\ \Omega$, $\sigma_1 = 2\ \Omega$; R_2: $\mu_2 = 120\ \Omega$, $\sigma_2 = 1\ \Omega$; R_3: $\mu_3 = 180\ \Omega$, $\sigma_3 = 2\ \Omega$.



a) Bestimmen Sie den Mittelwert μ und die Standardabweichung des Gesamtwiderstandes $R = R_1 + R_2 + R_3$.

b) Bestimmen Sie ein zum Mittelwert μ symmetrisches Intervall, in dem der Gesamtwiderstand R mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% anzutreffen ist.

a) *Additionssatz* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (200 + 120 + 180)\,\Omega = 500\,\Omega$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (4 + 1 + 4)\,\Omega^2 = 9\,\Omega^2; \qquad \sigma = 3\,\Omega$$

b) Übergang von der Zufallsvariablen R zur standardnormalverteilten Zufallsvariablen U:

$$U = \frac{R - \mu}{\sigma} = \frac{R - 500}{3} \quad \Rightarrow \quad |R - 500| = 3\,|U|$$

$$|R - 500| \le c \quad \Rightarrow \quad 3\,|U| \le c \quad \Rightarrow \quad |U| \le c/3$$

$$P(|R - 500| \le c) = P\left(|U| \le \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot \phi\left(\frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$\phi\left(\frac{c}{3}\right) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{3} = u_{0{,}975} = 1{,}960 \qquad c = 5{,}88$$

Lösung: $494{,}12\,\Omega \le R \le 505{,}88\,\Omega$

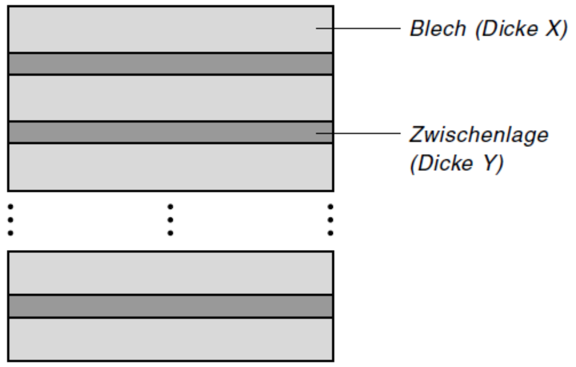
5. Transformator

Der Kern eines Transformators wird schichtweise aus Blechen der Dicke X und Zwischenlagen der Dicke Y aufgebaut. X und Y seien dabei normalverteilte Zufallsgrössen mit den folgenden Parametern (Kennwerten):

X: $E(X) = \mu_X = 0{,}6$ mm, $\sigma_X = 0{,}03$ mm

Y : $E(Y) = \mu_Y = 0{,}05$ mm, $\sigma_Y = 0{,}01$ mm

Der Kern bestehe aus insgesamt 100 Blechen und somit 99 Zwischenlagen. Die einzelnen Schichtdicken werden dabei als völlig unabhängig voneinander angesehen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dicke Z des Transformatorkerns.



Bei der Lösung der Aufgabe müssen wir Folgendes beachten: Wir haben 100 Bleche mit den Dicken $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$, die alle die *gleiche* Verteilung besitzen wie die Zufallsvariable X:

$$E(X_i) = E(X) = \mu_X = 0{,}6 \text{ mm}$$

$$\text{Var}(X_i) = \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = (0{,}03 \text{ mm})^2$$

$(i = 1, 2, \ldots, 100)$. Die Dicken der 99 Zwischenlagen beschreiben wir durch die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{99}$, die alle die *gleiche* Verteilung besitzen wie die Zufallsvariable Y:

$$E(Y_k) = E(Y) = \mu_Y = 0{,}05 \text{ mm}$$

$$\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = (0{,}01 \text{ mm})^2$$

$(k = 1, 2, \ldots, 99)$. Die Dicke des Transformatorkerns ist somit eine *Summe* aus genau 199 *stochastisch unabhängigen* und *normalverteilten* Zufallsvariablen:

$$Z = \sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{k=1}^{99} Y_k$$

Die Zufallsvariable besitzt dann den folgenden Mittelwert:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) + \sum_{k=1}^{99} E(Y_k) = 100 \cdot E(X) + 99 \cdot E(Y) =$$

$$= 100 \cdot \mu_X + 99 \cdot \mu_Y = 100 \cdot 0{,}6 \text{ mm} + 99 \cdot 0{,}05 \text{ mm} =$$

$$= (60 + 4{,}95) \text{ mm} = 64{,}95 \text{ mm}$$

Die Varianz der Gesamtdicke Z beträgt nach dem Additionssatz für Varianzen:

$$\sigma_Z^2 = \text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + \sum_{k=1}^{99} \text{Var}(Y_k) =$$

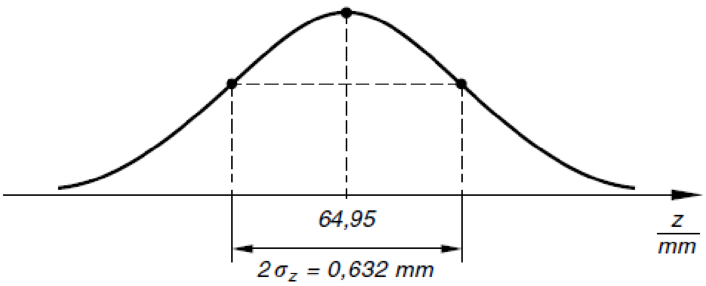
$$= 100 \cdot \text{Var}(X) + 99 \cdot \text{Var}(Y) = 100 \cdot \sigma_X^2 + 99 \cdot \sigma_Y^2 =$$

$$= 100 \cdot (0{,}03 \text{ mm})^2 + 99 \cdot (0{,}01 \text{ mm})^2 = (0{,}09 + 0{,}0099) \text{ mm}^2 =$$

$$= 0{,}0999 \text{ mm}^2$$

Die *Standardabweichung* beträgt somit $\sigma_Z = \sqrt{0{,}0999 \text{ mm}^2} = 0{,}316$ mm.

Da alle 199 unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{99}$ *stochastisch unabhängig* und *normalverteilt* sind, trifft diese Eigenschaft auch auf die *Summe* Z zu. Daher gilt: Die Gesamtdicke Z des Transformatorkerns ist eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *Mittelwert* $\mu_Z = 64{,}95$ mm und der *Standardabweichung* $\sigma_Z = 0{,}316$ mm


64,95
$\frac{z}{mm}$
$2\,\sigma_z$ = 0,632 mm