

Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über zwei Mengen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{und} \quad B := \{A, 4, 5, 6, 7\}. \quad (1)$$

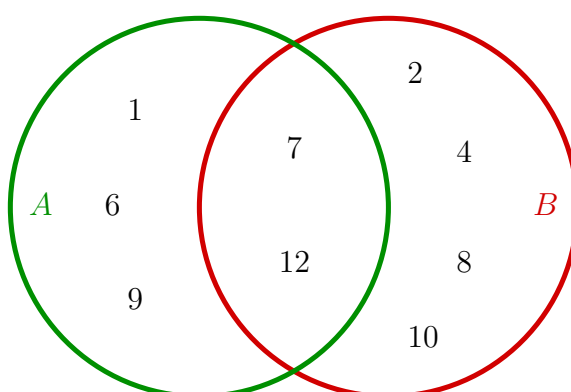
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Die <i>Menge</i> A hat sechs <i>Elemente</i> .	●	○
b) Die <i>Menge</i> B hat sieben <i>Elemente</i> .	○	●
c) Es gilt $\{4\} \in A$.	○	●
d) Es gilt $A \subset B$.	○	●
e) Es gilt $B \ni A$.	●	○
f) Es gilt $B \supseteq \{A\}$.	●	○

2. Elementare Mengenoperationen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{1, 6, 7, 9, 12\} \quad \text{und} \quad B := \{2, 4, 7, 8, 10, 12\}. \quad (2)$$

- a) Wir skizzieren das VENN-Diagramm für die *Mengen* A und B .



- b) Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in A und in B liegen, dann erhalten wir die *Schnittmenge*

$$\underline{A \cap B = \{7, 12\}}. \quad (3)$$

- c) Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in A oder in B liegen, dann erhalten wir die *Vereinigungsmenge*

$$\underline{A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}}. \quad (4)$$

- d) Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in A aber nicht in B liegen, dann erhalten wir die *Mengendifferenz*

$$\underline{A \setminus B = \{1, 6, 9\}}. \quad (5)$$

Sammeln wir hingegen alle *Elemente*, welche in B aber nicht in A liegen, dann erhalten wir die *Mengendifferenz*

$$\underline{B \setminus A = \{2, 4, 8, 10\}}. \quad (6)$$

- e) Wir zeigen mehrere Varianten, um die *symmetrische Mengendifferenz* $A \Delta B$ zu berechnen.

Variante 1: Die Menge $A \Delta B$ ist die *Vereinigung* der beiden *Mengendifferenzen* aus Teilaufgabe d). Wir erhalten

$$\underline{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 6, 9\} \cup \{2, 4, 8, 10\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}}. \quad (7)$$

Variante 2: Die Menge $A \Delta B$ ist die *Mengendifferenz* der *Vereinigungsmenge* von A und B aus Teilaufgabe c) ohne die *Schnittmenge* von A und B aus Teilaufgabe b). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{A \Delta B} &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\} \setminus \{7, 12\} \\ &= \underline{\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}}. \end{aligned} \quad (8)$$

- f) Wir suchen alle *Teilmengen* von

$$C := A \cap B = \{7, 12\}. \quad (9)$$

Da C zwei *Elemente* hat, hat jede *Teilmenge* von C entweder null, ein oder zwei *Elemente*. Wir bestimmen für jede mögliche Anzahl *Elemente* die zugehörigen *Teilmengen* von C und stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

Anzahl Elemente	Teilmengen
0	\emptyset
1	$\{7\}, \{12\}$
2	$\{7, 12\}$

(10)

Insgesamt haben wir also vier *Teilmengen* von C gefunden. Alle *Teilmengen* ausser C selbst sind *echte Teilmengen* von C , d.h.

$$\underline{\underline{\emptyset, \{7\} \text{ und } \{12\}}}. \quad (11)$$

3. Mengen und Operationen in einer Grundmenge

Wir betrachten die *Grundmenge* G der Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabetes ohne Umlaute, d.h.

$$G := \{a, \dots, z\}. \quad (12)$$

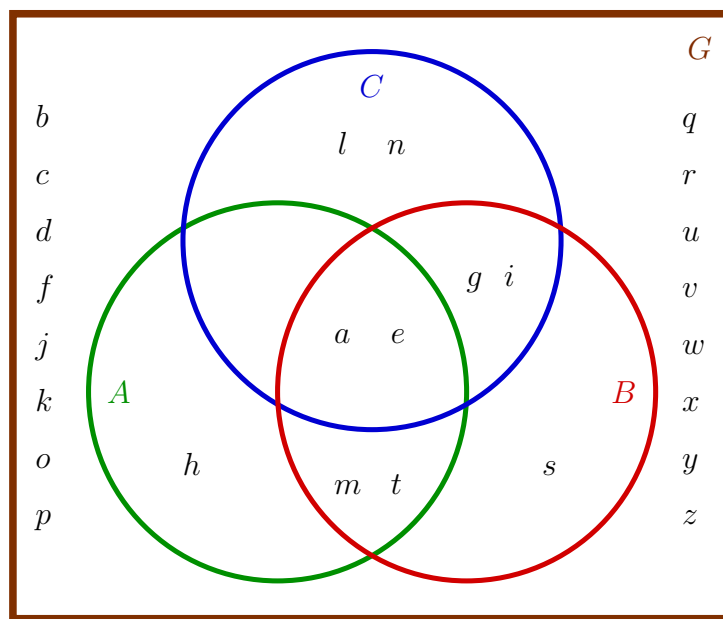
Ferner seien

$$A := \{m, a, t, h, e\}, \quad B := \{i, s, t, m, e, g, a\} \quad \text{und} \quad C := \{g, e, n, i, a, l\} \quad (13)$$

sowie

$$D := A \cap B \cap C \quad \text{und} \quad E := A \cup B \cup C. \quad (14)$$

- a) Wir skizzieren das VENN-Diagramm für die drei *Mengen* A, B, C in der *Grundmenge* G .



- b) Mit Hilfe des VENN-Diagramms aus Teilaufgabe a) bestimmen wir die *Schnittmengen*. Wir erhalten

$$\underline{A \cap B} = \underline{\{a, e, m, t\}} \quad (15)$$

$$\underline{A \cap C} = \underline{\{a, e\}} \quad (16)$$

$$\underline{C \cap B} = \underline{\{a, e, g, i\}} \quad (17)$$

und

$$\underline{D} = \underline{\{a, e\}}. \quad (18)$$

- c) Mit Hilfe des VENN-Diagramms aus Teilaufgabe a) bestimmen wir die *Vereinigungsmengen*. Wir erhalten

$$\underline{A \cup B} = \underline{\{a, e, g, h, i, m, t, s\}} \quad (19)$$

$$\underline{A \cup C} = \underline{\{a, e, g, h, i, l, m, n, t\}} \quad (20)$$

$$\underline{C \cup B} = \underline{\{a, e, g, i, l, m, n, t, s\}} \quad (21)$$

und

$$\underline{E} = \underline{\{a, e, g, h, i, l, m, n, t, s\}}. \quad (22)$$

d) Für das *Komplement* der *Schnittmenge* D erhalten wir

$$\underline{\overline{D}} = G \setminus D = \{a, \dots, z\} \setminus \{a, e\} = \underline{\{b, c, d, f, \dots, z\}}. \quad (23)$$

Mit Hilfe des VENN-Diagramms aus Teilaufgabe a) bestimmen wir das *Komplement* der *Vereinigungsmenge* E . Es gilt

$$\underline{\overline{E}} = G \setminus E = \underline{\{b, c, d, f, j, k, o, p, q, r, u, v, w, x, y, z\}}. \quad (24)$$

4. Aussagen über rationale Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede <i>rationale Zahl</i> kann als <i>Bruch</i> von zwei <i>ganzen Zahlen</i> dargestellt werden.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Es gilt $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Es gilt $\sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Die <i>Wurzel</i> einer <i>rationalen Zahl</i> ist selbst auch <i>rational</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Alle <i>periodischen Dezimalbrüche</i> sind <i>rational</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

5. Aussagen über reelle Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede <i>rationale Zahl</i> ist auch eine <i>reelle Zahl</i> , aber nicht umgekehrt.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Es gilt $\infty \in \mathbb{R}$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Falls $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$ sowie $y \leq x$, dann gilt $x = y$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Die <i>Wurzel</i> jeder <i>reellen Zahl</i> ist auch eine <i>reelle Zahl</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Alle <i>Dezimalbrüche</i> sind <i>reelle Zahlen</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

6. Elemente von Zahlenmengen

Wir markieren für jede *Zahl* die *Mengen*, von welchen die *Zahl* ein *Element* ist.

x	\mathbb{N}	\mathbb{N}^+	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}	\mathbb{R}_0^+	\mathbb{R}^-	$[-1, 1]$	$]0, 2[$	$] -\infty, 1[$	$[0, \infty[$
a) -1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) 0.5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
c) $-1/3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) $\sqrt{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
e) 0.33	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
f) $\sqrt{25}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
g) $-6/3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
h) $-\sqrt{2/3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
i) $7.34\overline{385}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
j) $-0.\overline{99}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(25)

7. Aussagen über Intervalle

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Es gilt $[1, 10] \subset \mathbb{N}$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Es gilt $]2, 3[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $]a, b[\subset [a, b[$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $] -\infty, x] \cap [x, \infty[= \{x\}$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Falls $]a, b[\cap]c, d[= \emptyset$, dann gilt $c > b$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
f) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

8. Aussagen über das kartesische Produkt

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Das <i>kartesische Produkt</i> ist eine <i>Operation</i> zwischen zwei Zahlen.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Das <i>kartesische Produkt</i> ist eine <i>Operation</i> zwischen zwei Mengen.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) In jedem Fall gilt $A \times B = B \times A$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) <i>Kartesische Produkte</i> können nur zwischen Mengen gebildet werden, welche aus Zahlen bestehen.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Haben A und B jeweils 10 <i>Elemente</i> , dann haben $A \times B$ und $B \times A$ jeweils 100 <i>Elemente</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Für jede Menge A gilt $\emptyset \times A = A$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

9. Kartesische Produkte

Wir bestimmen die folgenden *kartesischen Produkte* und stellen diese auf sinnvolle Weise dar.

a) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{A} = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}. \quad (26)$$

b) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{B} = \{1, 2\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4)\}. \quad (27)$$

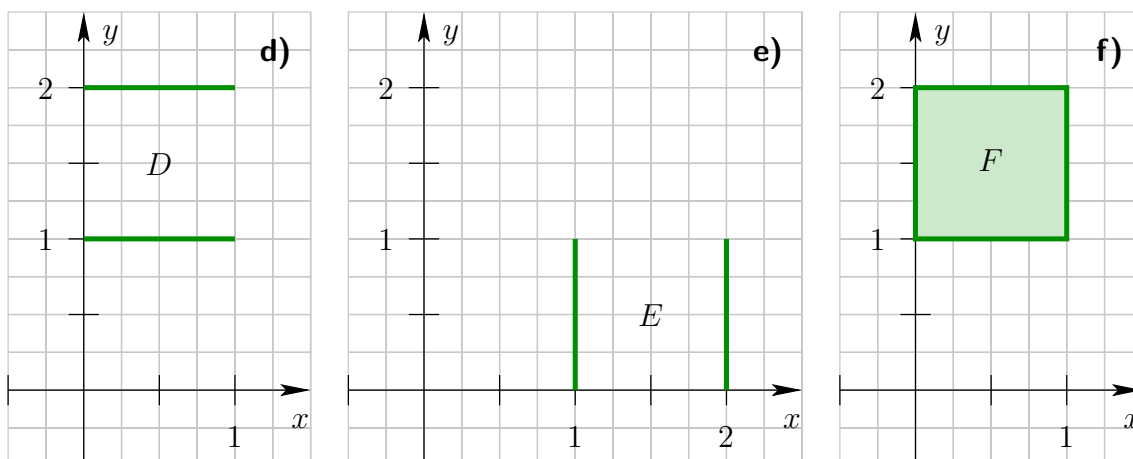
c) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{C} = \{2, 3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2)\}. \quad (28)$$

Wir stellen die *Mengen*

$$D = [0, 1] \times \{1, 2\}, \quad E = \{1, 2\} \times [0, 1] \quad \text{und} \quad F = [0, 1] \times [1, 2] \quad (29)$$

jeweils in einem xy -Diagramm dar.



10. Aussagen über zwei Mengen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad B := \{3, 4, 5\}. \quad (30)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Die <i>Menge</i> $A \times B$ hat drei <i>Elemente</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Es gilt $-1 \in A \times B$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Es gilt $(3; 0) \in B \times A$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Es gilt $A \times B = B \times A$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Die graphische Darstellung von $A \times B$ im xy -Diagramm ist ein <i>Rechteck</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
f) Es gilt $A \times B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>