Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 8

Computational and Data Science
BSc HS2023

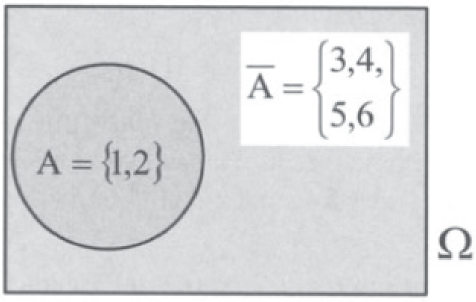
Lösungen

Mathematik 1

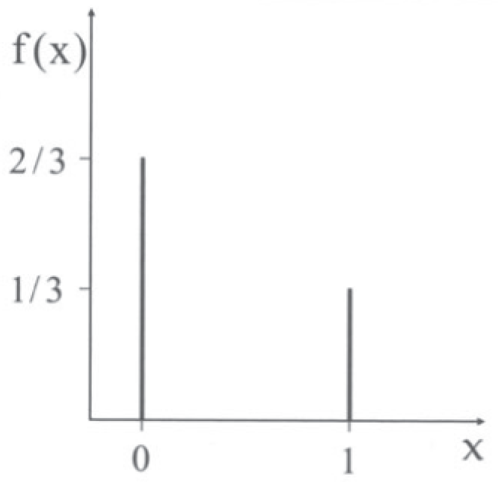
Lernziele:
- Sie kennen die speziellen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen Gleichverteilung, Bernoulli-Verteilung, Binomialverteilung und ihre Eigenschaften.
- Sie können für konkrete Beispiele bestimmen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt und können diese dann auch auf konkrete Situationen anwenden.

1. Würfeln → Eckey S. 94 Bsp. 6.3
Beim Würfeln sei das Ereignis A definiert als „Augenzahl kleiner oder gleich 2“. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an, auch graphisch. Welche Werte nehmen der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung an?

Es liegt die Bernoulli-Verteilung vor. Die Wahrscheinlichkeit für A liegt bei 1/3.

Wahrscheinlichkeit	Venn-Diagramm
$p = P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen "Anzahl von A" ist dann wie folgt gegeben:

Funktionsvorschrift	Grafische Darstellung
$f(x)=\begin{cases} 2/3 & \text{für } x=0 \\ 1/3 & \text{für } x=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.	

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion lassen sich der Erwartungswert

$E(X) = p = \frac{1}{3} = 0{,}333$

und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = p \cdot (1-p) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0{,}222$$

bestimmen. Bei mehrmaligem Durchführen des Zufallsexperiments ist davon auszugehen, dass im Mittel 33,3 % der Augenzahlen kleiner oder gleich Zwei sind. Die Standardabweichung beträgt

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{0{,}222} = 0{,}471. \qquad \blacklozenge$$

2. Binomialverteilung → Papula S. 462 A1

X sei eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n = 8 und p = 0,2.

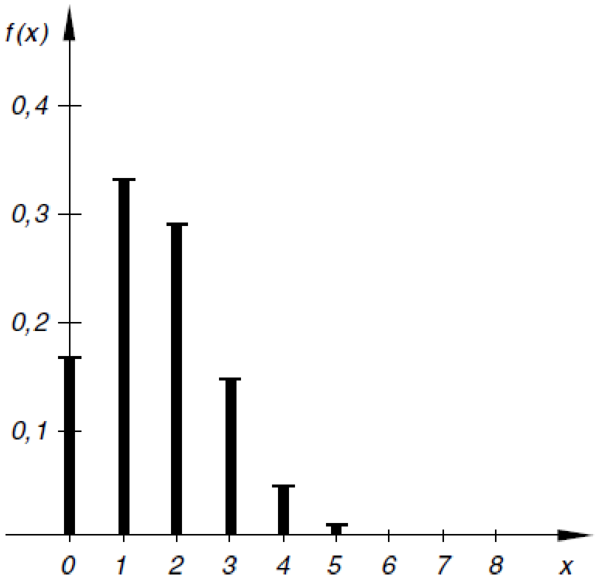
a) Bestimmen Sie die Verteilungstabelle und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm.

b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 0)$, $P(X \geq 5)$ und $P(1 \leq X \leq 3)$.

a) $f(x) = \binom{8}{x} 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{8-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 8)$

Stabdiagramm:

x	$f(x)$
0	0,1678
1	0,3355
2	0,2936
3	0,1468
4	0,0459
5	0,0092
6	0,0011
7	0,0001
8	0



b) $P(X = 0) = f(0) = 0{,}1678$

$P(X \geq 5) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 0{,}0104$

$P(1 \leq X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}7759$

3. Qualitätskontrolle → Eckey S. 99 Bsp. 6.5
Bei der Produktion eines Gutes sind 10% Ausschuss. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 produzierten Stücken mindestens 4 Ausschuss sind?

Hier ist die Binomialverteilung anzuwenden, weil es nur zwei Ausgänge gibt (Ausschuss, kein Ausschuss) und eine konstante Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist. Ob ein defektes oder brauchbares Gut ausgewählt wurde, verändert nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das nächste entnommene Teil Ausschuss ist.
Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit für Ausschuss

$$p = 0{,}1$$

erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{20}{x} \cdot 0{,}1^x \cdot 0{,}9^{20-x} & \text{für } x = 0,1,2,\ldots,20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die direkte Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für mindestens vier Ausschussteile, also 4 oder mehr defekte Güter,

$$P(X \geq 4) = f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + \ldots + f(18) + f(19) + f(20),$$

ist aufwendig zu ermitteln. Es bietet sich deshalb an, die Gegenwahrscheinlichkeit zu verwenden:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]. \end{aligned}$$

Man erhält mit Hilfe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

- $P(X=0) = f(0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} = \frac{20!}{0! \cdot 20!} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} = 0{,}1216$
- $P(X=1) = f(1) = \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{19} = \frac{20!}{1! \cdot 19!} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{19} = 0{,}2702$
- $P(X=2) = f(2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} = 0{,}2852$
- $P(X=3) = f(3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{17} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{17} = 0{,}1901$

folgendes Ergebnis:

$$P(X \geq 4) = 1 - (0{,}1216 + 0{,}2702 + 0{,}2852 + 0{,}1901) = 0{,}1329.$$

4. Skatspiel --> Papula S. 463 A5

Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen und nach der Ziehung wieder zurückgelegt. Dann werden die Karten neu gemischt. Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens ein „rotes Ass" zu ziehen, grösser als 0,5 ist?

Ein „rotes Ass" (d. h. Herz- oder Karo-Ass) wird im Einzelversuch mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/16$ gezogen. Die Zufallsvariable X (= Anzahl der gezogenen „roten Asse" bei n Ziehungen) ist daher *binomialverteilt* mit den Parametern n (noch unbekannt), $p = 1/16$ und $q = 15/16$:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{16}\right)^x \left(\frac{15}{16}\right)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Ereignis $X = 0$ (*kein* „rotes Ass"): $P(X = 0) = f(0) < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{15}{16}\right)^n < 0{,}5 \quad \Rightarrow$

Logarithmieren: $n \cdot \ln \left(\frac{15}{16}\right) < \ln 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad n > 10{,}74$

Lösung: $n \geq 11$ (n muss ganzzahlig sein)

5. Pasch → Eckstein S.84 A2.65

Angenommen, Sie interessieren sich als Spieler dafür, wie oft bei fünfmaligem Werfen von zwei „idealen“ Würfeln das Ereignis Pasch (beide Würfel weisen nach dem Wurf die gleiche Augenzahl auf) eintritt?

a) Definieren Sie die entsprechende Zufallsgrösse und geben Sie die theoretisch möglichen Realisierungen für diese Zufallsgrösse an.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünfmaligem Werfen von zwei Würfeln zweimal ein „Pasch “ eintritt.

a) diskrete Zufallsgröße X: *Anzahl „Pasch“ bei fünfmaligem Werfen mit zwei Würfeln*, mögliche Realisationen von X: 0, 1, 2, 3, 4, 5

b) Zufallsgröße X: Anzahl erfolgreicher Ausgänge bei 5 unabhängig voneinander durchgeführten BERNOULLI-Experimenten, BERNOULLI-Experiment: Wurf von zwei Würfeln, erfolgreicher Ausgang: Pasch, Eintrittswahrscheinlichkeit für diesen Ausgang: 6/36 (Gleichmöglichkeitsmodell nach LAPLACE), somit ist X binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}1667$, zu ermittelnde Ereigniswahrscheinlichkeit: $P(X = 2) \approx 0{,}1608$ ♣