Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 10

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Regressionsanalyse, Regressor, Regressand, Regressionskoeffizient und Methode der kleinsten Quadrate und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können für gegebene Daten eine Regressionskurve aufstellen.

---

1. Regressionsgerade

Bestimmen und zeichnen Sie die jeweilige Ausgleichsgerade für die folgenden Messwerte:

a)

i	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	3	4
y_i	2,10	0,85	-0,64	-2,20	-3,60

b)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,5	1,7	2,5	3,1	3,5	4,0	4,6	5,9
y_i	1,9	2,2	2,7	3,4	4,1	4,2	5,3	6,1

a)

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,10	0	4,41	0
2	1	0,85	1	0,7225	0,85
3	2	– 0,64	4	0,4096	– 1,28
4	3	– 2,20	9	4,84	– 6,60
5	4	– 3,60	16	12,96	– 14,40
$\sum$	10	– 3,49	30	23,3421	– 21,43

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} x_i = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2\,; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{5} \cdot (-3{,}49) = -0{,}698$$

$$a = \frac{\sum_{1}^{5} x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{-21{,}43 - 5 \cdot 2 \cdot (-0{,}698)}{30 - 5 \cdot 2^2} = -1{,}445$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = -0{,}698 - (-1{,}445) \cdot 2 = 2{,}192$$

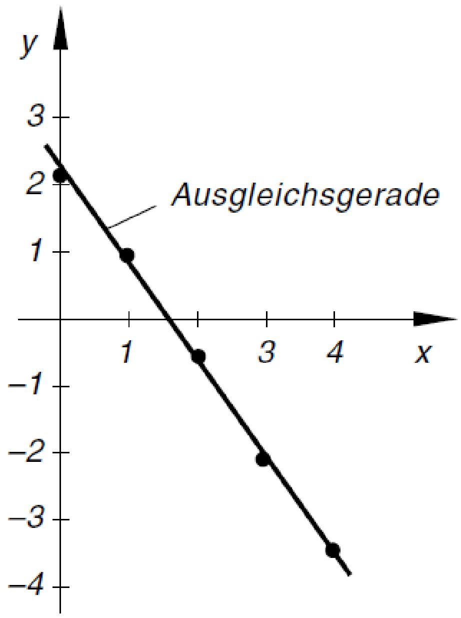
Ausgleichsgerade: $y = -1{,}445\,x + 2{,}192$

s_x^2 und s_y^2 bezeichnen die Standardabweichungen der x- bzw. y-Messwerte und r^2 ist der empirische Korrelationskoeffizient:

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1}\left(\sum_{1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}^2\right) = \frac{1}{4}(30 - 5 \cdot 2^2) = 2{,}5$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1}\left(\sum_{1}^{5} y_i^2 - 5\bar{y}^2\right) = \frac{1}{4}(23{,}3421 - 5(-0{,}698)^2) = 5{,}226\,52$$

$$r^2 = \frac{a^2 s_x^2}{s_y^2} = \frac{(-1{,}445)^2 \cdot 2{,}5}{5{,}226\,52} = 0{,}998\,764$$



b) Tabelle wie in a) erstellen

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} x_i = \frac{1}{8} \cdot 26{,}8 = 3{,}35\,; \qquad \bar{y} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} y_i = \frac{1}{8} \cdot 29{,}9 = 3{,}7375$$

$$a = \frac{\sum_{1}^{8} x_i y_i - 8\bar{x}\bar{y}}{\sum_{1}^{8} x_i^2 - 8\bar{x}^2} = \frac{115{,}4 - 8 \cdot 3{,}35 \cdot 3{,}7375}{105{,}22 - 8 \cdot 3{,}35^2} = 0{,}986\,723 \approx 0{,}987$$

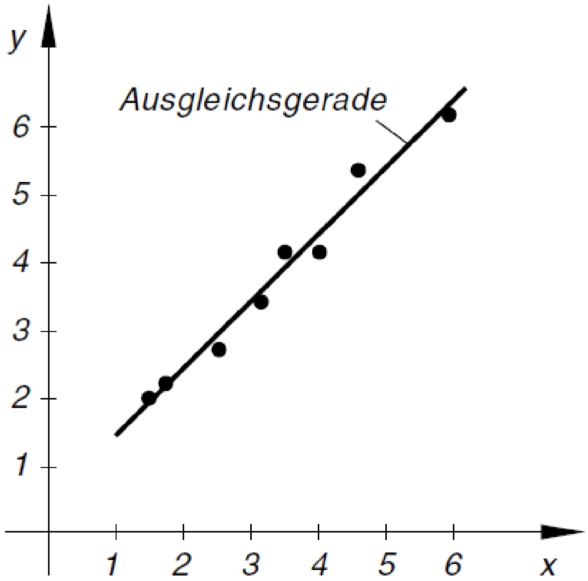
$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 3{,}7375 - 0{,}986\,723 \cdot 3{,}35 = 0{,}431\,978 \approx 0{,}432$$

Ausgleichsgerade: $y = 0{,}987\,x + 0{,}432$ (siehe Bild A-65)

$$s_x^2 = \frac{1}{8-1}\left(\sum_{1}^{8} x_i^2 - 8\bar{x}^2\right) = \frac{1}{7}\,(105{,}22 - 8 \cdot 3{,}35^2) = 2{,}205\,714$$

$$s_y^2 = \frac{1}{8-1}\left(\sum_{1}^{8} y_i^2 - 8\bar{y}^2\right) = \frac{1}{7}\,(127{,}05 - 8 \cdot 3{,}7375^2) = 2{,}185\,536$$

$$r^2 = \frac{a^2 s_x^2}{s_y^2} = \frac{0{,}986\,723^2 \cdot 2{,}205\,714}{2{,}185\,536} = 0{,}982\,611$$



2. Regressionsanalyse I

Gegeben ist die folgende zweidimensionale Stichprobe:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	-0,9	1,45	4,1	6,4	9,15	11,3

Wählen Sie einen geeigneten Lösungsansatz für eine Ausgleichsgerade und bestimmen Sie die zugehörigen Kurvenparameter. Begründen Sie die Wahl des Lösungsansatzes!

Die Messpunkte liegen nach Augenschein auf einer Geraden. Bestätigt wird dies durch den Wert des Korrelationskoeffizienten (r = 0,9996).

Lösungsweg ist wie in Aufgabe 1, eine Tabelle mit den Spalten i, x_i, y_i, x_i^2, y_i^2 und x_iy_i sollte erstellt werden. Hieraus ergibt sich

$$\overline{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} x_i = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2{,}5\,; \qquad \overline{y} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} y_i = \frac{1}{6} \cdot 31{,}5 = 5{,}25$$

$$r = \frac{\sum_{1}^{6} x_i y_i - 6\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{1}^{6} x_i^2 - 6\overline{x}^2\right)\left(\sum_{1}^{6} y_i^2 - 6\overline{y}^2\right)}} = \frac{121{,}95 - 6 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}25}{\sqrt{(55 - 6 \cdot 2{,}5^2)\,(272{,}095 - 6 \cdot 5{,}25^2)}} =$$

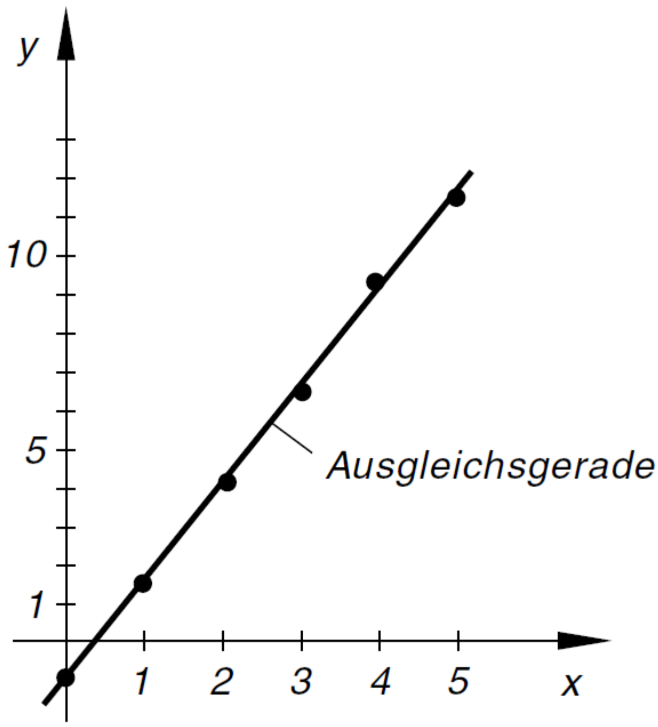
$$= 0{,}999\,636 \approx 1$$

Linearer Lösungsansatz (Ausgleichsgerade): $y = ax + b$

$$a = \frac{\sum_{1}^{6} x_i y_i - 6\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{1}^{6} x_i^2 - 6\overline{x}^2} = \frac{121{,}95 - 6 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}25}{55 - 6 \cdot 2{,}5^2} = 2{,}468\,571 \approx 2{,}469$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 5{,}25 - 2{,}468\,571 \cdot 2{,}5 = -0{,}921\,428 \approx -0{,}921$$

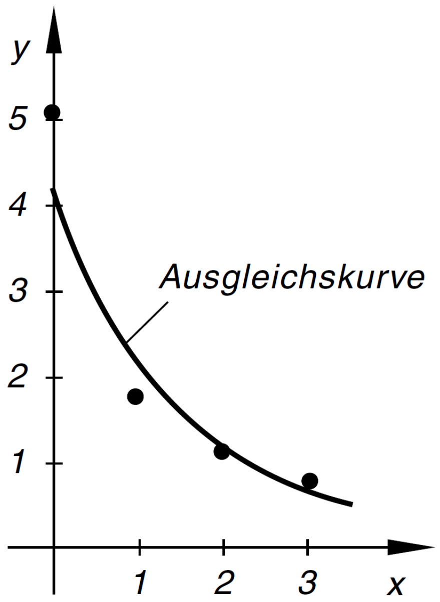
Lösung: $y = 2{,}469\,x - 0{,}921$



3. Regressionsanalyse II
Bestimmen Sie nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate diejenige Exponentialfunktion vom Typ $y = a \cdot e^{bx}$, die sich den vier Messpunkten

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	5,1	1,75	1,08	0,71

in optimaler Weise anpasst ($a > 0$).
Hinweis: Die Exponentialfunktion wird in der halblogarithmischen Darstellung durch die Gerade dargestellt $v = cu + d$ ($u = x, v = \ln y,\ c = b$ und $d = \ln a$). Dabei geht der Punkt $P_i(x_i, y_i)$ in den Punkt $Q_i(u_i, v_i)$ über. Man bestimme daher zunächst die zu den Punkten Q_i gehörende Ausgleichgerade und daraus dann die Parameter a und b der Exponentialfunktion.



$v = c\,u + d$

i	$u_i = x_i$	$v_i = \ln y_i$	u_i^2	$u_i v_i$
1	0	1,629 241	0	0
2	1	0,559 616	1	0,559 616
3	2	0,076 961	4	0,153 922
4	3	– 0,342 490	9	– 1,027 471
$\sum$	6	1,923 328	14	– 0,313 933

$$\overline{u} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{1}^{4} u_i = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1{,}5$$

$$\overline{v} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{1}^{4} v_i = \frac{1}{4} \cdot 1{,}923\,328 = 0{,}480\,832$$

$$c = \frac{\sum_{1}^{4} u_i v_i - 4\overline{u}\,\overline{v}}{\sum_{1}^{4} u_i^2 - 4\overline{u}^2} = \frac{-0{,}313\,933 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}480\,832}{14 - 4 \cdot 1{,}5^2} = -0{,}639\,785$$

$$d = \overline{v} - c\,\overline{u} = 0{,}480\,832 - (-0{,}639\,785) \cdot 1{,}5 = 1{,}440\,510$$

$$\ln a = d \quad \Rightarrow \quad a = \mathrm{e}^{d} = \mathrm{e}^{1{,}440\,510} = 4{,}2229\,; \qquad b = c = -0{,}6398$$

Ausgleichskurve: $y = 4{,}2229 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}6398\,x}$