

# Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science  
FS2024

## Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Gaußsche Zahlenebene, arithmetische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl und Arg-Funktion und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
- Sie können komplexe Zahlen von der arithmetischen in die trigonometrische Form und umgekehrt umwandeln.
- Sie können einfache Brüche und Potenzen von komplexen Zahlen durch Anwenden der Rechenregeln vereinfachen.
- Sie können quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen.

### 1. Aussagen über die Gaußsche Zahlenebene

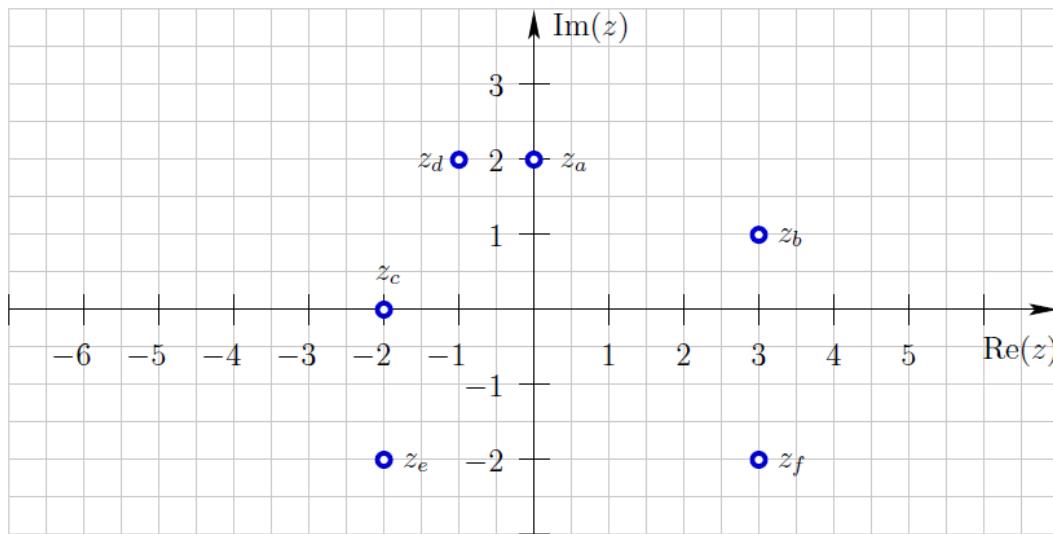
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Gaußsche Zahlenebene wurde im 20. Jahrhundert eingeführt.		X
b) Jede komplexe Zahl wird durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.	X	
c) Die x-Achse der Gaußschen Zahlenebene entspricht der Re-Achse.	X	
d) Die komplexe Zahl $z = 2 + 3i$ entspricht dem Punkt $(2;3i)$ in der Gaußschen Zahlenebene.		X
e) Die komplexen Zahlen $z$ , für welche gilt $z^2 = -3$ , liegen auf der Im-Achse.	X	
f) Die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $ z  = 1$ bilden den Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene.	X	

### 2. Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Zeichnen Sie die gegebenen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ein.

- |              |              |             |
|--------------|--------------|-------------|
| a) $2i$      | b) $3 + i$   | c) $-2$     |
| d) $-1 + 2i$ | e) $-2 - 2i$ | f) $3 - 2i$ |



### 3. Aussagen über die trigonometrische Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in trigonometrischer Form darstellen.	X	
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in trigonometrischer Form darstellen.		X
c) Der Term $2\text{cis}(\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$ .	X	
d) Der Term $2\text{cis}(-3\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$ .	X	
e) Der Term $2\text{cis}(5\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$ .	X	
f) Der Term $-2\text{cis}(\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$ .		X

### 4. Darstellung der Arg-Funktion

- a) Prüfen Sie nach, dass die Funktion  $f(z) = \arctan \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$  keine vollständige Darstellung der Arg-Funktion ist.
- b) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante  $\text{arg}: \mathbb{C} \rightarrow ]-\pi; \pi[$ .
- c) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante  $\text{arg}: \mathbb{C} \rightarrow [0; 2\pi[$ .

a)

Offensichtlich ist der Funktionswert

$$f(i) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = ?$$

nicht definiert. Ferner gilt

$$\begin{aligned} f(-1+i) &= \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \arg(-1+i) &= \frac{3\pi}{4} \neq f(-1+i). \end{aligned}$$

Daraus schliessen wir, dass  $f$  keine vollständige Darstellung der *Arg-Funktion* ist.

b)

Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0 \\ \arccot\left(\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}\right) & \text{Im}(z) > 0 \\ \pi & \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) < 0 \\ -\pi + \arccot\left(\frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}\right) & \text{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

c)

Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) = 0 \\ \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) & \text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) > 0 \\ \pi/2 & \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) & \text{Re}(z) < 0 \\ 3\pi/2 & \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) & \text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

## 5. Konversion in die arithmetische Form

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in arithmetischer Form an.

a)  $4\text{cis}(\pi/2)$

b)  $2\text{cis}(-\pi/3)$

c)  $\text{cis}(3\pi/4)$

d)  $2\text{cis}(3\pi)$

e)  $\frac{1}{2}\text{cis}(75^\circ)$

f)  $\sqrt{2}\text{cis}(-105^\circ)$

a)

$$\underline{4 \text{ cis}(\pi/2)} = 4 \cdot \cos(\pi/2) + 4 \cdot i \cdot \sin(\pi/2) = 4 \cdot 0 + 4 \cdot i \cdot 1 = \underline{\underline{4i}}.$$

b)

$$\underline{2 \text{ cis}(-\pi/3)} = 2 \cdot \cos(-\pi/3) + 2 \cdot i \cdot \sin(-\pi/3) = 2 \cdot \cos(\pi/3) - 2 \cdot i \cdot \sin(\pi/3)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}i}}.$$

c)

$$\underline{\underline{\text{cis}(3\pi/4)}} = \cos(3\pi/4) + i \cdot \sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

d)

$$\underline{2 \text{ cis}(3\pi)} = 2 \cdot \cos(3\pi) + 2 \cdot i \cdot \sin(3\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 2 \cdot i \cdot \sin(\pi)$$

$$= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot i \cdot 0 = -2 + 0 = \underline{\underline{-2}}.$$

e)

(mit Hilfe der Additionstheoreme und Zerlegung von  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ )

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\text{cis}(75^\circ)}} = \frac{1}{2} \cdot \cos(75^\circ) + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sin(75^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} i.$$

f)

(mit Hilfe der Additionstheoreme und Zerlegung von  $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$ )

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sqrt{2} \text{ cis}(-105^\circ)}} &= \sqrt{2} \cdot \cos(-105^\circ) + \sqrt{2} \cdot i \cdot \sin(-105^\circ) \\ &= \sqrt{2} \cdot \cos(105^\circ) - \sqrt{2} \cdot i \cdot \sin(105^\circ) = \sqrt{2} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot i \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} i.\end{aligned}$$

## 6. Konversion in die trigonometrische Form

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in trigonometrischer Form an.

a) 3

$$\underline{\underline{3}} = |3| \cdot \text{cis}(\arg(3)) = \underline{\underline{3 \cdot \text{cis}(0)}}.$$

b) -5

$$\underline{\underline{-5}} = |-5| \cdot \text{cis}(\arg(-5)) = \underline{\underline{5 \cdot \text{cis}(\pi)}}.$$

c) 2i

$$\underline{\underline{2i}} = |2i| \cdot \text{cis}(\arg(2i)) = \underline{\underline{2 \cdot \text{cis}(\pi/2)}}.$$

d) -3i

$$\underline{\underline{-3i}} = |-3i| \cdot \text{cis}(\arg(-3i)) = \underline{\underline{3 \cdot \text{cis}(-\pi/2)}}.$$

e) 3 - 4i

$$\begin{aligned}\underline{\underline{3 - 4i}} &= |3 - 4i| \cdot \text{cis}(\arg(3 - 4i)) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \text{cis}(2\pi + \arctan(-4/3))\end{aligned}$$

$$= \sqrt{25} \cdot \text{cis}(2\pi + \arctan(-4/3)) \approx 5 \cdot \text{cis}(2\pi - 0.927) \approx \underline{\underline{5 \cdot \text{cis}(1.70\pi)}}.$$

f) -12 + 5i

$$\begin{aligned}\underline{\underline{-12 + 5i}} &= |-12 + 5i| \cdot \text{cis}(\arg(-12 + 5i))\end{aligned}$$

$$= \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \cdot \text{cis}(\arctan(-5/12) + \pi) = \sqrt{169} \cdot \text{cis}(\arctan(-5/12) + \pi)$$

$$\approx 13 \cdot \text{cis}(-0.395 + \pi) \approx \underline{\underline{13 \cdot \text{cis}(0.874\pi)}}.$$

## 7. Trigonometrische Zahlen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Konversionen aus Aufgabe 5 und 6 mit Python/Numpy.

für Aufgabe 5:

```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
r=4; phi=np.pi/2;
# Berechnung
z=r*(np.cos(phi)+1j*np.sin(phi));
# Ausgabe
print('z=', f"{z:.3f}");
```

für Aufgabe 6:

```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
z=3;
# Berechnung
r=np.abs(z); phi=np.angle(z);
# Ausgabe
print('z=', z, '=', r, '*cis(', phi/np.pi, 'pi)');
```

## 8. Aussagen über quadratische Gleichungen

Gegeben sei die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{R}$ gibt.	X	
b) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt.		X
c) Für jede Wahl der Koeffizienten $a, b, c$ liegen zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$ vor.		X
d) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = i$ die beiden Lösungen sind.		X
e) Gibt es 2 Lösungen $x_1$ und $x_2$ , dann gilt entweder $x_2 = x_1^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .	X	
f) Die Anzahl der Lösungen kann anhand der Diskriminante beurteilt werden.	X	

## 9. Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung in  $\mathbb{C}$  mit Hilfe der Mitternachtsformel.

a) $x^2 + 1 = 0$	b) $x^2 - 10x + 74 = 0$	c) $2x^2 + 4 = x$
d) $3t^2 = -30t - 507$	e) $w = 2 + w^2$	f) $s(s + 1) = 2s^2 + 1$

a)

$$a = 1, b = 0, c = 1$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -4$$

Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-i, i\}}}.$$

b)

$$a = 1, b = -10, c = 74$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -196$$

Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-196}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 14i}{2} = 5 \pm 7i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{5 - 7i, 5 + 7i\}}}.$$

c)

$$2x^2 + 4 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 0$$

$$a = 2, b = -1, c = 4$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -31$$

Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-31}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{31}i}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}i \right\}}}.$$

d)

$$3t^2 = -30t + 507 \Leftrightarrow 3t^2 + 30t - 507 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10t + 169 = 0$$

$$a = 1, b = 10, c = 169$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -576$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 24i}{2} = -5 \pm 12i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-5 - 12i, -5 + 12i\}}}.$$

e)

$$w = 2 + w^2 \Leftrightarrow w^2 - w + 2 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -7$$

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \right\}}}.$$

f)

$$s(s+1) = 2s^2 + 1 \Leftrightarrow s^2 - s + 1 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = 1$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = -3$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}}}.$$