Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 5

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Matrix, inverse Matrix, Drehmatrix, lineare Abbildung und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die 2x2 Standardmatrizen und die dadurch beschriebenen linearen Abbildungen in 2D.
- Sie kennen das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung von Matrizen.
- Sie können lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen darstellen.
- Sie können bestimmen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht und gegebenenfalls die inverse Matrix bestimmen.
- Sie können Verknüpfungen von linearen Abbildungen durch Matrixprodukte ausdrücken.

---

1. Matrizen invertieren

Berechnen Sie die inverse Matrix folgender Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 5 & -8 \\ -6 & 0 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d)

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 15 & -\frac{11}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 7 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e)

Wir benutzen zuerst Zeilenoperationen:

$$\begin{array}{c|c}
A & E \\
\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} (\cos(\phi))^2 & -\sin(\phi)\,\cos(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} (\cos(\phi))^2 + \sin(\phi))^2 & -\sin(\phi)\,\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\cos(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\cos(\phi)\,\sin(\phi) & 1 - (\sin(\phi))^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\cos(\phi)\,\sin(\phi) & (\cos(\phi))^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Also lautet die Inverse:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} .$$

2. Erinnerung an LGS

Ein Gerätehersteller hat noch Kapazitäten frei. In der Produktion werden Teile zusammengebaut, danach werden die fertigen Geräte geprüft und in das Lager gebracht. Für Gerät A ist im Lager je ein Stellplatz, für die Geräte B und C je zwei Plätze erforderlich. Die Montage dauert 20 Minuten bei Gerät A, 10 Minuten bei B und 20 Minuten bei C. Die Prüfung benötigt 4 Minuten für Gerät A, 2 Minuten für B und 6 Minuten für C. Es stehen insgesamt noch 45 Stunden für die Montage, 240 Lagerplätze und 10 Stunden Prüfzeit zur Verfügung. Welche Teile sind in welchen Mengen noch zu produzieren, um das Lager und die verfügbare Zeit voll auszulasten?

Für die zu berechnenden Mengen verwenden wir entsprechend den Gerätebezeichnungen A, B und C. Für die Montagezeit ergibt sich: 45*60 min = 2700 min, für die Prüfzeit: 10*60 min = 600 min und für die Stellplätze: 240. Daraus erhalten wir die folgenden Gleichungen und somit das LGS:

$$\begin{array}{llr} (1) & A + 2B + 2C = 240 & \text{Stellplätze} \\ (2) & 4A + 2B + 6C = 600 & \text{Prüfzeit} \\ (3) & 20A + 10B + 20C = 2700 & \text{Montagezeit} \end{array}$$

Das Gauß-Rechenschema hierzu lautet:

$$\begin{array}{c|ccc|c|l} (1) & 1 & 2 & 2 & 240 & \\ (2) & 4 & 2 & 6 & 600 & \mid -4\cdot(1) \\ (3) & 20 & 10 & 20 & 2700 & \mid -20\cdot(1) \\ \hline (1) & 1 & 2 & 2 & 240 & \\ (2) & 0 & -6 & -2 & -360 & \\ (3) & 0 & -30 & -20 & -2100 & \mid -5\cdot(2) \\ \hline (1) & 1 & 2 & 2 & 240 & \\ (2) & 0 & -6 & -2 & -360 & \\ (3) & 0 & 0 & -10 & -300 & \end{array}$$

und es liefert die Lösung $C = 30$, $B = 50$, $A = 80$.

3. Lösen von LGS mit Hilfe von Matrizen

a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

als Matrixprodukt und berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der inversen Matrix.

b) Für ein LGS in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sind zu den folgenden rechten Seiten bereits Lösungen bekannt:

$\vec{b} = \vec{e}_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{e}_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{e}_3 : \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie mit diesen 3 Vektoren die Lösung zum LGS

$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$

c) Zu lösen ist das LGS

$x_1 - 2x_3 = 3$
$-2x_2 + x_3 = 3$
$-2x_1 + x_2 = 3.$

Geben Sie das LGS in Matrixform an. Berechnen Sie die Inverse der Koeffizientenmatrix und bestimmen Sie damit die Lösung des LGS.

a)
Das lineare Gleichungssystem lautet als Matrizenprodukt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Inversen A^{-1} mittels Gauß-Elimination ergibt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b)
Die rechten Seiten $\vec{b}_i$ sind die Einheitsvektoren und die Vektoren $\vec{x}_k$ sind demnach Lösungen der linearen Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x}_k = \hat{e}_k$. Die rechte Seite im LGS, das zu lösen ist, kann mit den Einheitsvektoren in der Form

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3$$

dargestellt werden. D. h.

$$\vec{x} = 2 \cdot \vec{x}_1 + 3 \cdot \vec{x}_2 - 5 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung, da gilt

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= A \cdot (2 \cdot \vec{x}_1 + 3 \cdot \vec{x}_2 - 5 \cdot \vec{x}_3) \\ &= 2 \cdot (A \cdot \vec{x}_1) + 3 \cdot (A \cdot \vec{x}_2) - 5 \cdot (A \cdot \vec{x}_3) \\ &= 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3 = \vec{b} \end{aligned}$$

Alternativ:
Kombiniert man die 3 Spaltenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ zu einer Matrix

$$X = (\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$A \cdot X = (A \cdot \vec{x}_1 | A \cdot \vec{x}_2 | A \cdot \vec{x}_3) = (\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3) = E$$

und somit $X = A^{-1}$ die Inverse zu A. Aus der Lösungsformel für LGS folgt dann

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c)
Das LGS hat in Matrixform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen der inversen Matrix:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l}
(1) & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
(2) & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
(3) & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & |+2\cdot(1) \\
\hline
(1) & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
(2) & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
(3) & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & |+\frac{1}{2}\cdot(2) \\
\hline
(1) & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
(2) & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & |:(-2) \\
(3) & 0 & 0 & -3{,}5 & 2 & 0{,}5 & 1 & |:(-3{,}5) \\
\hline
(1) & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & |+2\bullet(3) \\
(2) & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 & |+1/2\bullet(3) \\
(3) & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \\
\hline
(1) & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \\
(2) & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \\
(3) & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} &
\end{array}$$

Der gesuchte Lösungsvektor ist dann

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Aussagen über lineare Abbildungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede Abbildung der Form $a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine nxm Matrix dargestellt werden.		X
b) Jede Abbildung der Form $a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine quadratische Matrix dargestellt werden.	X	
c) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x$ ist eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra.	X	
d) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 2$ ist eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra.		X
e) Für jede lineare Abbildung $a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gilt: $a(0) = 0$.	X	
f) Eine lineare Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn sie durch eine reguläre Matrix beschrieben wird.	X	

5. 2x2 Standardmatrizen

Untersuchen Sie die geometrische Wirkung der jeweiligen 2x2 Matrix auf (Spalten)Vektoren. Betrachten Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie einen weiteren selbst gewählten Vektor. Veranschaulichen Sie die Ergebnisse in einem xy-Diagramm.

a) $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $Z_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

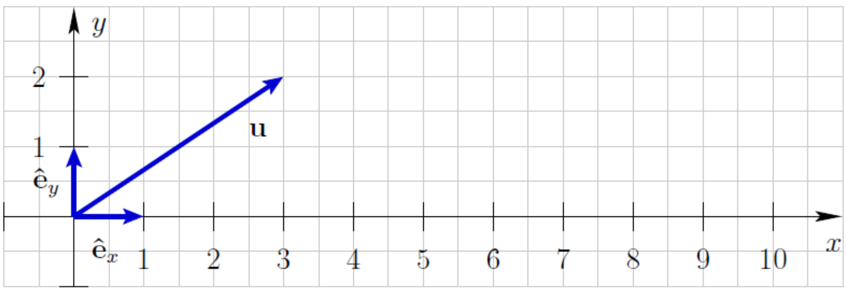
g) $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ h) $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\mathbb{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{u}.}}$$



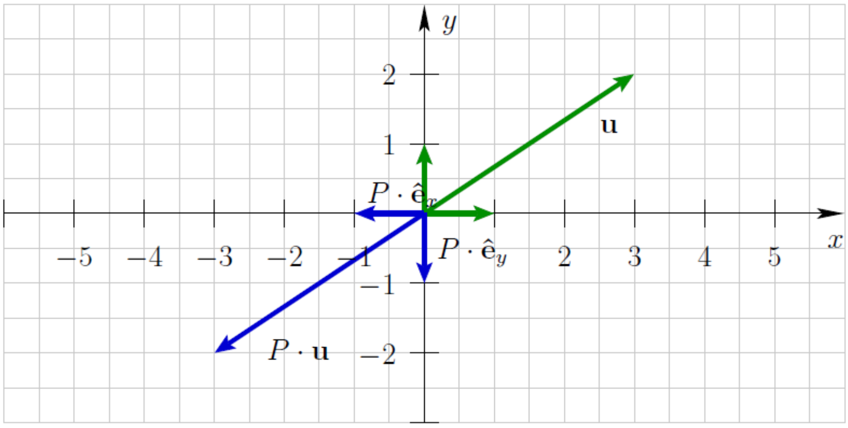
Die Einheitsmatrix überführt jeden Vektor in sich selbst und stellt somit die Identität dar.

b)

$$\underline{\underline{P \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{P \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{P \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\mathbf{u}.}}$$



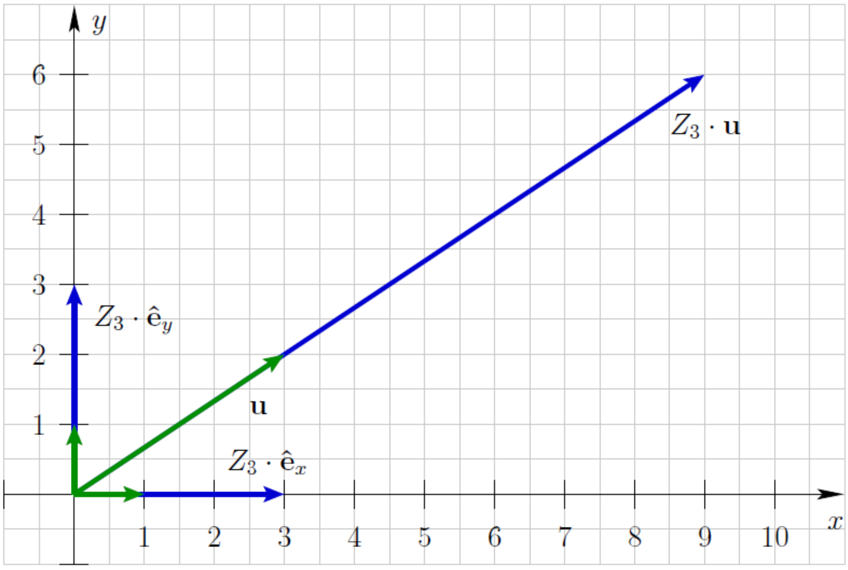
Die Matrix P beschreibt die Punktspiegelung am Ursprung.

c)

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \mathbf{u}.}}$$



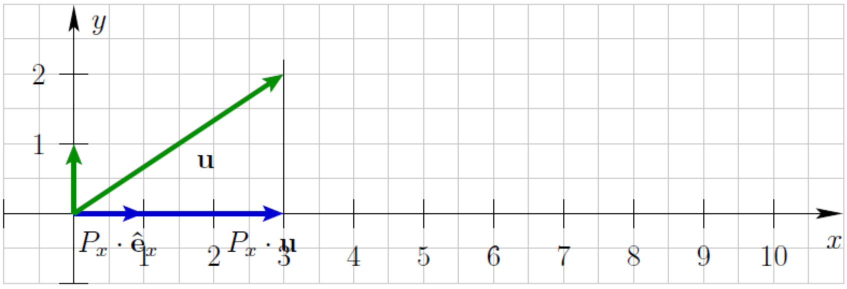
Die Matrix beschreibt die Streckung am Ursprung um den Faktor 3.

d)

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 0\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}}.$$



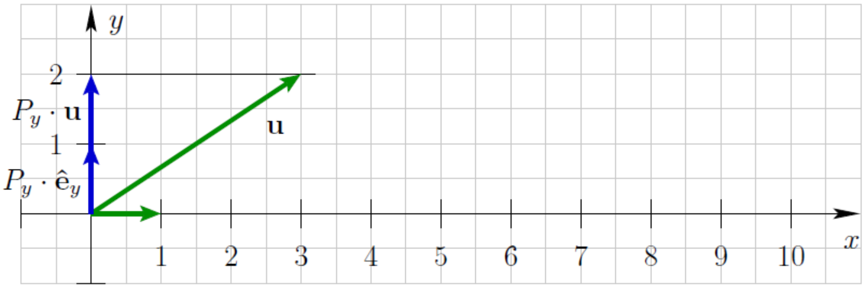
Die Matrix beschreibt die Projektion senkrecht auf die x-Achse.

e)

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}.$$



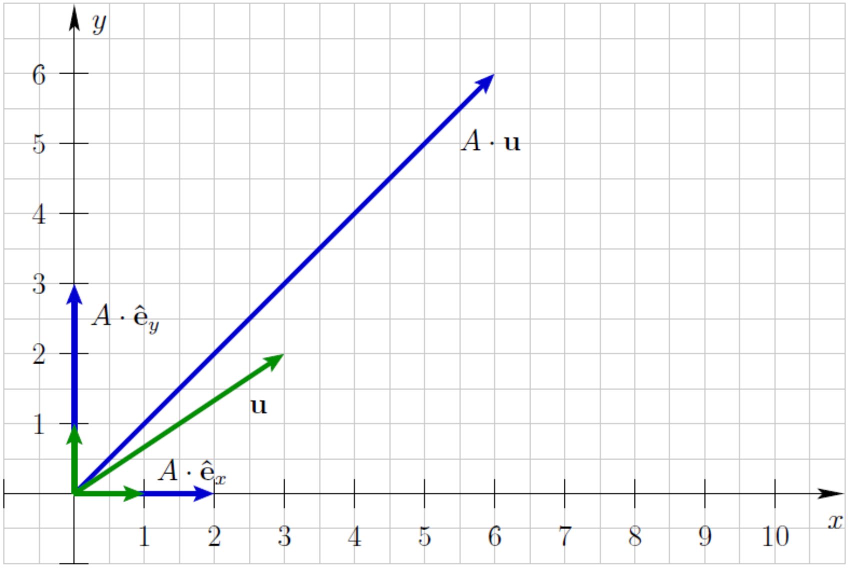
Die Matrix beschreibt die Projektion senkrecht auf die y-Achse.

f)

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}}}.$$



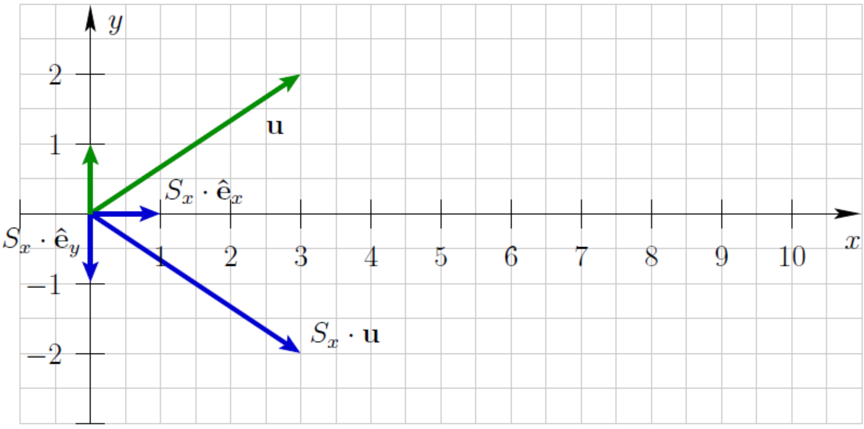
Die Matrix beschreibt die zentrische Streckung am Ursprung um den Faktor 2 bzw. 3 in x-/y-Richtung.

g)

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$



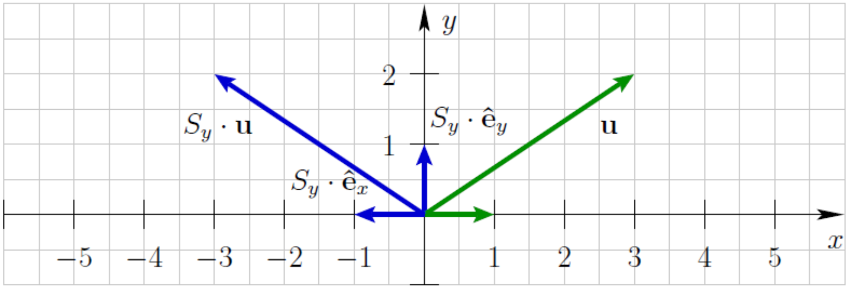
Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der x-Achse.

h)

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$



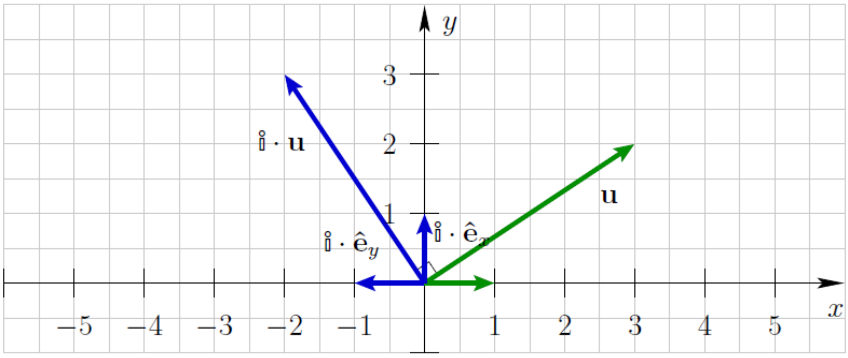
Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der y-Achse.

i)

$$\underline{\underline{\mathbb{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{i} \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}}.$$



Die Matrix beschreibt die Drehung um den Ursprung um den Winkel π/2 (im Gegenuhrzeigersinn).

6. Aussagen über 2 Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrizen A und B sind schiefsymmetrisch.	X	
b) Die Matrix B beschreibt die Drehung um den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel -π/2.	X	
c) Es gilt: A + B = 0.	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = 1$.	X	
e) Es gilt: $A^6 = B$.		X
f) Die Matrix $C = A^3 \cdot B$ beschreibt die Punktspiegelung am Ursprung.	X	

7. Kombination von Matrizen in 2D

Bestimmen Sie die Matrix, welche sich durch die Kombination der jeweiligen Abbildungen ergibt. Wenden Sie die jeweils erhaltene Abbildung auf $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ sowie einen weiteren selbst gewählten Vektor an.

Hinweis: Verwenden Sie die in Aufgabe 5 gegebenen Standardmatrizen.

a) Erst Streckung am Ursprung um den Faktor 2 und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
b) Erst Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Spiegelung an der y-Achse.
c) Erst Spiegelung an der y-Achse und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
d) Projektion auf die y-Achse und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
e) Erst Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Projektion auf die y-Achse.
f) Erst Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/2$ und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
g) Erst Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/2$ und anschliessend Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Streckung um den Faktor -3.
h) Erst Spiegelung an der x-Achse, anschliessend Spiegelung an der y-Achse, anschliessend Spiegelung an der x-Achse und abschliessend Spiegelung an der y-Achse.

a)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{\hat{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \mathbf{\hat{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{\hat{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-2 \cdot \mathbf{\hat{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{\hat{e}}_x}} = P \cdot \mathbf{\hat{e}}_x = \underline{\underline{-\mathbf{\hat{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{\hat{e}}_y}} = P \cdot \mathbf{\hat{e}}_y = \underline{\underline{-\mathbf{\hat{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = P \cdot \mathbf{u} = \underline{\underline{-\mathbf{u}.}}$$

c)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P = S_y \cdot S_x.}}$$

Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an der x- und y-Achse (unabhängig von der Reihenfolge) ist somit identisch zur Punktspiegelung am Ursprung.

d)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{A}} = P_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_x \cdot P_y}}.$$

f)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}}}.$$

g)

$$\underline{\underline{A}} = Z_{-3} \cdot S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\,\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\,\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}}.$$

h)

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\mathbb{1}}}.$$

Durch Zuhilfenahme der Ergebnisse aus b) und c) ergibt sich dasselbe Ergebnis:

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = P \cdot P = P^2 = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

8. Spaltenvektor Konstruktionsverfahren für Matrizen in 2D

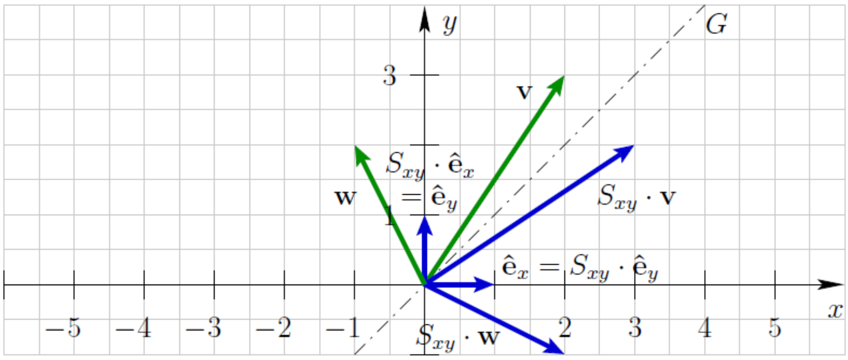
Benutzen Sie das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren, um die jeweilige Matrix zu bestimmen.

a) Bestimmen Sie die Matrix S_{xy}, die die Spiegelung an der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ beschreibt. Testen Sie die Wirkung der Matrix an 2 selbst gewählten Vektoren.

b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{\pi/4}$, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/4$ beschreibt.

a)

Wir wählen als Testvektoren $\vec{v} = \binom{2}{3}, \vec{w} = \binom{-1}{2}$. Nun führen wir die Matrixoperationen im xy-Koordinatensystem durch.



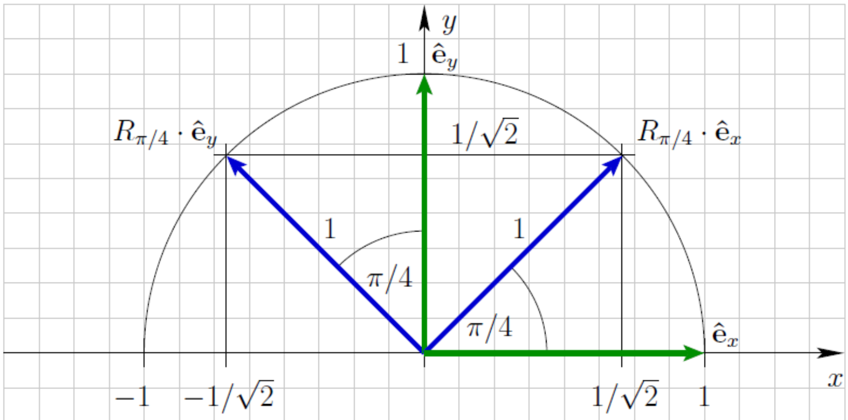
Mittels des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens (hierfür nutzen wir die Bilder von $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$, die wir aus der Zeichnung ablesen) erhalten wir die Matrix

$$\underline{\underline{S_{xy}}} = \begin{bmatrix} S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

b)



Wir gehen gleich wie in a) vor und benutzen $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\mu}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\underline{\underline{R_{\pi/4}}} = \begin{bmatrix} R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

9. Drehmatrizen in 2D

Im Folgenden lernen Sie Form und Eigenschaften von Drehmatrizen in 2D kennen.

a) Bestimmen Sie die Matrix R_α mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt.

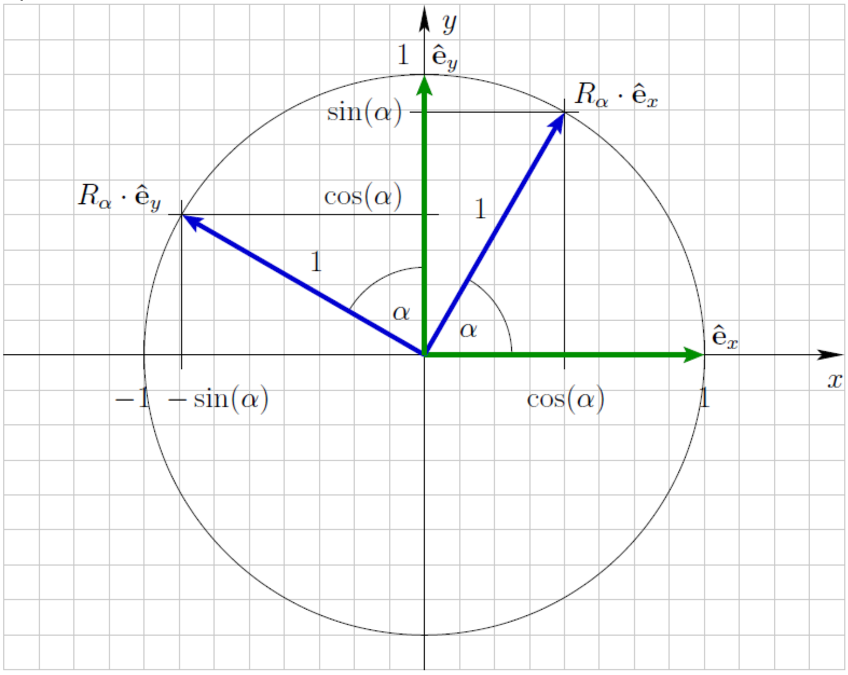
b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{-\alpha}$ mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $-\alpha \in \mathbb{R}$ (also Drehung im Uhrzeigersinn) beschreibt.
Hinweis: Verwenden Sie die Paritätseigenschaften, dass gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Drehmatrizen aus Aufgabe a) und b)? Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_{-\alpha}$ und $R_{-\alpha} \cdot R_\alpha$.

d) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_\beta$ und $R_\beta \cdot R_\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man nacheinander die Drehungen auf denselben Vektor ausführt. Nutzen Sie die Additionstheoreme zur Vereinfachung der Matrizen.

e) Geben Sie die Drehmatrizen für $\alpha \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right\}$ explizit an.

a)



In der Zeichnung haben wir die Bilder der Vektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ eingezeichnet, die wir durch Anwenden der Matrix R_α erhalten. Somit können wir aus der Zeichnung nun die Vektorkomponenten ablesen und das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung der Matrix R_α anwenden.

$$\underline{\underline{R_\alpha}} = \left[\ R_\alpha \cdot \hat{e}_x \quad R_\alpha \cdot \hat{e}_y\ \right] = \left[\left[\begin{array}{c} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{array}\right]\right] = \underline{\underline{\left[\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{array}\right]}}.$$

b)

Wir ersetzen in der Matrix R_α den Winkel α durch $-\alpha$ und erhalten

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}}} = \left[\begin{array}{cc} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{array}\right] = \underline{\underline{\left[\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{array}\right]}}.$$

c)
Hintereinanderausführung von Drehung um denselben Winkel α, jedoch in entgegengesetzte Richtung, sollte zur Ausgangssituation führen. D. h., dass R_α und $R_{-\alpha}$ zueinander inverse Matrizen sein sollten. Dies können wir mittels Matrixmultiplikation nachrechnen:

$$\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) & \sin(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{R_{-\alpha} \cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ (-\sin(\alpha))\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

d)
Die Hintereinanderausführung der Matrizen R_α und R_β sollte aus geometrischer Sicht bedeuten, dass zuerst eine Drehung um α und anschliessend eine Drehung um β (bzw. umgekehrt) ausgeführt wird → insgesamt also um den Winkel $\alpha+\beta$. Dies bedeutet, dass gelten sollte: $R_\alpha \cdot R_\beta = R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$.

$$\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + (-\sin(\alpha))\sin(\beta) & \cos(\alpha)(-\sin(\beta)) + (-\sin(\alpha))\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)(-\sin(\beta)) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \underline{\underline{R_{\alpha+\beta}}}$$

$$\underline{\underline{R_\beta \cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) + (-\sin(\beta))\sin(\alpha) & \cos(\beta)(-\sin(\alpha)) + (-\sin(\beta))\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)(-\sin(\alpha)) + \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = \underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta.}}$$

e)

$$\underline{\underline{R_0}} = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/6}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/6) & -\sin(\pm\pi/6) \\ \sin(\pm\pi/6) & \cos(\pm\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \mp\sin(\pi/6) \\ \pm\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \mp 1 \\ \pm 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/4}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/4) & -\sin(\pm\pi/4) \\ \sin(\pm\pi/4) & \cos(\pm\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \mp\sin(\pi/4) \\ \pm\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/3}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/3) & -\sin(\pm\pi/3) \\ \sin(\pm\pi/3) & \cos(\pm\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \mp\sin(\pi/3) \\ \pm\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/2}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \mp\sin(\pi/2) \\ \pm\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \pm\mathbb{i}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi) \\ \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \mp\sin(\pi) \\ \pm\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mp 0 \\ \pm 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-\mathbb{1} = P.}}$$