FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 3

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Zufallsexperiment, Elementarereignis, Ereignismenge, Ereignis, unmögliches/sicheres Ereignis, Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsraum, absolute/relative Häufigkeit und können diese anwenden.
- Sie können Ereignisse miteinander verknüpfen und kennen hierfür auch die De Morganschen Regeln.

---

1. Münzwurf

Eine Münze wird dreimal geworfen (Zahl: Z, Wappen: W).

a) Bestimmen Sie die dabei möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) sowie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperiments.

b) Durch welche Teilmengen von Ω lasse sich die folgenden Ereignisse beschreiben:
A: bei 3 Würfen zweimal Zahl
B: bei 3 Würfen zweimal Wappen
C: bei 3 Würfen einmal Zahl
D: bei 3 Würfen dreimal Zahl
E: bei 3 Würfen dreimal Wappen

c) Bilden Sie aus den unter b) genannten Ereignissen die folgenden zusammengesetzten Ereignisse und deuten Sie diese:
$A \cup B$, $A \cap D$, $B \cup E$, $D \cup E$, $A \cap B$, $(C \cup D) \cap B$.

d) Beschreiben und deuten Sie die Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{D}$.

a) $\Omega = \{ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$ (8 Elementarereignisse)

b) $A = \{ZZW, ZWZ, WZZ\}$; $B = \{WWZ, WZW, ZWW\}$; $C = \{ZWW, WZW, WWZ\}$;

$D = \{ZZZ\}$; $E = \{WWW\}$

$B = C$: Die Teilmengen B und C unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Elemente, sind daher *gleich* (je 2-mal „Wappen“, 1-mal „Zahl“).

c) $A \cup B = \{ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW\}$
$\rightarrow$ mindestens einmal „Zahl“ und „Wappen“

$A \cap D = \{\ \} \rightarrow$ unmögliches Ereignis

$B \cup E = \{WWZ, WZW, ZWW, WWW\} \rightarrow$ mindestens zweimal „Wappen“

$D \cup E = \{ZZZ, WWW\} \rightarrow$ dreimal „Zahl“ oder dreimal „Wappen“

$A \cap B = \{\ \} \rightarrow$ *unmögliches* Ereignis

$$(C \cup D) \cap B = \{ZWW, WZW, WWZ, ZZZ\} \cap \{WWZ, WZW, ZWW\} =$$
$$= \underbrace{\{ZWW, WZW, WWZ\}}_{B\,=\,C} = B = C \rightarrow \text{zweimal „Wappen“ bzw. einmal „Zahl“}$$

d) $\overline{A} = \{ZZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$
$\rightarrow$ alle Elementarereignisse mit Ausnahme derjenigen, bei denen einmal „Wappen“ eintritt

$\overline{D} = \{ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$
$\rightarrow$ mindestens einmal „Wappen“

2. Wurf mit 2 Würfeln
Beim Zufallsexperiment „Wurf mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln“ lassen sich die möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) durch ungeordnete Augenpaare (i; j) darstellen.

a) Wie lauten die Elementarereignisse und die zugehörige Ergebnismenge Ω?
b) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω:
   A: Die Augensumme beträgt 4,
   B: Die Augensumme ist kleiner oder gleich 5,
   C: Die Augenzahlen beider Würfel sind ungerade,
   D: Die Augensumme ist ungerade,
   E: Das Produkt beider Augenzahlen ist gerade.

a) $\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (4;4), (4;5), (4;6), (5;5), (5;6), (6;6)\}$

b) $A = \{(1;3), (2;2)\}$

$B = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3)\}$

$C = \{(1;1), (1;3), (1;5), (3;3), (3;5), (5;5)\}$

$D = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;3), (2;5), (3;4), (3;6), (4;5), (5;6)\}$

$E = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;4), (3;6), (4;4), (4;5), (4;6), (5;6), (6;6)\}$

3. Ereignisse beim Würfeln
Beim Würfeln mit einem Standardwürfel betrachten wir die drei Ereignisse
A = Wurf einer ungeraden Zahl,
B = Wurf einer durch 3 teilbaren Zahl,
C = Wurf der Zahl 4.

Geben Sie die folgenden Ereignisse in Worten an:
a) $\bar{A}$,
b) $\bar{A} \cap (B \cup C)$,
c) $B \cap C$.

a) Wurf einer nicht ungeraden Zahl = Wurf einer geraden Zahl
b) Schnittmenge aus Wurf einer geraden Zahl mit der vereinigten Menge aus Wurf einer durch 3 teilbaren Zahl und Wurf der Zahl 4 = Wurf einer geraden Zahl grösser oder gleich 4
c) Schnittmenge aus Wurf einer durch 3 teilbaren Zahl und Wurf der Zahl 4 = leere Menge

4. Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln
Gegeben sei ein idealer Würfel.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einzigen Wurf eine 6 zu würfeln?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einzigen Wurf eine Augenzahl von 5 oder mehr zu würfeln?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einzigen Wurf eine ungerade Augenzahl zu würfeln?
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen eine Summe der Augenzahlen von 12 zu würfeln?
e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen eine Summe der Augenzahlen von 1 zu würfeln?
f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen eine Summe der Augenzahlen von 6 zu würfeln?
g) Stellen Sie alle möglichen Summen der Augenzahlen und ihre Wahrscheinlichkeiten bei zwei Würfen in einer Tabelle zusammen.
h) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen eine Summe der Augenzahlen von 7 bis 10 zu würfeln?

a) Um bei einem einzigen Wurf eine *Augen-Zahl* von 6 zu würfeln, gibt es genau $N_\mathrm{p} = 1$ *privilegierte* Möglichkeit von insgesamt $N_\mathrm{m} = 6$ Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{a}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} . \tag{1}$$

b) Um bei einem einzigen Wurf eine *Augen-Zahl* von 5 oder mehr zu würfeln, gibt es genau $N_\mathrm{p} = 2$ *privilegierte* Möglichkeiten von insgesamt $N_\mathrm{m} = 6$ Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{b}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} . \tag{2}$$

c) Um bei einem einzigen Wurf eine ungerade *Augen-Zahl* zu würfeln, gibt es genau $N_\mathrm{p} = 3$ *privilegierte* Möglichkeiten von insgesamt $N_\mathrm{m} = 6$ Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{c}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} . \tag{3}$$

d) Um bei zwei Würfen eine *Augen-Summe* von 12 zu würfeln, gibt es nur die Variante

$$12 = 6 + 6. \tag{4}$$

Dies ist nur $N_\mathrm{p} = 1$ *privilegierte* Möglichkeit von insgesamt $N_\mathrm{m} = 6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{d}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \frac{1}{6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}. \tag{5}$$

e) Bei zwei Würfen eine *Augen-Summe* von 1 zu würfeln, ist offensichtlich unmöglich. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{e} = 0.}} \tag{6}$$

f) Um bei zwei Würfen eine *Augen-Summe* von 6 zu würfeln, gibt es die Varianten

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1. \tag{7}$$

Dies sind insgesamt $N_\mathrm{p} = 5$ *privilegierte* Möglichkeiten von insgesamt $N_\mathrm{m} = 6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{f}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \underline{\underline{\frac{5}{36}}}. \tag{8}$$

g) Zunächst berechnen wir für jede *Augen-Zahl*-Kombination, die bei zwei Würfen auftreten kann, die *Augen-Summe*. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(9)

Aus der Tabelle in (9) lesen wir leicht die möglichen *Augen-Summen* sowie die Anzahl $N_\mathrm{p}(\Sigma)$ der *privilegierten* Möglichkeiten für jede *Augen-Summe* Σ ab. Die *Wahrscheinlichkeit* für jede *Augen-Summe* beträgt dann

$$p(\Sigma) = \frac{N_\mathrm{p}(\Sigma)}{N_\mathrm{m}} = \frac{N_\mathrm{p}(\Sigma)}{36}. \tag{10}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

Σ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N_\mathrm{p}(\Sigma)$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$p(\Sigma)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

(11)

h) Um bei zwei Würfen eine *Augen-Summe* von $\Sigma \in \{7, \ldots, 10\}$ zu würfeln gibt es gemäss Tabelle (11)

$$N_\mathrm{p} = N_\mathrm{p}(7) + \ldots + N_\mathrm{p}(10) = 6 + 5 + 4 + 3 = 18 \tag{12}$$

privilegierte Möglichkeiten. Die *Wahrscheinlichkeit* ist daher

$$\underline{\underline{p_\mathrm{h}}} = \frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{m}} = \frac{18}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

5. Aussagen über die Wahrscheinlichkeit

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Laplace-Wahrscheinlichkeit basiert auf der Annahme, dass jedes Elementarereignis gleich häufig eintritt.	X	
b) Laplace-Wahrscheinlichkeiten sind rationale Zahlen.	X	
c) Gibt es doppelt so viele günstige als mögliche Ergebnisse, dann beträgt die Laplace-Wahrscheinlichkeit 2.		X
d) Die Laplace-Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ereignisses wächst proportional zur Anzahl möglicher Ergebnisse.		X
e) Verdoppelt man die Anzahl möglicher Ergebnisse bei gleichbleibender Anzahl günstiger Ergebnisse, dann halbiert man die Laplace-Wahrscheinlichkeit.	X	

6. Kartenspiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Ziehen von 6 Karten aus einem Spiel mit 32 Karten (Skatblatt) alle 4 Könige zu ziehen? Dabei soll die Kartenentnahme ohne Zurücklegen erfolgen.

Von den sechs entnommenen Karten sollen nur zwei Karten beliebig sein, vier Karten sind ja durch die geforderten vier Könige bereits „besetzt“. In welcher Reihenfolge sich die vier Könige und die zwei sonstigen Karten unter den 6 entnommenen befinden, ist nicht von Bedeutung. Bezeichnen wir mit A das Ereignis „Alle vier Könige sind unter den sechs entnommenen Karten“, so gilt für die Anzahl der für das Eintreten von A günstigen Fälle die Formel

Anzahl der günstigen Fälle = $\binom{28}{2} = 378.$

Wir hätten damit gedanklich das Skatspiel in zwei Teile sortiert: die vier Könige und die 28 sonstigen Karten. Da die vier Könige unbedingt unter den sechs entnommenen Karten sein sollen, ging es nur noch um die Entnahme der noch fehlenden zwei Karten aus den 28 sonstigen Karten. Die Anzahl aller Möglichkeiten, aus den 32 vorhandenen Karten sechs Karten zu entnehmen (d.h. die Anzahl aller „möglichen Fälle“) erhält man nach der Formel

Anzahl der möglichen Fälle = $\binom{32}{6} = 906192.$

Nach der klassischen Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ergibt sich dann:

$$P(A) = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ der\ möglichen\ Fälle} = \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{6}} = \frac{378}{906192} = 4{,}17 \cdot 10^{-4} = 0{,}000417.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,04 Prozent findet man unter sechs beliebig aus einem Skatspiel entnommenen Karten alle vier Könige.