FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

ā ` s l eq ` j_rr ? l_ 11

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

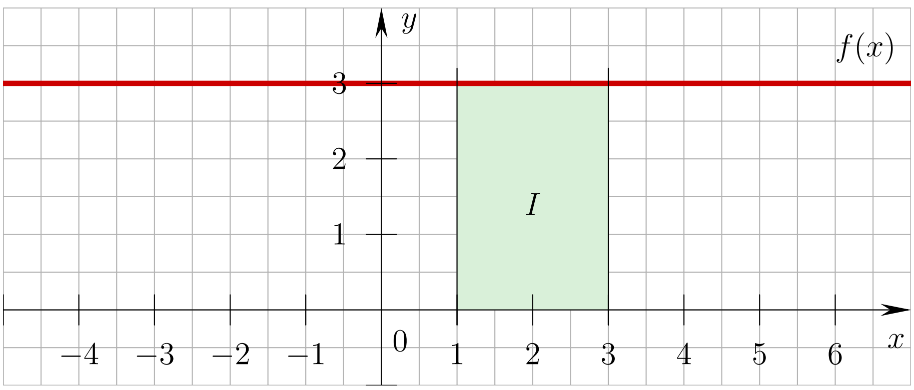
1. Aussagen über Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Das *unbestimmte Integral* einer *Funktion* ist das Gleiche, wie ihre allgemeine *Aufleitung* bzw. *Stammfunktion*.	●	○
b) Das *bestimmte Integral* einer *Funktion* $f(x)$ in den *Grenzen* 3 bis 4 ist die *vorzeichenbehaftete Fläche* zwischen dem *Graphen* von f und der Strecke von 3 bis 4 auf der x-Achse.	●	○
c) Für jede *Funktion* f gilt $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.	○	●
d) Vertauscht man die *Integrationsgrenzen*, dann ändert man das *Vorzeichen* eines *bestimmten Integrals*.	●	○
e) Gilt $f(x) < 0$, dann gilt auch $\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$ für alle $x_0, x_\mathrm{E} \in \mathbb{R}$.	○	●
f) In jedem Fall gilt $\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-8}^{x_\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{-8} f(x)\,\mathrm{d}x$.	○	●

2. Einfache Integrale

Wir skizzieren jeweils den *Graphen* des *Integranden*, kennzeichnen die zu berechnende *Fläche*, bestimmen das *Vorzeichen* des *Integrals* und berechnen sodann dessen genauen Wert.

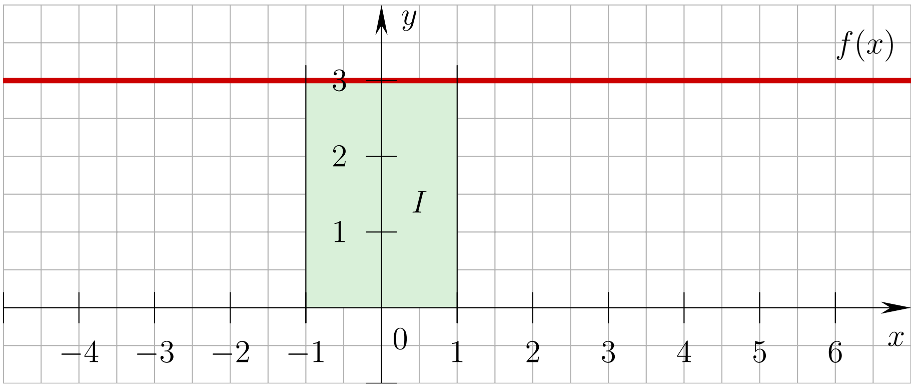
a) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^3 3\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \Big[x\Big]\Big|_1^3 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = \underline{\underline{6.}} \tag{1}$$

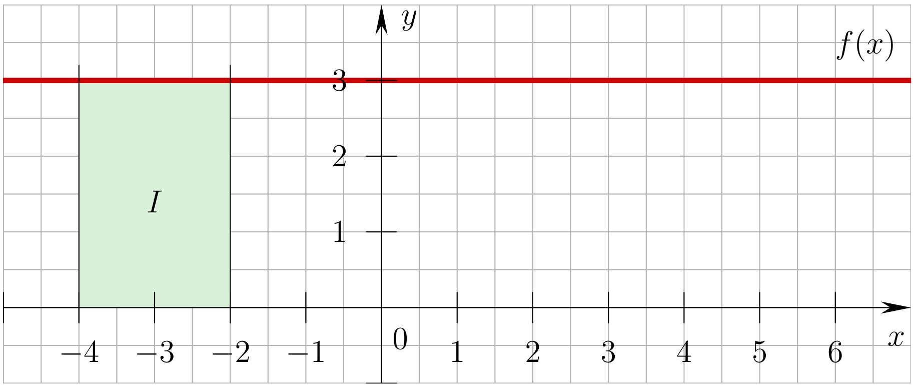
b) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \Big[\, x \,\Big]\Big|_{-1}^{1} = 3 \cdot \Big(1 - (-1) \Big) = 3 \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = \underline{\underline{6.}} \tag{2}$$

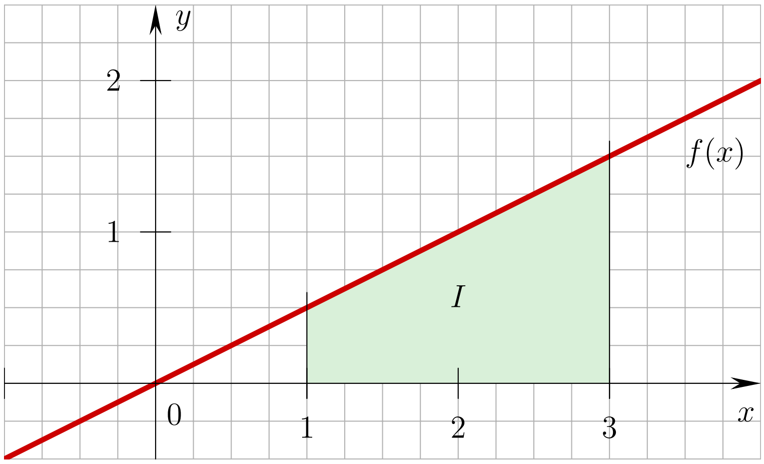
c) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-4}^{-2} 3\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \Big[\, x \,\Big]\Big|_{-4}^{-2} = 3 \cdot \Big(-2 - (-4) \Big) = 3 \cdot (-2+4) = 3 \cdot 2 = \underline{\underline{6.}} \tag{3}$$

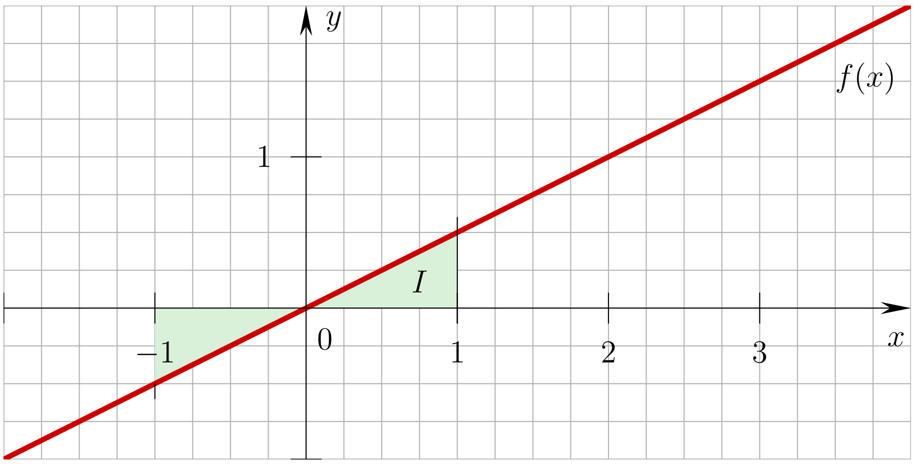
d) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^3 \frac{1}{2}\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[x^2 \Big]\Big|_1^3 = \frac{1}{4} \cdot \Big(3^2 - 1^2 \Big) = \frac{1}{4} \cdot (9-1) = \frac{1}{4} \cdot 8 = \underline{\underline{2.}} \tag{4}$$

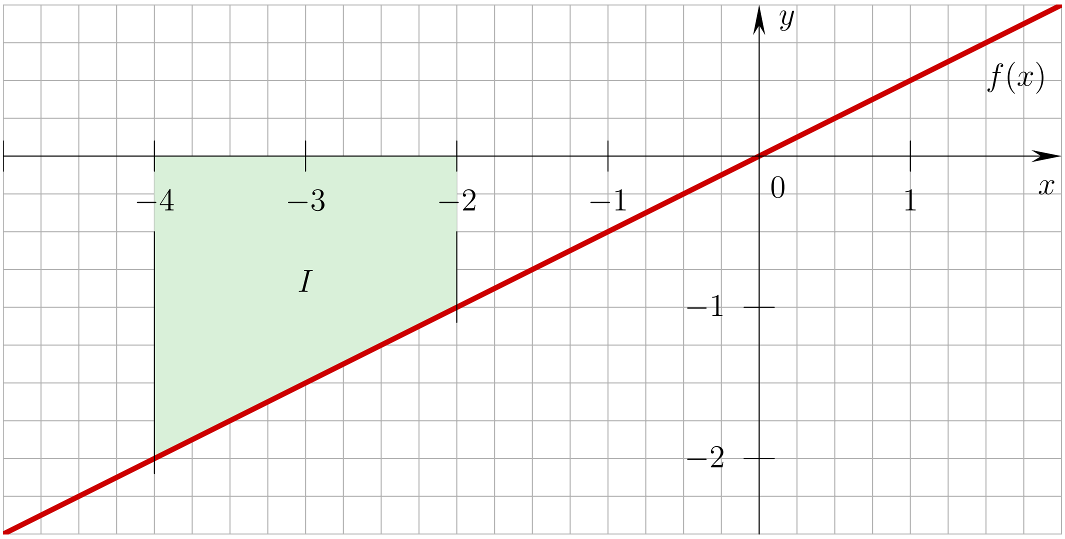
e) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I = 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[x^2 \Big]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} \cdot \Big(1^2 - (-1)^2 \Big) = \frac{1}{4} \cdot (1-1) = \frac{1}{4} \cdot 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{5}$$

f) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

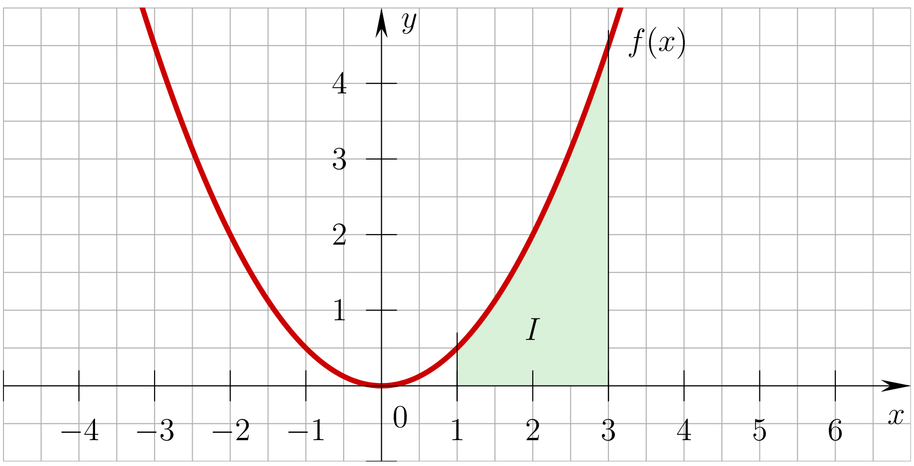


Offensichtlich muss gelten $I < 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{2}\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]\Big|_{-4}^{-2} = \frac{1}{4} \cdot \left((-2)^2 - (-4)^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot (4 - 16) = \frac{1}{4} \cdot (-12)$$

$$= \underline{\underline{-3.}} \tag{6}$$

g) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

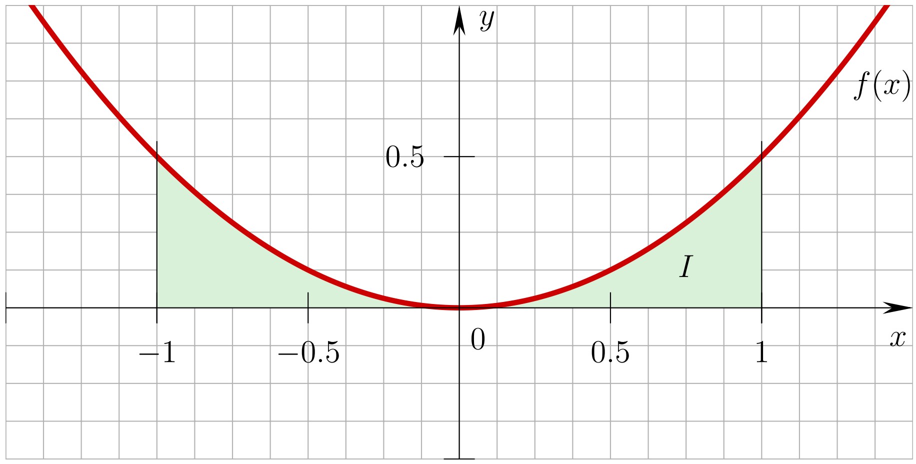


Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{1}^{3} \frac{1}{2}\, x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 \right]\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{6} \cdot \left(3^3 - 1^3 \right) = \frac{1}{6} \cdot (27 - 1) = \frac{1}{6} \cdot 26 = \frac{1}{6} \cdot (24 + 2)$$

$$= \underline{\underline{4 + \frac{1}{3}}}. \tag{7}$$

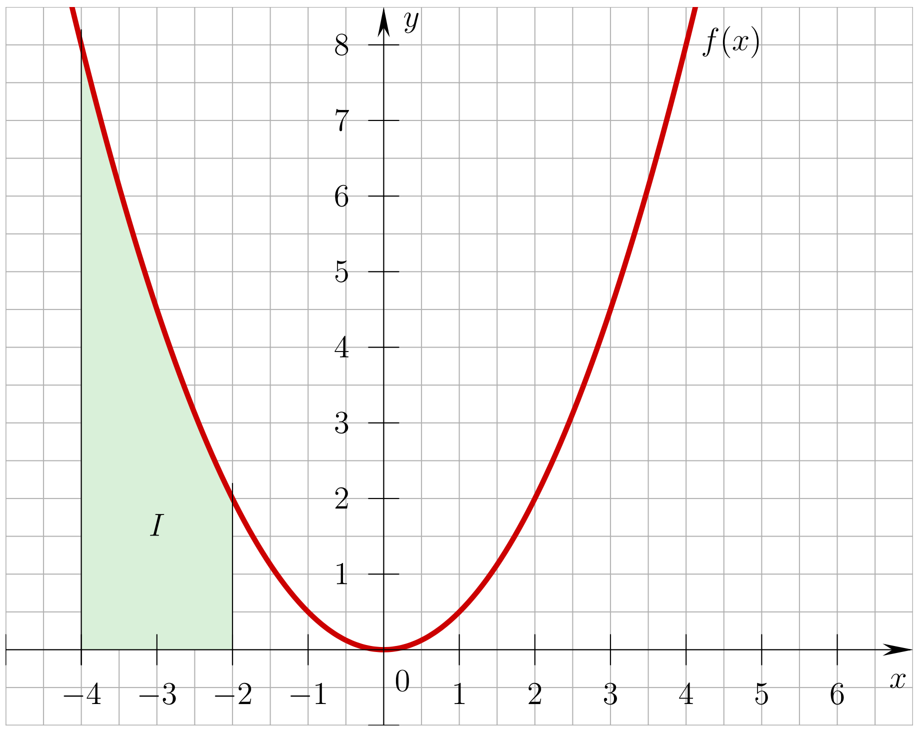
h) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$. r

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 \right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} \cdot \Big(1^3 - (-1)^3 \Big) = \frac{1}{6} \cdot (1+1) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}. \tag{8}$$

i) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

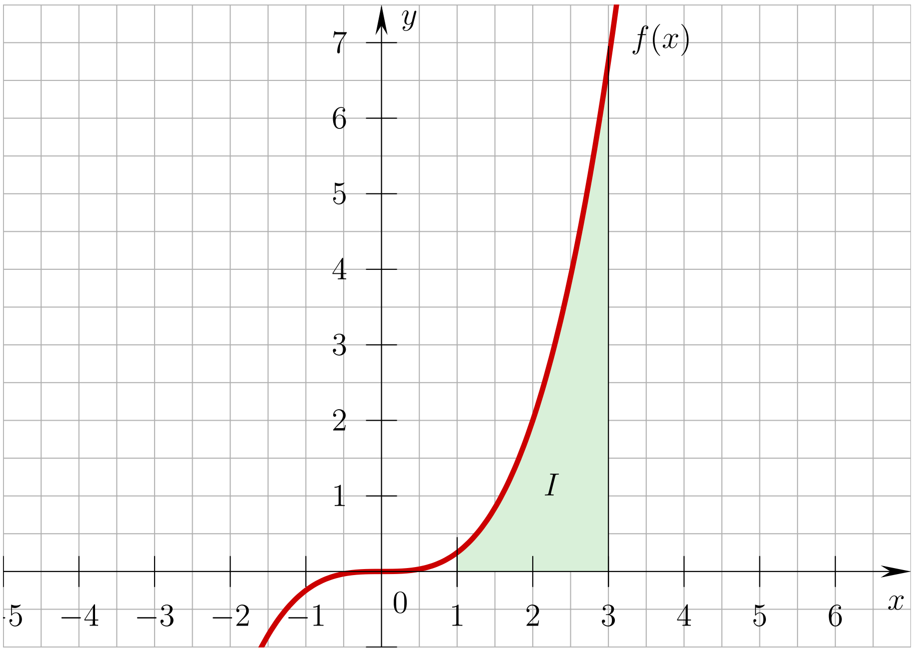


Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{2}\, x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 \right]\Big|_{-4}^{-2} = \frac{1}{6} \cdot \Big((-2)^3 - (-4)^3 \Big) = \frac{1}{6} \cdot (-8+64) = \frac{1}{6} \cdot 56$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (54+2) = \underline{\underline{9 + \frac{1}{3}}}. \tag{9}$$

j) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

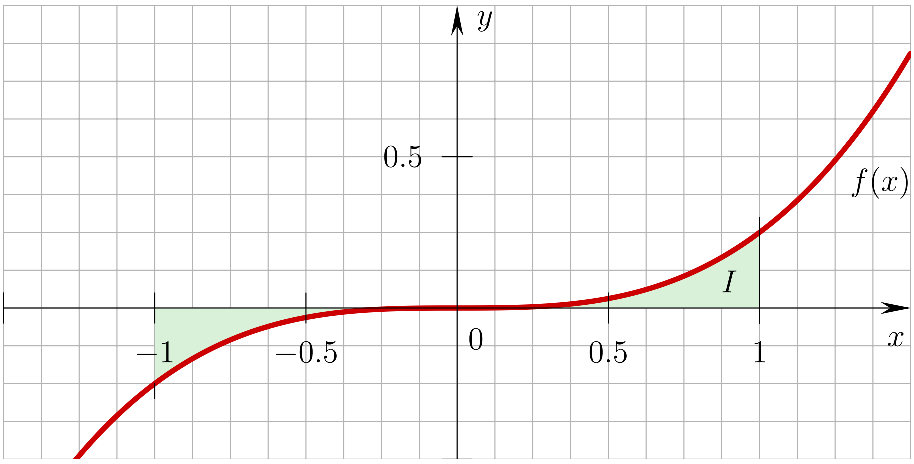


Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^3 \frac{1}{4}\, x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[x^4 \right]\Big|_1^3 = \frac{1}{16} \cdot \left(3^4 - 1^4 \right) = \frac{1}{16} \cdot (81 - 1) = \frac{1}{16} \cdot 80$$

$$= \underline{\underline{5.}} \tag{10}$$

k) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

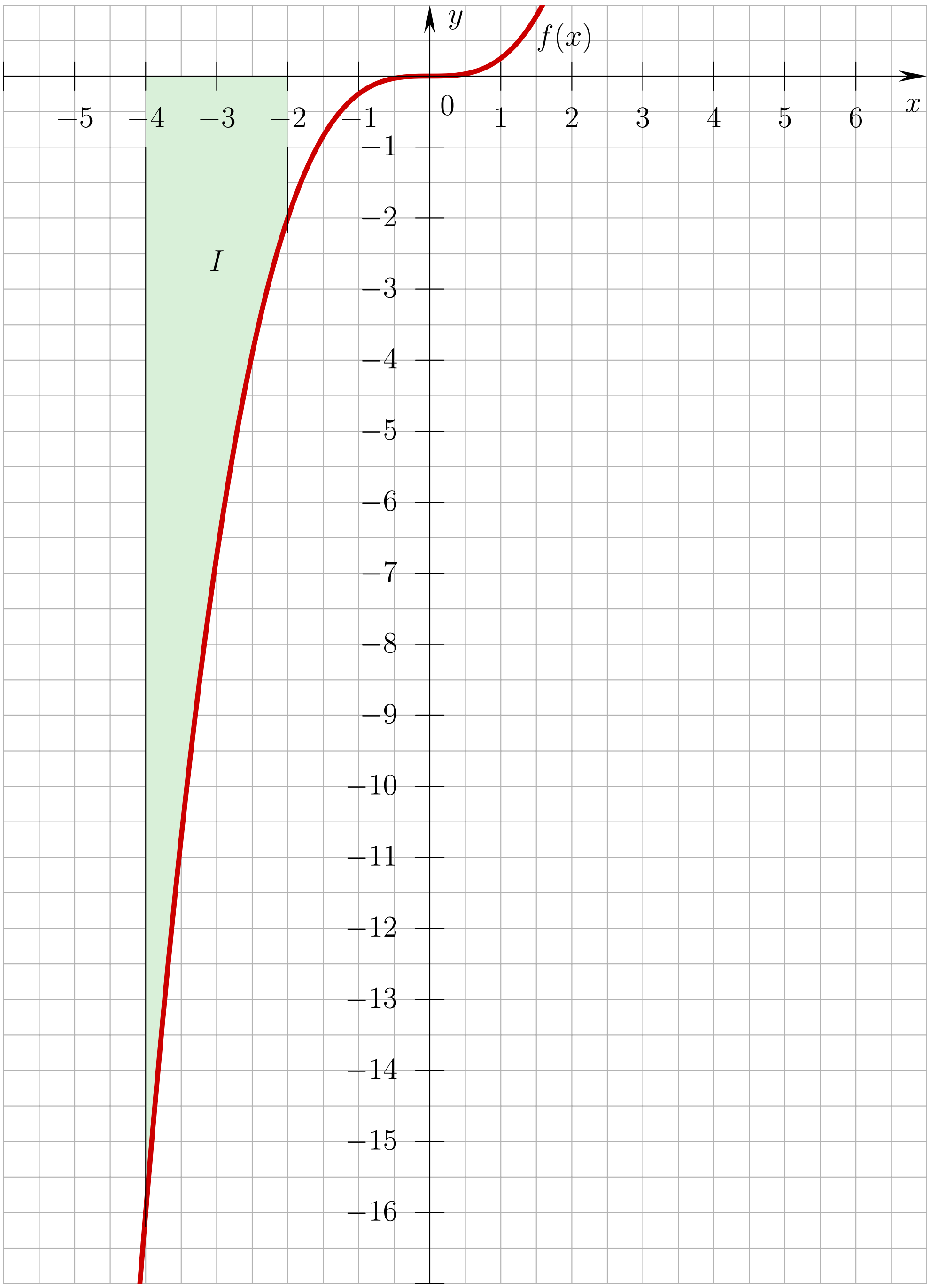


Offensichtlich muss gelten $I = 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}\, x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[x^4 \right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{16} \cdot \left(1^4 - (-1)^4 \right) = \frac{1}{16} \cdot (1 - 1) = \frac{1}{16} \cdot 0$$

$$= \underline{\underline{0.}} \tag{11}$$

I) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I < 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{4}\, x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\, x^4 \,\right]\Big|_{-4}^{-2} = \frac{1}{16} \cdot \Big((-2)^4 - (-4)^4 \Big) = \frac{1}{16} \cdot (16 - 256) = 1 - 16$$
$$= \underline{\underline{-15.}} \tag{12}$$

3. Aussagen über Integrale

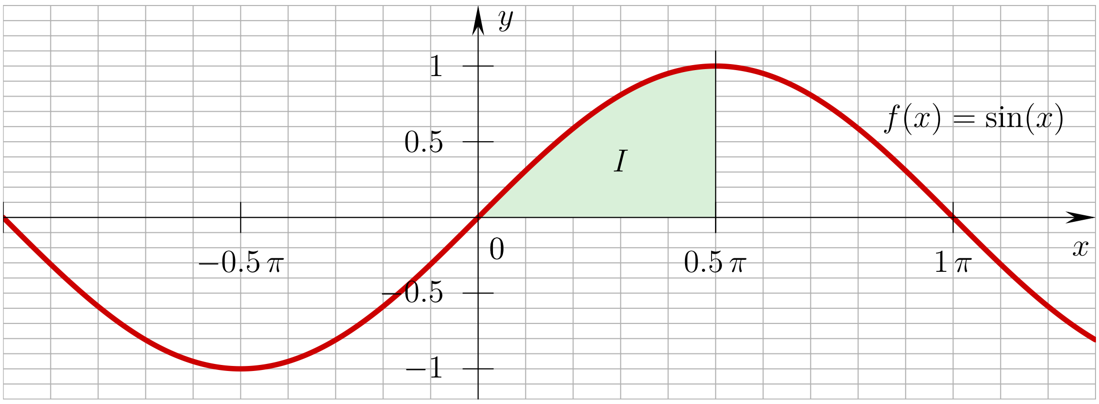
Wir betrachten eine *stetige Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
c) Es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.	○	●
d) Es gilt $\int_0^1 \big(2 + f(x)\big)\,\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○
e) Es gilt $\int_{-2}^2 \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \geq 0$.	●	○
f) Es gilt $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_7^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○

4. Standard Integrale

Wir skizzieren jeweils den *Graphen* des *Integranden*, kennzeichnen die zu berechnende *Fläche*, bestimmen das Vorzeichen des *Integrals* und berechnen sodann dessen genauen Wert.

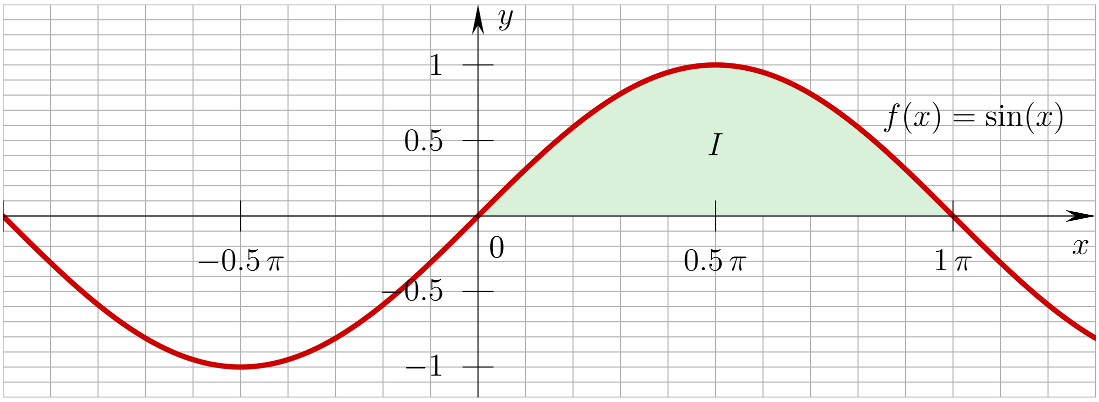
a) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]\Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = -0 + 1 = \underline{\underline{1.}} \tag{13}$$

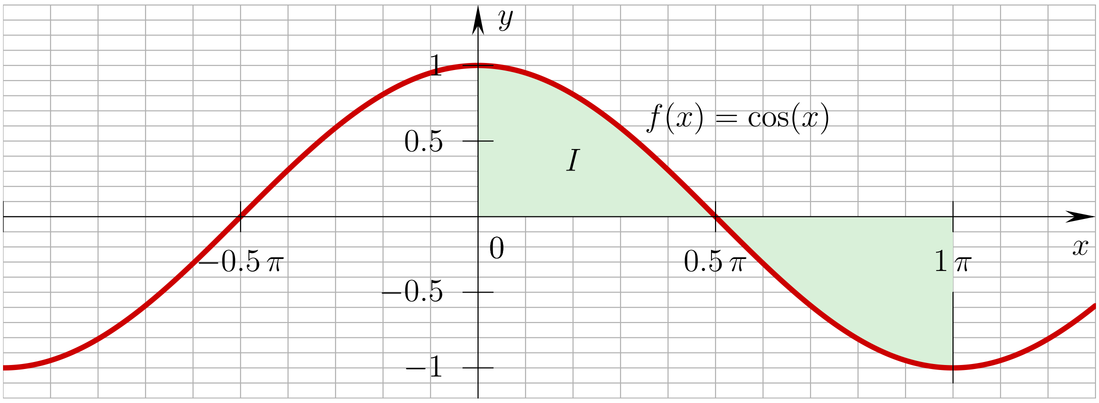
b) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2.}} \tag{14}$$

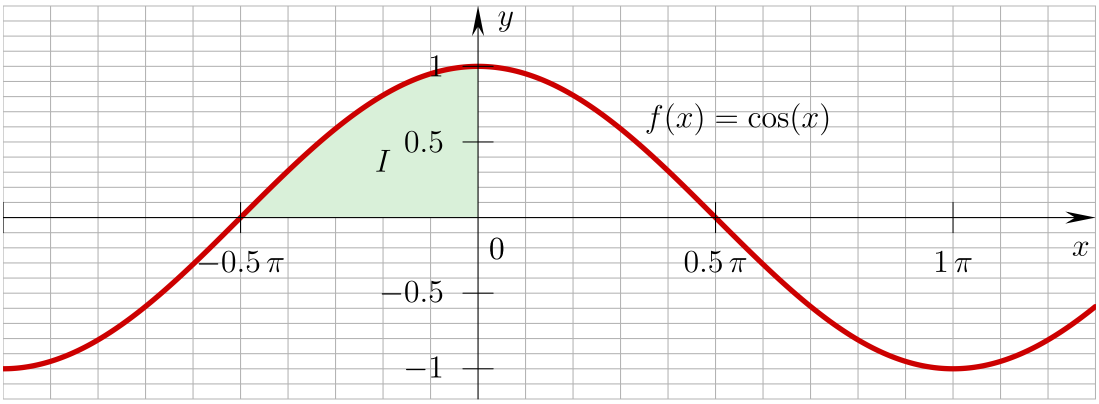
c) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I = 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]\Big|_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{15}$$

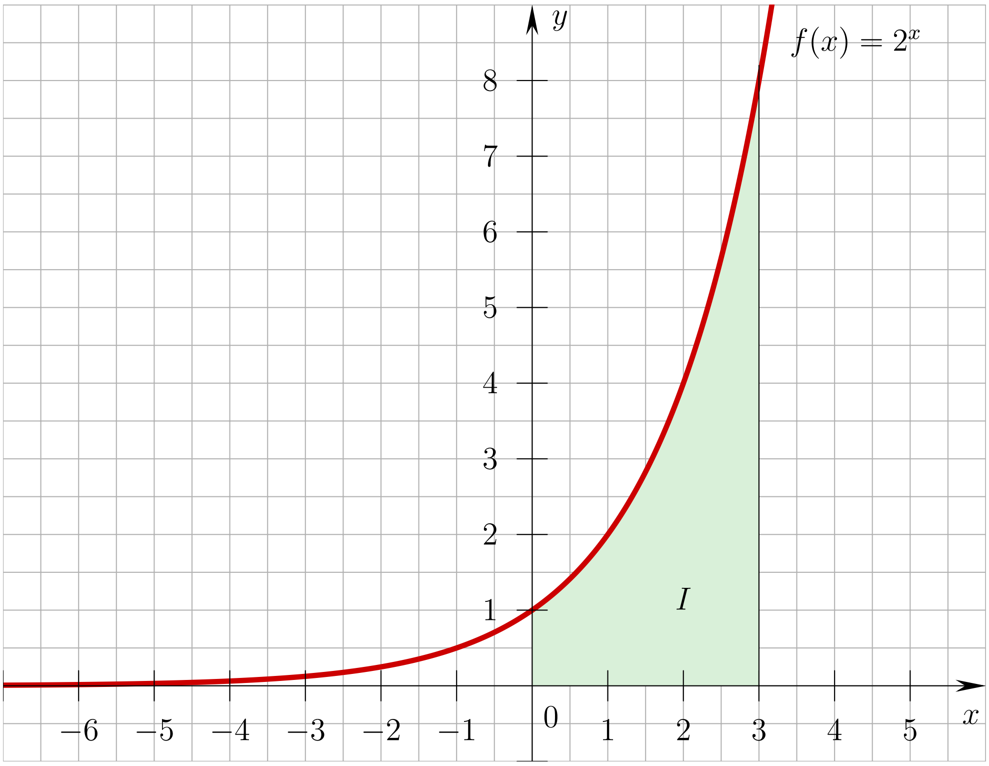
d) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\pi/2}^0 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]\Big|_{-\pi/2}^0 = \sin(0) - \sin(-\pi/2) = 0 - (-1) = \underline{\underline{1.}} \tag{16}$$

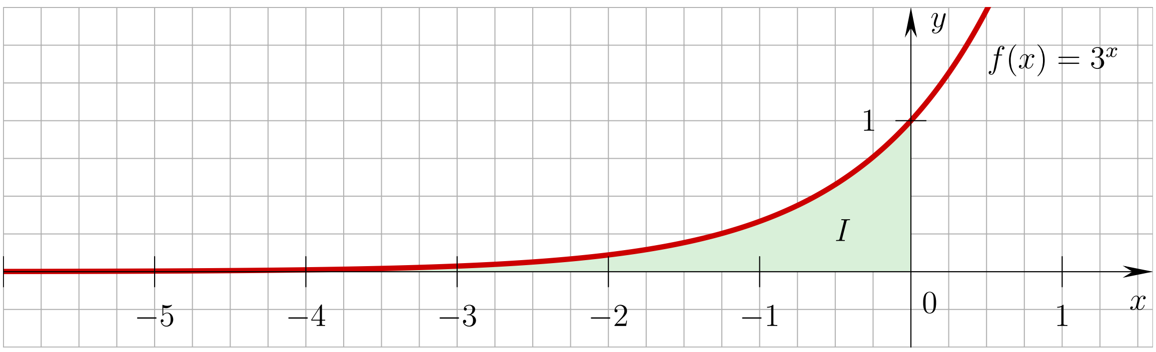
e) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^3 2^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \Big[2^x \Big]\Big|_0^3 = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left(2^3 - 2^0\right) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (8-1) = \underline{\underline{\frac{7}{\ln(2)}}} \,. \tag{17}$$

f) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

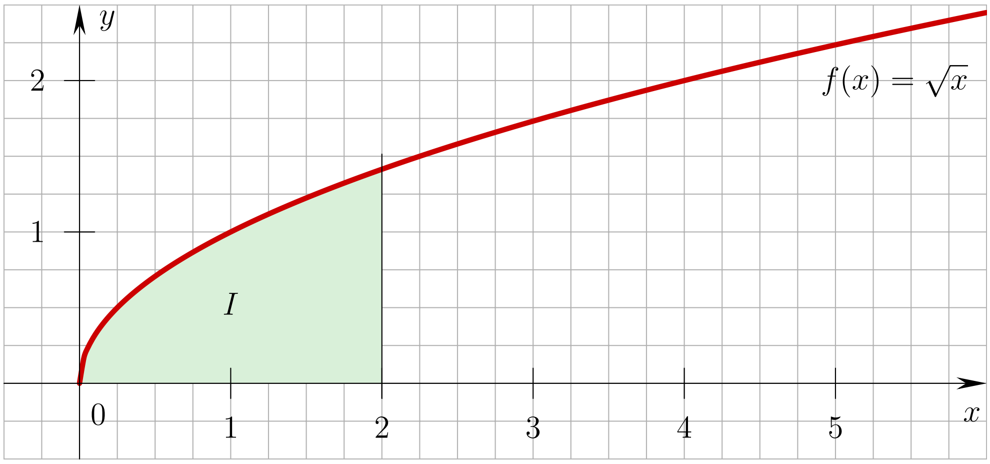


Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-4}^0 3^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \Big[3^x \Big]\Big|_{-4}^0 = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \left(3^0 - 3^{-4}\right) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^4}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln(3)} \cdot \left(\frac{81}{81} - \frac{1}{81}\right) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{81-1}{81} = \underline{\underline{\frac{80}{81 \cdot \ln(3)}}} \,. \tag{18}$$

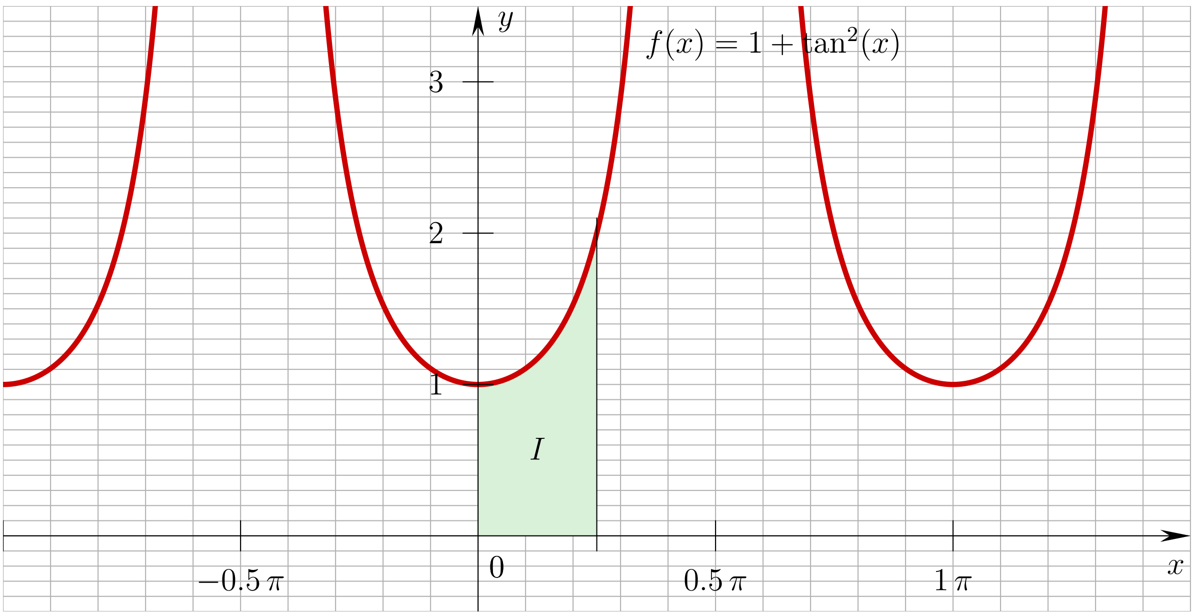
g) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot \left[x^{\frac{3}{2}} \right]\Big|_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^3} - 0 = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}}\,. \tag{19}$$

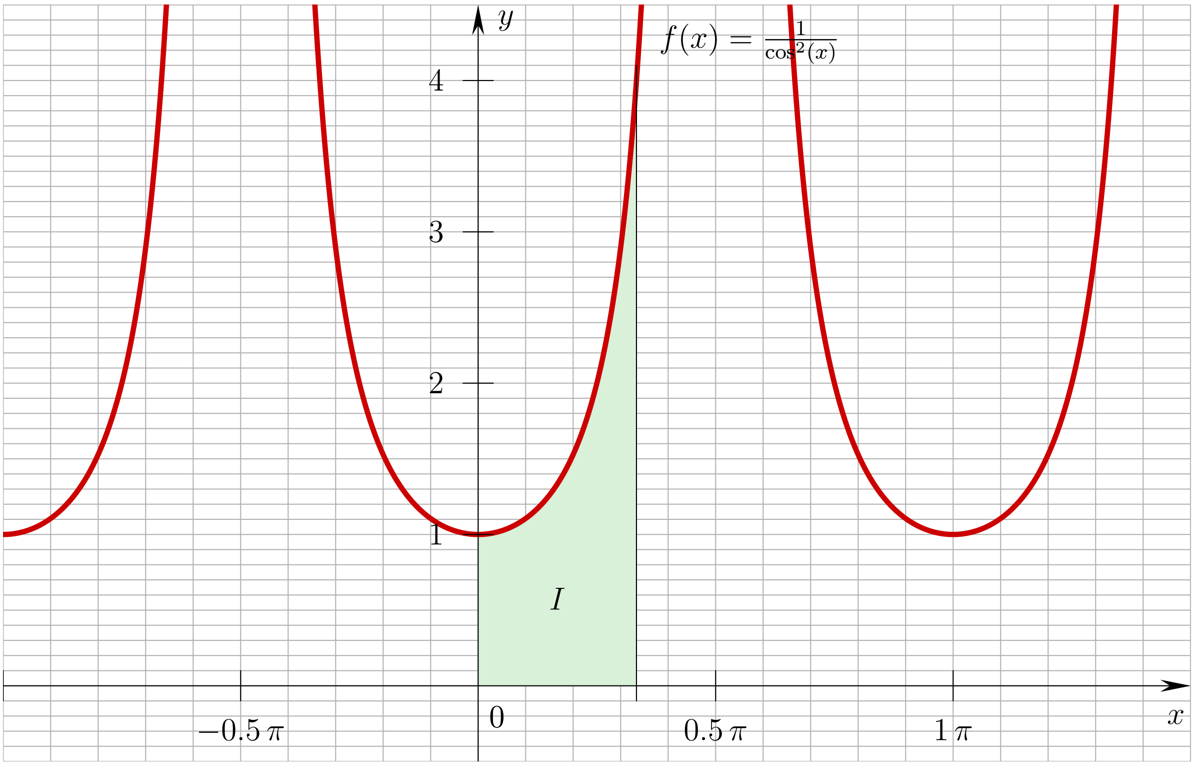
h) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(x) \right) \mathrm{d}x = \left[\tan(x) \right]\Big|_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan(0) = 1 - 0 = \underline{\underline{1.}} \tag{20}$$

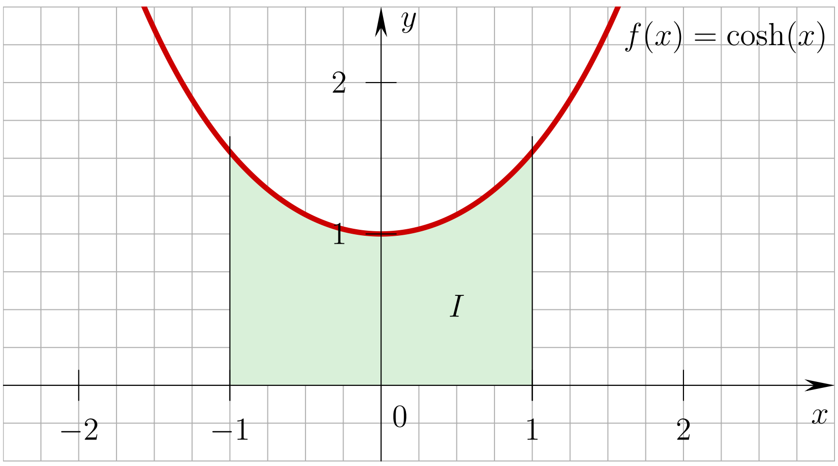
i) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\tan(x)\Big]\Big|_0^{\pi/3} = \tan(\pi/3) - \tan(0) = \sqrt{3} - 0 = \underline{\underline{\sqrt{3}\,.}} \tag{21}$$

j) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.

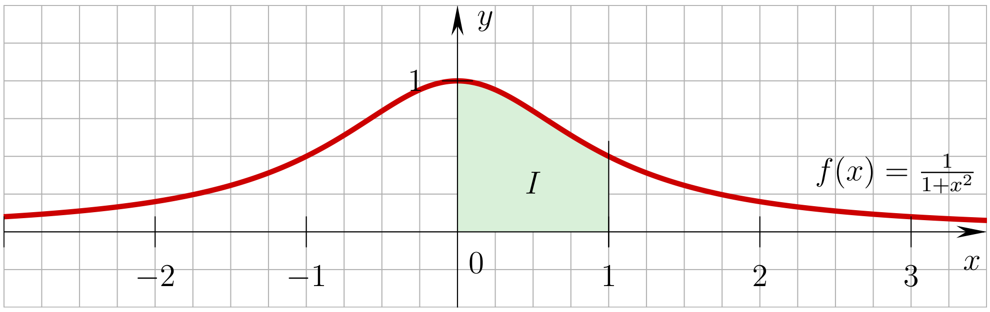


Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^{1} \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sinh(x)\Big]\Big|_{-1}^{1} = \sinh(1) - \sinh(-1) = \sinh(1) + \sinh(1)$$

$$= 2\,\sinh(1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1} = \underline{\underline{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\,.}} \tag{22}$$

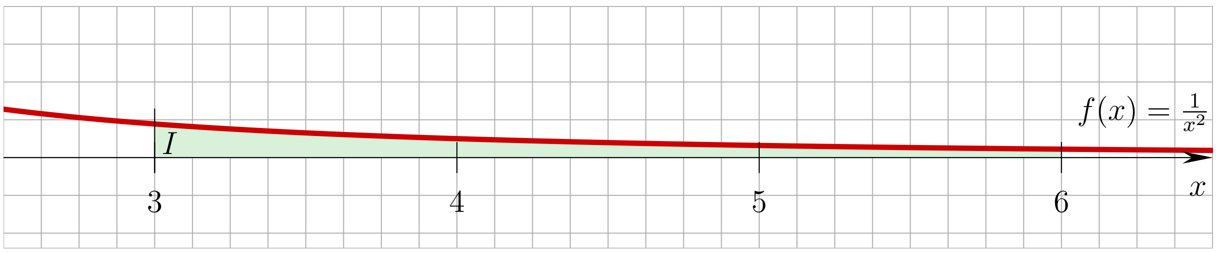
k) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}. \tag{23}$$

l) Wir skizzieren die *Fläche* I in einem x-y-Diagramm.



Offensichtlich muss gelten $I > 0$.

$$\underline{\underline{I}} = \int_3^6 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_3^6 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}. \tag{24}$$

5. Aussagen über zwei Integrale

Wir betrachten $a, b \in \mathbb{R}$ und die *Integrale*

$$I = \int_a^b x^3\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad J = \int_a^b x^4\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Integrale* I und J sind *bestimmte Integrale.*	●	○
b) Für $a = 0$ und $b = 1$ gilt $I > J$.	●	○
c) Für $a = -1$ und $b = 0$ gilt $I > J$.	○	●
d) Für $a < 0$ und $b = -a$ gilt $I = 0$ und $J > 0$.	●	○
e) Für $a > 0$ und $b = -a$ gilt $I = 0$ und $J > 0$.	○	●
f) Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $I = J$.	●	○

6. Aufleitungen von Polynom-Funktionen
Wir berechnen die folgenden *unbestimmten Integrale* durch elementares *Aufleiten*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(2x+1\big)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\,x^2 + 1\cdot x + c = \underline{\underline{x^2 + x + c.}} \tag{26}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(4x-8\big)\,\mathrm{d}x = 4\cdot\frac{1}{2}\,x^2 - 8x + c = \underline{\underline{2x^2 - 8x + c.}} \tag{27}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(12x^2+17\big)\,\mathrm{d}x = 12\cdot\frac{1}{3}\,x^3 + 17x + c = \underline{\underline{4x^3 + 17x + c.}} \tag{28}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(3x^2-6x\big)\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{3}\,x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}\,x^2 + c = \underline{\underline{x^3 - 3x^2 + c.}} \tag{29}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(6x^2-4x+3\big)\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{1}{3}\,x^3 - 4\cdot\frac{1}{2}\,x^2 + 3x + c = \underline{\underline{2x^3 - 2x^2 + 3x + c.}} \tag{30}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \big(8x-1+9x^2\big)\,\mathrm{d}x = 8\cdot\frac{1}{2}\,x^2 - 1\cdot x + 9\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 + c = \underline{\underline{4x^2 - x + 3x^3 + c.}} \tag{31}$$

7. Aufleitungen von Polynom-Funktionen mit Python/Sympy
Wir berechnen die *unbestimmten Integrale* aus Aufgabe 7 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
# Parameter:
f=...;
# Berechnungen:
F=sp.expand(sp.integrate(f,x));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(F);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2*x+1;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + x + c.}}$$

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=4*x-8;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = 2x^2 - 8x + c.}}$$

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=12*x**2+17;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = 4x^3 + 17x + c.}}$$

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=3*x**2-6*x;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = x^3 - 3x^2 + c.}}$$

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=6*x**2-4*x+3;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + c.}}$$

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=8*x-1+9*x**2;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Aufleitung*

$$\underline{\underline{F(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + c.}}$$

8. Integrale von Polynom-Funktionen

Wir berechnen die folgenden, bestimmten *Integrale* durch elementares *Aufleiten*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^3 \big(2x-1\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\,x^2 - x\,\Big]\Big|_0^3 = 3^2 - 3 - 0^2 + 0 = \underline{\underline{6.}} \tag{32}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^1 \big(2x-1\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\,x^2 - x\,\Big]\Big|_{-1}^1 = 1^2 - 1 - (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 - 1 - 1 = \underline{\underline{-2.}} \tag{33}$$

c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \int_{-2}^1 \big(6x^2 - 8x^3 + 1\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\,2x^3 - 2x^4 + x\,\Big]\Big|_{-2}^1 \\ &= 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1^4 + 1 - 2\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^4 - (-2) = 2 - 2 + 1 + 16 + 32 + 2 \\ &= \underline{\underline{51.}}\end{aligned} \tag{34}$$

d) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \int_{-2}^{-1} \big(6x^2 - 8x^3 + 1\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\,2x^3 - 2x^4 + x\,\Big]\Big|_{-2}^{-1} \\ &= 2\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^4 + (-1) - 2\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^4 - (-2) \\ &= -2 - 2 - 1 + 16 + 32 + 2 = \underline{\underline{45.}}\end{aligned} \tag{35}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - 16x^4\right)\mathrm{d}x = \left[\,\frac{2}{3}\,x - \frac{16}{5}\,x^5\,\right]\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{16}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^5 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{16}{5}\cdot 1^5 \\ &= 1 - \frac{16}{5}\cdot\frac{243}{32} - \frac{2}{3} + \frac{16}{5} = 1 - \frac{243}{10} - \frac{2}{3} + \frac{16}{5} = \frac{30}{30} - \frac{729}{30} - \frac{20}{30} + \frac{96}{30} = -\frac{623}{30} \\ &= -20 - \frac{23}{30} \approx \underline{\underline{-20.8\,.}}\end{aligned} \tag{36}$$

f) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left(\frac{2}{3} - 16x^4\right)\mathrm{d}x = \left[\,\frac{2}{3}\,x - \frac{16}{5}\,x^5\,\right]\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^0 = \frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{16}{5}\cdot 0^5 - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{16}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \\ &= 0 - 0 + 1 - \frac{16}{5}\cdot\frac{243}{32} = 1 - \frac{243}{10} = \frac{10}{10} - \frac{243}{10} = -\frac{233}{10} = \underline{\underline{-23.3\,.}}\end{aligned} \tag{37}$$

9. Integrale von Polynom-Funktionen mit Python/Sympy
Wir berechnen die *Integrale* aus Aufgabe 9 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
# Parameter:
f=...; x_0=...; x_E=...;
# Berechnungen:
I=sp.integrate(f,(x,x_0,x_E));
# Ausgabe:
dp.display(I);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2*x-1; x_0=0; x_E=3;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I = 6.}}$

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2*x-1; x_0=-1; x_E=1;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I = -2.}}$

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=6*x**2-8*x**3+1; x_0=-2; x_E=1;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I = 51\,.}}$

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=6*x**2-8*x**3+1; x_0=-2; x_E=-1;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I = 45.}}$

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2/3-16*x**4; x_0=1; x_E=3/2;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I \approx -20.8\,.}}$

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2/3-16*x**4; x_0=-3/2; x_E=0;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir das *Integral*

$\underline{\underline{I = -23.3\,.}}$

10. Aussagen über zwei Integrale
Wir betrachten die *Integrale*

$$I = \int_{-2}^{2} \Big(|\,x\,| + x\Big)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad J = \int_{0}^{2} |\,x\,|\,\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Integrale* I und J sind *bestimmte Integrale.*	●	○
b) Es gilt $I = 0$.	○	●
c) Es gilt $I = |\,I\,|$.	●	○
d) Es gilt $I = 2J$.	●	○
e) Weglassen des *Betrages* im *Integranden* von J ändert den Wert des *Integrals* nicht.	●	○
f) Um das *Integral* I zu berechnen, könnte es sinnvollerweise aufgeteilt werden in zwei *Integrale* mit den *Grenzen* -2 bis 0 und 0 bis 2.	●	○

11. Aufleitung von Polynom-Funktionen
Wir berechnen die folgenden *unbestimmten Integrale* durch elementares *Aufleiten.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(t)}} = \int \Big(8t^3 - 2t\Big)\,\mathrm{d}t = 8 \cdot \frac{1}{4}\,t^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}\,t^2 + c = \underline{\underline{2t^4 - t^2 + c.}} \tag{39}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \Big(8t^3 - 2t\Big)\,\mathrm{d}x = 8t^3x - 2tx + c = \underline{\underline{2xt\big(4t^2 - 1\big) + c.}} \tag{40}$$

c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \Big(12t^5x^3 - 6x^2t + s\Big)\,\mathrm{d}x = 12t^5 \cdot \frac{1}{4}\,x^4 - 6 \cdot \frac{1}{3}\,x^3t + sx + c \\ &= \underline{\underline{3t^5x^4 - 2x^3t + sx + c.}} \end{aligned} \tag{41}$$

d) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(t)}} &= \int \Big(12t^5x^3 - 6x^2t + s\Big)\,\mathrm{d}t = 12 \cdot \frac{1}{6}\,t^6x^3 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2}\,t^2 + st + c \\ &= \underline{\underline{2t^6x^3 - 3x^2t^2 + st + c.}} \end{aligned} \tag{42}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(w)}} &= \int \Big(100u^{99}w^{399} - u\Big)\,\mathrm{d}w = 100u^{99} \cdot \frac{1}{400}\,w^{400} - uw + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4}\,u^{99}w^{400} - uw + c.}} \end{aligned} \tag{43}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(f)}} = \int \big(90u^{89} f + 2kl\big)\,\mathrm{d}f = 90u^{89} \cdot \frac{1}{2}\, f^2 + 2klf + c = \underline{\underline{45u^{89} f^2 + 2klf + c.}} \tag{44}$$

12. Integrale von Polynom-Funktionen

Wir berechnen die folgenden, bestimmten *Integrale* durch elementares *Aufleiten*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \big(12t^3 + 9t^2\big)\,\mathrm{d}t = \Big[3t^4 + 3t^3\Big]\Big|_0^1 = 3 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^3 = 3 + 3 - 0 - 0$$
$$= \underline{\underline{6.}} \tag{45}$$

b) Wir zeigen zwei Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen und Einsetzen des Ergebnisses (89) aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^0 \big(12t^3 + 9t^2\big)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \big(12t^3 + 9t^2\big)\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{-6.}} \tag{46}$$

Variante 2: Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^0 \big(12t^3 + 9t^2\big)\,\mathrm{d}t = \Big[3t^4 + 3t^3\Big]\Big|_1^0 = 3 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^3 - 3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3$$
$$= 0 + 0 - 3 - 3 = \underline{\underline{-6.}} \tag{47}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^s \big(10u - 35\,u^6\big)\,\mathrm{d}u = \Big[5u^2 - 5u^7\Big]\Big|_0^s = 5s^2 - 5s^7 - 5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^7 = 5s^2 - 5s^7$$
$$= \underline{\underline{5s^2\big(1 - s^5\big).}} \tag{48}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_t^{-1} \big(10u - 35\,u^6\big)\,\mathrm{d}u = \Big[5u^2 - 5u^7\Big]\Big|_t^{-1} = 5 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1)^7 - 5t^2 + 5t^7$$
$$= 5 + 5 - 5t^2 + 5t^7 = 10 - 5t^2 + 5t^7 = \underline{\underline{5\,\big(2 - t^2 + t^7\big).}} \tag{49}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^v \big(2wu - 6vw^2 + 1\big)\,\mathrm{d}w = \Big[uw^2 - 2vw^3 + w\Big]\Big|_{w=0}^{w=v}$$
$$= uv^2 - 2vv^3 + v - u \cdot 0^2 + 2v \cdot 0^3 - 0 = uv^2 - 2v^4 + v = \underline{\underline{v\,\big(uv - 2v^3 + 1\big).}} \tag{50}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_u^{-v} \left(2wu - 6vw^2 + 1\right) \mathrm{d}w = \left[uw^2 - 2vw^3 + w \right]\Big|_{w=u}^{w=-v}$$
$$= u \cdot (-v)^2 - 2v \cdot (-v)^3 - v - u \cdot u^2 + 2v \cdot u^3 - u = uv^2 + 2v^4 - v - u^3 + 2vu^3 - u$$
$$= \underline{\underline{2v^4 + 2u^3v - u^3 + uv^2 - u - v.}} \tag{51}$$

13. Aufleitung von eigentlichen Exponentialfunktionen

Wir berechnen die folgenden *unbestimmten Integrale* durch elementares *Aufleiten.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\mathrm{e}^x + c.}} \tag{52}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 2^x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x + c.}} \tag{53}$$

c) Wir zeigen zwei Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch elementares *Aufleiten* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + c = \underline{\underline{c - \mathrm{e}^{-x}.}} \tag{54}$$

Variante 2: Durch Umformen des *Integranden* und elementares *Aufleiten* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x + c = \frac{1}{-\ln(\mathrm{e})} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^x} + c$$
$$= \frac{1}{-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} + c = \underline{\underline{c - \mathrm{e}^{-x}.}} \tag{55}$$

d) Wir zeigen zwei Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch elementares *Aufleiten* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 2^{-x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-x} + c = \underline{\underline{c - \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-x}.}} \tag{56}$$

Variante 2: Durch Umformen des *Integranden* und elementares *Aufleiten* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 2^{-x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2^x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + c = \frac{1}{-\ln(2)} \cdot \frac{1}{2^x} + c$$
$$= -\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-x} + c = \underline{\underline{c - \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-x}.}} \tag{57}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 3^{2+x}\,\mathrm{d}x = \int 3^2 \cdot 3^x\,\mathrm{d}x = 9\int 3^x\,\mathrm{d}x = 9\cdot\frac{1}{\ln(3)}\cdot 3^x + c = \frac{9}{\ln(3)}\cdot 3^x + c$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{\ln(3)}\cdot 3^{2+x} + c.}} \tag{58}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{3^{x-2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3^x\cdot 3^{-2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3^{-2}}\int\frac{1}{3^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3^{-2}}\int\left(\frac{1}{3}\right)^x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3^{-2}}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + c = \frac{1}{3^{-2}}\cdot\frac{1}{-\ln(3)}\cdot\frac{1}{3^x} + c = \underline{\underline{-\frac{1}{\ln(3)}\cdot\frac{1}{3^{x-2}} + c.}} \tag{59}$$