Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 11

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die speziellen stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen Normalverteilung und Standardnormalverteilung und ihre Eigenschaften.
- Sie können die (Standard)Normalverteilung auf konkrete Situationen anwenden.
- Sie können die Normalverteilung in die Standardnormalverteilung transformieren.

---

1. Standardnormalverteilung
U sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion $\phi(u)$ (Tabelle) die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(U \leq 1{,}52)$ b) $P(U \leq -0{,}42)$ c) $P(0{,}2 \leq U \leq 2{,}13)$
d) $P(-1{,}01 \leq U \leq -0{,}25)$ e) $P(-1 \leq U \leq 1)$ f) $P(|U| \leq 1{,}69)$

a) $P(U \leq 1{,}52) = \phi(1{,}52) = 0{,}9357$

b) $P(U \leq -0{,}42) = \phi(-0{,}42) = 1 - \phi(0{,}42) = 1 - 0{,}6628 = 0{,}3372$

c) $P(0{,}2 \leq U \leq 2{,}13) = \phi(2{,}13) - \phi(0{,}2) = 0{,}9834 - 0{,}5793 = 0{,}4041$

d) $P(-1{,}01 \leq U \leq -0{,}25) = \phi(-0{,}25) - \phi(-1{,}01) =$
$= 1 - \phi(0{,}25) - 1 + \phi(1{,}01) = \phi(1{,}01) - \phi(0{,}25) = 0{,}8438 - 0{,}5987 = 0{,}2451$

e) $P(-1 \leq U \leq 1) = P(|U| \leq 1) = 2 \cdot \phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$

f) $P(|U| \leq 1{,}69) = 2 \cdot \phi(1{,}69) - 1 = 2 \cdot 0{,}9545 - 1 = 0{,}9090$

2. Standardnormalverteilung II
Bestimmen Sie anhand der Tabelle für die Standardnormalverteilung die jeweils unbekannte Intervallgrenze (U: standardnormalverteilte Zufallsvariable):
a) $P(U \leq a) = 0{,}5$ b) $P(U \leq a) = 0{,}321$ c) $P(0{,}15 \leq U \leq b) = 0{,}35$
d) $P(-0{,}22 \leq U \leq b) = 0{,}413$ e) $P(-a \leq U \leq a) = 0{,}95$ f) $P(|U| \leq c) = 0{,}4682$

a) $\phi(a) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

b) $\phi(a) = 0{,}3210 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad (\text{Wir setzen } a = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}3210 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}6790 \quad \Rightarrow$
$k = 0{,}465 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}465$

c) $\phi(b) - \phi(0{,}15) = 0{,}35 \quad \Rightarrow$

$\phi(b) = 0{,}35 + \phi(0{,}15) = 0{,}35 + 0{,}5596 = 0{,}9096 \quad \Rightarrow \quad b = 1{,}338$

d) $\phi(b) - \phi(-0{,}22) = \phi(b) - 1 + \phi(0{,}22) = \phi(b) - 1 + 0{,}5871 =$
$= \phi(b) - 0{,}4129 = 0{,}413 \quad \Rightarrow \quad \phi(b) = 0{,}8259 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}938$

e) $2 \cdot \phi(a) - 1 = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \phi(a) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}96$

f) $2 \cdot \phi(c) - 1 = 0{,}4682 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0{,}7341 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}625$

3. Standardnormalverteilung III
X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\mu = 6$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$. Die folgenden Werte von X sind in Standardeinheiten umzurechnen:
a) 10,43 b) 0,86 c) 2,5 d) -4,68 e) $\mu \pm 3{,}2\sigma$ f) 18

$U = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{2};$ a) $U = 2{,}21$ b) $U = -2{,}57$ c) $U = -1{,}75$
d) $U = -5{,}34$ e) $U = \pm 3{,}2$ f) $U = 6$

4. Standardnormalverteilung IV
Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 2$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(X \leq 2{,}52)$ b) $P(X \leq 0{,}84)$ c) $P(X \leq -1{,}68)$ d) $P(-0{,}5 \leq X \leq 4{,}5)$
e) $P(-1{,}86 \leq X \leq -0{,}24)$ f) $P(-3 \leq X \leq 3)$ g) $P(|X| \leq 2{,}13)$ h) $P(X \geq 0{,}98)$

$U = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{0{,}5}$

a) $P(X \leq 2{,}52) = P(U \leq 1{,}04) = \phi(1{,}04) = 0{,}8508$

b) $P(X \leq 0{,}84) = P(U \leq -2{,}32) = \phi(-2{,}32) = 1 - \phi(2{,}32) =$
$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

c) $P(X \leq -1{,}68) = P(U \leq -7{,}36) = \phi(-7{,}36) = 1 - \phi(7{,}36) = 1 - 1 = 0$

d) $P(-0{,}5 \leq X \leq 4{,}5) = P(-5 \leq U \leq 5) = 2 \cdot \phi(5) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

e) $P(-1{,}86 \leq X \leq -0{,}24) = P(-7{,}72 \leq U \leq -4{,}48) = \phi(-4{,}48) - \phi(-7{,}72) =$
$= 1 - \phi(4{,}48) - 1 + \phi(7{,}72) = \phi(7{,}72) - \phi(4{,}48) = 1 - 1 = 0$

f) $P(-3 \leq X \leq 3) = P(-10 \leq U \leq 2) = \phi(2) - \phi(-10) =$

$= \phi(2) - 1 + \phi(10) = 0{,}9772 - 1 + 1 = 0{,}9772$

g) $P(|X| \leq 2{,}13) = P(-2{,}13 \leq X \leq 2{,}13) = P(-8{,}26 \leq U \leq 0{,}26) =$

$= \phi(0{,}26) - \phi(-8{,}26) = \phi(0{,}26) - 1 + \phi(8{,}26) = 0{,}6026 - 1 + 1 = 0{,}6026$

h) $P(X \geq 0{,}98) = P(U \geq -2{,}04) = 1 - P(U \leq -2{,}04) = 1 - \phi(-2{,}04) =$

$= 1 - 1 + \phi(2{,}04) = \phi(2{,}04) = 0{,}9793$

5. Körpergewicht

Von 5000 Studierenden einer Fachhochschule wurde das Körpergewicht bestimmt. Die Zufallsgrösse X = Körpergewicht eines Studenten erwies sich dabei als eine normalverteilte Zufallsvariabel mit dem Mittelwert μ = 75 kg und der Standardabweichung σ = 5 kg. Wie viele der untersuchten Studierenden hatten dabei

a) ein Gewicht zwischen 69 kg und 80 kg,
b) ein Gewicht über 80 kg,
c) ein Gewicht unter 65 kg?

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 75}{5}$$

a) $P(69 \leq X \leq 80) = P(-1{,}2 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1{,}2) =$

$= \phi(1) - 1 + \phi(1{,}2) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}8849 = 0{,}7262$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}7262 = 3631$

b) $P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - P(U \leq 1) = 1 - \phi(1) =$

$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}1587 = 794$

c) $P(X < 65) = P(U \leq -2) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}0228 = 114$

6. Klausur

Die in einer Mathematik-Klausur erzielte Punktzahl lässt sich als eine normalverteilte Zufallsgrösse X auffassen. In einem konkreten Fall ergab sich eine Normalverteilung mit dem Mittelwert μ = 20 und der Standardabweichung σ = 4 (in Punkten). 60% der teilgenommenen Studenten bestanden die Klausur. Welche Mindestpunktzahl war daher zu erreichen?

Mindestpunktzahl: $a \quad \Rightarrow \quad P(X \geq a) = 0{,}6\,; \qquad U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 20}{4}$

$P(X \geq a) = P\left(U \geq \dfrac{a - 20}{4}\right) = P(U \geq c) = 0{,}6 \qquad \left(\text{mit } c = \dfrac{a - 20}{4}\right)$

$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0{,}4 < 0{,}5 \quad \Rightarrow$

$c < 0 \quad (\text{Wir setzen } c = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}4 \quad \Rightarrow$

$\phi(k) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = -k = -0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{a - 20}{4} = -0{,}253 \quad \Rightarrow$

$a = 4c + 20 = -1{,}012 + 20 = 18{,}988 \approx 19$

Daher: Die geforderte *Mindestpunktzahl* betrug 19 Punkte.