Übungsblatt DGL 2

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Richtungsvektorfeld, stabile und instabile statische Lösung, Attraktor und Repellor sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können die statischen Lösungen einer DGL 1. Ordnung berechnen.
- Sie können das Richtungsvektorfeld einer DGL 1. Ordnung in Komponenten angeben, von Hand skizzieren und mit Python plotten.
- Sie können anhand der Skizze des Richtungsvektorfeldes beurteilen, ob eine statische Lösung ein Attraktor, ein Repellor, stabil oder instabil ist. Sie können des Weiteren beurteilen, ob die DGL elementar integrierbar oder autonom ist.

1. Aussagen über Richtungsvektorfelder

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede DGL hat ein Richtungsvektorfeld.		X
b) Mit Hilfe des Richtungsvektorfeldes kann man eine DGL 1. Ordnung lösen.		X
c) Mit Hilfe des Richtungsvektorfeldes kann man eine DGL 1. Ordnung visualisieren.	X	
d) Die Vektoren des Richtungsvektorfeldes sind an jedem Punkt Einheitsvektoren.	X	
e) Die Graphen der Lösungen einer DGL 1. Ordnung stehen an jedem Punkt senkrecht auf dem Richtungsvektorfeld.		X
f) Anhand des Richtungsvektorfeldes einer DGL 1. Ordnung kann man die Stabilität ihrer statischen Lösungen beurteilen.	X	

2. Skizzieren von Richtungsvektorfeldern

Bestimmen Sie die statischen Lösungen der angegebenen DGL sowie die Komponenten des Richtungsvektorfeldes. Skizzieren Sie das Richtungsvektorfeld von Hand. Geben Sie bei jeder statischen Lösung an, ob es sich um einen Attraktor, Repellor oder keines von beidem handelt. Welche der statischen Lösungen sind stabil?

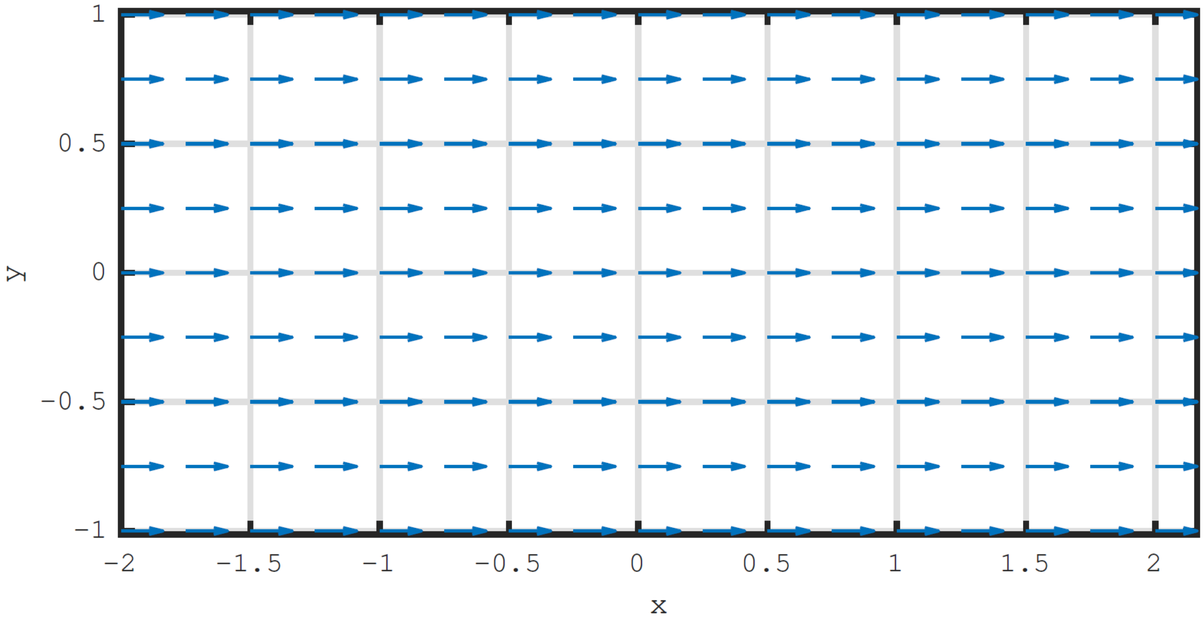
a) $y' = 0$ b) $y' = 1$ c) $y' = -1$
d) $y' = y$ e) $y' = x$ f) $y' = |y|$
g) $y' = |x|$ h) $y' = 1 - y$ i) $y' = 2 - y$
j) $y' = (2 - y)\bullet(1 - y)$ k) $y' = y^2 - y - 2$ l) $y' = |y|\bullet(y + 1)$

Für statische Lösungen muss folgende Bedingung erfüllt sein: $y' = 0 = f(x,y)$.

a)

Die Bedingung ist für alle $y \epsilon \mathbb{R}$ erfüllt, d. h. jedes konstante $y \epsilon \mathbb{R}$ ist eine Lösung der DGL. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}} \begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

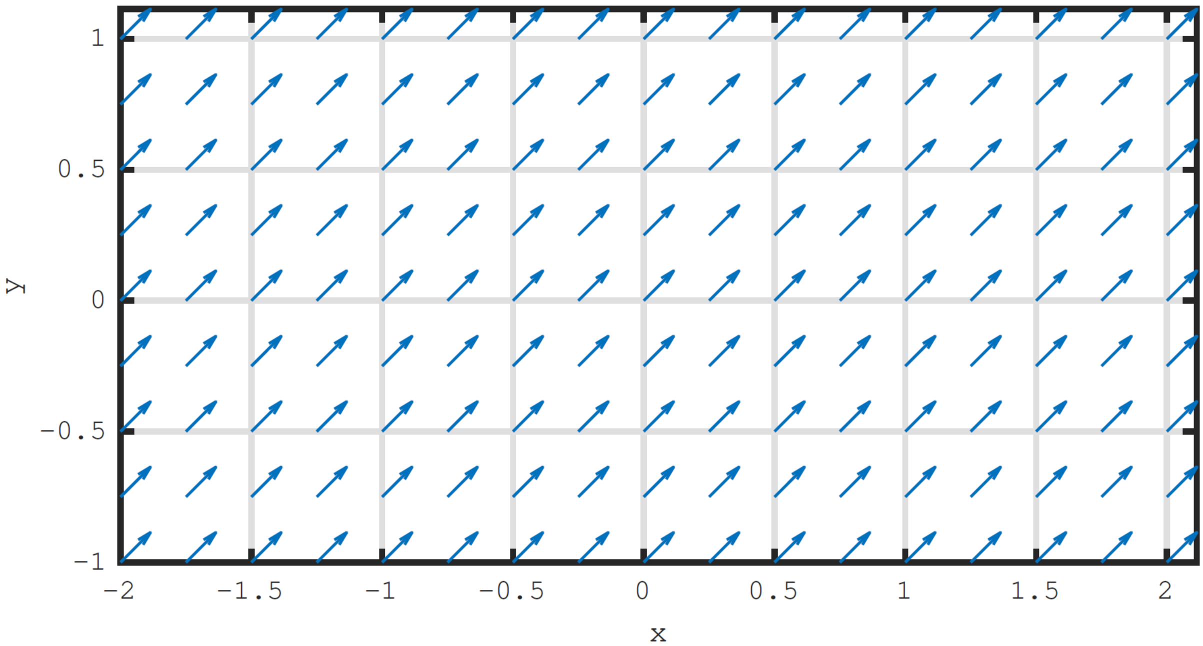


Es liegen weder Attraktoren noch Repelloren vor, d. h. es gibt keine stabilen statischen Lösungen.

b)

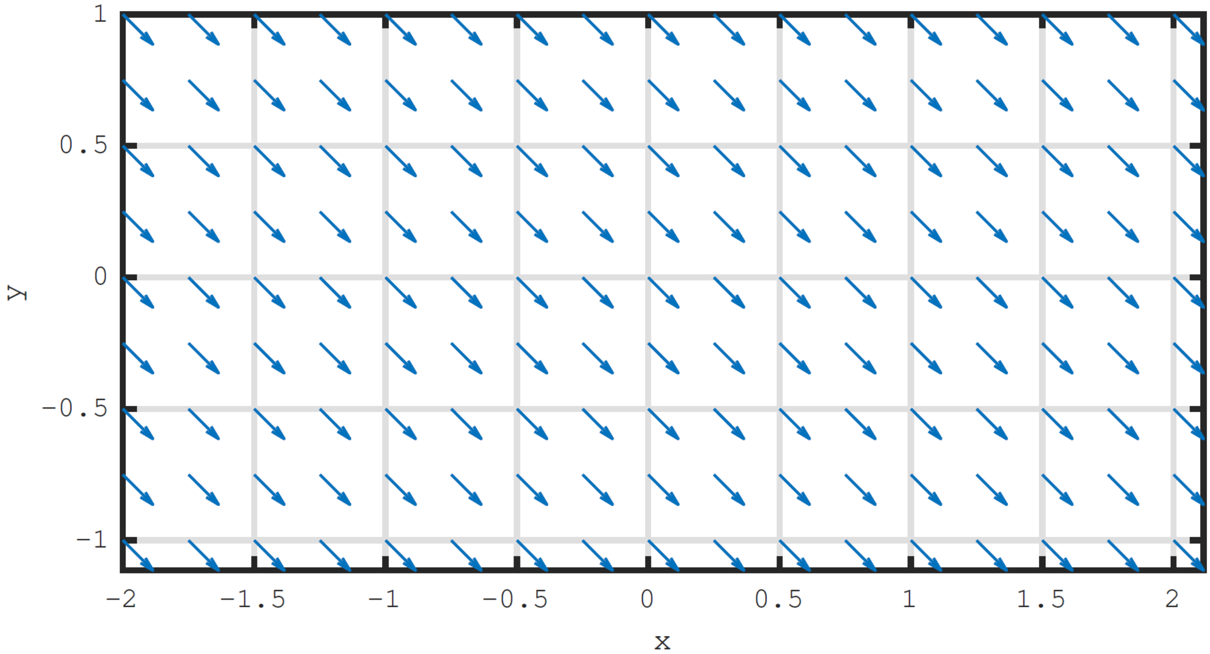
Die Lösungsbedingung kann nicht erfüllt werden, da 0 = 1 gelten müsste. Es gibt somit keine statischen Lösungen. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}} \begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$



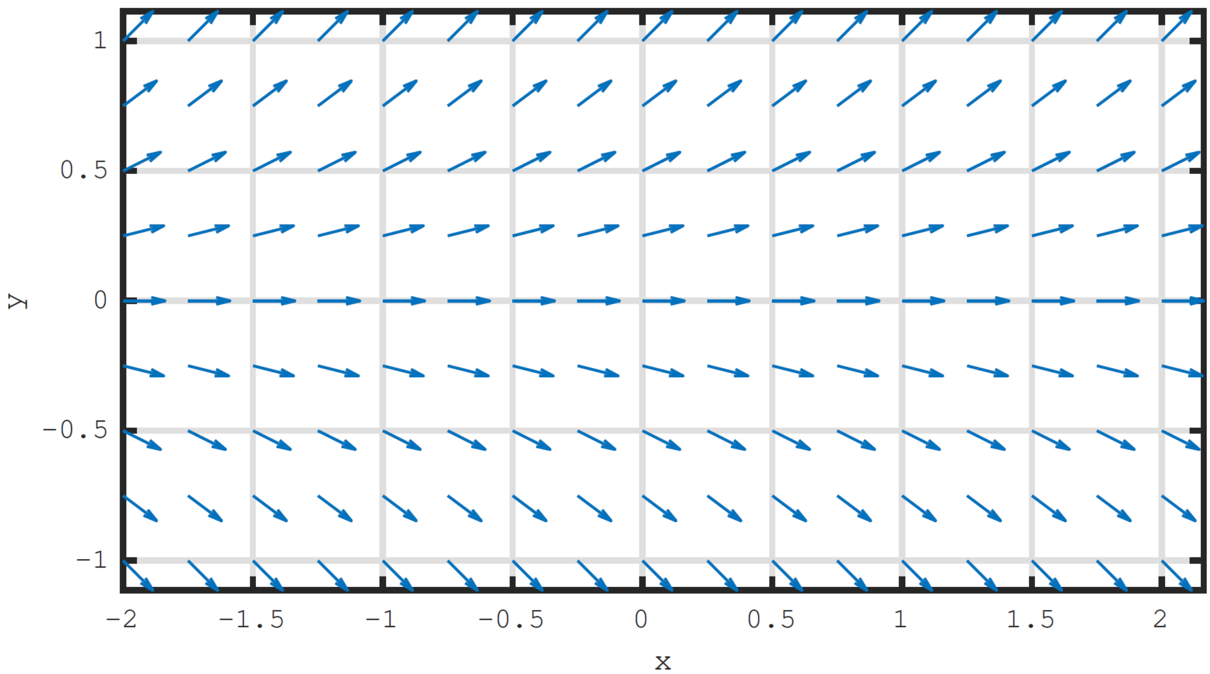
c)
Die Bedingung 0 = -1 kann nicht erfüllt werden. Somit gibt es keine statischen Lösungen. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$



d)
Es gibt genau eine statische Lösung: $y_s(x) = 0$, die ein Repellor ist (siehe Plot). Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

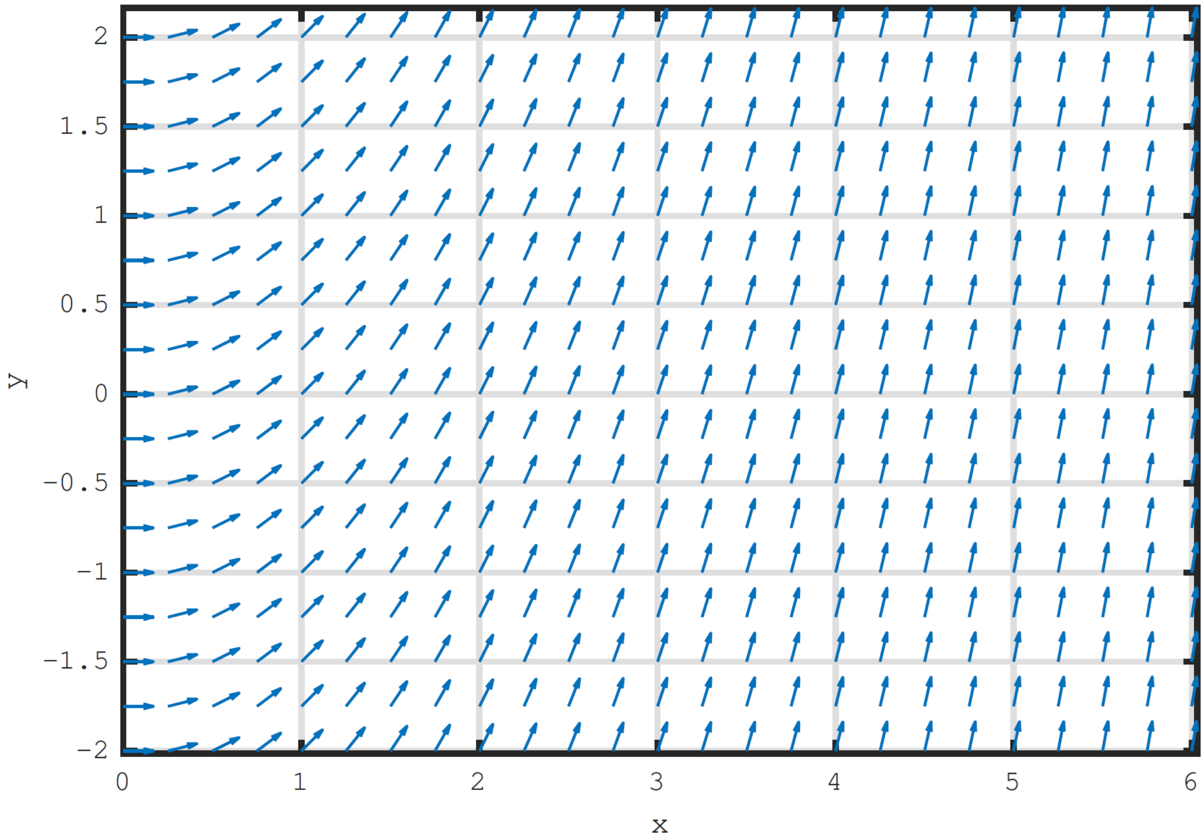
$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}}}.$$



e)

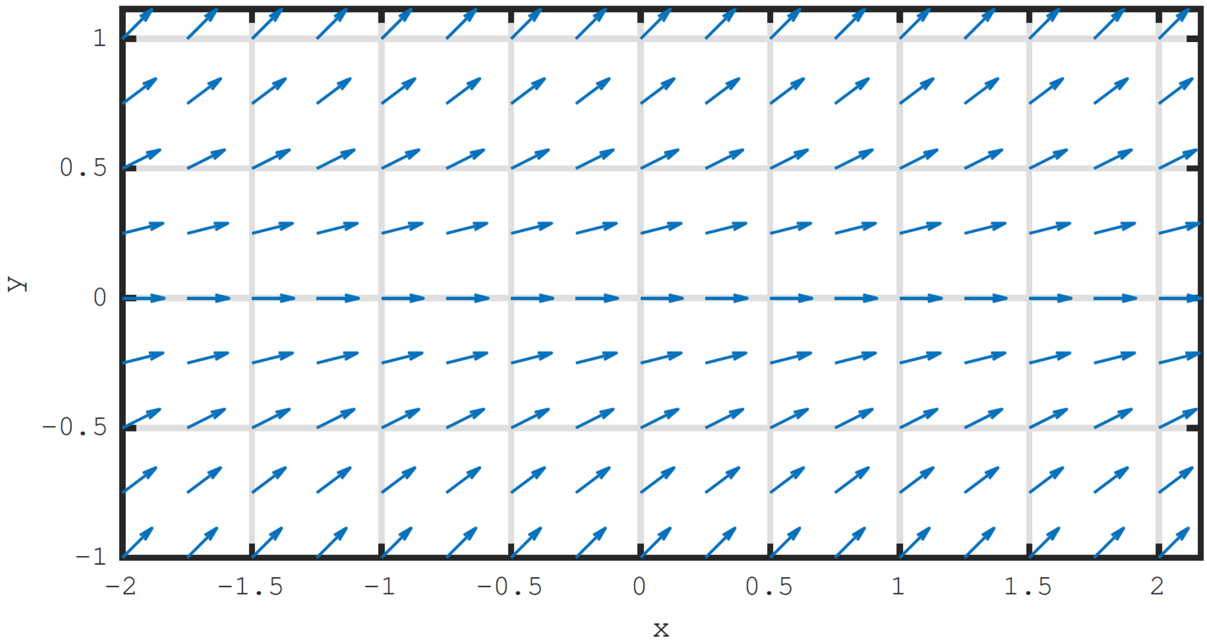
Es gibt keine statischen Lösungen. Es muss 0 = f(x,y) = x gelten, jedoch hat diese Gleichung keine Lösung für y. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}}}.$$



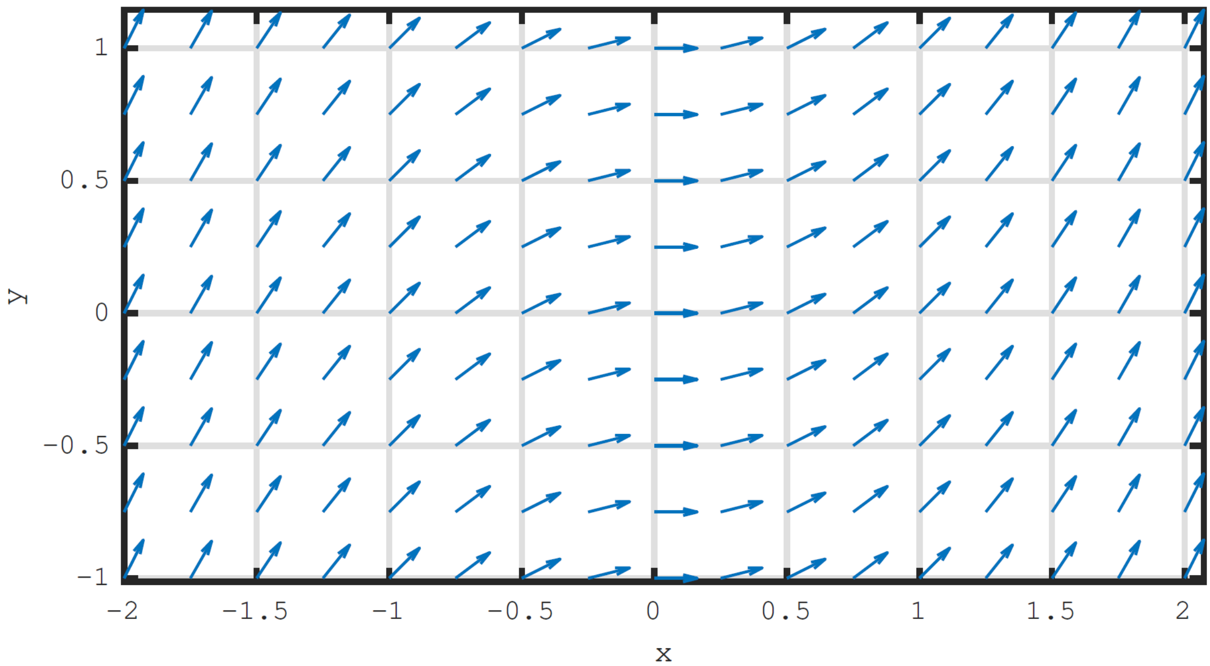
f)
Für die statischen Lösungen muss gelten: 0 = |y|, was auf die statische Lösung $y_s(x)$ = 0 führt. Dies ist weder ein Attraktor noch ein Repellor und somit keine stabile statische Lösung (siehe Plot). Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ |y| \end{bmatrix}}}.$$



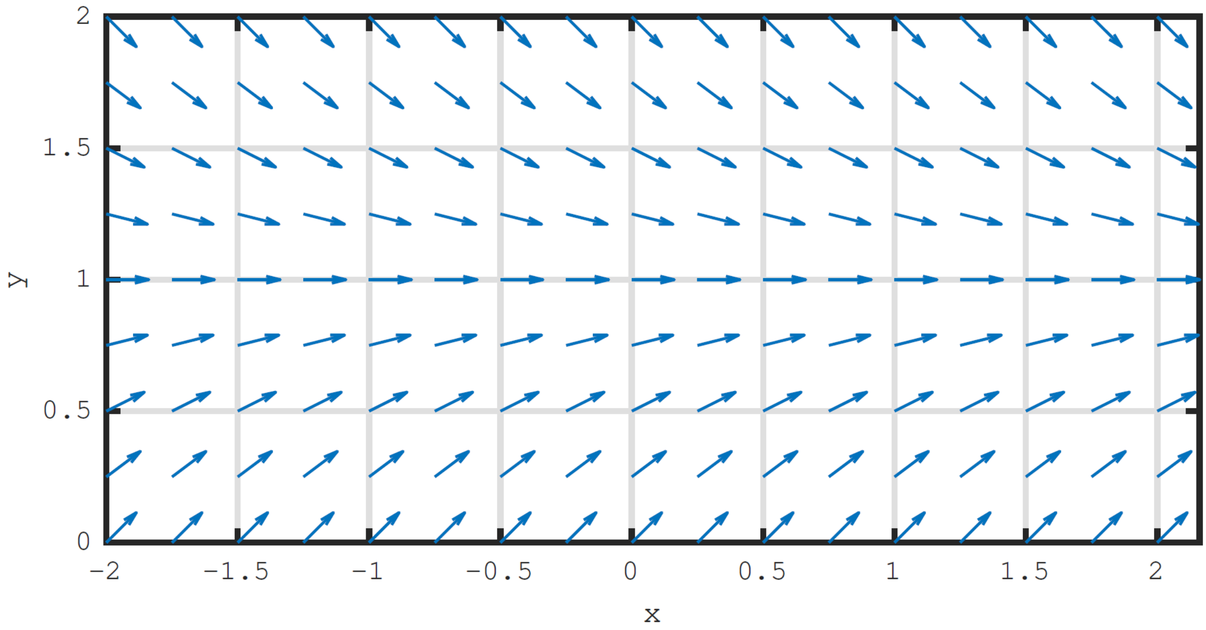
g)
Für statische Lösung muss gelten: 0 = |x|. Dies führt zu keiner statischen Lösung. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ |x| \end{bmatrix}}}.$$



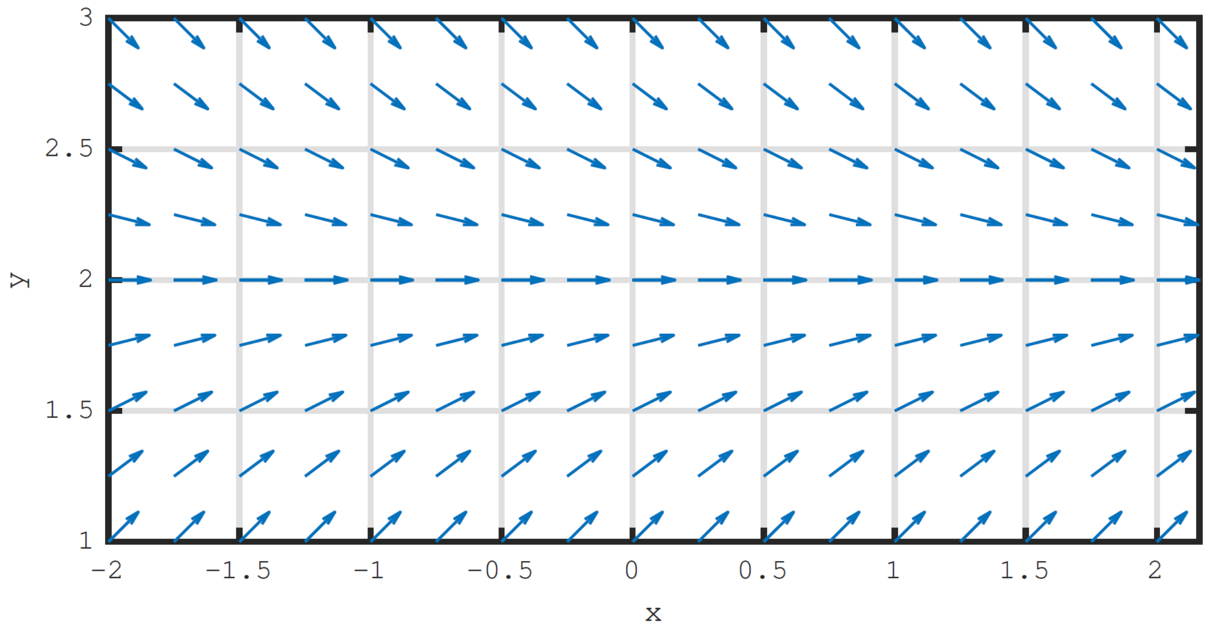
h)
Für statische Lösungen muss gelten: 0 = 1 – y. Dies ergibt als statische Lösung $y_s(x)$ = 1. Diese statische Lösung ist ein Attraktor und stabil (siehe Plot). Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+(1-y)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-y \end{bmatrix}}}.$$



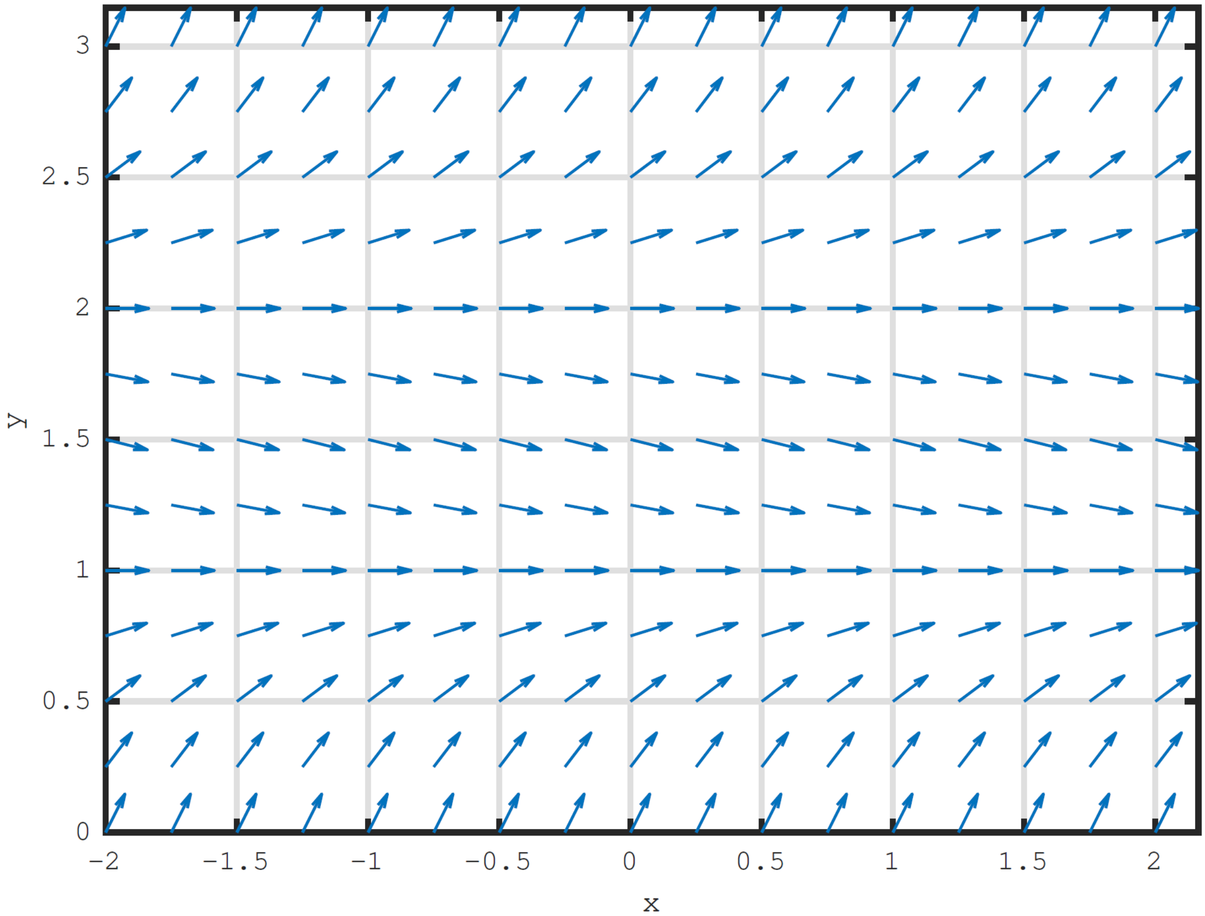
i)
Für statische Lösungen muss gelten: 0 = 2 – y. Als statische Lösung ergibt sich $y_s(x) = 2$. Dies ist ein Attraktor und somit eine stabile statische Lösung. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+(2-y)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2-y \end{bmatrix}}}.$$



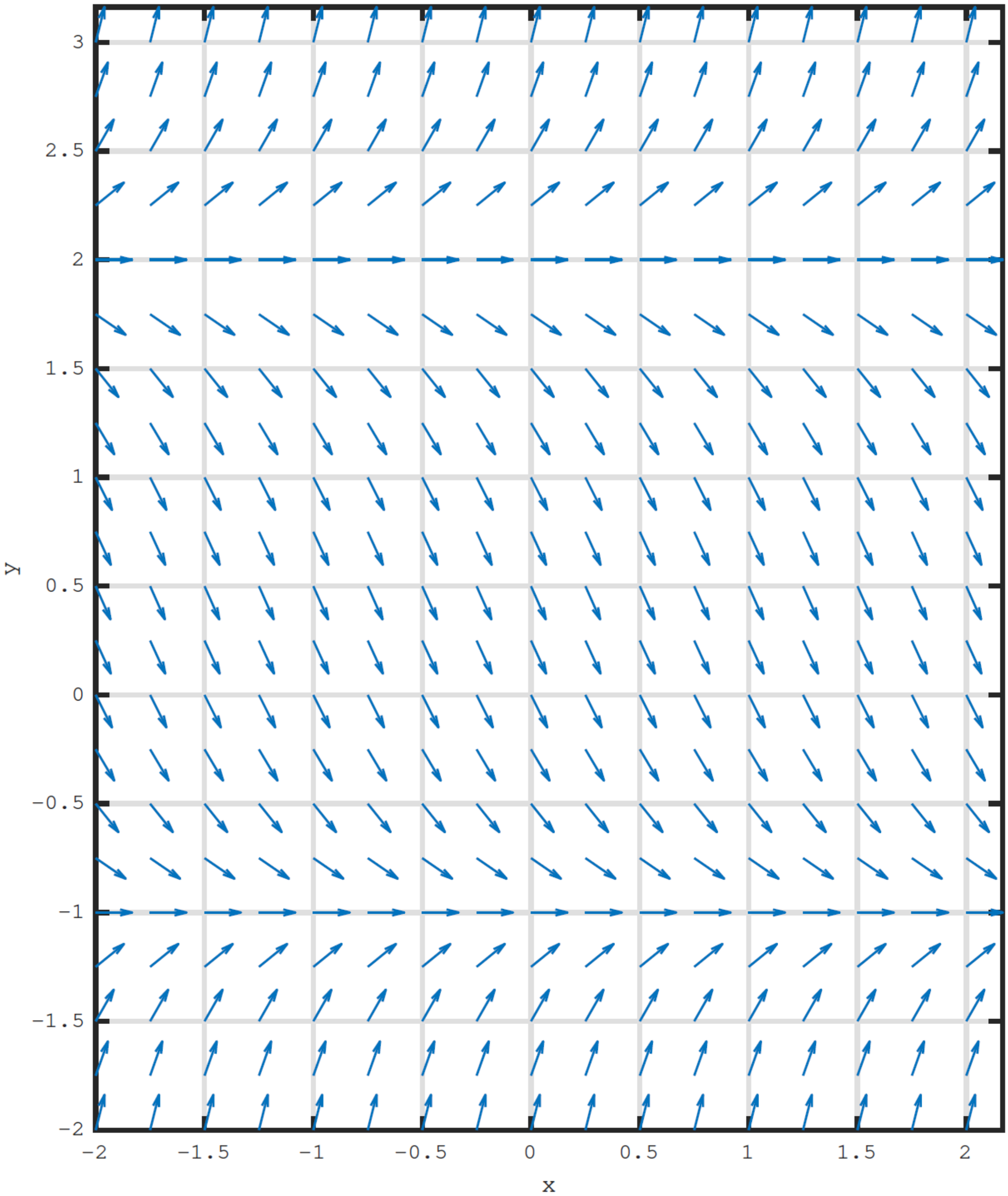
j)
Für statische Lösungen muss gelten: 0 = (2-y)(1-y). Es ergeben sich die statischen Lösungen $y_{s1}(x) = 1$ und $y_{s2}(x) = 2$. $y_{s1}(x)$ stellt einen Attraktor und eine stabile Lösung und $y_{s2}(x)$ einen Repellor und eine instabile Lösung dar. Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\left(y^2-3y+2\right)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ y^2-3y+2 \end{bmatrix}}}.$$



k)
Für die statischen Lösungen muss 0 = (y + 1)(y – 2) gelten. Es gibt somit 2 statische Lösungen $y_{s1}(x) = -1$ (Attraktor und stabile Lösung) und $y_{s2}(x) = 2$ (Repellor und instabile Lösung). Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

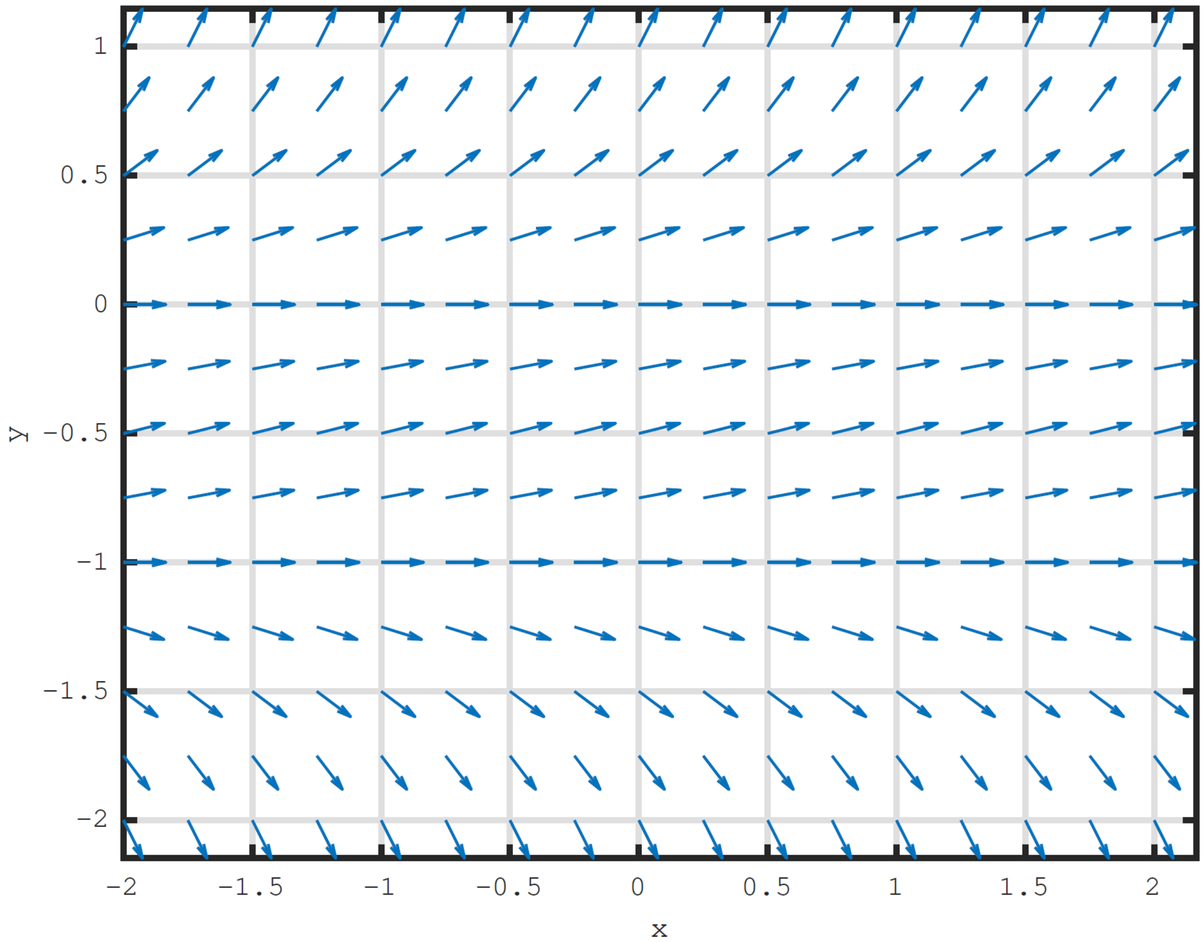
$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\left(y^2-y-2\right)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ y^2-y-2 \end{bmatrix}}}.$$



l)

Für die statischen Lösungen muss gelten: 0 = |y|(y + 1). Daraus ergeben sich die Lösungen $y_{s1}(x) = -1$ (Repellor und instabile Lösung) und $y_{s2}(x) = 0$ (weder Attraktor noch Repellor). Die Komponenten des Richtungsvektorfeldes sind

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{v}}(x;y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}} \begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\left(|y|\cdot(y+1)\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ |y|\cdot(y+1) \end{bmatrix}}}.$$



3. Richtungsvektorfelder mit Python/Numpy plotten I

Gegeben sei die DGL

$y' = f(x,y)$ mit $f(x,y) = 1 - y^2$.

In der Datei `RVF_Blatt2_A3.py` ist der Python/Numpy Code gegeben, um das Richtungsvektorfeld dieser DGL zu plotten.

a) Bestimmen Sie die statischen Lösungen dieser DGL und skizzieren Sie das Richtungsvektorfeld von Hand. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Plot, den Sie mittels der Datei `RVF_Blatt2_A3.py` erhalten.

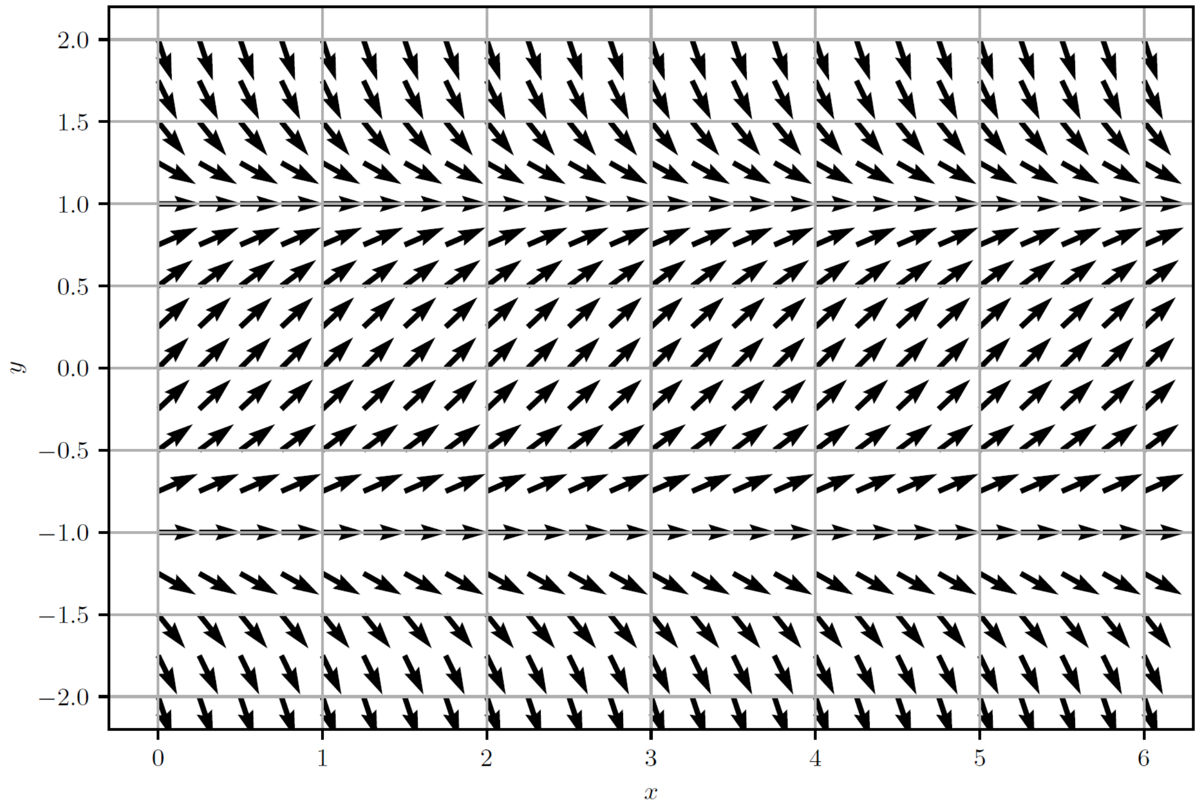
b) Studieren Sie den Code – Sie sollten verstehen, welche Auswirkungen die Befehle jeder Zeile haben. Nehmen Sie hierfür unter Umständen das Internet zur Hilfe. Setzen Sie sich definitiv mit dem Befehl `pl.quiver` auseinander.

c) Welche Bedeutung hat der Parameter `sc`? Variieren Sie hierzu am besten den Wert dieses Parameters.

d) Weshalb ist es wichtig, die statischen Lösungen der DGL zu kennen, bevor man den Python/Numpy Code zum Plotten des Richtungsvektorfeldes schreibt/verwendet?

a)

Zur Bestimmung der statischen Lösung muss gelten: $0 = 1 - y^2 = (1-y)(1 + y)$. Als Lösungen erhält man somit $y_{s1}(x) = -1$ (Repellor und instabile Lösung) und $y_{s2}(x) = 1$ (Attraktor und stabile Lösung).



b) Internetrecherche ist selbständig auszuführen
c) Der Wert von `sc` stellt die Länge der Pfeile im indirekten Verhältnis zur Gitterweite dar.
d) Um die statischen Lösungen im Plot visualisieren zu können, müssen sie erst bestimmt werden. Wenn der Parameterbereich für den Plot zu klein ist, gehen die statischen Lösungen unter Umständen „verloren".

4. Richtungsvektorfelder mit Python/Numpy plotten II
Plotten Sie die Richtungsvektorfelder der DGL aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy.

Für mögliche Plots siehe Lösungen für Aufgabe 2. Wichtig ist, dass der Parameterbereich für y so gross ist, dass die statischen Lösungen im Plot vorhanden sind.

5. Richtungsvektorfelder und Eigenschaften von DGL
Betrachten Sie die DGL aus Aufgabe 2.
a) Untersuchen Sie diese auf elementare Integrierbarkeit und Autonomie.
b) Wie erkennt man anhand des Richtungsvektorfelds, ob eine DGL elementar integrierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Wie erkennt man anhand des Richtungsvektorfeldes, ob eine DGL autonom ist?

a)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
elementar integrierbar	X	X	X		X		X					
autonom	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X

Es fällt auf, dass die Richtungsvektorfelder für elementar integrierbare DGL invariant gegenüber Parallelverschiebung entlang der y-Achse sind. Für die autonomen DGL sind die Richtungsvektorfelder invariant gegenüber Parallelverschiebung entlang der x-Achse.

b)
Ist eine DGL elementar integrierbar, dann gilt: f(x,y) = g(x). Für die Komponenten des Richtungsvektorfeldes ergibt sich dann

$$\hat{\mathbf{v}}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}\begin{bmatrix} 1 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Das Richtungsvektorfeld hängt nicht von y ab und ist deswegen invariant bei Parallelverschiebung entlang der y-Achse.

c)
Ist eine DGL autonom, dann gilt: f(x,y) = h(y). Für die Komponenten des Richtungsvektorfeldes ergibt sich dann

$$\hat{\mathbf{v}}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x;y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ f(x;y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2(y)}}\begin{bmatrix} 1 \\ h(y) \end{bmatrix}.$$

Das Richtungsvektorfeld hängt nicht von x ab und ist deswegen invariant bei Parallelverschiebung entlang der x-Achse.

6. Eigenschaften eines Anfangswertproblems

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

DGL: $y' = \sin y$

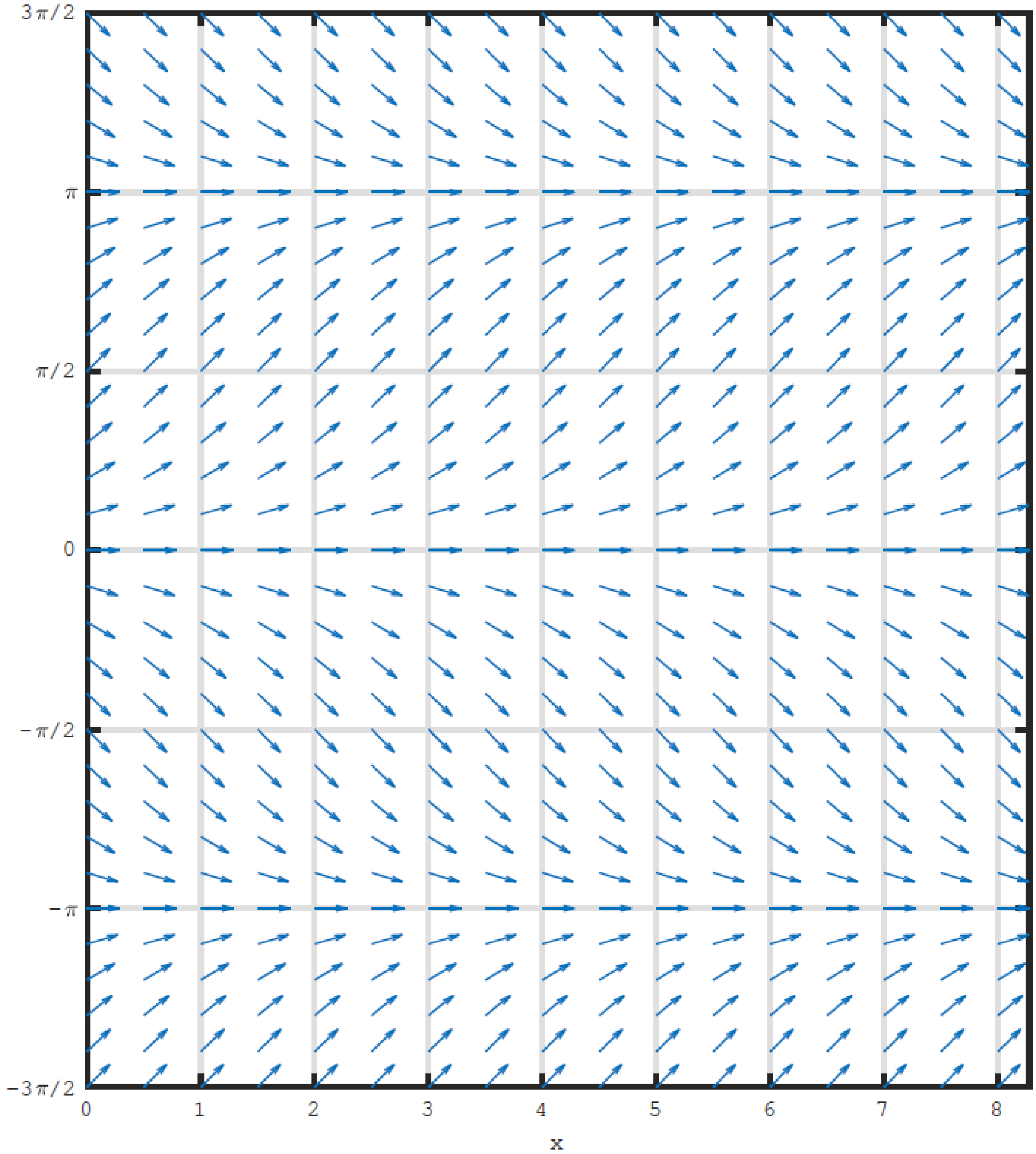
Anfangsbedingung: $y(3) = y_0$

a) Skizzieren das Richtungsvektorfeld.

b) Bestimmen Sie alle statischen Lösungen. Welche sind globale Attraktoren und welche globale Repelloren?

c) Geben Sie ein y_0 an, so dass für die Lösung der DGL gilt: $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi$.

a)



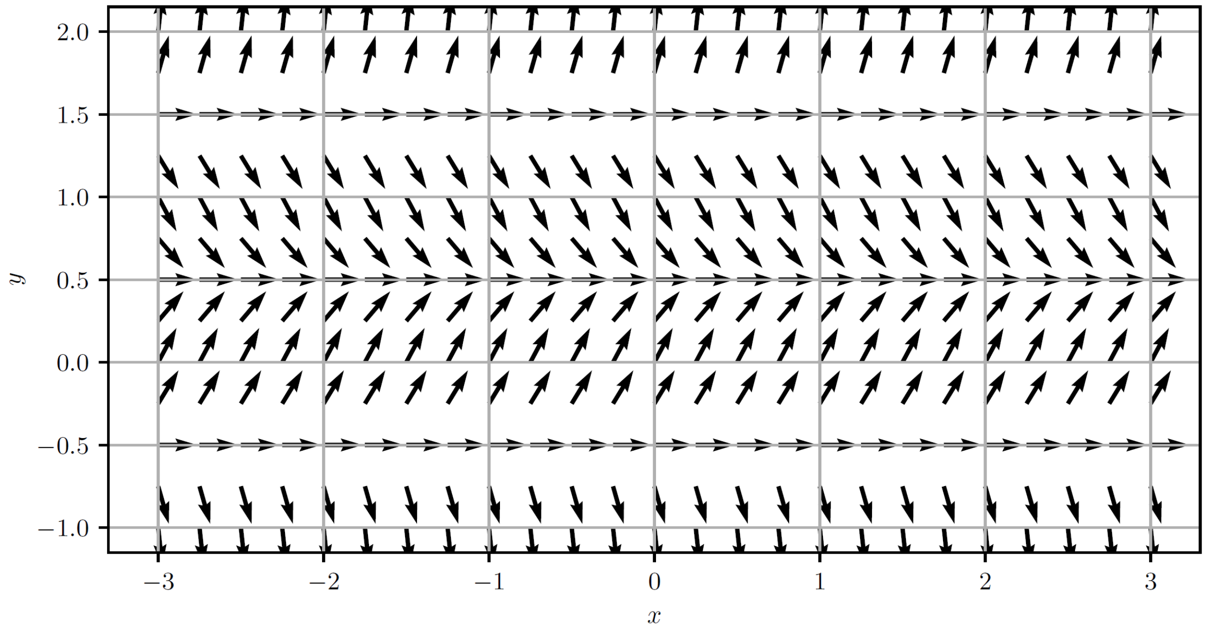
b)

Um statische Lösungen zu bestimmen, muss gelten: 0 = y´ = sin(y). Es ergeben sich unendlich viele Lösungen für y und somit unendlich viele statische Lösungen für die DGL: $y_{s,n}(x) = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Für gerade n ist $y_{s,n}(x)$ ein globaler Repellor und für ungerade n ein globaler Attraktor.

c)
Da π der Wert eines möglichen statischen globalen Attraktors ist, gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass für die Lösung des AWP gilt: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \pi$. Die einfachste Möglichkeit ist $y_0 = \pi$.

7. Aussagen über ein Richtungsvektorfeld - HS2022 Blatt 2 A7

Gegeben ist das folgende Richtungsvektorfeld (RVF) einer analytisch isolierbaren DGL.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das RVF visualisiert eine DGL 3. Ordnung.		X
b) Das RVF visualisiert eine separierbare DGL.	X	
c) Die Lösung durch den Punkt (1,25; 1,25) nähert sich für x $\rightarrow\propto$ dem Wert 0,5 an.	X	
d) Die Funktion y(x) = 1,5 ist eine stabile statische Lösung.		X
e) Das RVF visualisiert eine DGL, die mittels $y' = ay^2 + by + c$ beschrieben werden kann.		X
f) Durch jeden Punkt der xy-Ebene verlaufen vier verschiedene Lösungen der visualisierten DGL.		X