Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 11

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Beschreibung einer Geraden in 2D in Normal- und Hesse Normalform und in 3D in Parameterform.
- Sie können eine Gerade in 2D sowohl durch die Parameter- als auch durch die Hesse Normalform und in 3D durch die Parameterform darstellen.
- Sie können den Abstand eines Punktes von einer Geraden in 2D und 3D bestimmen.
- Sie können die Lage zweier Geraden in 3D zueinander bestimmen.

---

1. Aussagen über eine Gerade in 3D

Gegeben sei die Gerade g in Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Gerade g verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems.		X
b) Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $\hat{e}_z$.	X	
c) Die Gerade g ist eindeutig durch die Gleichung x – y = 0 bestimmt.		X
d) Der Punkt (1;1;0) liegt auf der Geraden g.		X
e) Der Abstand des Punktes (1;1;0) von der Geraden g beträgt 1.	X	
f) Die Gerade g schneidet die x-z-Ebene in einem Winkel von $\pi/4$.	X	

2. Flugzeug

Ein Sendemast der Höhe 211 m befinde sich 3,71 km westlich bezüglich des Endes der Startbahn eines Flughafens. Wie nahe kommt ein Flugzeug der Spitze des Sendemasts, wenn es vom Ende der Startbahn in nordwestlicher Richtung mit einer Steigung von 23,4 % aufsteigt?

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung am Fuss des Sendemasts ist, die x-Richtung nach Norden und die y-Richtung nach Westen zeigt.
Die Ortsvektoren für die Spitze des Sendemasts und das Ende der Startbahn ergeben sich zu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir bestimmen nun den Vektor **v** in Flugrichtung des Flugzeugs, wobei wir diesen Vektor aus seinem horizontalen $\mathbf{v}_{||}$ und vertikalen $\mathbf{v}_{\perp}$ Anteil zusammensetzen. Da das Flugzeug in nordwestliche Richtung fliegt können wir wählen

$$\mathbf{v}_{\|} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta l := |\mathbf{v}_{\|}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \cdot \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \cdot S \end{bmatrix}$$

Die Flugbahn des Flugzeugs ergibt sich zu

$$\mathrm{s}(\tau) = \mathrm{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \cdot S \end{bmatrix}.$$

Für die Berechnung des Abstands der Spitze des Sendemasts zu der Flugbahn des Flugzeugs (Abstand eines Punktes von einer Geraden in 3D)

$$\mathbf{u} = (\mathbf{P} - \mathrm{s}_0) \times \mathbf{v} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \cdot S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \cdot S \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot \sqrt{2} \cdot S - h \cdot 1 \\ h \cdot 1 - 0 \cdot \sqrt{2} \cdot S \\ 0 \cdot 1 - a \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot S \cdot a - h \\ h \\ -a \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{2} \cdot S \cdot a - h\right)^2 + h^2 + (-a)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\sqrt{2} \cdot S\right)^2}}$$

$$\approx 2.65 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = \underline{\underline{2.65\,\mathrm{km.}}}$$

3. Abstand Punkt von Gerade

Von einer Geraden ist der Punkt (4;2;3) und der Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes (4;1;1) von dieser Geraden.

$$\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 0+4 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Abstand:\ d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = 1{,}22$$

4. Abstand zweier Geraden

$P_1 = (1;4;3)$ sei ein Punkt der Geraden g_1 und $P_2 = (5;3;0)$ ein Punkt der Geraden g_2. Beide Geraden verlaufen parallel zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welchen Abstand haben die beiden Geraden voneinander?

$\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ seien die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2.

$$\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 8+9 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Abstand:\ d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{14}} = 4{,}74$$

5. Lage zweier Geraden zueinander

Welche Lage besitzen die folgenden Geradenpaare g_1 und g_2 zueinander?
Bestimmen Sie gegebenenfalls Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) g_1 verläuft durch die Punkte $P_1 = (3;4;6)$ und $P_2 = (-1;-2;4)$ und g_2 durch die Punkte $P_3 = (3;7;-2)$ und $P_4 = (5;15;-6)$.

b) g_1: $\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda_1 \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda_1 \epsilon \mathbb{R}$

g_2: $\vec{r} = \vec{r_2} + \lambda_2 \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$

c) g_1 verläuft durch den Punkt $P_1 = (1;2;0)$ und besitzt den Richtungsvektor $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

g_2 verläuft durch den Punkt $P_2 = (6;0;13)$ und besitzt den Richtungsvektor $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a)

Gleichungen der *Geraden* (Richtungsvektoren: $\vec{a}_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$ bzw. $\vec{a}_2 = \overrightarrow{P_3 P_4}$):

$$g_1:\ \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4\lambda_1 \\ 4 - 6\lambda_1 \\ 6 - 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$g_2\colon\ \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_3 + \lambda_2 \overrightarrow{P_3 P_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda_2 \\ 7 + 8\lambda_2 \\ -2 - 4\lambda_2 \end{pmatrix}$$

g_1 und g_2 sind *windschief* wegen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)] \neq 0$:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 16 \\ -4 - 16 \\ -32 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 256 + 0 - 12 - 0 - 48 - 96 = 100 \neq 0$$

$$\textit{Abstand der Geraden:}\ d = \frac{|[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{100}{20\sqrt{6}} = 2{,}04$$

b)

Die Geraden sind *parallel*: $\vec{a}_2 = -3\vec{a}_1$ (*kollineare* Richtungsvektoren).

$$\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 0 \\ -12 + 10 \\ 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Abstand der Geraden:}\ d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{14}} = 1{,}79$$

c)

Die Geraden *schneiden* sich wegen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 0$ in einem Punkt S:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 10 \\ 5 - 6 \\ -4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 13 \end{vmatrix} = -52 + 0 - 10 + 50 + 12 - 0 = 0$$

Geradengleichungen:

$$g_1\colon\ \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 \\ 2 \\ 5\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$g_2\colon\ \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \lambda_2 \\ -2\lambda_2 \\ 13 + 3\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Berechnung des *Schnittpunktes* S mit dem Ortsvektor $\vec{r}_S = \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}(\lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 \\ 2 \\ 5\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \lambda_2 \\ -2\lambda_2 \\ 13 + 3\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ 2\lambda_2 &= -2 \\ 5\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 13 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -1$$

$$\vec{r}_S = \vec{r}(\lambda_1 = 2) = \vec{r}(\lambda_2 = -1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = (5; 2; 10)$$

$$\textit{Schnittwinkel:} \ \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}}\right) = 32{,}47^\circ$$

6. Abstand Gerade - Koordinatenachse

Die in der x-y-Ebene verlaufende Gerade g_1 schneidet die beiden Koordinatenachsen jeweils bei 3. Welchen Abstand besitzt diese Gerade von der z-Achse?

Gleichung der Geraden durch die Achsenschnittpunkte $P_1 = (3; 0; 0)$ und $P_2 = (0; 3; 0)$:

$$g_1: \ \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung der z-Achse durch $P_3 = (0; 0; 0)$ und $P_4 = (0; 0; 1)$:

$$g_2: \ \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_3 + \lambda_2 \overrightarrow{P_3 P_4} = \vec{r}_3 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden sind windschief, da sie weder parallel ($\overrightarrow{a_1} x \overrightarrow{a_2} \neq 0$) sind noch einen Schnittpunkt haben.

$$\textit{Abstand} \text{ der Geraden:} \ d = \frac{|[\vec{a}_1 \, \vec{a}_2 \, (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{|-9|}{\sqrt{18}} = 2{,}12$$