Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 2

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

---

1. Aussagen über Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: existiert zu f eine Stammfunktion, so ist diese eindeutig.		X
b) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int(f(x) + g(x))dx$.	X	
c) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int(f(x) \cdot g(x))dx$.		X
d) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$.	X	
e) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \implies f(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.		X
f) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$.	X	

2. Aussagen über die Methode der Substitution
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.	X	
b) Die Hilfe der Methode der Substitution kann jede Verschachtelung von zwei Funktionen problemlos integriert werden.		X
c) Die Methode der Substitution eignet sich zur Integration von Produkten der Form $x \cdot f(x^2)$.	X	
d) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x)\,dx = 1/2 \int_1^2 \sin u\,du$.		X
e) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x)\,dx = \int_2^4 \sin u\,du$.		X

3. Stammfunktion durch Methode der Substitution bestimmen
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

a) $\int \sqrt{5-x}dx$
b) $\int \sqrt{5x+12}dx$
c) $\int e^{4x+2}dx$
d) $\int (x^2-1)^3 dx$
e) $\int \sqrt[3]{1-x}dx$
f) $\int x \cdot \cos(x^2)\,dx$
g) $\int \sin x \cos x\,dx$
h) $\int \sinh x \cosh x\,dx$
i) $\int \tan x\,dx$
j) $\int \cot x\,dx$
k) $\int \tanh x\,dx$
l) $\int \coth x\,dx$

a)

$$u(x) := 5 - x \Rightarrow u'(x) = 0 - 1 = -1$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = (-1)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-1} = (-1)\,\mathrm{d}u$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sqrt{5-x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\cdot(-1)\,\mathrm{d}u = -\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{2}{3}\,(5-x)^{\frac{3}{2}} + c = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\sqrt{(5-x)^3} + c.}}$$

b)

$$u(x) := 5x + 12 \;\Rightarrow\; u'(x) = 5 + 0 = 5$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 5\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{5} = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sqrt{5x+12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15}\,(5x+12)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{15}\sqrt{(5x+12)^3} + c.}}$$

c)

$$u(x) := 4x + 2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 4 + 0 = 4$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \mathrm{e}^{4x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{u} + c = \underline{\underline{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x+2} + c.}}$$

d)

$$u(x) := x^2 - 1 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x - 0 = 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \left(x^2-1\right)^3 \cdot x\,\mathrm{d}x = \int u^3 \cdot x \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4 + c.}}$$

e)

$$u(x) := 1 - x \;\Rightarrow\; u'(x) = 0 - 1 = -1$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = (-1)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-1} = (-1)\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt[3]{u}\cdot(-1)\,\mathrm{d}u = -\int \sqrt[3]{u}\,\mathrm{d}u = -\int u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u = -\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} + c = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4} + c.}}$$

f)

$$u(x) := x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int x\,\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int x\,\cos(u)\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(u) + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + c.}}$$

g)

$u(x) := \sin(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = \cos(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int u \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}u = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + c$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin^2(x) + c.}}$$

h)

$u(x) := \sinh(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = \cosh(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cosh(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \cosh(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sinh(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x = \int u \cdot \cosh(x) \cdot \frac{1}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}u = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + c$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sinh^2(x) + c.}}$$

i)

$u(x) := \cos(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = -\sin(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln\big(|u|\big) + c$$
$$= \underline{\underline{-\ln\big(|\cos(x)|\big) + c.}}$$

j)

$u(x) := \sin(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = \cos(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \cot(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln\big(|u|\big) + c$$
$$= \underline{\underline{\ln\big(|\sin(x)|\big) + c.}}$$

k)

$u(x) := \cosh(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = \sinh(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sinh(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \sinh(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sinh(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \tanh(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \cdot \frac{1}{\sinh(x)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln\big(|u|\big) + c$$

$$= \underline{\underline{\ln\big(|\cosh(x)|\big) + c.}}$$

l)

$u(x) := \sinh(x) \;\Rightarrow\; u'(x) = \cosh(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cosh(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \cosh(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \coth(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \cdot \frac{1}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln\big(|u|\big) + c$$

$$= \underline{\underline{\ln\big(|\sinh(x)|\big) + c.}}$$

4. Stammfunktion durch Methode der Substitution bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx$

b) $\int_0^2 \frac{4x}{2x^2+9}$

c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

d) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \cos(2x+\frac{\pi}{3})\,dx$

f) $\int_0^{10} 5xe^{-x^2}\,dx$

a)

$u(x) := x^2 - 4 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x - 0 = 2x$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int_{u(3)}^{u(5)} \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{u(3)}^{u(5)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_5^{21} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln\big(|u|\big)\right]\Bigg|_5^{21}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{21}{5}\right)}}.$$

b)

$$u(x) := 2x^2 + 9 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2 \cdot 2x + 0 = 4x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 4x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4x} = \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{4x}{u} \cdot \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}u = \int_9^{17} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln\big(|u|\big)\Big]\Big|_9^{17} = \underline{\underline{\ln\Big(\frac{17}{9}\Big)}}.$$

c)

$$u(x) := 25 - x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 0 - 2x = -2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-2x} = -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(s)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}u = -\int_{25}^{16} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_{16}^{25} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \Big[\sqrt{u}\,\Big]\Big|_{16}^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = \underline{\underline{1.}}$$

d)

$$u(x) := a^2 - x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 0 - 2x = -2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-2x} = -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(a)} x\sqrt{u} \cdot \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]\Big|_0^{a^2} = \frac{1}{3} \cdot \Big((a^2)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\Big) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^6} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot |a|^3}}.$$

e)

$$u(x) := 2x + \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; u'(x) = 2 + 0 = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\pi/2} \cos\Big(2x + \frac{\pi}{3}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos(u)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \Big[\sin(u)\Big]\Big|_{\pi/3}^{4\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \big(\sin(4\pi/3) - \sin(\pi/3)\big) = \frac{1}{2} \cdot \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}.$$

)

f)

$$u(x) := -x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = -2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-2x} = -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{10} 5x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 5\int_{u(0)}^{u(10)} x\,\mathrm{e}^u \cdot \frac{1}{-2x}\,\mathrm{d}u = -\frac{5}{2}\int_0^{-100} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{5}{2}\cdot\left[\mathrm{e}^u\right]\Big|_0^{-100}$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{-100} - \mathrm{e}^0\right) = \underline{\underline{\frac{5}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-100}\right)}}.$$

5. Integrale mit Python/Numpy berechnen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit dem Befehl trapz in Python/Numpy.

a) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

b) $\int_2^5 \frac{1+x}{1-x}\, dx$

c) $\int_{-2}^0 3^x dx$

d) $\int_2^{100} \frac{\sin x}{1+3x}\, dx$

e) $\int_{0,01}^1 \log_2 x\, dx$

f) $\int_2^3 \log_x 10\, dx$

a)

```
# Initialisieren
import numpy as np;
import matplotlib.pyplot as pl;
# Parameter
x_0=0; x_E=np.pi; n=7; N=10; fig=1;
def f(x): y=np.sin(x); return y;
# Berechnungen
for k in range (0,n):
    x_data=np.linspace(x_0,x_E,N);
    f_data=f(x_data);
    # Integration
    I=np.trapz(f_data,x_data);
    print('I=',I);
    N=2*N;
# Ausgabe
print('Integral: I=',f"{I:.3}");
# Plot
fh=pl.figure(fig);
pl.plot(x_data,f_data);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

Es ergibt sich als Integralwert I = 2.

b) – f)

Code analog zu a) ausführen, jedoch Funktion und Start- und Endwert anpassen und Intervallunterteilung „ausprobieren“.

b)	c)	d)	e)	f)
I = -5,77	I = 0,809	I = -0,0171	I = -1,36	I = 2,58

6. Trapezformel

Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ näherungsweise unter Zuhilfenahme der Trapezformel für jeweils 10 (einfache) Streifen (Endergebnis auf 4 Nachkommastellen).

k	x_k	y_k
0	1	0,632 121
1	1,1	0,606 481
2	1,2	0,582 338
3	1,3	0,559 591
4	1,4	0,538 145
5	1,5	0,517 913
6	1,6	0,498 815
7	1,7	0,480 774
8	1,8	0,463 723
9	1,9	0,447 595
10	2	0,432 332

Trapezformel:

$$\sum_1 = 1{,}064\,453; \quad \sum_2 = 4{,}695\,375$$

$$I = \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_1 + \sum_2\right) h =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}064\,453 + 4{,}695\,375\right) \cdot 0{,}1 =$$

$$= 0{,}522\,760 \approx 0{,}5228$$