Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 4

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Zufallsexperiment, Elementarereignis, Ereignismenge, Ereignis, unmögliches/sicheres Ereignis Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsraum, absolute/relative Häufigkeit und können diese anwenden.
- Die kennen die Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogorov und können diese anwenden.

---

1. Aussagen über die Wahrscheinlichkeit
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Tritt ein Ereignis niemals ein, dann kann es im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht behandelt werden.		X
b) Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, dann wird ihm die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet.	X	
c) Sind zwei Ereignisse disjunkt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des einen oder anderen gerade die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse.	X	
d) Sind zwei Ereignisse disjunkt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des einen und anderen gerade das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse.		X

2. Wahrscheinlichkeitsaussagen
Beurteilen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeitsaussagen, können diese zutreffen?
a) Es kann nur entweder “regnen” oder “nicht regnen”, daher muss die Wahrscheinlichkeit für beide Fälle jeweils 50% sein.
b) Wenn die Wahrscheinlichkeiten für Regen 20% und für Westwind 30% sind, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 50%, dass es entweder regnet oder der Westwind bläst.

a) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten von komplementären Ereignissen muss zwar 100% betragen, die Aufteilung muss jedoch nicht symmetrisch sein. Die Aussage ist daher ein Fehlschluss.
b) Die Ereignisse “Regen” und “Westwind” sind vereinbar aber nicht disjunkt, daher muss die Wahrscheinlichkeit, dass das eine oder andere eintritt, nicht gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sein. Die Aussage ist daher ein Fehlschluss.

3. Kontrolle von Leuchtmitteln
In einer Warenlieferung von 20 Glühbirnen befinden sich 4 defekte Glühbirnen. Zu Kontrollzwecken werden der Lieferung 3 Glühbirnen zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Stichprobe
a) keine,
b) mindestens eine
defekte Glühbirne enthält.

Ziehungen $\rightarrow$ *Kombinationen* 3. Ordnung *ohne* Wiederholung. Es gibt $C(20;3) = \binom{20}{3} = 1140$ Möglichkeiten, aus 20 Glühbirnen 3 auszuwählen.

a) Es gibt $C(16;3) = \binom{16}{3} = 560$ Möglichkeiten, aus 16 *einwandfreien* Glühbirnen 3 auszuwählen.

Somit: $P_0 = \frac{560}{1140} = 0{,}4912$ (Stichprobenanteil *ohne* defekte Glühbirne)

b) $P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0{,}4912 = 0{,}5088$ (mindestens 1 defekte Glühbirne)

4. Schwimmwettbewerb
An einem Schwimmwettbewerb beteiligen sich 3 Schwimmer A, B und C, deren Siegeschancen sich wie 5 : 3 :1 verhalten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) Schwimmer C,
b) Schwimmer A oder B
gewinnt?

$$P(A) = 5\,P(C); \qquad P(B) = 3\,P(C); \qquad P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

a) $5\,P(C) + 3\,P(C) + P(C) = 9\,P(C) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 1/9;$

$P(A) = 5/9; \qquad P(B) = 3/9$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

5. Problem von de Méré
Was ist wahrscheinlicher? Bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens einmal die Augensumme 12 zu werfen – oder bei vier Würfen mit einem Würfel wenigstens eine 6 zu werfen?

Als erstes sollen die 24 Würfe mit den zwei Würfeln betrachtet werden. Dabei ergibt sich ein grundsätzliches Problem, wenn man versuchen will, das Ereignis
A = „mindestens einmal wird die Augensumme 12 geworfen“
zu beschreiben.
Denn man müsste von „bei genau einem Wurf wird die Augensumme 12 geworfen“ über „bei genau zwei Würfen wird die Augensumme 12 geworfen“ bis zu „bei allen 24 Würfen wird die Augensumme 12 geworfen“ alle 24 Würfe betrachten.
Es scheint sinnvoller zu sein, das Ereignis
$\bar{A}$ = „bei keinem der 24 Würfe wird die Augensumme 12 geworfen“
zu betrachten:

Bei einem Wurf mit 2 Würfeln gibt es bekanntlich 36 unterschiedliche Wurfergebnisse, von denen aber nur eines die Augensumme 12 liefert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf *nicht* die Augensumme 12 zu werfen, ergibt sich also zu
P(„bei einem Wurf wird nicht die Augensumme 12 geworfen") = 35/36.
Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle 24 Würfe gleich, somit gilt
$P(\bar{A}) = (\frac{35}{36})^{24}$.
Erinnern wir uns – wir suchen aber die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A. Sie kann nun angegeben werden:
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0{,}4914.$
Kommen wir nun zur Betrachtung der vier Würfe mit einem Würfel. Leichter als die Untersuchung des Ereignisses
B = „mindestens einmal wird eine 6 geworfen"
wird auch hier die Untersuchung des Komplementär-Ereignisses
$\bar{B}$="bei keinem der 4 Würfe wird eine 6 geworfen"
sein. Denn man erhält für einen Wurf die Wahrscheinlichkeit, nicht die 6 zu erhalten, zu
P(„bei einem Wurf wird nicht die 6 geworfen") = 5/6.
Für vier Würfe ergibt sich also die Wahrscheinlichkeit
$P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$
woraus
$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177$
folgt.
Aus dem Vergleich beider Wahrscheinlichkeiten ergibt sich:
Es ist wahrscheinlicher, bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens einmal eine 6 zu erhalten, als bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens einmal die Augensumme 12 zu sehen.

6. Würfel
Ein Würfel wurde so manipuliert, dass die geraden Zahlen gegenüber den ungeraden Zahlen mit der vierfachen Wahrscheinlichkeit auftreten.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer geraden (g) bzw. einer ungeraden (u) Augenzahl.
b) Welche Wahrscheinlichkeit besitzen die folgenden Ereignisse:
A = {1, 2, 3} , B = {1, 6} , C = {2, 4, 6} , D = $\bar{C}$, E = B ∪ C , F = B ∩ C?

a) $p(g) + p(u) = 4p(u) + p(u) = 5p(u) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(u) = 1/5; \quad p(g) = 4/5$

$p(2) = p(4) = p(6) = 4/15; \quad p(1) = p(3) = p(5) = 1/15$

b) $P(A) = 6/15 = 2/5; \quad P(B) = 5/15 = 1/3; \quad P(C) = 12/15 = 4/5;$

$P(D) = 3/15 = 1/5; \quad P(E) = P(\{1, 2, 4, 6\}) = 13/15; \quad P(F) = P(\{6\}) = 4/15$