Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 2

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Eine *Funktion* ordnet jedem *Element* der *Definitionsmenge* genau ein *Element* der *Zielmenge* zu.	●	○
b) Die *Definitionsmenge* einer *Funktion* darf zu gross sein.	○	●
c) Die *Zielmenge* einer *Funktion* darf zu gross sein.	●	○
d) Eine *Funktion* ist durch Angabe der *Zuordnungsvorschrift* vollständig definiert.	○	●
e) In den meisten Anwendungen wird die *Zuordnungsvorschrift* durch einen *Funktionsterm* angegeben.	●	○

2. Einfache, reellwertige Funktion mit Funktionsterm

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{1,3,5,7,9,11\} \quad \text{und} \quad B := \{0,2,4,\ldots\}. \tag{1}$$

Ferner sei f die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := 4x. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Die *Definitionsmenge* der *Funktion* f ist gemäss (2) definiert als

$$\underline{\underline{A = \{1,3,5,7,9,11\}}} \tag{3}$$

und die *Zielmenge*

$$\underline{\underline{B = \{0,2,4,\ldots\} = 2\,\mathbb{N}.}} \tag{4}$$

b) Der *Funktionsterm* der *Funktion* f ist gemäss (2) gegeben durch $\underline{\underline{4x}}$, wobei x die *unabhängige Variable* bezeichnet.

c) Es gilt

$$\underline{\underline{f(5)}} = 4 \cdot 5 = \underline{\underline{20}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{f(9)}} = 4 \cdot 9 = \underline{\underline{36.}} \tag{5}$$

d) Durch Einsetzen von (5) erhalten wir

$$\underline{\underline{f\big(\{5,9\}\big)}} = \big\{f(5), f(9)\big\} = \underline{\underline{\{20, 36\}.}} \tag{6}$$

e) Für die *Bildmenge* der *Funktion* f gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f(A)}} &= f\big(\{1,3,5,7,9,11\}\big) = \big\{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9), f(11)\big\} \\ &= \underline{\underline{\{4, 12, 20, 28, 36, 44\}.}} \end{aligned} \tag{7}$$

f) Als alternative *Zielmenge* für die *Funktion* f taugt jede Menge $\tilde{B}$, welche die *Bildmenge* $f(A)$ aus (7) als Teilmenge enthält. Algebraisch ausgedrückt muss für $\tilde{B}$ also gelten

$$f(A) \subseteq \tilde{B}. \tag{8}$$

Die kleinste Menge $\tilde{B}_{\text{min}}$ und die grösste reelle Zahlen-Menge $\tilde{B}_{\text{max}}$, welche die Bedingung (8) erfüllen sind

$$\underline{\underline{\tilde{B}_{\text{min}}}} = f(A) = \underline{\underline{\{4, 12, 20, 28, 36, 44\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\tilde{B}_{\text{max}} = \mathbb{R}.}} \tag{9}$$

g) Wir suchen eine *Funktion* g, welche B als *Definitionsmenge* und A als *Zielmenge* hat, d.h. eine *Funktion* des Typs $g : B \to A$. Dazu müssen wir eine *Zuordnungsvorschrift* $g(x)$ finden, welche jedem $x \in B$ auf eindeutige Weise ein $g(x) \in A$ zuordnet.

Variante 1: Die einfachste Möglichkeit ist die Wahl einer auf B konstanten *Funktion* mit *Funktionswert* in A. Es gilt $7 \in A$, somit wäre ein Beispiel

$$\underline{\underline{\begin{aligned} g : B &\to A \\ x &\mapsto g(x) := 7. \end{aligned}}} \tag{10}$$

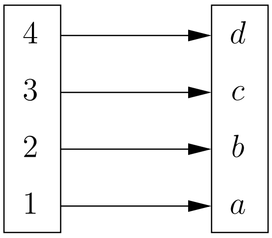
Variante 2: Eine weitere Möglichkeit ist g auf dem Bild von f als Umkehrung von f zu definieren und dann auf alle weiteren Elemente von B konstant fortzusetzen. Somit wäre ein Beispiel

$$\underline{\underline{\begin{aligned} g : B &\to A \\ x &\mapsto g(x) := \left\{ \begin{array}{r|l} x/4 & x/4 \in A \\ 11 & x/4 \notin A. \end{array} \right. \end{aligned}}} \tag{11}$$

3. Graphisch dargestellte Zuordnungen und Funktionen

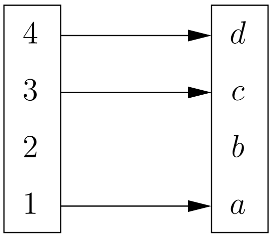
Wir betrachten die folgenden, graphischen Darstellungen von Zuordnungen und begründen, in welchen Fällen diese *Funktionen* beschreiben.

a) Die Zuordnung



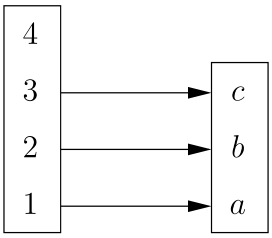
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

b) Die Zuordnung



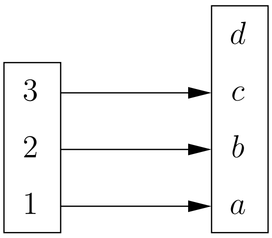
beschreibt keine *Funktion*, denn dem Element 2 der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird kein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

c) Die Zuordnung



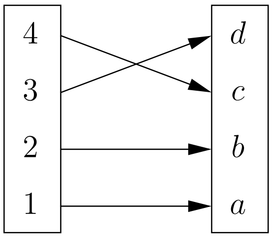
beschreibt keine *Funktion*, denn dem Element 4 der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird kein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c\}$ zugeordnet.

d) Die Zuordnung



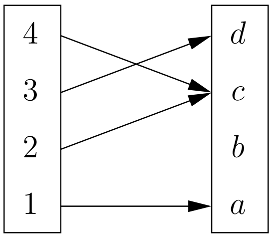
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

e) Die Zuordnung



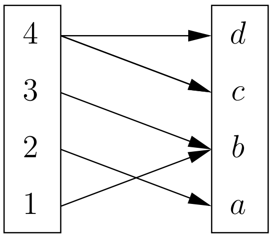
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

f) Die Zuordnung



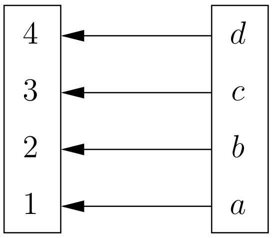
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

g) Die Zuordnung



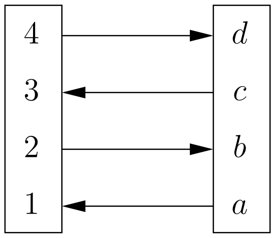
beschreibt keine *Funktion*, denn dem Element 4 der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ werden zwei Elemente der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

h) Die Zuordnung



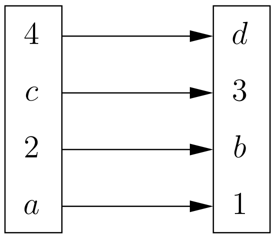
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{a, b, c, d\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{1, 2, 3, 4\}$ zugeordnet.

i) Die Zuordnung



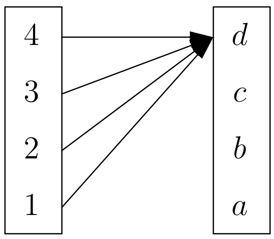
beschreibt keine *Funktion*, denn es wird nicht sauber zwischen Definitions- und Zielmenge unterschieden. Die gleiche Zuordnung von Elementen kann wie in Teilaufgabe j) als *Funktion* dargestellt werden.

j) Die Zuordnung



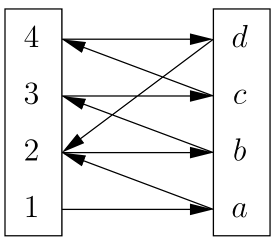
beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{a, 2, c, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{1, b, 3, d\}$ zugeordnet.

k) Die Zuordnung



beschreibt eine *Funktion*, denn jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet.

l) Die Zuordnung



beschreibt nicht eine *Funktion*, sondern zwei *Funktionen*. Jedem Element der Definitionsmenge $A := \{1, 2, 3, 4\}$ wird auf eindeutige Weise ein Element der Zielmenge $B := \{a, b, c, d\}$ zugeordnet und umgekehrt. Die Darstellungen sollten aber getrennt werden.

4. Funktionsdefinitionen

Wir untersuchen, welche der folgenden Definitionen eine *Funktion* beschreiben und welche nicht.

a) Die Definition $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f(x) := x^2$ stellt eine *Funktion* dar, denn für jedes $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ gilt

$$\underline{\underline{f(x)}} = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q},}} \tag{12}$$

weil $p^2 \in \mathbb{Z}$ und $q^2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Die Definition $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$ stellt keine *Funktion* dar, denn es gilt zum Beispiel

$$\underline{\underline{f(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.}} \tag{13}$$

c) Die Definition $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, $x \mapsto f(x) := 2^x$ stellt eine *Funktion* dar, denn es gilt

$$\underline{\underline{f(0)}} = 2^0 = \underline{\underline{1 \in \mathbb{N}^+}} \tag{14}$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}^+$ dass

$$\underline{\underline{f(n)}} = 2^n = \underline{\underline{\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{N}^+.}} \tag{15}$$

d) Die Definition $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ stellt eine *Funktion* dar, denn für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\underline{\underline{f(n) = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}.}} \tag{16}$$

e) Die Definition $f : \,]0,1] \to \,]0,1]$, $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ stellt keine *Funktion* dar, denn es gilt zum Beispiel

$$\underline{\underline{f\left(\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2 \notin \,]0,1].}} \tag{17}$$

f) Die Definition $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x-1}$ stellt eine *Funktion* dar, denn für jedes $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ gilt

$$p \neq q \tag{18}$$

und damit

$$\underline{\underline{f(x)}} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{p}{q} - 1} = \frac{1}{\frac{p}{q} - \frac{q}{q}} = \frac{1}{\frac{p-q}{q}} = \underline{\underline{\frac{q}{p-q} \in \mathbb{Q},}} \tag{19}$$

weil $q \in \mathbb{Z}$ und $p - q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5. Aussagen über eine Funktion

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{-1, 0, 1, 3, 5\} \quad \text{und} \quad B := \{-1, 0, 1, 3, 7, 11\} \tag{20}$$

sowie die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := 2x + 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $f(0) = 0$.	○	●
b) Es gilt $f(\{3, 5\}) = \{7, 11\}$.	●	○
c) Es gilt $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.	●	○
d) Die *Funktion* f ist *surjektiv*.	○	●
e) Die *Funktion* f ist *injektiv*.	●	○
f) Die *Funktion* f ist *bijektiv*.	○	●

Um eine Übersicht über die Wirkung der *Funktion* f zu erhalten, stellen wir die *Funktionswerte* in einer Tabelle zusammen.

x	-1	0	1	3	5
$f(x)$	-1	1	3	7	11

(22)

Zu einzelnen Teilaufgaben machen wir ein paar Bemerkungen.

a) Es ist zwar $0 \in A$ und $0 \in B$ aber gemäss Tabelle (22) gilt $\underline{\underline{f(0) = 1.}}$

b) Es ist $\{3, 5\} \subseteq A$, $\{7, 11\} \subseteq B$ und gemäss Tabelle (22) gilt

$$\underline{\underline{f(\{3, 5\})}} = \big\{f(3), f(5)\big\} = \underline{\underline{\{7, 11\}.}} \tag{23}$$

c) Es gilt zwar $0 \in B$, aber in der zweiten Zeile der Tabelle (22) steht keine 0. Somit tritt 0 nicht als *Funktionswert* von f auf. Es gibt daher kein $x \in A$ mit $f(x) = 0$ und es folgt $\underline{\underline{f^{-1}(\{0\}) = \varnothing.}}$

d) Weil das *Element* $0 \in B$ als *Funktionswert* in der zweiten Zeile der Tabelle (22) nicht auftritt, kann f nicht *surjektiv* sein.

e) Weil jedes *Element* aus B als *Funktionswert* in der zweiten Zeile der Tabelle (22) höchstens einmal auftritt, ist f *injektiv*.

f) Weil f gemäss Teilaufgabe d) nicht *surjektiv* ist, kann f auch nicht *bijektiv* sein.

6. **Bild und Urbild eines Intervalles**

Wir bestimmen für die angegebenen *Funktionen* jeweils *Bild* und *Urbild* des *Intervalls* $[-1, 2]$.

a) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x) := x+1$ addiert zu jedem *Element* aus $\mathbb{R}$ die Konstante 1. Somit wird das *Intervall* $[-1, 2]$ um 1 nach oben verschoben. Es folgt demnach

$$\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} = [-1+1, 2+1] = \underline{\underline{[0,3]}} \tag{24}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} = [-1-1, 2-1] = \underline{\underline{[-2,1]}}. \tag{25}$$

b) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) := 2x$ multipliziert jedes *Element* aus $\mathbb{R}$ mit der Konstanten 2. Es folgt demnach

$$\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} = [-1\cdot 2, 2\cdot 2] = \underline{\underline{[-2,4]}} \tag{26}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} = [-1:2, 2:2] = \underline{\underline{[-1/2,1]}}. \tag{27}$$

c) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) := -x$ ändert das Vorzeichen jedes *Elementes* aus $\mathbb{R}$. Es folgt demnach

$$\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} = [-2, -(-1)] = \underline{\underline{[-2,1]}} \tag{28}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} = [-2, -(-1)] = \underline{\underline{[-2,1]}}. \tag{29}$$

d) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := x^2$ quadriert jedes *Elementes* aus $\mathbb{R}$. Da alle Quadrate von reellen Zahlen positiv sind, betrachten wir die Teilintervalle von positiven und negativen Zahlen in $[-1,2]$ getrennt. Es gilt offensichtlich

$$f\big([-1,0]\big) = [0,1] \qquad \text{und} \qquad f\big([0,2]\big) = [0,4] \tag{30}$$

$$f^{-1}\big([-1,0]\big) = \{0\} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\big([0,2]\big) = \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]. \tag{31}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} &= f\big([-1,0]\cup[0,2]\big) = f\big([-1,0]\big)\cup f\big([0,2]\big) = [0,1]\cup[0,4]\\ &= \underline{\underline{[0,4]}}\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} &= f^{-1}\big([-1,0]\cup[0,2]\big) = f^{-1}\big([-1,0]\big)\cup f^{-1}\big([0,2]\big) = \{0\}\cup\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\\ &= \underline{\underline{\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right].}}\end{aligned} \tag{33}$$

e) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := x^3$ potenziert jedes *Element* aus $\mathbb{R}$ mit 3. Im Unterschied zum Quadrieren aus Teilaufgabe d) bleibt dabei das Vorzeichen jedoch erhalten. Es folgt demnach

$$\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} = \left[(-1)^3, 2^3\right] = \underline{\underline{[-1,8]}} \tag{34}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} = \left[\sqrt[3]{-1}, \sqrt[3]{2}\right] = \underline{\underline{\left[-1,\sqrt[3]{2}\right].}} \tag{35}$$

f) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := 2^x$ potenziert die konstante Basis 2 mit jedem *Element* aus $\mathbb{R}$. Da alle reellen Potenzen von 2 strikt positiv sind, betrachten wir die Teilintervalle von positiven und negativen Zahlen in $[-1,2]$ getrennt. Es gilt offensichtlich

$$f\big([-1,0]\big) = [1/2,1] \qquad \text{und} \qquad f\big([0,2]\big) = [1,4] \tag{36}$$

$$f^{-1}\big([-1,0]\big) = \varnothing \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\big([0,2]\big) = \,]-\infty,1]. \tag{37}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f\big([-1,2]\big)}} &= f\big([-1,0]\cup[0,2]\big) = f\big([-1,0]\big)\cup f\big([0,2]\big) = [1/2,1]\cup[1,4]\\ &= \underline{\underline{[1/2,4]}}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f^{-1}\big([-1,2]\big)}} &= f^{-1}\big([-1,0]\cup[0,2]\big) = f^{-1}\big([-1,0]\big)\cup f^{-1}\big([0,2]\big) = \varnothing\cup\,]-\infty,1]\\ &= \underline{\underline{]-\infty,1].}}\end{aligned} \tag{39}$$

7. Aussagen über Funktionen

Wir betrachten eine allgemeine *Funktion* der Form $f : A \to B$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) In jedem Fall kann B durch $\mathbb{R}$ ersetzt werden.	○	●
b) Es muss gelten $A \subseteq B$.	○	●
c) Es muss gelten $f(A) = B$.	○	●
d) Es muss gelten $f^{-1}(B) = A$.	●	○
e) Die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ existiert genau dann, wenn f *bijektiv* ist.	●	○
f) Falls $A \subset B$, dann kann f nicht *surjektiv* sein.	○	●

Zu einzelnen Teilaufgaben machen wir ein paar Bemerkungen.

a) Die *Zielmenge* B kann nur durch $\mathbb{R}$ ersetzt werden, wenn bereits gilt $B \subseteq \mathbb{R}$.

b) *Definitions-* und *Zielmenge* müssen keine gemeinsamen *Elemente* haben. Als Gegenbeispiel betrachten wir $A = \{1, 3\}$ und $B = \{2, 6, 10\}$ sowie die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := 2x. \end{aligned} \tag{40}$$

Offensichtlich gilt $A \cap B = \varnothing$ und somit $A \not\subseteq B$.

c) Die *Zielmenge* B darf "zu gross" sein. Im Beispiel aus (40) gilt offensichtlich

$$f(A) = f\big(\{1, 3\}\big) = \big\{f(1), f(3)\big\} = \{2, 6\} \subset \{2, 6, 10\} = B. \tag{41}$$

In jedem Fall gilt jedoch $f(A) \subseteq B$.

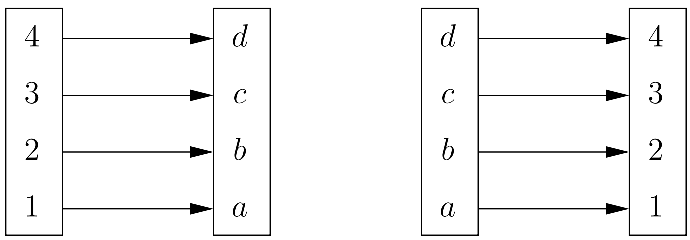
d) Nach Definition ist

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in A \;\big|\; f(x) \in B\big\}. \tag{42}$$

Offensichtlich ist $f^{-1}(B) \subseteq A$. Weil für jedes $x \in A$ gilt $f(x) \in B$ folgt auch $A \subseteq f^{-1}(B)$. Insgesamt ist also zwingend $f^{-1}(B) = A$.

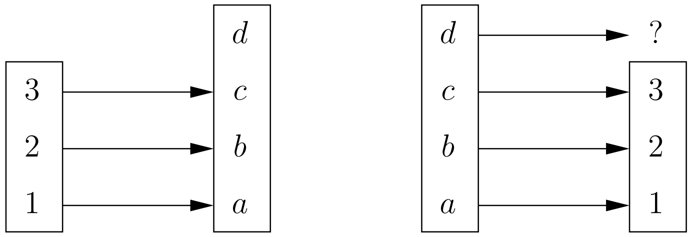
e) Wir betrachten die auftretenden Fälle getrennt.

Fall 1: f ist *bijektiv*. In diesem Fall existiert die *Umkehrfunktion*, wie das folgende Schema illustriert.



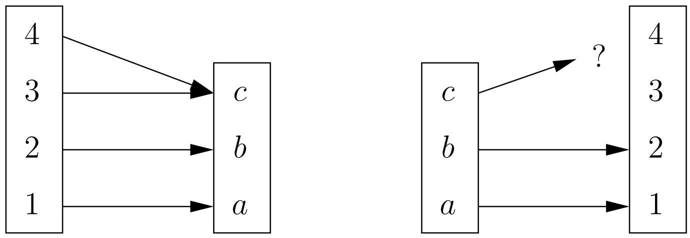
Fall 2: f ist nicht *bijektiv*. In diesem Fall ist f nicht *surjektiv* und/oder nicht *injektiv*.

Fall 2.1: f ist nicht *surjektiv*. In diesem Fall gibt es mindestens ein *Element* d in B, welches nicht als *Funktionswert* von f auftritt. Beim Versuch die *Umkehrfunktion* von f zu bilden, kann d kein *Element* aus A zugeordnet werden.



In diesem Fall existiert die *Umkehrfunktion* nicht.

Fall 2.2: f ist nicht *injektiv*. In diesem Fall gibt es mindestens ein *Element* c in B, welches mehrmals als *Funktionswert* von f auftritt. Beim Versuch die *Umkehrfunktion* von f zu bilden, müssten c mehrere *Elemente* aus A zugeordnet werden. Eine solche Zuordnung wäre aber keine *Funktion*.



In diesem Fall existiert die *Umkehrfunktion* nicht.

f) Falls A und B nur endlich viele *Elemente* haben, dann ist die Aussage richtig, weil B in diesem Fall offensichtlich "zu viele" *Elemnte* hat. Wenn A und B jedoch unendlich viele *Elemente* haben dürfen, dann lassen sich Gegenbeispiele konstruieren. Dazu betrachten wir $A = [0,1]$ und $B = [0,2]$ sowie die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := 2x. \end{aligned} \tag{43}$$

Offensichtlich gilt $A \subset B$, aber f ist trotzdem *surjektiv*.

8. Funktionen mit speziellen Eigenschaften

Wir bestimmen, falls möglich, für jede Kombination von Eigenschaften jeweils zwei *Funktionen* (mit unterschiedlichen *Definitions-* und *Zielmengen*) die diese erfüllen.

a) nicht *injektiv*, nicht *surjektiv*. Ein besonders einfaches Beispiel ist eine *konstante Funktion* auf einer *Menge* mit mehreren Elementen in eine *Menge* mit mehreren Elementen. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} f : \{1,2\} &\to \{-6,-7\} \\ x &\mapsto f(x) := -7. \end{aligned} \tag{44}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die *quadratische Funktion* auf den *rellen Zahlen* in die *rellen Zahlen*. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) := x^2. \end{aligned} \tag{45}$$

b) *injektiv*, nicht *surjektiv*. Ein besonders einfaches Beispiel ist eine *konstante Funktion* auf einer *Menge* mit nur einem Element in eine grosse *Menge*. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} f : \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := -7. \end{aligned} \tag{46}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die *Exponentialfunktion* zur *Basis* 2. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) := 2^x. \end{aligned} \tag{47}$$

c) nicht *injektiv*, *surjektiv*. Ein besonders einfaches Beispiel ist eine *konstante Funktion* auf einer grossen *Menge* in eine *Menge* mit nur einem Element. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \{-7\} \\ x &\mapsto f(x) := -7. \end{aligned} \tag{48}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die *quadratische Funktion* auf $\mathbb{R}$ in ihre Bildmenge. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto g(x) := x^2. \end{aligned} \tag{49}$$

d) *bijektiv*. Ein besonders einfaches Beispiel ist eine *konstante Funktion* auf einer *Menge* mit nur einem Element in eine *Menge* mit nur einem Element. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} f : \{5\} &\to \{-7\} \\ x &\mapsto f(x) := -7. \end{aligned} \tag{50}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine *lineare Funktion* auf $\mathbb{R}$. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) := 4x + 3. \end{aligned} \tag{51}$$

e) *surjektiv*, nicht *bijektiv*. Da eine *Funktion* genau dann *bijektiv* ist, wenn sie sowohl *surjektiv* als auch *injektiv* ist, haben wir es hier mit der gleichen Kombination von Eigenschaften zu tun wie in Teilaufgabe c). Zwei weitere, sehr wichtige Beispiele sind die *Vorzeichenfunktion* in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : \mathbb{R} &\to \{-1, 0, 1\} \\ x &\mapsto \operatorname{sgn}(x) := \left\{ \begin{array}{r|l} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{52}$$

und die *Betragsfunktion* gemäss

$$\begin{aligned} \operatorname{abs} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto \operatorname{abs}(x) := \left\{ \begin{array}{r|l} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0. \end{array} \right. \end{aligned} \tag{53}$$

f) nicht *injektiv*, *bijektiv*. Weil jede *bijektive Funktion* zwingend auch *injektiv* sein muss, gibt es keine *Funktion*, welche diese Kombination von Eigenschaften erfüllt.

9. Aussagen über eine Funktion

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{-2, -1, 0, 1, 3\} \quad \text{und} \quad B := \{1, 3, 5\} \tag{54}$$

sowie die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) := |2x - 1|. \end{aligned} \tag{55}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $f(0) = 0$.	○	●
b) Es gilt $f(\{0, 1\}) = \{1\}$.	●	○
c) Es gilt $f^{-1}(\{5\}) = 3$.	○	●
d) Die *Funktion* f ist *surjektiv*.	●	○
e) Die *Funktion* f ist *injektiv*.	○	●
f) Die *Funktion* f hat eine *Umkehrfunktion*.	○	●