Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 9

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Axiom, Skalarkörper, Vektorraum, Linearkombination, lineare Hülle, linear abhängig, linear unabhängig, erzeugend, Basis, Dimension, Bild, Kern und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können beurteilen, ob die Vektoren einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ linear abhängig, linear unabhängig oder erzeugend sind und ob sie eine Basis bilden.
- Sie können Bild und Kern einer linearen Abbildung berechnen.

1. Aussagen über Vektorräume

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Vektorraum ist die fundamentale Struktur der linearen Algebra.	X	
b) Jeder Vektorraum basiert auf einem Skalarkörper.	X	
c) In jedem Vektorraum ist eine Addition zwischen den Vektoren definiert.	X	
d) In jedem Vektorraum ist eine Multiplikation zwischen den Vektoren definiert.		X
e) In jedem Vektorraum ist eine Multiplikation zwischen den Vektoren und den reellen Zahlen definiert.		X

2. Vektorraumstrukturen

Welche der folgenden Strukturen bilden bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation einen Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $(\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; +; \cdot)$ b) $(\mathbb{Z}; \mathbb{R}; +; \cdot)$ c) $(\mathbb{Q}^2; \mathbb{Q}; +; \cdot)$
d) $(\mathbb{Q}^2; \mathbb{R}; +; \cdot)$ e) $(\mathbb{R}^3; \mathbb{Q}; +; \cdot)$ f) $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}; +; \cdot)$

a)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; +; \cdot).$$

Wählen wir $a := 1/2 \in \mathbb{Q}$ und $v := 1 \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Es wird also kein Vektorraum gebildet.

b)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{Z}; \mathbb{R}; +; \cdot).$$

Wählen wir $a := 1/2 \in \mathbb{R}$ und $v := 1 \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Es wird also kein Vektorraum gebildet.
c)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{Q}^2; \mathbb{Q}; +; \cdot).$$

Weil $\mathbb{Q}$ ein *Zahlen-Körper* ist, gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Q}^2$ und alle $a, b \in \mathbb{Q}$, dass

$$a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_1 + b \cdot w_1 \\ a \cdot v_2 + b \cdot w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Es liegt ein Vektorraum vor.
d)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{Q}^2; \mathbb{R}; +; \cdot).$$

Zunächst wählen wir

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \quad \text{und} \quad a := \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt

$$a \cdot \mathbf{v} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbb{Q}^2.$$

Es wird kein Vektorraum gebildet.
e)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{R}^3; \mathbb{Q}; +; \cdot).$$

Weil $\mathbb{Q}$ ein *Zahlen-Teilkörper* des *Zahlen-Körpers* $\mathbb{R}$ ist, gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und alle $a, b \in \mathbb{Q}$, dass

$$a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_1 + b \cdot w_1 \\ a \cdot v_2 + b \cdot w_2 \\ a \cdot v_3 + b \cdot w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Es wird also ein Vektorraum gebildet.
f)
Wir betrachten das *Quadrupel*

$$(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}; +; \cdot).$$

Weil $\mathbb{R}$ ein *Zahlen-Körper* ist, gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = a \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_1 + b \cdot w_1 \\ a \cdot v_2 + b \cdot w_2 \\ a \cdot v_3 + b \cdot w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Es liegt ein Vektorraum vor.

3. Linear abhängig/unabhängig und erzeugend

Bestimmen Sie, ob die jeweiligen Vektoren linear unabhängig bzw. erzeugend sind. Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des jeweiligen $\mathbb{R}^n$?

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ e) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}\right\}$ f) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

a)

Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \subset V = \mathbb{R}^2$$

aus $m = 2$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$0 = x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\begin{array}{c} \\ 1 \end{array}\boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \\ 1 & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \\ 0 & -2 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array}\boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \\ 0 & [1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \\ 0 & [1] \end{array}}.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 2 = m = n.$$

Demnach ist M *linear unabhängig* sowie *erzeugend* und bildet folglich eine *Basis* von V.

b)

Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} \subset V = \mathbb{R}^2$$

aus $m = 2$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$0 = x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\begin{array}{r|rr|}\cline{2-3} & [2] & -1\\ -3 & -6 & 3\\ \cline{2-3}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|}\hline [2] & -1\\ 0 & 0\\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rr}[2] & -1\end{array}}\,.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 1 < 2 = m = n.$$

Demnach ist M $\underline{\underline{\textit{linear abhängig}}}$ sowie $\underline{\underline{\textit{nicht erzeugend}}}$ und bildet folglich $\underline{\underline{\text{keine } \textit{Basis}}}$ von V.

c)

Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset V = \mathbb{R}^3$$

aus $m = 3$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$0 = x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \cdot \mathbf{v}_3 = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\begin{array}{r|rrr|}\cline{2-4} & [1] & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ & 0 & 2 & 1\\ \cline{2-4}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|}\hline [1] & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|rrr|}\cline{2-4} & [1] & 3 & 1\\ & 0 & [2] & 1\\ 2 & 0 & 4 & 2\\ \cline{2-4}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|}\hline [1] & 3 & 1\\ 0 & [2] & 1\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr}[1] & 3 & 1\\ 0 & [2] & 1\end{array}}\,.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 2 < 3 = m = n.$$

Demnach ist M $\underline{\underline{\textit{linear abhängig}}}$ sowie $\underline{\underline{\textit{nicht erzeugend}}}$ und bildet folglich $\underline{\underline{\text{keine } \textit{Basis}}}$ von V.

d)

Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset V = \mathbb{R}^3$$

aus $m = 4$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \cdot \mathbf{v}_3 + x_4 \cdot \mathbf{v}_4 \\ &= x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\boxed{\begin{array}{cccc}[1] & 1 & 1 & 0\\ 0 & [1] & 1 & 1\\ 0 & 0 & [1] & 0\end{array}}\,.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 3 = n < 4 = m.$$

Demnach ist M $\underline{\textit{linear abhängig}}$ sowie $\underline{\textit{erzeugend}}$ und bildet folglich $\underline{\underline{\text{keine } \textit{Basis}}}$ von V.

e)
Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\\8\end{bmatrix} \right\} \subset V = \mathbb{R}^4$$

aus $m = 3$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$0 = x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \cdot \mathbf{v}_3 = x_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix}2\\4\\6\\8\end{bmatrix}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\begin{array}{c} \\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\boxed{\begin{array}{ccc}[1] & 5 & 2\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 7 & 6\\ 4 & 8 & 8\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc}[1] & 5 & 2\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & -12 & 0\end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1\\ 1\end{array}\boxed{\begin{array}{ccc}[1] & 5 & 2\\ 0 & [1] & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc}[1] & 5 & 2\\ 0 & [1] & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc}[1] & 5 & 2\\ 0 & [1] & 0\end{array}}\,.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 2 < 3 = m < 4 = n.$$

Demnach ist M $\underline{\underline{\textit{linear abhängig}}}$ sowie $\underline{\underline{\text{nicht } \textit{erzeugend}}}$ und bildet folglich $\underline{\underline{\text{keine } \textit{Basis}}}$ von V.

f)
Wir betrachten die *Teilmenge*

$$M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\} \subset V = \mathbb{R}^4$$

aus $m = 4$ *Vektoren*. Wir schreiben das *homogene* LGLS

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \cdot \mathbf{v}_3 + x_4 \cdot \mathbf{v}_4 \\ &= x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in einem GAUSS-*Schema* und bringen dieses mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* auf *Stufenform*. Es gilt

$$\begin{array}{r|cccc|} \cline{2-5} & [1] & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{2-5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|cccc|} \cline{2-5} & [1] & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & [1] & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{2-5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|cccc|} \cline{2-5} & [1] & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & [1] & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & [1] & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{2-5} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cccc|} \hline [1] & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|cccc|} \hline [1] & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Das LGLS hat offensichtlich den *Rang*

$$n_{\mathrm{R}} = 3 < 4 = m = n.$$

Demnach ist M *linear abhängig* sowie nicht *erzeugend* und bildet folglich keine *Basis* von V.

4. Basis

Für welche Werte von a bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$

Anzahl der Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ ist 3, d. h. es muss die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Vektoren überprüft werden.

a)

Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad &= 0 \\ + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \qquad + a\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist also dann nur trivial lösbar, wenn

$$\begin{aligned} 1-2a &\neq 0 \\ a &\neq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also bilden die 3 Vektoren für $a \neq \frac{1}{2}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b)

Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ a \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 6\lambda_1 - a\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ a\lambda_1 - \lambda_2 + a\lambda_3 &= 0 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -a & 3 & 0 \\ a & -1 & a & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \mid (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -a & 3 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (a)\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 7+2a & 0 & 4+2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 1+2a+a^2 & 0 & 1+2a+a^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ (1+a)^2 & 0 & (1+a)^2 & 0 \end{array}\right) \mid \frac{1}{(1+a)^2}$$

Für $a = -1$ gibt es offensichtlich eine nicht triviale Lösung. Ab jetzt sei $a \neq -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (a)\ \ (-(6-a^2)) \\ +\ \ \ \ + \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses LGS ist nur noch trivial lösbar, d. h. die 3 Vektoren sind dann linear unabhängig. Also bilden die 3 Vektoren für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

5. Aussagen über Bild und Kern

Gegeben sei eine mxn Matrix.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: ker(A) $\neq \emptyset$.	X	
b) Für m = 2 und n = 3 gilt: ker(A) $\neq$ {0}.	X	
c) Für m = 3 und n = 2 gilt: ker(A) $\neq$ {0}.		X
d) Für n = m und A regulär gilt: ker(A) $\neq$ {0}.		X
e) Für n = m und A singulär gilt: ker(A) $\neq$ {0}.	X	
f) Für m = 3 und n = 4 gilt: dim(ker(A)) + dim(img(A)) = 7.		X

6. Bild und Kern berechnen

Berechnen Sie jeweils Bild und Kern der gegebenen Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

a)

Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich ist A *quadratisch* und es gilt

$$\det(A) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2 \neq 0.$$

Demnach ist A *regulär* und es gilt

$$\underline{\underline{\ker(A) = \{0\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\operatorname{img}(A) = \mathbb{R}^2}}.$$

b)

Wir erzeugen mit dem Gauß-Jordan-Verfahren reduzierte Stufenform (aus A ergeben sich die Vektoren im Kern, aus A^T das Bild von A):

$$A: \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \end{array}\boxed{\begin{array}{cc} [2] & 3 \\ 2 & 3 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [2] & 3 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & \frac{3}{2} \end{array}}$$

$$A^T: \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \end{array}\boxed{\begin{array}{cc} [1] & 2 \\ 1 & 2 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 2 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 2 \end{array}}$$

$\ker(A)$ enthält alle die Vektoren, die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{3}{2} \cdot y$$

$$\underline{\underline{\ker(A)}} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Für das Bild von A ergibt sich

$$\underline{\underline{\operatorname{img}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

c)

$$A: \boxed{\begin{array}{rrr} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -\frac{1}{2} \\ \\ 3 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & [1] & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -2 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & [1] & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & [1] & -\frac{2}{3} \end{array}}.$$

Für die Vektoren im Kern von A gilt

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - \frac{2}{3} \cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3} \cdot z$$

$$1 \cdot x + 0 \cdot y - \frac{1}{3} \cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \cdot z$$

$$\underline{\underline{\ker(A)}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} z \\ \frac{2}{3} z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}}.$$

Für das Bild von A ergibt sich

$$\underline{\underline{\operatorname{img}(A)}} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

d)

$$A: \boxed{\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -2 & -4 \\ 2 & -4 & -8 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -2 & -4 \end{array}}$$

$$A^T: \boxed{\begin{array}{rr} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \\ 4 \end{array}\boxed{\begin{array}{rr} [2] & -1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rr} [2] & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rr} [1] & -\frac{1}{2} \end{array}}.$$

Für die Vektoren im Kern von A gilt

$1 \cdot x - 2 \cdot y - 4 \cdot z = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \cdot y + 4 \cdot z.$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\ker(A)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 2\,y + 4\,z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Für das Bild von A ergibt sich

$$\underline{\underline{\operatorname{img}(A)}} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

e)

$$A:\ \boxed{\begin{matrix}-2 & 4 & 8\\ 1 & -2 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 2\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 2 & -4 & -8\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 0 & 0 & [1]\end{matrix}}$$

$$A^T:\ \boxed{\begin{matrix}-2 & 1\\ 4 & -2\\ 8 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 2\\ 4\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[2] & -1\\ 4 & -2\\ 8 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[2] & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \\ \end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[1] & -\frac{1}{2}\\ 0 & [1]\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & 0\\ 0 & [1]\end{matrix}}$$

Für die Vektoren im Kern von A gilt

$$0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0 \quad\Rightarrow\quad z=0$$

$$1\cdot x-2\cdot y-0\cdot z=0 \quad\Rightarrow\quad x=2\cdot y+0\cdot 0=2\cdot y$$

$$\underline{\underline{\ker(A)}}=\left\{\begin{bmatrix}2y\\ y\\ 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\underline{\underline{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}}}$$

Für das Bild von A ergibt sich

$$\underline{\underline{\operatorname{img}(A)}}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$$

f)

$$A:\ \boxed{\begin{matrix}-2 & 1\\ 4 & -2\\ 8 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 2\\ 4\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[2] & -1\\ 4 & -2\\ 8 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[2] & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \\ \end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[1] & -\frac{1}{2}\\ 0 & [1]\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & 0\\ 0 & [1]\end{matrix}}$$

$$A^T:\ \boxed{\begin{matrix}-2 & 4 & 8\\ 1 & -2 & 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 2\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 2 & -4 & -8\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}[1] & -2 & 0\\ 0 & 0 & [1]\end{matrix}}.$$

Für die Vektoren im Kern von A gilt

$$0\cdot x+1\cdot y=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$

$$1\cdot x+0\cdot y=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

$$\underline{\underline{\ker(A)=\{0\}}}$$

Für das Bild von A ergibt sich

$$\underline{\underline{\operatorname{img}(A)=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}}}$$

7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $\mathrm{img}(A) = \mathbb{R}^3$.		X
b) Es gilt: $\ker(A^{12}) \neq \{0\}$.	X	
c) Es gilt: B ist orthogonal.		X
d) Es gilt: $\mathrm{tr}\left(2A + \sqrt{2}B\right) = 0$.	X	
e) Die Spaltenvektoren von B sind linear unabhängig.	X	
f) Es gilt: $\ker(B^3) = \ker(B)$.	X	