

# Übungsblatt 8 Ana

Computational and Data Science  
FS2024

## Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Skalarfeld, Vektorfeld, Kurve, eindimensionale Schnittkurve, Höhenlinien, Niveaumenge und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die natürliche Definitionsmenge und Wertemenge einer Funktion mehrerer Variablen bestimmen.
- Sie können Höhenlinien und Niveaumengen von Funktionen von zwei bzw. drei Variablen bestimmen und skizzieren.

### 1. Aussagen über Funktionen mehrerer reeller Variabler

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ niemals injektiv.	X	
b) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ niemals surjektiv.		X
c) Jede Ebene in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.	X	
d) Jede Sphäre in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.		X

### 2. Definitionsmengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen und skizzieren Sie für die nachfolgenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils die maximale Definitionsmenge.

a)  $f(x, y) = \sqrt{y - 2x}$       b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$       c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$

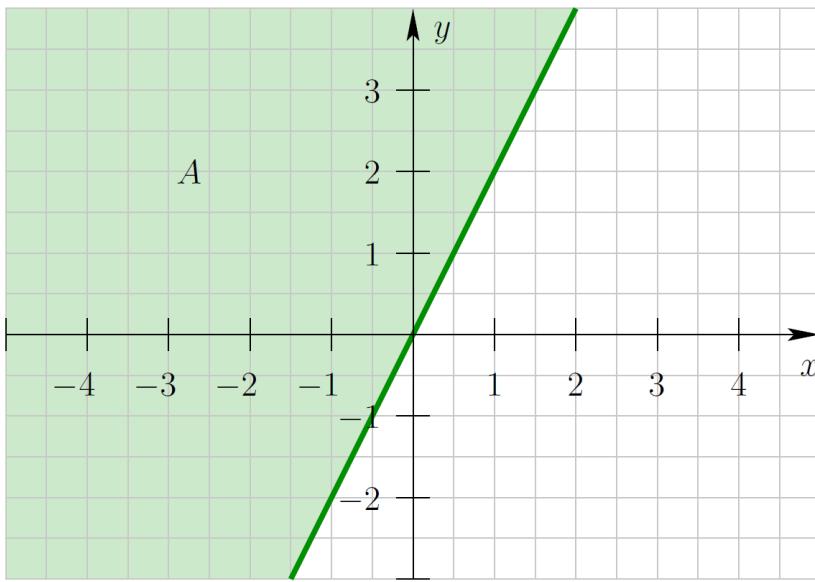
a)

Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$\begin{aligned} y - 2x &\geq 0 & | + 2x \\ \Leftrightarrow y &\geq 2x. \end{aligned}$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von  $f$  ist daher das Gebiet

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y < 2x\}.$$



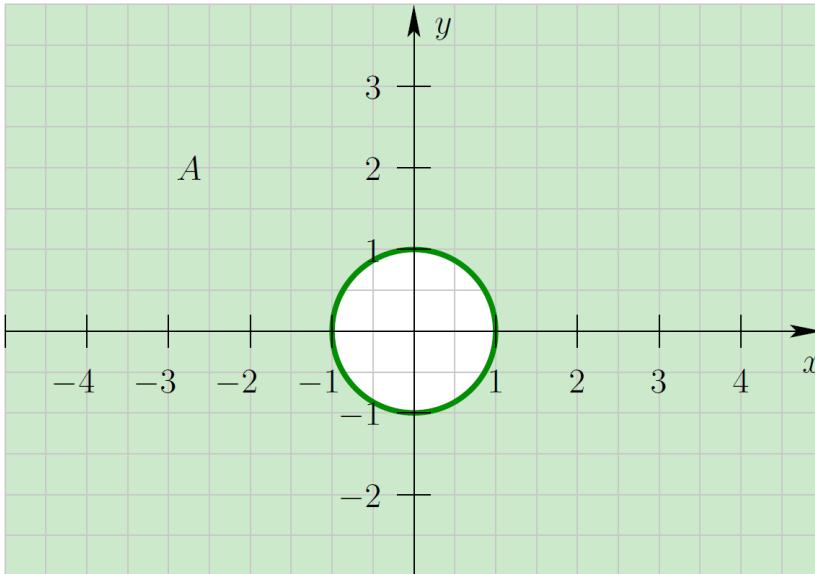
b)

Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &\geq 0 & | + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\geq 1. \end{aligned}$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von  $f$  ist daher das Gebiet

$$\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 < 1\}}.$$



c)

Der Radikand im Zähler darf nicht negativ werden und der Nenner darf nicht 0 werden. Es muss sowohl

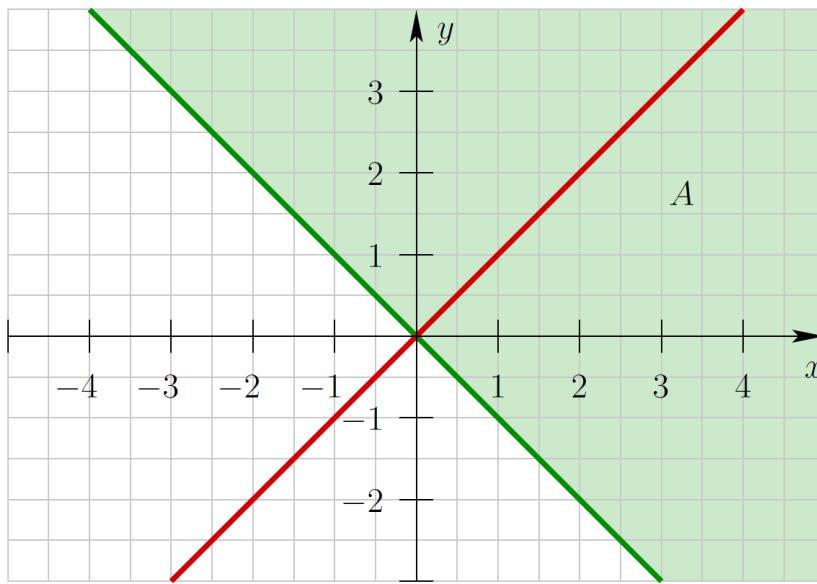
$$\begin{aligned} x - y &\neq 0 & | + y \\ \Leftrightarrow y &\neq x \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} x + y \geq 0 & \quad | -x \\ \Leftrightarrow y \geq -x. & \end{aligned}$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von  $f$  ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = x \vee y < -x\}}}.$$



### 3. Definition- und Wertemengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $f(x, y) = \sin(xy)$              | b) $f(x, y) = x + y + \cos(xy)$            |
| c) $f(x, y) = \sqrt{1-y} + e^{-x^2}$ | d) $f(x, y) = \sqrt{x^2-y} + \sqrt{y-x^2}$ |

a)

$$D = \mathbb{R}^2, W = [-1; 1]$$

b)

$$D = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$$

c)

Der Radikand darf nicht negativ werden:

$$1 - y \geq 0 \rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1\}, W = ]0; \infty[$$

d)

Die beiden Radikanden dürfen nicht negativ werden, d. h.

$$x^2 - y \geq 0 \text{ und } y - x^2 \geq 0$$

$$y \leq x^2 \text{ und } y \geq x^2$$

Es ergibt sich:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}, W = \{0\}$ .

#### 4. Höhenlinien

Berechnen und skizzieren Sie für die gegebene Funktion jeweils die Höhenlinien.

a)  $f(x, y) = 3x + 6y$   
 c)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$

b)  $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$   
 d)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y}$

a)

Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x; y) = 3x + 6y \quad | - 3x$$

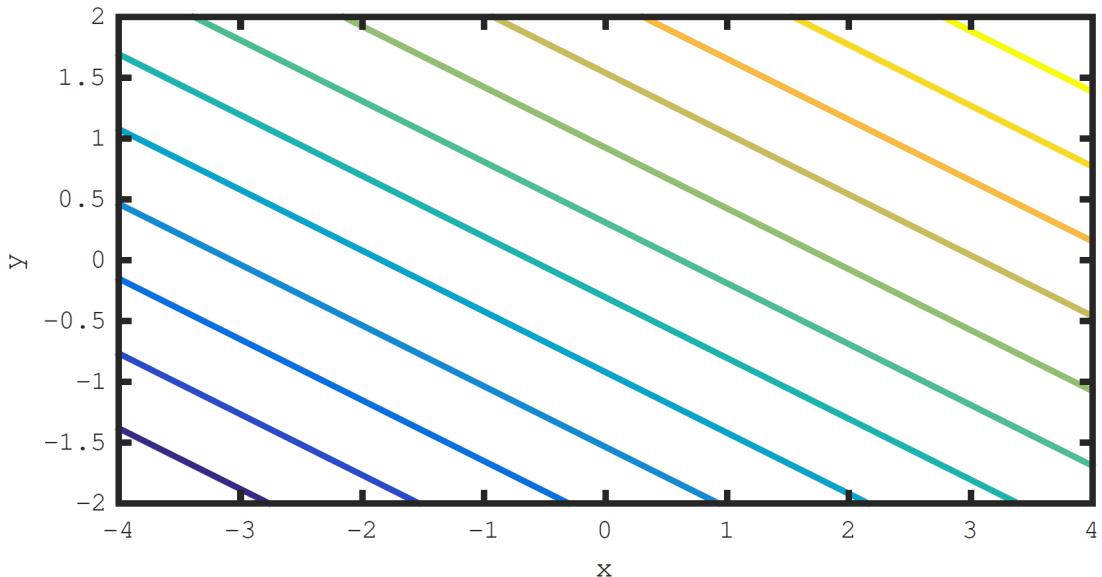
$$L - 3x = 6y \quad | : 6$$

$$y = \frac{L - 3x}{6} = \frac{L}{6} - \frac{x}{2}.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{L}{6} \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}.$$


---



b)

Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x; y) = \sqrt{y - x^2} \quad | (\dots)^2$$

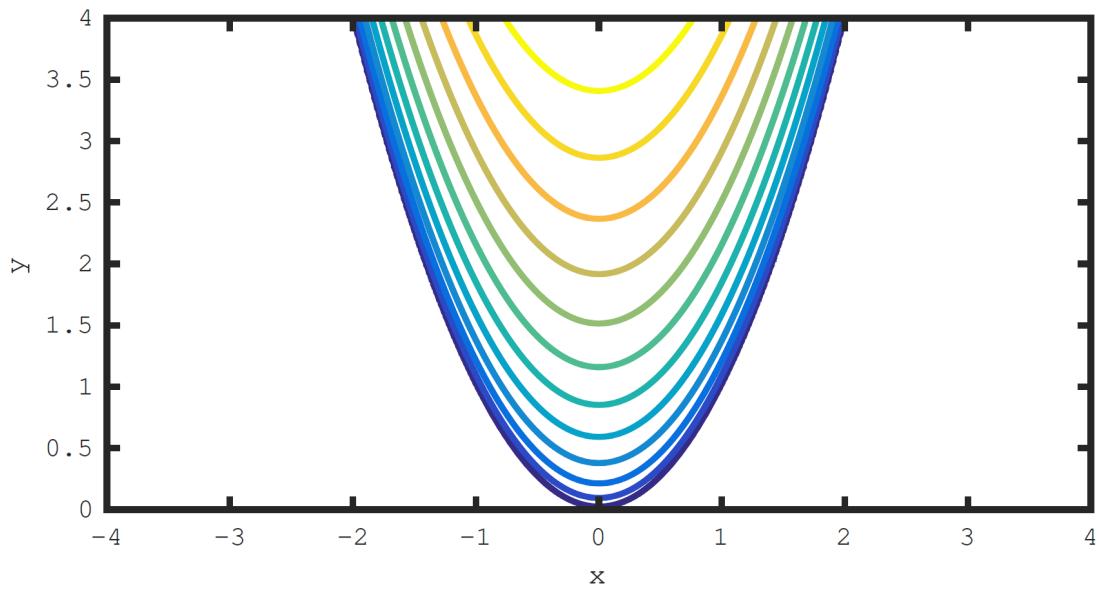
$$L^2 = y - x^2 \quad | + x^2.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

---


$$y = x^2 + L^2 \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}_0^+.$$


---



c)

Für die Höhenlinie zur Höhe  $L$  ergibt sich

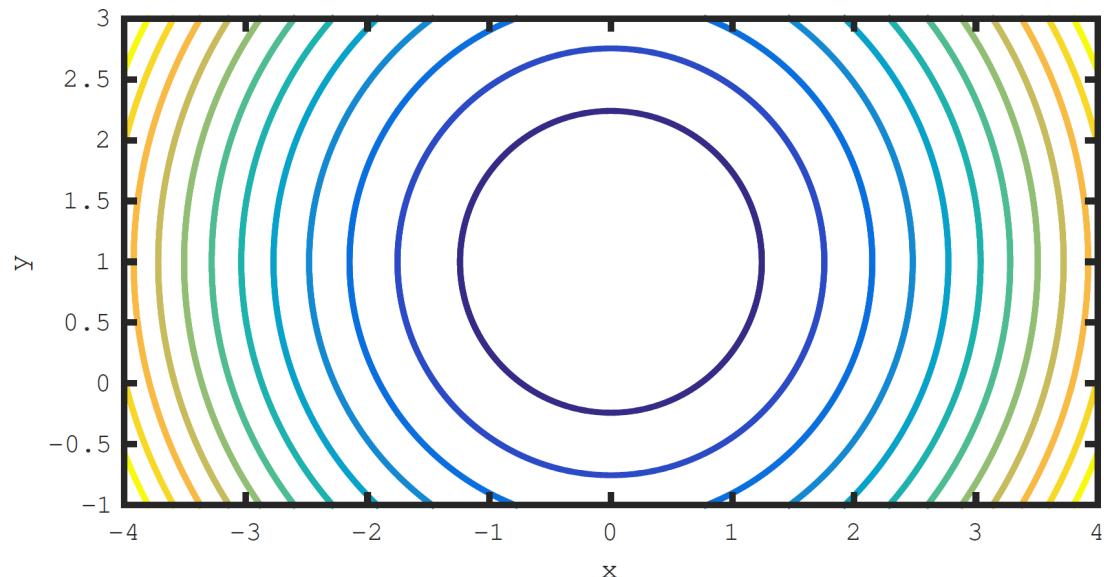
$$L = f(x; y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1 \quad | + 1$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = L + 1.$$

Die Höhenlinien sind folglich Kreise in der xy-Ebene mit Mittelpunkt M und Radius r:

$$M = (0; 1), \quad r = \sqrt{L + 1} \quad \text{mit } L \in [-1, \infty[.$$


---



d)

Der Nenner darf nicht 0 werden. Somit ergibt sich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}, \quad W = \mathbb{R}.$$

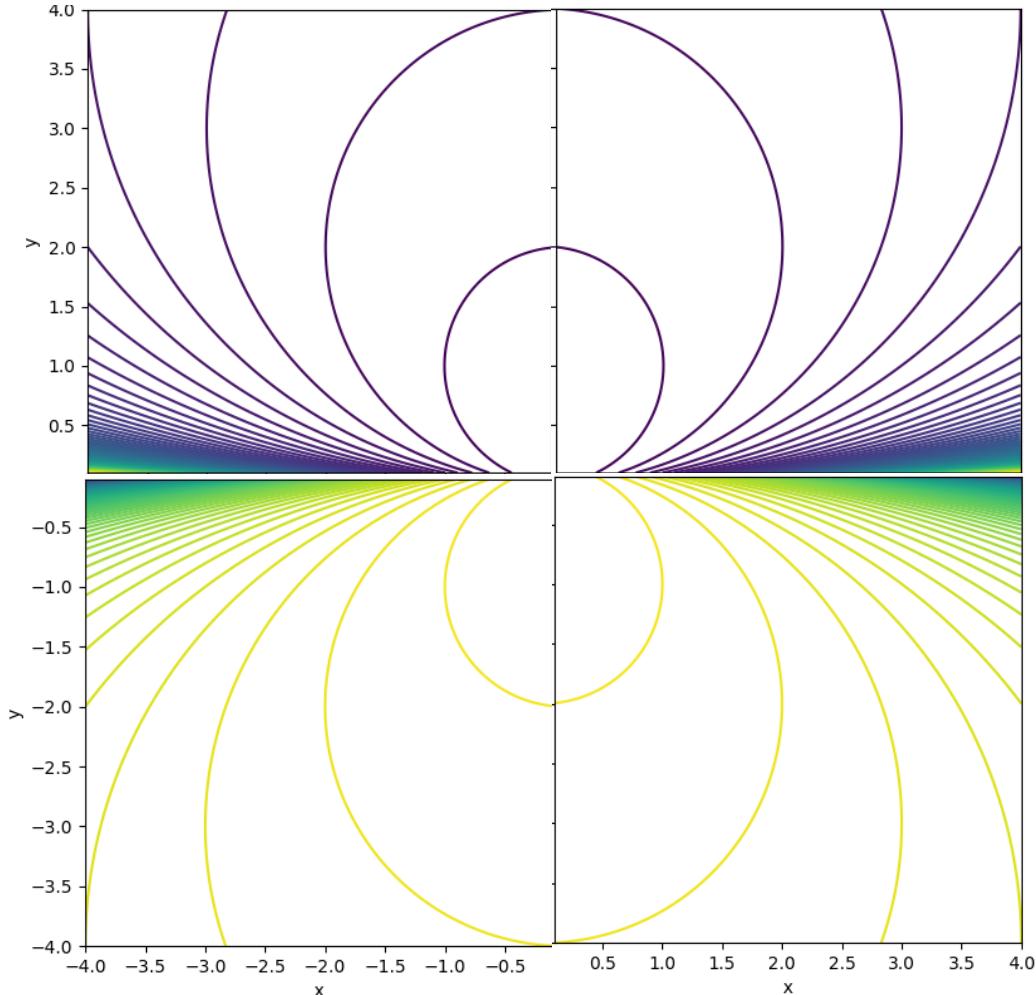
Bestimmung der Höhenlinien zur Höhe c:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y} \stackrel{!}{=} c \neq 0$$

führt auf die Darstellung

$$x^2 + y^2 = 2cy \iff x^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Dies sind Kreise um die Punkte  $(0, c)$  mit Radius  $|c|$ . Die Punkte auf der  $x$ -Achse werden somit nicht mit einbezogen.



## 5. Niveauflächen

Berechnen und beschreiben Sie für die gegebene Funktion jeweils die Niveauflächen.

a)  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$       b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$       c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

a)

Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu

$$L = f(x, y, z) = x + 2y + 3z.$$

Die Niveauflächen sind also Ebenen mit der Gleichung

$$z = \frac{1}{3}(L - x - 2y).$$

b)

Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu

$$L = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Niveaumassen sind also Sphären in 3D um den Mittelpunkt (0;0;0) mit Radius  $\sqrt{L}$  mit der Gleichung

$$z = \sqrt{L - x^2 - y^2}.$$

c)

Die Niveaumasse zum Niveau L ergibt sich zu

$$L = f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

Für die Variable z gibt es keine Einschränkung, somit entsprechen die Niveaumassen von f dem Mantel von Zylindern in 3D, wobei die Symmetriechse des Zylinders die z-Achse ist. Für den Radius des Zylinders ergibt sich  $\sqrt{L}$ .

## 6. Funktionsgraphen und Höhenlinien mit Python/Numpy

Plotten Sie sowohl die Funktion als auch die Höhenlinien der angegebenen Funktionen mit Python/Numpy.

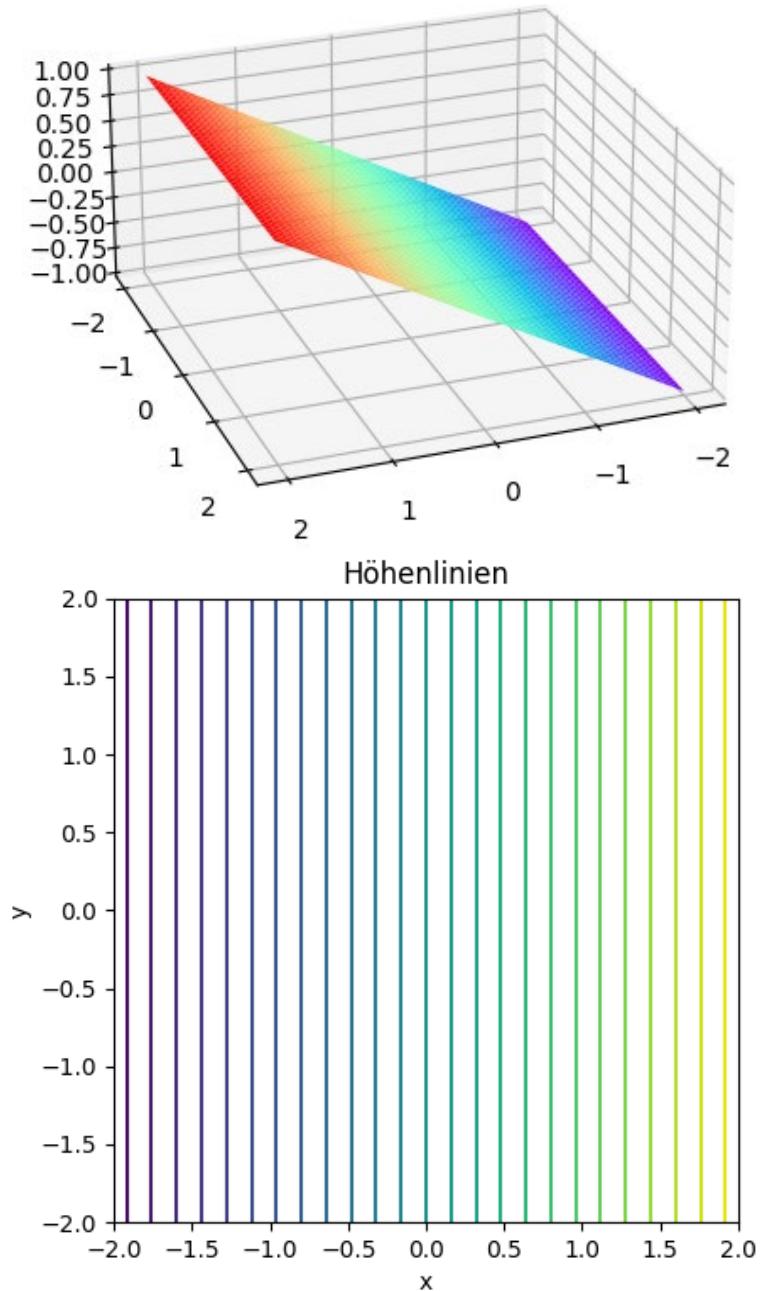
a) $f(x, y) = \frac{x}{2}$	b) $f(x, y) = \frac{y}{2}$	c) $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$
d) $f(x, y) = \frac{xy}{4}$	e) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$	f) $f(x, y) = \frac{6 \cdot \sin(xy)}{1+x^2+y^2}$

a)

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
from mpl_toolkits import mplot3d;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; # Anzahl Intervalle für x- bzw y-Achse
N_g=10; N_l=31; # Schrittweite
az=70; el=25; # Drehwinkel gegenüber z-Achse (azimuth) und
gegenüber xy-Ebene
fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=x/2; return z;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x); # Punkte auf x-Achse
erzeugen
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y); # Punkte auf y-Achse
erzeugen
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data); # Pärchen mit
allen x- und y-Werten
z_grid=f(x_grid,y_grid); # Funktionswerte der Pärchen
# Graph-Plot:
pl.figure(fig); ax=pl.axes(projection='3d');
ax.plot_surface(x_grid,y_grid,z_grid,rstride=N_g,cstride=N_g,
cmap='rainbow'); ax.view_init(el,az);
ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_zlabel('z');
ax.set_box_aspect((np.ptp(x_grid), np.ptp(y_grid),
np.ptp(z_grid)));
pl.title('3D Darstellung');
# Höhenlinien-Plot:
fig=fig+1; fh=pl.figure(fig);
pl.contour(x_grid,y_grid,z_grid,N_l);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
```

```
pl.grid(b=False); pl.axis('image');
pl.title('Höhenlinien');
```

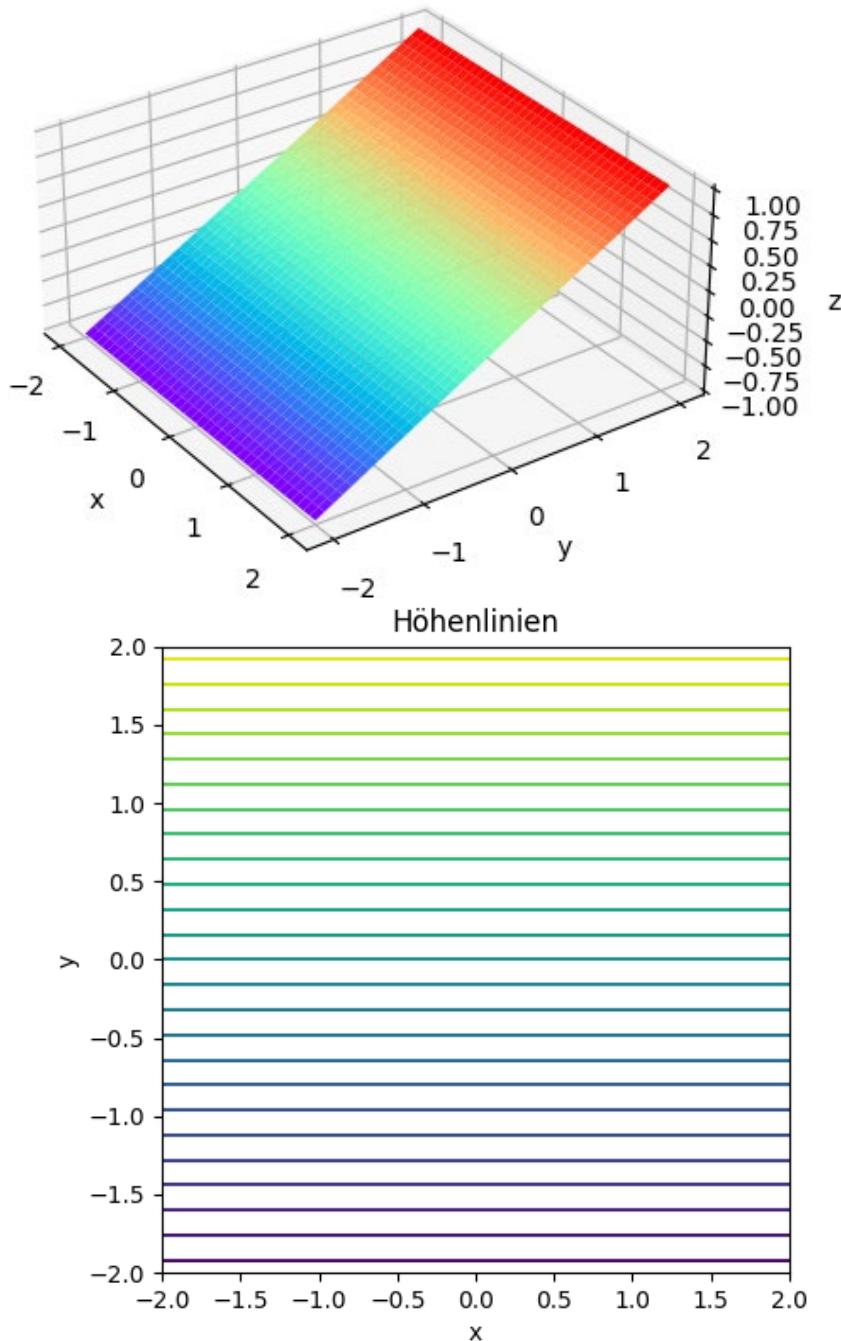
### 3D Darstellung



b)

```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=y/2; return z;
```

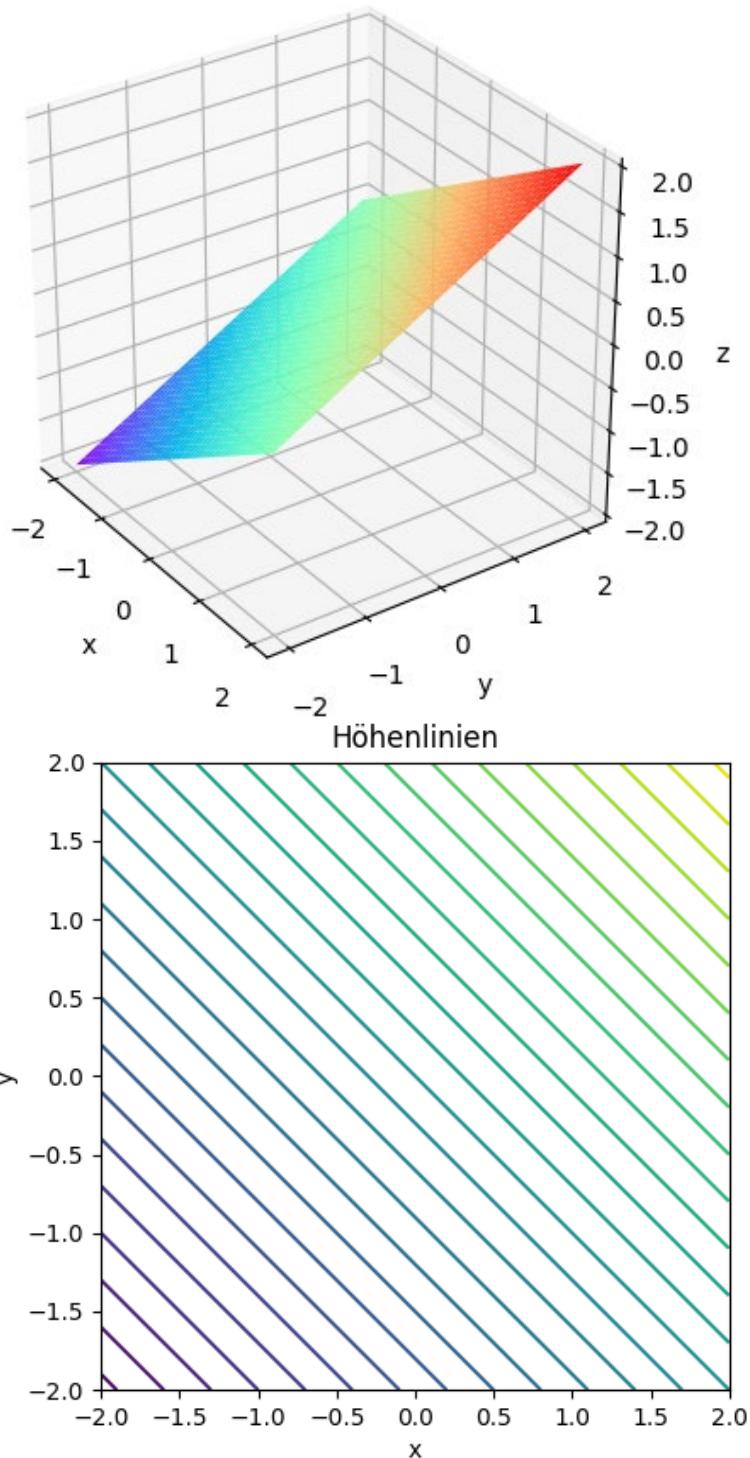
### 3D Darstellung



c)

```
# Parameter:  
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=(x+y)/2; return z;
```

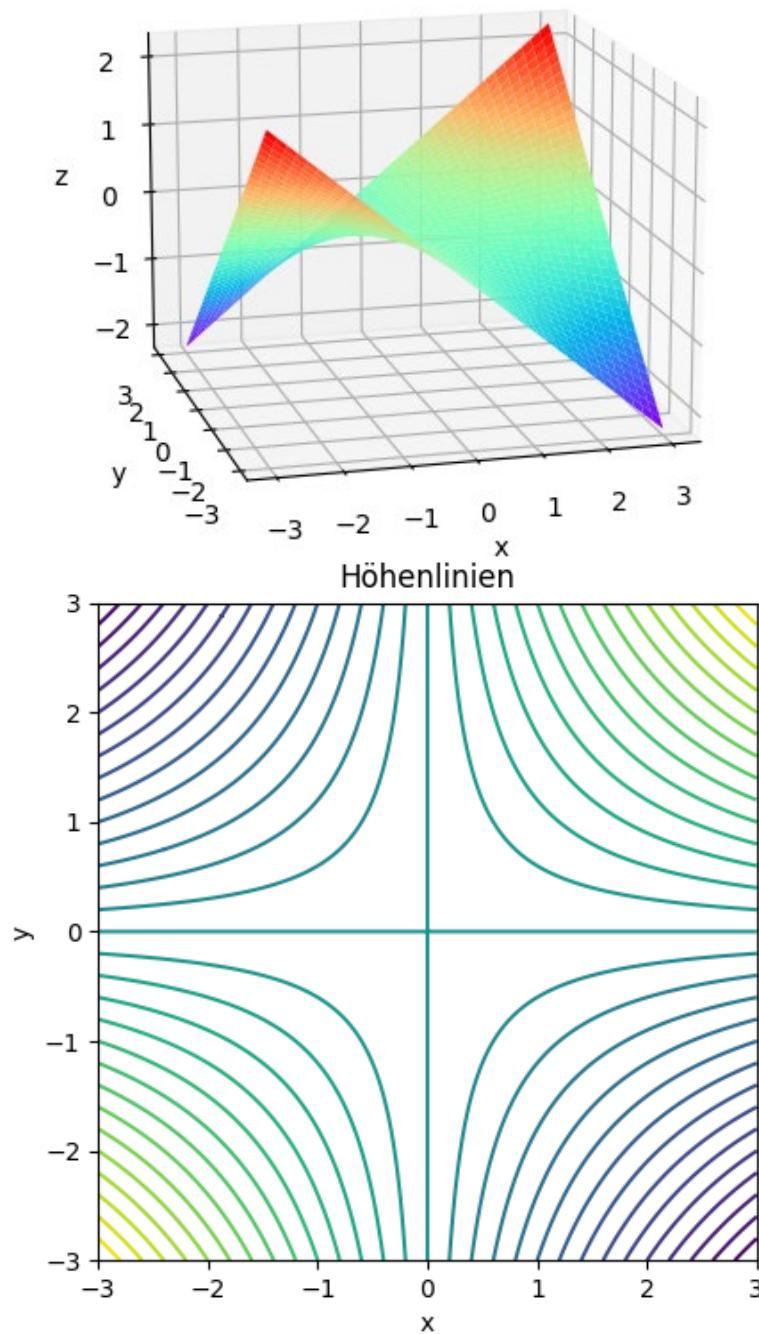
### 3D Darstellung



d)

```
# Parameter:  
x_0=-3; x_E=3; y_0=-3; y_E=3;  
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35-70; el=15; fig=1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=(x*y)/4; return z;
```

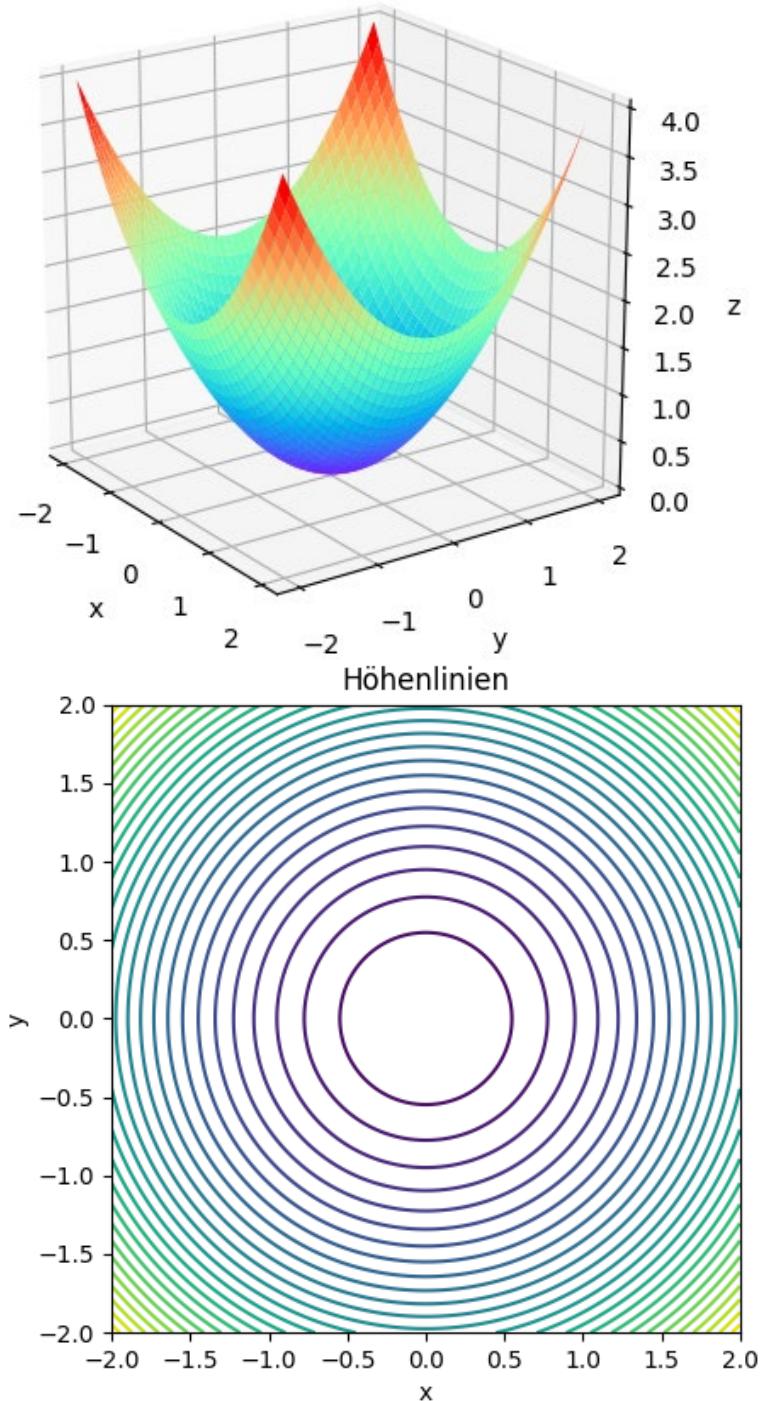
### 3D Darstellung



e)

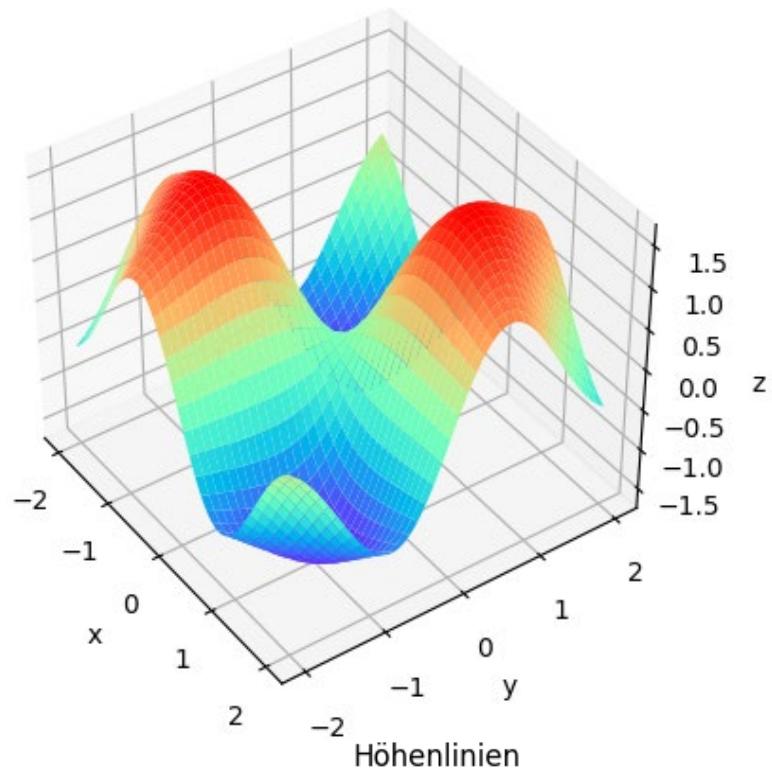
```
# Parameter:  
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;  
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=20; fig=1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=(x**2+y**2)/2; return z;
```

### 3D Darstellung

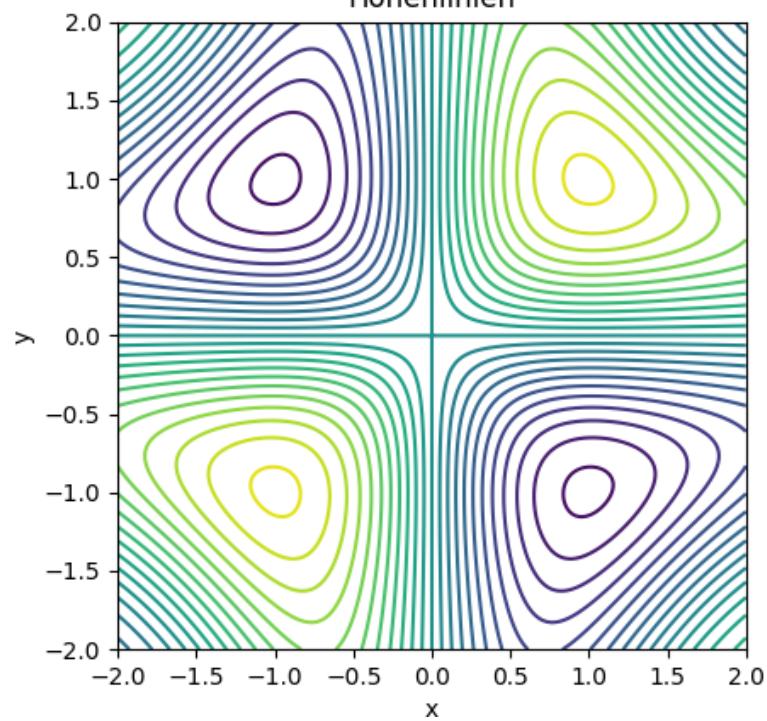


f)  
# Parameter:  
x\_0=-2; x\_E=2; y\_0=-2; y\_E=2;  
N\_x=401; N\_y=401; N\_g=10; N\_l=31; az=-35; el=40; fig=1;  
# Funktionen:  
def f(x,y): z=(6\*np.sin(x\*y)) / (1+x\*\*2+y\*\*2);return z;

### 3D Darstellung



Höhenlinien



## 7. Aussagen über eine Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $f(3;0;4) = 5$ .	X	
b) f ist eine Funktion in 3 Variablen.	X	
c) Die x-Achse ist eine Höhenlinie von f.		X
d) Die Einheitssphäre in 3D ist der Graph von f.		X
e) Die Einheitssphäre in 3D ist eine Niveaumenge von f.	X	
f) Die Sphäre um den Ursprung mit Radius 7 ist eine Niveaumenge von f.	X	