FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

ā ` s l eq ` j_rr ? l_ 12

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über lokale Extremalstellen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Null ist ein *lokales Minimum* der *quadratischen Standardfunktion.*	●	○
b) Null ist ein *lokales Minimum* der *kubischen Standardfunktion.*	○	●
c) Die *Funktion* 2^x hat keine *lokalen Extremstellen.*	●	○
d) Der höchstmögliche *Funktionswert* einer *Funktion* liegt immer an einem *lokalen Maximum* der *Funktion.*	○	●
e) Ein *Polynom* vom *Grade* $1'000$ kann bis zu $1'000$ *lokale Extremstellen* haben.	○	●
f) Falls gilt $f'(-3) = 0$, dann hat f an der Stelle $x = -3$ ein *lokales Minimum* oder ein *lokales Maximum.*	○	●

2. Analysis einer quadratischen Funktion

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Wir bestimmen die *lokalen Extremstellen* der allgemeinen, *quadratischen Funktion*

$$f(x) := ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Für die *erste* und *zweite Ableitung* von f erhalten wir

$$f'(x) = a \cdot 2x + b + 0 = 2ax + b \tag{2}$$

$$f''(x) = 2a + 0 = 2a. \tag{3}$$

Da f' linear ist, kann f höchstens eine *kritische Stelle* haben. Aus

$$0 = f'(x) = 2ax + b \qquad \big| - b \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -b = 2ax \qquad \big| : (2a) \tag{5}$$

folgt, dass f genau eine *kritische Stelle* hat bei

$$x_\mathrm{S} = -\frac{b}{2a}\,. \tag{6}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$f\left(x_{\mathrm{S}}\right) = ax_{\mathrm{S}}^2 + bx_{\mathrm{S}} + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$= -\frac{b^2}{4a} + c = y_{\mathrm{S}} \tag{7}$$
$$f'\left(x_{\mathrm{S}}\right) = 2ax_{\mathrm{S}} + b = 2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b = -\frac{2ab}{2a} + b = -b + b = 0 \tag{8}$$
$$f''\left(x_{\mathrm{S}}\right) = 2a. \tag{9}$$

Wir betrachten die Fälle $a < 0$ und $a > 0$ getrennt.

Fall 1: $a < 0$. In diesem Fall gilt

$$f''\left(x_{\mathrm{S}}\right) = 2a < 0. \tag{10}$$

Demnach hat f an der Stelle x_{S} ein *lokales Maximum*.

Fall 2: $a > 0$. In diesem Fall gilt

$$f''\left(x_{\mathrm{S}}\right) = 2a > 0. \tag{11}$$

Demnach hat f an der Stelle x_{S} ein *lokales Minimum*.

Diese Ergebnisse stimmen offenbar überein mit der klassischen Theorie der *quadratischen Funktionen*, gemäss welcher f am *Scheitelpunkt* $\left(x_{\mathrm{S}}\,;\,y_{\mathrm{S}}\right)$ im Falle $a > 0$ ein *lokales Minimum* und im Falle $a < 0$ ein *lokales Maximum* hat.

3. Bestimmung von lokalen Extremstellen

Wir bestimmen jeweils alle *lokalen Extrema* und *Sattelpunkte* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$a(x) = 3x^2 + 12x - 7. \tag{12}$$

Für die *erste* und *zweite Ableitung* von a erhalten wir

$$a'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} + 12 - 0 = 6x + 12 \tag{13}$$
$$a''(x) = 6 + 0 = 6. \tag{14}$$

Da a' eine *lineare Funktion* ist, hat a höchstens eine *kritische Stelle*. Aus

$$0 = a'(x) = 6x + 12 \qquad \big| - 12 \tag{15}$$
$$\Leftrightarrow \qquad -12 = 6x \qquad \big| : 6 \tag{16}$$

erhalten wir die *kritische Stelle*

$$x_1 = \frac{-12}{6} = -2. \tag{17}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$a(x_1) = a(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - 7 = 12 - 24 - 7 = -19 \tag{18}$$

$$a''(x_1) = a''(-2) = 6 > 0. \tag{19}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$a(x_k)$	$a'(x_k)$	$a''(x_k)$	Typ
1	-2	-19	0	$6 > 0$	*lokales Minimum*

(20)

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$b(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x. \tag{21}$$

Für die *erste* und *zweite Ableitung* von b erhalten wir

$$b'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 = 6x^2 + 6x - 12 \tag{22}$$

$$b''(x) = 6 \cdot 2x^{2-1} + 6 - 0 = 12x + 6. \tag{23}$$

Da $b'(x)$ eine *quadratische Funktion* ist, hat b höchstens zwei *kritische Stellen*. Aus

$$0 = b'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \qquad \Big| : 6 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = x^2 + x - 2 \qquad \Big| \text{MF} \tag{25}$$

erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \tag{26}$$

das heisst

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1. \tag{27}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$b(x_1) = b(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) = -16 + 12 + 24 = 20 \tag{28}$$

$$b''(x_1) = b''(-2) = 12 \cdot (-2) + 6 = -18 < 0. \tag{29}$$

$$b(x_2) = b(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = 2 + 3 - 12 = -7 \tag{30}$$

$$b''(x_2) = b''(1) = 12 \cdot 1 + 6 = +18 > 0. \tag{31}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$b(x_k)$	$b'(x_k)$	$b''(x_k)$	Typ
1	-2	20	0	$-18 < 0$	*lokales Maximum*
2	1	-7	0	$+18 > 0$	*lokales Minimum*

(32)

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$c(x) = x^4 - 2x^2 + 2. \tag{33}$$

Für die *erste* und *zweite Ableitung* von c erhalten wir

$$c'(x) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 4x \tag{34}$$

$$c''(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - 4 = 12x^2 - 4. \tag{35}$$

Da c' ein *Polynom dritten Grades* ist, hat c höchstens drei *kritische Stellen.* Aus

$$0 = c'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\big(x^2 - 1\big) = 4x\,(x+1)\,(x-1) \tag{36}$$

erhalten wir die *kritischen Stellen*

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = 1. \tag{37}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$c(x_1) = c(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \tag{38}$$

$$c''(x_1) = c''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \tag{39}$$

$$c(x_2) = c(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2 \tag{40}$$

$$c''(x_2) = c''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = 0 - 4 = -4 \tag{41}$$

$$c(x_3) = c(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \tag{42}$$

$$c''(x_3) = c''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 12 - 4 = 8. \tag{43}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$c(x_k)$	$c'(x_k)$	$c''(x_k)$	Typ
1	-1	1	0	$8 > 0$	*lokales Minimum*
2	0	2	0	$-4 < 0$	*lokales Maximum*
3	$+1$	1	0	$8 > 0$	*lokales Minimum*

(44)

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$d(x) = x^4 - 2x^3 - 1. \tag{45}$$

Für die *erste* und *zweite Ableitung* von d erhalten wir

$$d'(x) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 4x^3 - 6x^2 \tag{46}$$

$$d''(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot 2x = 12x^2 - 12x. \tag{47}$$

Da d' ein *Polynom dritten Grades* ist, hat d höchstens drei *kritische Stellen.* Aus

$$0 = d'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2\big(2x - 3\big) \tag{48}$$

erhalten wir die *kritischen Stellen*

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3}{2}\,. \tag{49}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$d(x_1) = d(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^3 - 1 = -1 \tag{50}$$

$$d''(x_1) = d''(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 = 0 \tag{51}$$

$$d(x_2) = d\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 = \frac{81}{16} - \frac{108}{16} - \frac{16}{16} = -\frac{43}{16} \tag{52}$$

$$d''(x_2) = d''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{3}{2} = 27 - 18 = 9. \tag{53}$$

Weil $d''(x_1) = 0$, lässt sich der Typ der *kritischen Stelle* $x_1 = 0$ mit den bisher berechneten Grössen nicht eindeutig bestimmen. Wir zeigen zwei Varianten, um die *kritische Stelle* x_1 genauer zu beurteilen.

Variante 1: Die dritte *Ableitung* von d ist

$$d'''(x) = 12 \cdot 2x^{2-1} - 12 = 24x - 12. \tag{54}$$

Es gilt

$$d'''(x_1) = d'''(0) = 24 \cdot 0 - 12 = -12 \neq 0. \tag{55}$$

Die erste nicht verschwindende *Ableitung* von d an der *kritischen Stelle* x_1 ist demnach von *ungerader Ordnung*.

Variante 2: Weil $x_1 = 0$ die kleinste *kritische Stelle* von d ist, verläuft die *Funktion* für alle $x < 0$ *streng monoton*. Wir betrachten als Beispiel die *Stelle* $x_b = -1$. Es gilt

$$d\big(x_b\big) = d(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2. \tag{56}$$

Es gilt demnach

$$d\big(x_b\big) = 2 > -1 = d(x_1) > -\frac{43}{16} = d(x_2). \tag{57}$$

Die *Funktion* d ist demnach sowohl unmittelbar links als auch unmittelbar rechts von der *kritischen Stelle* x_1 *streng monoton fallend*.

Es folgt, dass d an der *Stelle* $x_1 = 0$ einen *Sattelpunkt* haben muss. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$d(x_k)$	$d'(x_k)$	$d''(x_k)$	$d'''(x_k)$	Typ
1	0	-1	0	0	-12	*Sattelpunkt*
2	3/2	$-43/16$	0	$9 > 0$	n.v.	*lokales Minimum*

(58)

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$e(x) = \sqrt{3x^2 + 12x - 7} = \sqrt{a(x)}\,. \tag{59}$$

Für die erste *Ableitung* von e erhalten wir mit Hilfe der *Ketten-Regel*

$$e'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a(x)}} \cdot a'(x). \tag{60}$$

Alle *kritischen Stellen* von e sind demnach auch *kritische Stellen* von a. Gemäss (17) erhalten wir somit als einzige *Kandidatenstelle*

$$x_1 = -2. \tag{61}$$

Wegen (18) gilt aber

$$a(x_1) = a(-2) = -19 < 0. \tag{62}$$

Konsequenterweise liegt die *Stelle* x_1 ausserhalb des *natürlichen Definitionsbereiches* von e, weil aus *negativen Zahlen* keine *Wurzel* gezogen werden kann. Demnach hat e keine *lokalen Extrema.*

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{2x^3 + 3x^2 - 12x} = \frac{1}{b(x)}\,. \tag{63}$$

Für die erste *Ableitung* von f erhalten wir mit Hilfe der *Reziproken-Regel*

$$f'(x) = -\frac{1}{b^2(x)} \cdot b'(x). \tag{64}$$

Alle *kritischen Stellen* von f sind demnach auch *kritische Stellen* von b. Gemäss (26) erhalten wir somit die beiden *Kandidaten-Stellen*

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 1. \tag{65}$$

Mit Hilfe von (28) und (30) sehen wir, dass beide *Kandidaten-Stellen* innerhalb des *natürlichen Definitionsbereiches* von f liegen. Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$f(x_1) = f(-2) = \frac{1}{b(-2)} = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad f(x_2) = f(1) = \frac{1}{b(1)} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}\,. \tag{66}$$

Da f und b zueinander *reziproke Funktionen* sind, ist das *lokale Maximum* von f ein *lokales Minimum* von b und das *lokale Minimum* von f ein *lokales Maximum* von b. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	Typ
1	-2	$1/20$	0	*lokales Minimum*
2	1	$-1/7$	0	*lokales Maximum*

(67)

4. Aussagen über das Verhalten einer Funktion
Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := -3x \cdot (x+3) \cdot (3-x). \end{aligned} \tag{68}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Die *Funktion* f ist *nach oben unbeschränkt.*	●	○
b) Die *Funktion* f ist *injektiv.*	○	●
c) Die *Funktion* f ist *surjektiv.*	●	○
d) Die *Funktion* f hat bei $x = 4$ einen *Sattelpunkt.*	○	●
e) Die *Funktion* f hat im *Intervall* $[0, 3]$ ein *lokales Maximum.*	○	●
f) Die *Funktion* f hat genau zwei *lokale Extremstellen.*	●	○

5. Maximierung einer Rechteck-Fläche

Wir betrachten ein *Rechteck* mit *Umfang* $U > 0$ und suchen die *Seiten* a und b derart, dass die *Fläche* des *Rechtecks maximal* wird. Zunächst formulieren wir die Aufgabe als *Optimierungsproblem.* Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} &x := a && (\textit{unabhängige Variable}) \\ &A :\equiv \textit{Fläche} \text{ des } \textit{Rechtecks} && (\text{zu } \textit{optimierende Variable}). \end{aligned} \tag{69}$$

Aus der *Elementargeometrie* kennen wir die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot (a + b) \\ A &= ab. \end{aligned} \tag{70}$$

Mit Hilfe dieser Informationen können wir die *Variablen* a, b und A durch die *unabhängige Variable* x und die gegebene *Konstante* U ausdrücken. Wir erhalten

$$a(x) = x \tag{71}$$

$$b(x) = \frac{U}{2} - a = \frac{U}{2} - x \tag{72}$$

$$A(x) = ab = x \cdot \left(\frac{U}{2} - x \right) = \frac{U}{2}\, x - x^2. \tag{73}$$

Die *Seiten* eines *Rechtecks* sind immer *positiv*, d.h. es muss gelten

$$a, b \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq \frac{U}{2}\,. \tag{74}$$

Wir suchen somit das *globale Maximum* der *Funktion* $A(x)$ auf dem *geschlossenen Intervall*

$$I := \big[x_0, x_{\mathrm{E}}\big] = \big[0, U/2\big]. \tag{75}$$

Dabei gehen wir gemäss den folgenden Schritten vor.

S1 **Kritische Stellen:** Für die erste *Ableitung* von A erhalten wir

$$A'(x) = \frac{U}{2} \cdot 1 - 2x^{2-1} = \frac{U}{2} - 2x. \tag{76}$$

Da A' linear ist, hat A höchstens eine *kritische Stelle*. Aus

$$0 = A'(x) = \frac{U}{2} - 2x \qquad \Big| + 2x \tag{77}$$

$$2x = \frac{U}{2} \qquad \Big| : 2 \tag{78}$$

erhalten wir

$$x_1 = \frac{U}{4}\,. \tag{79}$$

Ferner finden wir den Wert

$$A_1 = A(x_1) = A\left(\frac{U}{4}\right) = \frac{U}{4}\left(\frac{U}{2} - \frac{U}{4}\right) = \frac{U}{4} \cdot \frac{U}{4} = \frac{U^2}{16}\,. \tag{80}$$

S2 **Rand stellen:** An den *Randstellen* $x_0 = 0$ und $x_{\mathrm{E}} = U/2$ hat A die Werte

$$\begin{aligned} A_0 &= A(x_0) = A(0) = 0 \cdot \left(\frac{U}{2} - 0\right) = 0 \cdot \frac{U}{2} = 0 \\ A_{\mathrm{E}} &= A(x_{\mathrm{E}}) = A\left(\frac{U}{2}\right) = \frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - \frac{U}{2}\right) = \frac{U}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

S3 **Kandidatenvergl eich:** Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	A_k	Typ
0	0	0	*globales Minimum*
1	$U/4$	$U^2/16$	*globales Maximum*
E	$U/2$	0	*globales Minimum*

(82)

Ein *Rechteck* mit *Umfang* $U > 0$ hat also gerade dann die *maximale Fläche*, wenn gilt

$$\underline{\underline{a}} = x_1 = \underline{\underline{\frac{U}{4}}} \tag{83}$$

$$\underline{\underline{b}} = \frac{U}{2} - a = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \underline{\underline{\frac{U}{4} = a}} \tag{84}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\frac{U^2}{16}}}. \tag{85}$$

Dies beschreibt gerade das *Quadrat* mit *Umfang* U und *Seitenlänge* $l = U/4$.

6. Optimale Verpackungen

Wir bestimmen jeweils die *optimalen geometrischen Abmessungen* (*Länge*, *Breite*, *Höhe*, *Radius*, etc..), so dass die angegebene Verpackung mit möglichst wenig Material hergestellt werden kann.

a) Wir betrachten eine *quaderförmige* Kiste mit *Länge* L, *Breite* B und *Höhe* H, die ein *Volumen* fasst von

$$V = LBH = 9.00\,\mathrm{l} = 9.00\,\mathrm{dm}^3. \tag{86}$$

Ihre *rechteckige Grundfläche* sei doppelt so lang wie breit, d.h. es gilt

$$L = 2B. \tag{87}$$

Zunächst formulieren wir die Aufgabe als *Optimierungsproblem*. Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} &x := L && (\textit{unabhängige Variable}) \\ &A :\equiv \textit{Oberfläche} \text{ der Kiste} && (\text{zu } \textit{optimierende Variable}). \end{aligned} \tag{88}$$

Wir drücken nun sämtliche *Variablen* des Problems durch die *unabhängige Variable* x aus. Mit Hilfe von (86) und (87) erhalten wir

$$L(x) = x \tag{89}$$

$$B(x) = \frac{L(x)}{2} = \frac{x}{2} \tag{90}$$

$$H(x) = \frac{V}{L(x)B(x)} = \frac{V}{x \cdot \frac{x}{2}} = \frac{2V}{x^2} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= 2L(x) \cdot B(x) + 2L(x) \cdot H(x) + 2B(x) \cdot H(x) \\ &= 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{2V}{x^2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2V}{x^2} = x^2 + \frac{4V}{x} + \frac{2V}{x} = x^2 + \frac{6V}{x}\,. \end{aligned} \tag{92}$$

Die *Kanten* eines *Quaders* sind immer *positiv*, d.h. $L \geq 0$. Weil in (91) und (92) die *unabhängige Variable* x im *Nenner* steht, muss sogar gelten

$$x = L > 0. \tag{93}$$

Wir suchen somit das *globale Minimum* der *Funktion* $A(x)$ auf dem *offenen Intervall*

$$I := \,]0, \infty[\,. \tag{94}$$

Dabei gehen wir gemäss den folgenden Schritten vor.

S1 **Kritische Stellen:** Die *Ableitung* von $A(x)$ ist

$$A'(x) = 2x^{2-1} + (-1) \cdot \frac{6V}{x^{1+1}} = 2x - \frac{6V}{x^2}\,. \tag{95}$$

Wir bestimmen die *kritischen Stellen* von $A(x)$. Für diese muss gelten

$$0 = A'(x) = 2x - \frac{6V}{x^2} \qquad \Big| + \frac{6V}{x^2} \tag{96}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{6V}{x^2} = 2x \qquad \Big| \cdot \frac{x^2}{2} \tag{97}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{6V}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2} = 3V = x^3 \qquad \Big| \sqrt[3]{\ldots}\,. \tag{98}$$

Daraus erhalten wir genau eine *kritische Stelle* von $A(x)$, nämlich

$$x_1 = \sqrt[3]{3V}\,. \tag{99}$$

Ferner berechnen wir gemäss (89) bis (92) die Werte

$$L_1 = L(x_1) = x_1 = \sqrt[3]{3V} \approx \sqrt[3]{3 \cdot 9.00\,\mathrm{dm}^3} = \sqrt[3]{27\,\mathrm{dm}^3} = 3.00\,\mathrm{dm} = 30.0\,\mathrm{cm} \tag{100}$$

$$B_1 = B(x_1) = \frac{x_1}{2} = \frac{L}{2} \approx \frac{1}{2} \cdot 3.00\,\mathrm{dm} = 1.50\,\mathrm{dm} = 15.0\,\mathrm{cm} \tag{101}$$

$$H_1 = H(x_1) = \frac{2V}{x_1^2} = \frac{2V}{L^2} \approx 2 \cdot \frac{9.00\,\mathrm{dm}^3}{(3.00\,\mathrm{dm})^2} = 2.00\,\mathrm{dm} = 20.0\,\mathrm{cm} \tag{102}$$

$$A_1 = A(x_1) = x_1^2 + \frac{6V}{x_1} \approx (3.00\,\mathrm{dm})^2 + \frac{6 \cdot 9.00\,\mathrm{dm}^3}{3.00\,\mathrm{dm}} = 27.0\,\mathrm{dm}^2. \tag{103}$$

S2 **Rand stellen:** Das *offene Intervall* I hat keine *Randstellen*, es gilt jedoch

$$A(x) = x^2 + \frac{6V}{x} \xrightarrow{x \to 0} \infty \quad \text{und} \quad A(x) = x^2 + \frac{6V}{x} \xrightarrow{x \to \infty} \infty. \tag{104}$$

Die *Oberfläche* der Kiste ist demnach gegen beide *Grenzen* des *Intervalls* I *nach oben unbeschränkt.*

S3 Kandidatenvergl eich: Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	L_k	B_k	H_k	A_k	Typ
1	30.0 cm	30.0 cm	15.0 cm	20.0 cm	27.0 dm^2	*globales Minimum*

(105)

Die *Oberfläche* der Kiste ist also genau dann *minimal*, wenn gilt

$$\underline{\underline{L \approx 30.0\,\text{cm}, \quad B \approx 15.0\,\text{cm} \quad \text{und} \quad H \approx 20.0\,\text{cm}.}} \tag{106}$$

b) Wir betrachten eine *zylinderförmige* Konservendose mit *Radius* R und *Höhe* H. Aus der *Elementargeometrie* wissen wir, dass *Oberfläche* und *Volumen* eines *Kreiszylinders* berechnet werden können durch

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH \quad \text{bzw.} \quad V = \pi R^2 H. \tag{107}$$

Wenn die gesuchte Konservendose genau einen *Liter* fassen soll, dann muss demnach gelten

$$V = \pi R^2 H = 1.00\,\text{l} = 1.00\,\text{dm}^3. \tag{108}$$

Zunächst formulieren wir die Aufgabe als *Optimierungsproblem*. Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} &x := R && (\textit{unabhängige Variable}) \\ &A := 2\pi R^2 + 2\pi RH \equiv \textit{Oberfläche} \text{ der Dose} && (\text{zu } \textit{optimierende Variable}). \end{aligned} \tag{109}$$

Wir drücken nun sämtliche *Variablen* des Problems durch die *unabhängige Variable* x aus. Mit Hilfe von (108) erhalten wir

$$R(x) = x \tag{110}$$

$$H(x) = \frac{V}{\pi R^2(x)} = \frac{V}{\pi x^2} \tag{111}$$

$$A(x) = 2\pi R^2(x) + 2\pi R(x)H(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x\,\frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}\,. \tag{112}$$

Der *Radius* eines *Kreiszylinders* ist immer *positiv*, d.h. $R \geq 0$. Weil in (111) und (112) die *unabhängige Variable* x im *Nenner* steht, muss sogar gelten

$$x = R > 0. \tag{113}$$

Wir suchen somit das *globale Minimum* der *Funktion* $A(x)$ auf dem *offenen Intervall*

$$I := \,]0, \infty[\,. \tag{114}$$

Dabei gehen wir gemäss den folgenden Schritten vor.

S1 Kritische Stellen: Die *Ableitung* von $A(x)$ ist

$$A'(x) = 2\pi \cdot 2x^{2-1} + (-1) \cdot \frac{2V}{x^{1+1}} = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}\,. \tag{115}$$

Wir bestimmen die *kritischen Stellen* von $A(x)$. Für diese muss gelten

$$0 = A'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} \qquad \Big| + \frac{2V}{x^2} \tag{116}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2V}{x^2} = 4\pi x \qquad \Big| \cdot \frac{x^2}{4\pi} \tag{117}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2V}{4\pi} = x^3 \qquad \Big| \sqrt[3]{\ldots} \,. \tag{118}$$

Daraus erhalten wir genau eine *kritische Stelle* von $A(x)$, nämlich

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,. \tag{119}$$

Ferner berechnen wir gemäss (110) bis (112) die Werte

$$R_1 = R\big(x_1\big) = x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx \sqrt[3]{\frac{1.00\,\mathrm{dm}^3}{2\pi}} \approx 0.542\,\mathrm{dm} = 5.42\,\mathrm{cm} \tag{120}$$

$$H_1 = H\big(x_1\big) = \frac{V}{\pi x_1^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \frac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{\pi^3}\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3\,\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2V^3}{\pi^3V^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R \approx 2\cdot 5.42\,\mathrm{cm} \approx 10.8\,\mathrm{cm}. \tag{121}$$

$$A_1 = A\big(x_1\big) = 2\pi x_1^2 + \frac{2V}{x_1} \approx 2\pi\cdot(0.542\,\mathrm{dm})^2 + \frac{2\cdot 1.00\,\mathrm{dm}^3}{0.542\,\mathrm{dm}} \approx 5.54\,\mathrm{dm}^2. \tag{122}$$

S2 **Rand stellen:** Das *offene Intervall I* hat keine *Randstellen*, es gilt jedoch

$$A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} \xrightarrow{x\to 0} \infty \quad \text{und} \quad A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty. \tag{123}$$

Die *Oberfläche* der Konservendose ist demnach gegen beide *Grenzen* des *Intervalls I nach oben unbeschränkt.*

S3 **Kandidatenverglei ch:** Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	R_k	H_k	A_k	Typ
1	5.42 cm	5.42 cm	10.8 cm	5.54 dm^2	*globales Minimum*

(124)

Die *Oberfläche* der Konservendose ist also genau dann *minimal*, wenn gilt

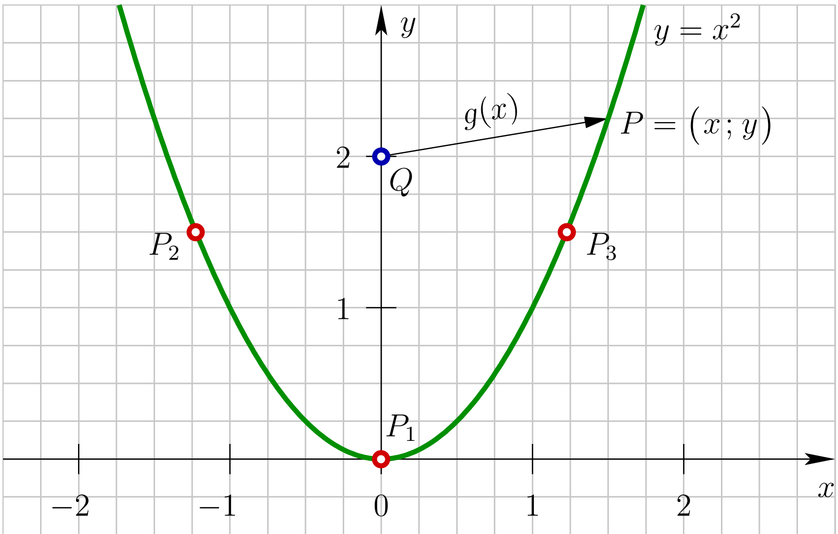
$$\underline{\underline{R \approx 5.42\,\mathrm{cm} \quad \text{und} \quad H \approx 10.8\,\mathrm{cm}.}} \tag{125}$$

7. Kürzeste Verbindung zu einer Parabel

Wir betrachten die *Normalparabel*, d.h. den *Graphen* der *quadratischen Standardfunktion*

$$f(x) := x^2. \tag{126}$$

Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



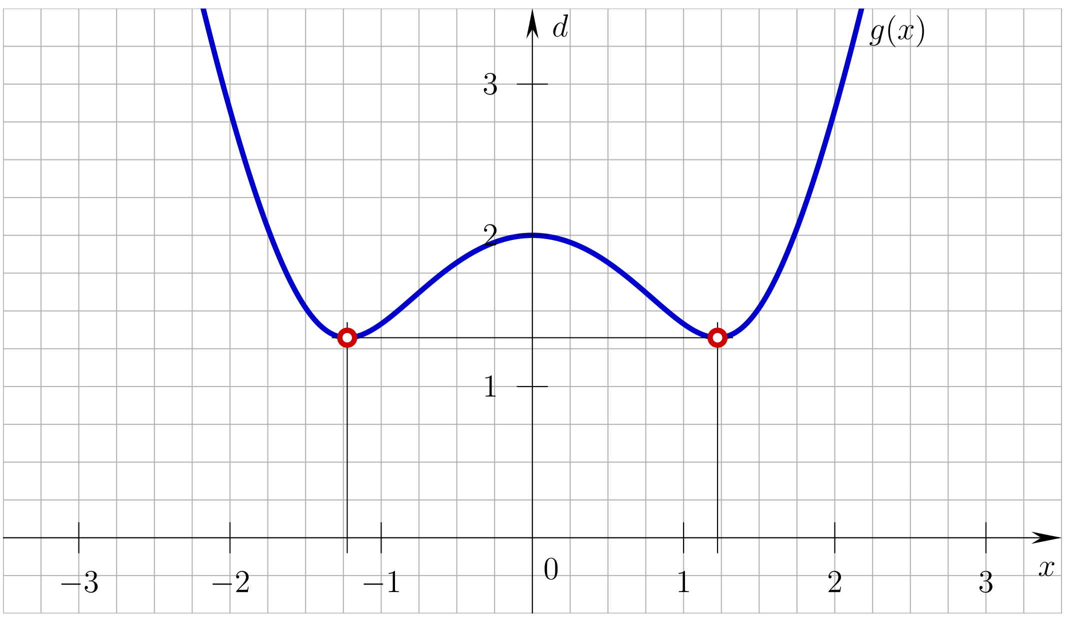
a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ die *Funktion*, welche jedem $x \in \mathbb{R}$ den *Abstand* d zwischen dem *Punkt* $P = \big(x\,; f(x)\big)$ auf der *Parabel* und dem fixen *Punkt* $Q := \big(0\,; 2\big)$ zuordnet. Ferner definieren wir $G(x) := g^2(x)$. Mit Hilfe des PYTHAGORAS-*Satzes* erhalten wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \big(x - q_x\big)^2 + \big(f(x) - q_y\big)^2 = (x-0)^2 + \big(x^2-2\big)^2 = x^2 + \big(x^2\big)^2 - 2\cdot x^2 \cdot 2 + 4 \\ &= x^2 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 \end{aligned} \tag{127}$$

und somit

$$g(x) = \sqrt{G(x)} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}\,. \tag{128}$$

b) Wir skizzieren den *Graphen* von $g(x)$



c) Für die *erste* und *zweite Ableitung* von G erhalten wir

$$\begin{aligned} G'(x) &= 4x^{4-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 6x \\ G''(x) &= 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 = 12x^2 - 6. \end{aligned} \tag{129}$$

Da $G'(x)$ ein *kubisches Polynom* ist, hat G höchstens drei *kritische Stellen*. Die *Gleichung*

$$0 = G'(x) = 4x^3 - 6x = 2x \cdot \left(2x^2 - 3\right) \tag{130}$$

hat offensichtlich die *Lösung*

$$x_1 = 0. \tag{131}$$

Zudem finden wir aus

$$2x^2 - 3 = 0 \qquad \Big| + 3 \tag{132}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2x^2 = 3 \qquad \Big| : 2 \tag{133}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 = \frac{3}{2} \qquad \Big| \pm \sqrt{\ldots} \tag{134}$$

zwei weitere *Lösungen*, nämlich

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{135}$$

Ferner berechnen wir die Werte

$$\begin{aligned} G\left(x_1\right) &= G(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4 \\ G''\left(x_1\right) &= G''(0) = 12 \cdot 0^2 - 6 = 0 - 6 = -6 < 0. \\ G\left(x_2\right) &= G\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4 = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4} = \frac{7}{4} \\ G''\left(x_2\right) &= G''\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 6 = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 18 - 6 = 12 > 0 \\ G\left(x_3\right) &= G\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4 = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4} = \frac{7}{4} \\ G''\left(x_3\right) &= G''\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 6 = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 18 - 6 = 12 > 0. \end{aligned} \tag{136}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$G\left(x_k\right)$	$G'\left(x_k\right)$	$G''\left(x_k\right)$	Typ
1	0	4	0	$-6 < 0$	*lokales Maximum*
2	$-\sqrt{3/2}$	$7/4$	0	$+12 > 0$	*lokales Minimum*
3	$+\sqrt{3/2}$	$7/4$	0	$+12 > 0$	*lokales Minimum*

(137)

Es gibt daher zwei *Punkte* auf der *Parabel*, welche den *minimalen Abstand* zum *Punkt* Q haben. Es sind dies

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{P_2}} &= \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,; f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,; \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \underline{\underline{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,; \frac{3}{2}\right)}} \\
\underline{\underline{P_3}} &= \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\,; f\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) = \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\,; \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \underline{\underline{\left(+\sqrt{\frac{3}{2}}\,; \frac{3}{2}\right)}} .
\end{aligned} \tag{138}$$

Beide *Punkte* haben zum *Punkt* Q jeweils einen *Abstand* von

$$\underline{\underline{d}} = g\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{G\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}} . \tag{139}$$