FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 4

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über Summen und das Summen-Zeichen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Das *Summen-Zeichen* ist ein vergrössertes altgriechisches Sigma.	●	○
b) Mit Hilfe des *Summen-Zeichens* kann jede *Summe* mit vielen *Summanden* effizient geschrieben werden.	○	●
c) Mit Hilfe des *Summen-Zeichens* kann eine geeignete *Summe* mit vielen gleichartigen *Summanden* effizient geschrieben werden.	●	○
d) Mit Hilfe des *Summen-Zeichens* kann eine geeignete *Summe* mit vielen gleichartigen *Summanden* effizient berechnet werden.	○	●
e) Es gilt $\sum_{k=1}^{3} k = 6$.	●	○
f) Es gilt $\sum_{k=7}^{500}\left(3k^2+6k^3\right) = 3\sum_{k=7}^{500}\left(k^2+2k^3\right)$.	●	○

2. Summen ausschreiben und berechnen

Wir berechnen, die folgenden *Summen*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=4}^{10}}} k = 4+5+6+7+8+9+10 = \underline{\underline{49.}} \tag{1}$$

b) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu bearbeiten.

Variante 1: Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sum_{k=4}^{10}}} 2k &= 2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6+2\cdot 7+2\cdot 8+2\cdot 9+2\cdot 10\\ &= 8+10+12+14+16+18+20 = \underline{\underline{98.}}\end{aligned} \tag{2}$$

Variante 2: Durch *Ausklammern* von 2 erhalten wir

$$\underline{\underline{\sum_{k=4}^{10}}} 2k = 2\sum_{k=4}^{10} k = 2\cdot(4+5+6+7+8+9+10) = 2\cdot 49 = \underline{\underline{98.}} \tag{3}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=-2}^{2}}} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = -8 - 1 + 0 + 1 + 8 = \underline{\underline{0.}} \tag{4}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6+4+3}{12} = \underline{\underline{\frac{13}{12}}}. \tag{5}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=0}^{4} 2^k}} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \underline{\underline{31.}} \tag{6}$$

f) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sum_{k=4}^{9} (-1)^k \, k}} &= (-1)^4 \cdot 4 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^6 \cdot 6 + (-1)^7 \cdot 7 + (-1)^8 \cdot 8 + (-1)^9 \cdot 9 \\ &= 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 + 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 9 \\ &= 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = \underline{\underline{-3.}} \end{aligned} \tag{7}$$

3. Summen berechnen mit Python/Sympy

Wir berechnen die *Summen* aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgendne Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren:

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
k,S=sp.symbols('k,S');
# Berechnungen:
S=sp.summation(...,(...,...,...));
# Ausgabe:
dp.display(S);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation(k,(k,4,10));
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = 49}}$.

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation(2*k,(k,4,10));
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = 98}}$.

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation(k**3,(k,-2,
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = 0}}$.

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation(1/k,(k,2,4));
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = \frac{13}{12}}}$.

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation(2**k,(k,0,4));
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = 31}}$.

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
S=sp.summation((-1)**k*k,(k,4,9));]
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{S = -3}}$.

4. Summen mit dem Summen-Zeichen darstellen

Wir schreiben die folgenden *Summen* mit Hilfe des *Summen-Zeichens.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{4+5+6+7+8+9+10+11 = \sum_{k=4}^{11} k.}} \tag{8}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{0+2+4+6+8+10 = \sum_{k=0}^{5} 2k.}} \tag{9}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{1+3+5+7+9+11 = \sum_{k=0}^{5}(2k+1) = \sum_{k=1}^{6}(2k-1).}} \tag{10}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{1-3+5-7+9-11 = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k(2k+1).}} \tag{11}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}=\sum_{k=3}^{7}\frac{1}{2k}}}\,. \tag{12}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}=\sum_{k=5}^{9}\frac{1}{k^2}}}\,. \tag{13}$$

5. Aussagen über eine Summe

Wir betrachten die *Summe*

$$S=\sum_{k=a}^{N}\big(2k^2-4k\big). \tag{14}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für $a=3$ und $N=6$ besteht die *Summe* aus sechs gleichartigen *Summanden.*	○	●
b) Sinnvollerweise könnte ein *Faktor* 2 vor das *Summen-Zeichen* gezogen werden.	●	○
c) Die *Summe* S ist eine *ungerade Zahl.*	○	●
d) Für $N=-a$ verschwindet die *Summe* S.	○	●
e) Die *Summe* S besteht aus $2\cdot(N-k)$ *Summanden.*	○	●
f) Für $a=3$ und $N=6$ gilt $S=100$.	●	○

6. Summen ausschreiben und berechnen

Wir berechnen, falls möglich, die folgenden *Summen.*

a) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu bearbeiten.

Variante 1: Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sum_{k=-3}^{1}\big(k^2+1\big)}} &= \big((-3)^2+1\big)+\big((-2)^2+1\big)+\big((-1)^2+1\big)+\big(0^2+1\big)+\big(1^2+1\big)\\ &= 9+1+4+1+1+1+0+1+1+1=\underline{\underline{20.}}\end{aligned} \tag{15}$$

Variante 2: Durch Aufteilen der *Summanden* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sum_{k=-3}^{1}\big(k^2+1\big)}} &= \sum_{k=-3}^{1}k^2+\sum_{k=-3}^{1}1\\ &= (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+(1-(-3)+1)\cdot 1\\ &= 9+4+1+0+1+5=\underline{\underline{20.}}\end{aligned} \tag{16}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=-3}^{1} k^2 + 1}} = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 1 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 = \underline{\underline{16.}} \tag{17}$$

c) Wir erhalten

$$\sum_{k=-3}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{-3} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ? \tag{18}$$

Diese *Summe* enthält formell eine *Division* durch 0 und ist daher nicht definiert.

d) Durch *Ausklammern* von $1/l$ aus der *inneren Summe* erhalten wir

$$\underline{\underline{\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=0}^{3} \frac{k}{l}}} = \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{3} k = \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{l} \cdot (0+1+2+3) = \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{l} \cdot 6 = \frac{1}{1} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6$$

$$= 6 + 3 + 2 = \underline{\underline{11.}} \tag{19}$$

7. Summen mit dem Summen-Zeichen darstellen

Wir schreiben die folgenden *Summen* mit Hilfe des *Summen-Zeichens.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \underline{\underline{\sum_{k=2}^{9} \frac{(-1)^k}{k}}}. \tag{20}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{S}} = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \sum_{l=1}^{2} (2k + l).}} \tag{21}$$

8. Geometrische Summen-Formel

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Eine *geometrische Summe* ist eine *Summe* der Form

$$G_{(m;n)}(x) := \sum_{k=m}^{n} x^k. \tag{22}$$

a) Wir schreiben die folgenden, *geometrischen Summen* ohne *Summen-Zeichen* aus.

i) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(1;4)}(3)}} = \sum_{k=1}^{4} 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3 + 9 + 27 + 81 = \underline{\underline{120.}} \tag{23}$$

ii) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(2;5)}(2)}} = \sum_{k=2}^{5} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 4 + 8 + 16 + 32 = \underline{\underline{60.}} \tag{24}$$

iii) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(12;17)}(7)}} = \sum_{k=12}^{17} 7^k = \underline{\underline{7^{12} + 7^{13} + 7^{14} + 7^{15} + 7^{16} + 7^{17}.}} \tag{25}$$

iv) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(12;17)}(x)}} = \sum_{k=12}^{17} x^k = \underline{\underline{x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17}.}} \tag{26}$$

b) Wir berechnen die folgenden *Produkte*, indem wir jeweils die *geometrische Summe* ohne *Summen-Zeichen* ausschreiben und dann *ausmultiplizieren*

i) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{(1-x) \cdot G_{(5;6)}(x)}} &= (1-x) \cdot \left(x^5 + x^6\right) = 1 \cdot x^5 - x \cdot x^5 + 1 \cdot x^6 - x \cdot x^6 \\ &= x^5 - x^6 + x^6 - x^7 \\ &= \underline{\underline{x^5 - x^7.}} \end{aligned} \tag{27}$$

ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{(1-x) \cdot G_{(5;8)}(x)}} &= (1-x) \cdot \left(x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right) \\ &= x^5 - x^6 + x^6 - x^7 + x^7 - x^8 + x^8 - x^9 \\ &= \underline{\underline{x^5 - x^9.}} \end{aligned} \tag{28}$$

iii) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{(1-x) \cdot G_{(2;6)}(x)}} &= (1-x) \cdot \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \\ &= x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + x^4 - x^5 + x^5 - x^6 + x^6 - x^7 \\ &= \underline{\underline{x^2 - x^7.}} \end{aligned} \tag{29}$$

iv) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{(1-x) \cdot G_{(2;8)}(x)}} &= (1-x) \cdot \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right) \\ &= x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + x^4 - x^5 + x^5 - x^6 + x^6 - x^7 + x^7 \\ &\quad - x^8 + x^8 - x^9 \\ &= \underline{\underline{x^2 - x^9.}} \end{aligned} \tag{30}$$

v) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{(1-x)\cdot G_{(1;9)}(x)}} &= (1-x)\cdot\big(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9\big)\\ &= x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4+x^4-x^5+x^5-x^6+x^6\\ &\quad -x^7+x^7-x^8+x^8-x^9+x^9-x^{10}\\ &= \underline{\underline{x-x^{10}.}}\end{aligned} \tag{31}$$

vi) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{(1-x)\cdot G_{(13;16)}(x)}} &= (1-x)\cdot\big(x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}\big)\\ &= x^{13}-x^{14}+x^{14}-x^{15}+x^{15}-x^{16}+x^{16}-x^{17}\\ &= \underline{\underline{x^{13}-x^{17}.}}\end{aligned} \tag{32}$$

c) Bei der *Multiplikation* einer *geometrischen Summe* $G_{(m;n)}(x)$ mit dem *Faktor* $(1-x)$ in Teilaufgabe b) beobachten wir, dass nur gerade die Terme x^m und $-x^{n+1}$ übrig bleiben, während alle anderen Terme sich gegenseitig kompensieren. Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{(1-x)\cdot G_{(m;n)}(x)}} &= (1-x)\cdot\big(x^m+x^{m+1}+\ldots+x^{n-1}+x^n\big)\\ &= x^m-x^{m+1}+x^{m+1}-\ldots-x^{n-1}+x^{n-1}-x^n+x^n-x^{n+1}\\ &= \underline{\underline{x^m-x^{n+1}.}}\end{aligned} \tag{33}$$

d) Durch Auflösen der Formel (33) nach $G_{(m;n)}(x)$ können wir die *geometrische Summen-Formel* herleiten. Für $(1-x)\neq 0$ gilt

$$(1-x)\cdot G_{(m;n)}(x) = x^m - x^{n+1} \qquad \big|\ :(1-x). \tag{34}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{G_{(m;n)}(x) = \frac{x^m-x^{n+1}}{1-x}}}\,. \tag{35}$$

e) Wir wenden die *geometrische Summen-Formel* aus (35) an, um die folgenden *geometrischen Summen* zu berechnen.

i) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(0;5)}(3)}} = \frac{3^0-3^{5+1}}{1-3} = \frac{1-729}{-2} = \frac{728}{2} = \underline{\underline{364.}} \tag{36}$$

ii) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G_{(1;2'539)}(-1)}} = \frac{(-1)^1-(-1)^{2'539+1}}{1-(-1)} = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1.}} \tag{37}$$

iii) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=0}^{10}}}2^k = G_{(0;10)}(2) = \frac{2^0-2^{10+1}}{1-2} = \frac{1-2'048}{-1} = 2'048-1 = \underline{\underline{2'047.}} \tag{38}$$

iv) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sum_{k=2}^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^k}} = G_{(2;11)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{12}}}{\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{12}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}} = \frac{2^{10}}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}} = \frac{2^{10}-1}{2^{11}} = \frac{1'024-1}{2'048} = \underline{\underline{\frac{1'023}{2'048}}}. \tag{39}$$

f) Wir betrachten *geometrische Summen* für die Fälle $x = 0$ und $x = 1$.

Fall 1: $x = 0$. Wird in diesem Fall $m = 0$ gewählt, dann kann die Formel aus (22) nicht angewendet werden, weil darin der nicht definierte Term 0^0 auftritt. Formal erhalten wir nämlich

$$G_{(0;n)}(0) := \underbrace{0^0}_{=?} + 0^1 + \ldots + 0^n = ? \tag{40}$$

Fall 2: $x = 1$. In diesem Fall kann die *geometrische Summen-Formel* aus (35) nicht angewendet werden, weil der *Nenner* $(1 - x)$ nicht verschwinden darf.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wurde bei der Definition der *geometrischen Summe* in (22) sinnvollerweise die Bedingung $x \notin \{0, 1\}$ vorausgesetzt.

9. Aussagen über geometrische Summen

Es seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $m, n \in \mathbb{N}^+$ mit $m < n$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) In jedem Fall gilt $G_{(0;n)}(x+y) \in \mathbb{R}$.	○	●
b) In jedem Fall gilt $G_{(10;30)}(x) = G_{(10;20)}(x) + G_{(20;30)}(x)$.	○	●
c) In jedem Fall gilt $G_{(m;n)}(x+y) = G_{(m;n)}(x) + G_{(m;n)}(y)$.	○	●
d) In jedem Fall gilt $G_{(m;n)}(y) < G_{(m;n+1)}(y)$.	○	●
e) In jedem Fall gilt $G_{(m+7;n+7)}(x) = x^7 \cdot G_{(m;n)}(x)$.	●	○
f) In jedem Fall gilt $G_{(m;n)}\big(x^2\big) = G_{(2m;2n)}(x)$.	○	●

10. Geometrische Summen berechnen

Wir berechnen die folgenden *geometrischen Summen.*

a) Es gilt

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=0}^{12} 2^k = G_{(0;12)}(2) = \frac{2^0 - 2^{12+1}}{1-2} = \frac{1-8'192}{1-2} = \frac{-8'191}{-1} = \underline{\underline{8'191.}} \tag{41}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{B}} = \sum_{k=1}^{10} 2\cdot 3^k = 2\sum_{k=1}^{10} 3^k = 2\,G_{(1;10)}(3) = 2\cdot\frac{3^1 - 3^{10+1}}{1-3} = 2\cdot\frac{3-177'147}{1-3}$$

$$= 2\cdot\frac{-177'144}{-2} = \underline{\underline{177'144.}} \tag{42}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{k=0}^{9} \sqrt{3^k} = \sum_{k=0}^{9} \left(\sqrt{3}\right)^k = G_{(0;9)}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^0 - \left(\sqrt{3}\right)^{9+1}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{10}}{1-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{2\cdot 5}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-3^5}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-243}{1-\sqrt{3}} = \frac{242}{\sqrt{3}-1} \approx \underline{\underline{331.}} \tag{43}$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{k=0}^{8} \frac{4}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{8} \frac{4}{2\cdot 2^k} = \sum_{k=0}^{8} \frac{2}{2^k} = 2\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{2^k} = 2\sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\,G_{(0;8)}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{8+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot \frac{1-\frac{1}{2^9}}{\frac{1}{2}} = 2\cdot 2\cdot \left(1-\frac{1}{2^9}\right) = \frac{2^{11}}{2^9} - \frac{2^2}{2^9} = \frac{2^9}{2^7} - \frac{1}{2^7}$$
$$= \frac{512-1}{128} = \frac{511}{128} \approx \underline{\underline{3.99\,.}} \tag{44}$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{E}} = \sum_{k=2}^{5} \frac{10\sqrt{3^{4k}}}{5^{k+1}} = \sum_{k=2}^{5} \frac{10\cdot 3^{\frac{4k}{2}}}{5\cdot 5^k} = \sum_{k=2}^{5} 2\cdot \frac{3^{2k}}{5^k} = 2\sum_{k=2}^{5} \frac{9^k}{5^k} = 2\sum_{k=2}^{5} \left(\frac{9}{5}\right)^k$$
$$= 2\,G_{(2;5)}\left(\frac{9}{5}\right) = 2\cdot \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^{5+1}}{1-\frac{9}{5}} = 2\cdot \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^6}{-\frac{4}{5}} = \frac{5\cdot 2}{4}\cdot \left(\left(\frac{9}{5}\right)^6 - \left(\frac{9}{5}\right)^2\right)$$
$$= \frac{5}{2}\cdot \left(\frac{9^6}{5^6} - \frac{9^2}{5^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{9^6}{5^5} - \frac{9^2}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot \left(\frac{9^6}{5^5} - \frac{5^4\cdot 9^2}{5^5}\right) = \frac{531'441 - 625\cdot 81}{2\cdot 3'125}$$
$$= \frac{480'816}{2\cdot 3'125} = \frac{240'408}{3'125} \approx \underline{\underline{76.9\,.}} \tag{45}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{k=3}^{7} \left(1+x^{2k}\right) = \sum_{k=3}^{7} 1 + \sum_{k=3}^{7} \left(x^2\right)^k = (7-3+1) + G_{(3;7)}\left(x^2\right)$$
$$= 5 + \frac{\left(x^2\right)^3 - \left(x^2\right)^{7+1}}{1-x^2} = 5 + \frac{x^{2\cdot 3} - x^{2\cdot 8}}{1-x^2} = \underline{\underline{5 + \frac{x^6 - x^{16}}{1-x^2}}}\,. \tag{46}$$

11. Lohnerhöhungen

Ein Einstiegslohn von monatlich $L_0 := 4'000\,\text{CHF}$ werde jährlich um $i := 2\% = 0.02$ erhöht. Dies ergibt einen jährlichen *Lohn-Faktor* von

$$a = 1 + i = 1.02. \tag{47}$$

a) Nach 10 Jahren beträgt der Monatslohn

$$\underline{\underline{L_{10}}} = a^{10}\cdot L_0 = 1.02^{10}\cdot 4'000\,\text{CHF} \approx \underline{\underline{4'875.98\,\text{CHF.}}} \tag{48}$$

b) Während dieser 10 Jahre wurde insgesamt eine *Lohnsumme* ausbezahlt von

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}} &= \sum_{k=0}^{9} 12 \cdot L_k = \sum_{k=0}^{9} 12 \cdot a^k \cdot L_0 = 12 \cdot L_0 \sum_{k=0}^{9} a^k = 12 \cdot L_0 \cdot G_{(0;9)}(a) = 12 \cdot L_0 \cdot \frac{a^0 - a^{9+1}}{1-a} \\ &= 12 \cdot L_0 \cdot \frac{1-a^{10}}{-i} = 12 \cdot \frac{a^{10}-1}{i} \cdot L_0 = 12 \cdot \frac{1.02^{10}-1}{0.02} \cdot 4'000\,\mathrm{CHF} \\ &\approx \underline{\underline{525'586.61\,\mathrm{CHF}.}}\end{aligned} \tag{49}$$

12. Anwendung der geometrischen Summen-Formel

Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Wir berechnen die folgenden Terme mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel.*

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{G}} &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64} = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k = G_{(0;3)}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{1-\frac{(\sqrt{3})^4}{4^4}}{\frac{4-\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{4-\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{(\sqrt{3})^{2\cdot 2}}{4^4}\right) = \frac{1}{4-\sqrt{3}} \cdot \left(4 - \frac{3^2}{4^3}\right) \\ &= \frac{1}{4-\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{4^4}{4^3} - \frac{3^2}{4^3}\right) = \frac{1}{4-\sqrt{3}} \cdot \frac{256-9}{64} = \frac{1}{4-\sqrt{3}} \cdot \frac{247}{64} = \frac{247}{64 \cdot (4-\sqrt{3})} \\ &\approx \underline{\underline{1.70\,.}}\end{aligned} \tag{50}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{H}} &= \frac{x^{1'306} - x^{1'310}}{(1+x)\cdot(1-x)} = \frac{x^{1'306} - x^{1'310}}{1-x^2} = \frac{x^{2\cdot 653} - x^{2\cdot 655}}{1-x^2} = \frac{(x^2)^{653} - (x^2)^{654+1}}{1-x^2} \\ &= G_{(653;654)}(x^2) = \sum_{k=653}^{654} x^{2k} = x^{2\cdot 653} + x^{2\cdot 654} = \underline{\underline{x^{1'306} + x^{1'308}.}}\end{aligned} \tag{51}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \sum_{l=2}^{8} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k} = \sum_{l=2}^{8} \sum_{k=0}^{l} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{l=2}^{8} G_{(0;l)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{l=2}^{8} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{l=2}^{8} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}}{\frac{1}{2}} = 2\sum_{l=2}^{8} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}\right) = 2\sum_{l=2}^{8} 1 - 2\sum_{l=2}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \\ &= 2\cdot(8-2+1) - 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^l = 14 - G_{(2;8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 14 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{8+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 14 - \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^9}}{\frac{1}{2}} = 14 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^8} = 13.5 + \frac{1}{256} \approx \underline{\underline{13.5\,.}}\end{aligned} \tag{52}$$

13. Martingale Strategie

Als *Martingale* bezeichnet man folgende Strategie, um beim Roulette zu gewinnen.

§1 Es wird nur auf einfache Chancen gesetzt (z.B. Rot und Schwarz), das heisst, der gesetzte Betrag geht bei jedem Spiel entweder als gesamtes verloren oder wird im Gewinnfall durch die Bank verdoppelt.

§2 Nach jedem Verlust wird der Einsatz verdoppelt.

a) Der erste Einsatz betrage $E_0 := 1\,\text{CHF}$ und jeder weitere Einsatz sei die Verdoppelung des jeweils unmittelbar Vorangegangenen, das heisst

$$E_k = 2 \cdot E_{k-1} = 2 \cdot 2 \cdot E_{k-2} = \ldots = 2^k \cdot E_{k-k} = 2^k \cdot E_0. \tag{53}$$

Der Gesamtverlust nach acht verlorenen Spielen beträgt demnach

$$\begin{aligned}\underline{\underline{V_7}} &= \sum_{k=0}^{7} E_k = \sum_{k=0}^{7} 2^k \cdot E_0 = E_0 \sum_{k=0}^{7} 2^k = E_0 \cdot G_{(0;7)}(2) = E_0 \cdot \frac{2^0 - 2^8}{1-2} = E_0 \cdot \frac{1-256}{-1} \\ &= 1\,\text{CHF} \cdot 255 = \underline{\underline{255\,\text{CHF}.}}\end{aligned} \tag{54}$$

b) Wenn das neunte Spiel nach acht verlorenen Spielen gewonnen wird und der erste Einsatz einen Franken betrug, dann erhält der Spieler einen Gesamtgewinn von

$$\underline{\underline{G}} = E_8 - V_7 = 2^8 \cdot E_0 - V_7 = 256 \cdot 1\,\text{CHF} - 255\,\text{CHF} = \underline{\underline{1\,\text{CHF}.}} \tag{55}$$

c) Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Der Gesamtverlust nach n verlorenen Spielen beträgt demnach

$$\begin{aligned}V_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} E_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot E_0 = E_0 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = E_0 \cdot G_{(0;n-1)}(2) = E_0 \cdot \frac{2^0 - 2^n}{1-2} = E_0 \cdot \frac{1-2^n}{-1} \\ &= \big(2^n - 1\big) \cdot E_0.\end{aligned} \tag{56}$$

Wird das Spiel $n+1$ gewonnen, dann beträgt der Gesamtgewinn

$$\underline{\underline{G}} = E_n - V_{n-1} = 2^n \cdot E_0 - \big(2^n - 1\big) \cdot E_0 = 2^n \cdot E_0 - 2^n \cdot E_0 + E_0 = \underline{\underline{E_0 > 0.}} \tag{57}$$

Unabhängig von der Höhe des ersten Einsatzes gewinnt der Spieler nach n verlorenen Spielen und einem gewonnenen Spiel $n+1$ insgesamt gerade den Betrag E_0.

14. Aussagen über eine spezielle Summe

Es sei $0 < z < 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die *Summe*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(1+z)^k}. \tag{58}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $S_0 < 0$.	●	○
b) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $S_n = -G_{(0;n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.	●	○
c) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $S_{n+1} > S_n$.	○	●
d) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $S_n < 0$.	●	○
e) Ist $z \in \mathbb{Q}$, dann folgt $S_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.	●	○
f) Für sehr grosse $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $S_n \approx -\dfrac{1+z}{2+z}$.	●	○

15. Geometrische Reihen

Wir berechnen, falls möglich, jeweils den *Grenzwert* der *geometrischen Reihe*.

a) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2.}} \tag{59}$$

b) Wir zeigen zwei Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{B}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1.}} \tag{60}$$

Variante 2: Mit Hilfe des Resultates aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$\underline{\underline{B}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = \underline{\underline{1.}} \tag{61}$$

c) Mit Hilfe des Resultates aus Teilaufgabe b) erhalten wir

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \tag{62}$$

d) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2\lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{1-0}{\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{3}{2} = \underline{\underline{3.}} \tag{63}$$

e) Wir zeigen zwei Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2\lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \underline{\underline{1.}} \tag{64}$$

Variante 2: Mit Hilfe des Resultates aus Teilaufgabe d) erhalten wir

$$\underline{\underline{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} - \frac{2}{3^0} = 3 - \frac{2}{1} = 3 - 2 = \underline{\underline{1.}} \tag{65}$$

f) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}\left(\frac{2}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1-0}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3.}} \tag{66}$$

16. Geometrische Reihen

Wir berechnen, falls möglich, jeweils den *Grenzwert* der *geometrischen Reihe.*

a) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{G}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\,. \tag{67}$$

Die *geometrische Reihe* ist offensichtlich *divergent*, denn $3/2 > 1$ und für $n \to \infty$ gilt somit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \to \infty. \tag{68}$$

b) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}\,. \tag{69}$$

Die *geometrische Reihe* ist offensichtlich *divergent*, weil die *Folge* $(-1)^{n+1}$ für $n \to \infty$ *divergiert*, indem sie zwischen den Werten -1 und 1 hin und her springt.

c) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}-0}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}\,. \tag{70}$$

d) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{J}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{3k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{3k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3^3)^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{27}\right)^k = \lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}\left(\frac{1}{27}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{27}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{27^{n+1}}}{\frac{26}{27}} = \frac{1-0}{\frac{26}{27}} = \underline{\underline{\frac{27}{26} \approx 1.039\,.}} \tag{71}$$

e) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{K}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^k}$$

$$= \sqrt{3} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \sqrt{3} \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} \approx 4.182}}\,. \tag{72}$$

f) Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{L}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{3^k}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{3^k}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{3^k}}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{3}\right)^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} G_{(0;n)}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{3}}\,. \tag{73}$$

Die *geometrische Reihe* ist offensichtlich *divergent*, denn $\sqrt{3} > 1$ und für $n \to \infty$ gilt somit

$$\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} \to \infty. \tag{74}$$

17. Aussagen über geometrische Reihen

Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Wir betrachten die allgemeine *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=m}^{\infty} x^k. \tag{75}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für $x > 1$ *divergiert* die *geometrische Reihe* in jedem Fall.	●	○
b) Für $x < 1$ *konvergiert* die *geometrische Reihe* in jedem Fall.	○	●
c) Für $x = 2$ *konvergiert* die *geometrische Reihe* gegen ∞.	○	●
d) Für $x = 0.5$ und $m = 0$ *konvergiert* die *geometrische Reihe* gegen 2.	●	○
e) Um zu beurteilen, ob die *geometrische Reihe konvergiert*, muss man sowohl x als auch m kennen.	○	●
f) Um den *Grenzwert* der *geometrischen Reihe* (falls ein solcher existiert) berechnen zu können, muss man sowohl x als auch m kennen.	●	○

18. Springender Basketball

Ein Basketball fällt aus einer Höhe von 20 m frei auf den Boden und springt immer wieder von diesem auf. Bei jedem Aufspringen erreicht er 4/9 der Höhe aus welcher er unmittelbar davor heruntergefallen ist. Die *Fallhöhen* bilden somit eine *geometrische Folge*, *rekursiv* definiert durch

$$H_0 := 20\,\text{m} \quad \text{und} \quad H_{k+1} := \frac{4}{9}\, H_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{76}$$

In expliziter Form erhalten wir daraus

$$H_k = \left(\frac{4}{9}\right)^k H_0 \approx \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot 20\,\mathrm{m} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{77}$$

a) Wir suchen die Distanz Δs, welche der Basketball (nach oben und unten zusammengezählt) insgesamt zurücklegt, bevor er am Boden liegen bleibt. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass der Basketball über die Anfangshöhe H_0 nur hinunterfällt, während er über alle anderen Höhen H_k für $k \in \mathbb{N}^+$ vor dem Hinunterfallen auch aufsteigen muss. Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Delta s}} &= H_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2H_k = H_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2H_k = H_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot H_0 \\
&= H_0 + 2H_0 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k = H_0 + 2H_0 \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{4}{9}\right) = H_0 + 2H_0 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{9} - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} \\
&= H_0 + 2H_0 \cdot \frac{\frac{4}{9} - 0}{1 - \frac{4}{9}} = H_0 + 2H_0 \cdot \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = H_0 + 2H_0 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = H_0 \left(1 + \frac{8}{5}\right) \\
&= \frac{13}{5} H_0 \approx \frac{13}{5} \cdot 20\,\mathrm{m} = \underline{\underline{52\,\mathrm{m.}}}
\end{aligned} \tag{78}$$

b) Es sei $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ die *Fallbeschleunigung*. Gemäss den klassischen *Fallgesetzen* aus der Physik sind *Fallhöhe* H und *Fallzeit* T verknüpft durch die Beziehung

$$H = \frac{g}{2} T^2 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{g} \tag{79}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2}{g} H = T^2 \qquad \big| \sqrt{\ldots}\,. \tag{80}$$

Daraus erhalten wir

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{H}\,. \tag{81}$$

Durch Einsetzen der *Folgeglieder* aus (77) in (79) erhalten wir die ebenfalls *geometrische Folge* der *Fallzeiten*, welche explizit gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
T_k &= \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{H_k} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^k H_0} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^k}\,\sqrt{H_0} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^k \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{H_0} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^k \sqrt{\frac{2H_0}{g}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k T_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Wir suchen die Dauer Δt vom Zeitpunkt des Fallenlassens bis der Basketball auf dem Boden liegen bleibt. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass der Basketball für den ersten Fall über die Höhe H_0 die Zeit T_0 benötigt, während die Dauer des Aufstieges und Falles über alle anderen Höhen H_k für $k \in \mathbb{N}$ jeweils $2T_k$ beträgt. Mit Hilfe der *geometrischen Summen-Formel* erhalten wir daher

$$\underline{\underline{\Delta t}} = T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2T_k = T_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2T_k = T_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k T_0$$

$$
\begin{aligned}
&= T_0 + 2T_0 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = T_0 + 2T_0 \lim_{n\to\infty} G_{(1;n)}\left(\frac{2}{3}\right) = T_0 + 2T_0 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \\
&= T_0 + 2T_0 \cdot \frac{\frac{2}{3} - 0}{1-\frac{2}{3}} = T_0 + 2T_0 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = T_0 + 2T_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = T_0\,(1+4) = 5\,T_0 \\
&= 5\sqrt{\frac{2H_0}{g}} \approx 5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 5 \cdot \sqrt{4.0\,\mathrm{s}^2} = 5 \cdot 2.0\,\mathrm{s} = \underline{\underline{10\,\mathrm{s.}}} \qquad (83)
\end{aligned}
$$

Der Basketball springt also in der endlichen Zeit Δt unendlich viele Male vom Boden auf und fällt wieder hinunter!