FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 5

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Sinus-, Cosinus-, Tangens-, Cotangens-, Arcussinus-, Arcuscosins-, Arcustangens- und Arcuscotangensfunktion und deren Eigenschaften.
- Sie kennen die ausgezeichneten Funktionswerte der trigonometrischen und Arcusfunktionen und können diese anwenden.
- Sie können die Graphen der trigonometrischen und Arcusfunktionen skizzieren.

1. Aussagen über trigonometrische Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sind $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ definiert.	X	
b) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ sind $\tan\varphi$ und $\cot\varphi$ definiert.		X
c) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ hat der Term $sin^2\varphi + cos^2\varphi$ denselben Wert.	X	
d) Es gibt ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $\cos\varphi = 3$.		X
e) Es gibt ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $\cot\varphi = 3$.	X	

2. Graphen der trigonometrischen Funktionen

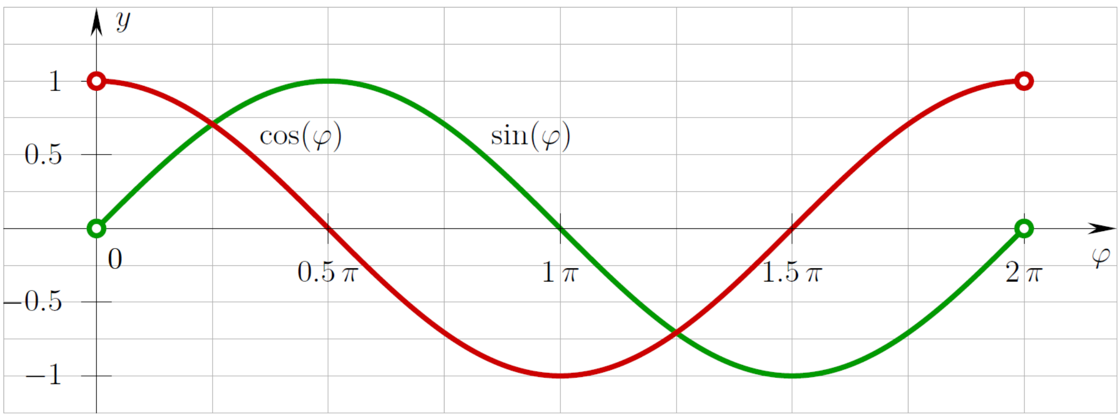
Skizzieren Sie die Graphen der folgenden trigonometrischen Funktionen auf der Teilmenge des Intervalls $[0,2\pi]$, auf der die Funktionen definiert sind.

a) $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$

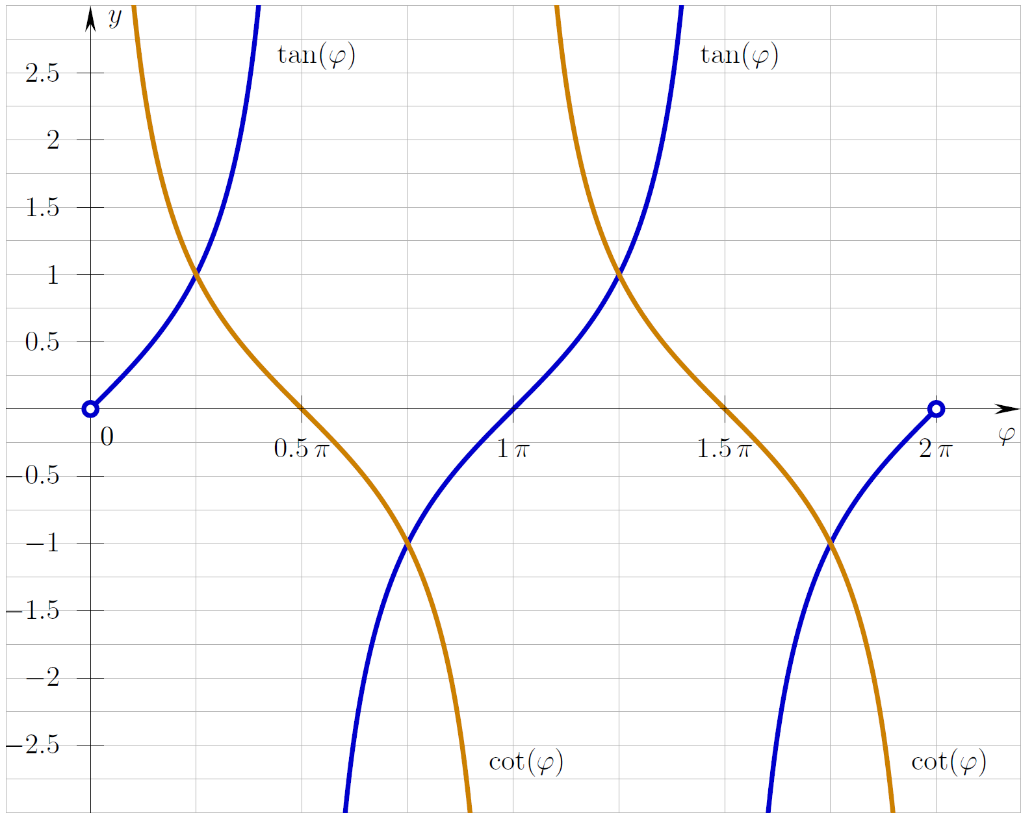
b) $\tan\varphi$ und $\cot\varphi$

c) $2 \cdot \cos(2\varphi - \pi)$

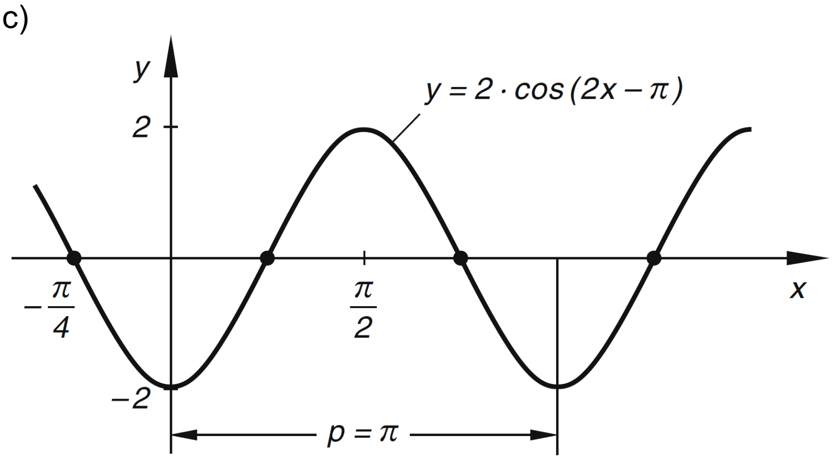
a)



b)



c)



3. Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen

Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die Funktionswerte.

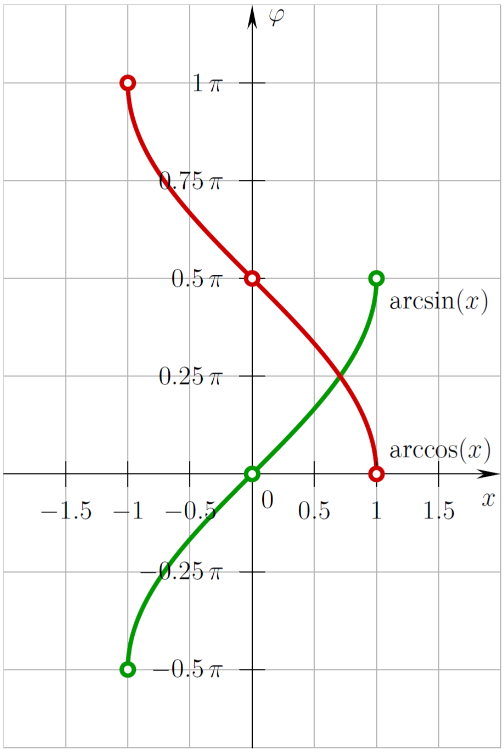
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\varphi$	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-1	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-1/2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	--	0
$\cot\varphi$	--	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	--	0	--

4. Graphen der Arcusfunktionen

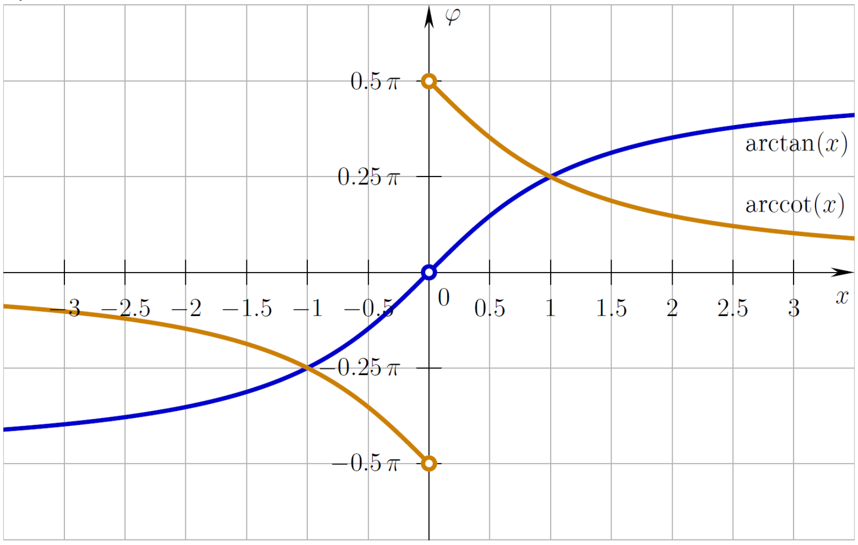
Skizzieren Sie die Graphen der folgenden trigonometrischen Funktionen auf der Teilmenge des Intervalls [0,2π], auf der die Funktionen definiert sind.

a) $\arcsin x$ und $\arccos x$ b) $\arctan x$ und $\operatorname{arccot} x$

a)



b)



5. Spezielle Werte der Arcusfunktionen

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin \varphi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos \varphi$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

6. Aussagen über trigonometrische Funktionen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Die Funktion $sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ ist injektiv.		X
b) Die Funktion $cos: [0, \pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv.	X	
c) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$.	X	
d) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$.	X	
e) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\tan(\varphi + \pi) = \tan\varphi$.		X
f) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}\backslash(\pi \cdot \mathbb{Z})$ gilt $\cot(\varphi + \pi) = \cot\varphi$.	X	

7.
Bestimmen Sie für die folgenden periodischen Funktionen Amplitude A, Periode p und Phasenverschiebung x_0:

a) $y = 4 \cdot \sin(3x - \frac{\pi}{6})$
b) $y = 5 \cdot \cos(2x + 4{,}2)$
c) $y = 10 \cdot \sin(\pi x - 3\pi)$

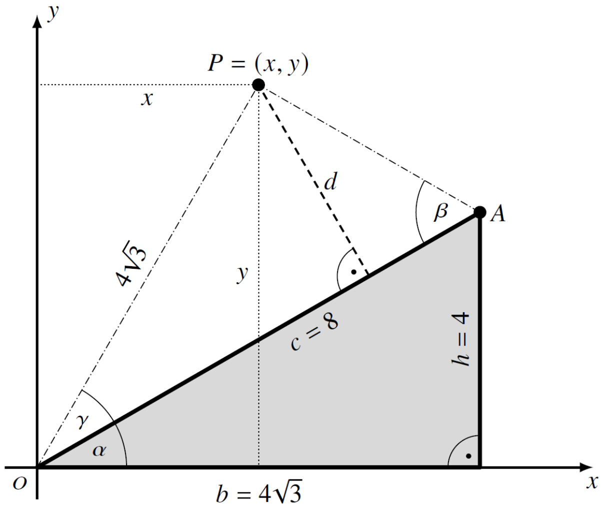
$y = A \cdot \sin(bx + c)$ bzw. $y = A \cdot \cos(bx + c)$ mit $A > 0$ und $p = 2\pi/b$
Phasenverschiebung: $bx_0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -c/b$

a)
$A = 2; \quad p = 2\pi/3; \quad x_0 = \pi/18$

b)
$A = 5; \quad p = \pi; \quad x_0 = -2{,}1$

c)
$A = 10; \quad p = 2; \quad x_0 = 3$

8.
Über dem grauen rechtwinkligen Dreieck wird ein Punkt P konstruiert. Gegeben sind die Winkel γ = 30° und β = 60° sowie die Hypotenuse des Dreiecks c = 8 cm und die Höhe h = 4 cm. Welche Koordinaten hat der Punkt P und welchen Abstand d hat er vom Dreieck?



Winkel α bei 0: $\sin\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$

Ankathete $b = c \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \cos 30° = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Das Dreieck OPA hat bei P einen rechten Winkel, da $\gamma+\beta$ = 90°. Dies bedeutet, dass das Dreieck OPA kongruent zum grauen Dreieck ist, die Strecke OP hat die Länge $4\sqrt{3}$. Die Strecke OP schliesst mit der x-Achse den Winkel $\alpha+\gamma$ = 60° ein. Demnach hat P die Koordinaten

$$x = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60° = 2\sqrt{3}$$
$$y = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 6$$

Der Abstand d ist dann die Gegenkathete im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse OP:

$$\frac{d}{4\sqrt{3}} = \sin\gamma = \sin 30° = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d = 2\sqrt{3}$$

9. Werte im rechtwinkligen Dreieck

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kanten a, b und der Hypotenuse c. Der Winkel gegenüber von a heisst α und der Winkel gegenüber b heisst β. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

a	b	c	α	β
2	$2\sqrt{3}$	4	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
3	3	$3\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
2,5	$\frac{5}{2}\sqrt{3}$	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
3	4	5	0,6435	0,9273