FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 10 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Hesse-Matrix, Richtungsableitung, lokale/globale Extrema, Sattelpunkt, Extrema unter Nebenbedingungen, Lagrange´scher Multiplikator und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Hesse-Matrix von Skalarfeldern bestimmen.
- Sie können die Richtungsableitung berechnen.
- Sie können lokale Extrema und Sattelpunkte bestimmen.
- Sie können Extrema einer Funktion unter Nebenbedingungen bestimmen.

1. Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen

Berechnen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix der gegebenen Funktion.

a) $f(x,y) = 3x + 5y$ b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 3y^2$ c) $f(x,y) = x^2y^2 + 1$
d) $f(x,y) = 2^{3x-5y}$ e) $V(r,h) = \pi r^2 h$ f) $\psi(t,x) = A\sin(\omega t - kx)$

a)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 0 \\ 0 + 5\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} + 2\cdot 1\cdot y - 0 \\ 0 + 2x\cdot 1 - 3\cdot 2y^{2-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0 & 0 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - 0 & 0 - 6\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}}}$$

c)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} \cdot y^2 + 0 \\ x^2 \cdot 2y^{2-1} + 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot y^2 & 2x \cdot 2y^{2-1} \\ 2 \cdot 2x^{2-1} y & 2x^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}}}$$

d)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & 3 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \\ -5 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & -5 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}}}$$

e)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla V}} = \begin{bmatrix} V_{,1} \\ V_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \cdot 2r^{2-1} \cdot h \\ \pi r^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 V}} = \begin{bmatrix} V_{,1,1} & V_{,1,2} \\ V_{,2,1} & V_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \cdot 1 \cdot h & 2\pi r \cdot 1 \\ \pi \cdot 2r^{2-1} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{bmatrix}}}$$

f)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0} \\ \psi_{,1} \end{bmatrix} = A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot 1 - 0 \\ 0 - k \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \\ -k \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0,0} & \psi_{,0,1} \\ \psi_{,1,0} & \psi_{,1,1} \end{bmatrix} = -A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & \omega \cdot (0 - k \cdot 1) \\ -k \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & -k \cdot (0 - k \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega^2 & -\omega k \\ -\omega k & k^2 \end{bmatrix}}}$$

2.
Bestimmen Sie zu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2+1) - 3x$

a) den Funktionswert am Punkt (-1;0),
b) den Gradienten
c) die Hesse-Matrix
d) alle Nullstellen des Gradienten
e) die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (3;1).

a) $f(-1,0) = (-1)^3 - 1^2 \ln(0+1) - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

b) $grad\ f(x,y)^T = (3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3, -x^2 \frac{2y}{y^2+1})$

c) $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\ln(y^2+1) & -\frac{4xy}{y^2+1} \\ -\frac{4xy}{y^2+1} & -2x^2 \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$

d) $grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow 3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq 0)$

$x^2 y = 0 \quad (\Rightarrow y = 0 \text{ wegen } x \neq 0)$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$ bzw. $x = \pm 1$

$grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o}$ für $(x,y) = (1,0)$ oder $(-1,0)$

e)

Gleichung der Tangentialhyperebene $y = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + grad\ f(\hat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$ für $(x,y) = (3,1)$

$$(\hat{x}^3 - \hat{x}^2\ln(\hat{y}^2+1) - 3\hat{x}) + \left(3\hat{x}^2 - 2\hat{x}\ln(\hat{y}^2+1) - 3, \quad -\hat{x}^2 \cdot \frac{2\hat{y}}{\hat{y}^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - \hat{x} \\ y - \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$= (3^3 - 3^2\ln(1^2+1) - 3\cdot 3) + \left(3\cdot 3^2 - 2\cdot 3\ln(1^2+1) - 3, \quad -3^2 \cdot \frac{2\cdot 1}{1^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -45 + 9\ln(2) + 24x - 6x\ln(2) - 9y$$

3. Kritische Stellen in 3D

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x,y) = y^3 + x^2y - 3y + 8$ b) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 27y + 4$

a)

Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy \\ 3y^2 + x^2 - 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,x,x} & f_{,x,y} \\ f_{,y,x} & f_{,y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{bmatrix}$$

Für kritische Stellen muss gelten

$$\nabla f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{I:} & 2xy = 0 \\ \text{II:} & 3y^2 + x^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Aus Gleichung I folgt, dass entweder x = 0 oder y = 0 gelten muss.

Fall 1: $x = 0$. Aus der Gleichung II

$$3y^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \{-1, 1\}.$$

Fall 2: $y = 0$. Aus der Gleichung II

$$x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}.$$

Damit haben wir die *kritischen Stellen* von f gefunden, diese sind

$$P_1 := (0;-1)\,,\ P_2 := (0;1)\,,\ P_3 := (-\sqrt{3};0) \quad \text{und} \quad P_4 := (\sqrt{3};0)\,.$$

Für die weitere Untersuchung der *kritischen Stellen* $P_k = (x_k;y_k)$ mit $k \in \{1,\ldots 4\}$ betrachten wir die zweiten, *partiellen Ableitungen* von f an diesen Stellen. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	z_k	$f_{,x,x}$	$f_{,y,y}$	$f_{,x,y}$	$\det(\nabla^2 f)$	Typ:
1	0	-1	10	$-2<0$	$-6<0$	0	$+12>0$	*lok. Maximum*
2	0	$+1$	6	$+2>0$	$+6>0$	0	$+12>0$	*lok. Minimum*
3	$-\sqrt{3}$	0	8	0	0	$-2\sqrt{3}$	$-12<0$	*Sattel-Punkt*
4	$+\sqrt{3}$	0	8	0	0	$+2\sqrt{3}$	$-12<0$	*Sattel-Punkt*

b)

Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy \\ 3x^2+3y^2-27 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,x,x} & f_{,x,y} \\ f_{,y,x} & f_{,y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{bmatrix}$$

Für kritische Stellen muss gelten

$$\nabla f = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6xy = 0 \\ 3x^2+3y^2-27 = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{I:} & xy = 0 \\ \text{II:} & x^2+y^2-9 = 0. \end{cases}$$

Aus Gleichung I folgt, dass entweder x = 0 oder y = 0 gelten muss.

Fall 1: $x = 0$. Aus der Gleichung II

$$y^2-9=0 \;\Leftrightarrow\; y^2=9 \;\Leftrightarrow\; y \in \{-3,3\}.$$

Fall 2: $y = 0$. Aus der Gleichung II

$$x^2-9=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=9 \;\Leftrightarrow\; x \in \{-3,3\}\,.$$

Damit haben wir die *kritischen Stellen* von f gefunden, diese sind

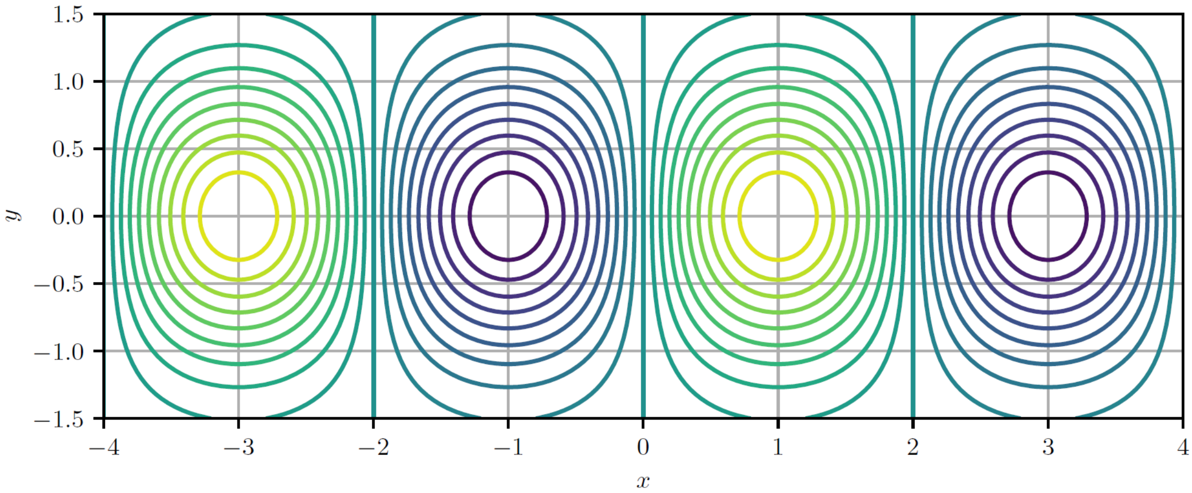
$$P_1 := (0;-3)\,,\ P_2 := (0;3)\,,\ P_3 := (-3;0) \quad \text{und} \quad P_4 := (3;0)\,.$$

Für die weitere Untersuchung der *kritischen Stellen* $P_k = (x_k;y_k)$ mit $k \in \{1,\ldots 4\}$ betrachten wir die zweiten, *partiellen Ableitungen* von f an diesen Stellen. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	z_k	$f_{,x,x}$	$f_{,y,y}$	$f_{,x,y}$	$\det(\nabla^2 f)$	Typ:
1	0	-3	58	$-18<0$	$-18<0$	0	$+324>0$	*lok. Maximum*
2	0	$+3$	-50	$+18>0$	$+18>0$	0	$+324>0$	*lok. Minimum*
3	-3	0	4	0	0	-18	$-324<0$	*Sattel-Punkt*
4	$+3$	0	4	0	0	$+18$	$-324<0$	*Sattel-Punkt*

4. Aussagen über einen Python/Numpy Plot

Gegeben sei der Python Numpy/Plot einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Gradient der Funktion f verschwindet am Punkt (-1;0).	X	
b) Die Funktion f hat am Punkt (2;0) einen Sattelpunkt.		X
c) Am Punkt (1;1,25) zeigt der Gradient der Funktion f in Richtung der positiven x-Achse.		X
d) Am Punkt (-1;1,25) ist der Gradient der Funktion f länger als am Punkt (-2;0,5).		X
e) Es gilt: $\int_{-2}^{2} f(t;-1)dt = 0$.		X

5. Richtungsableitung

Berechnen Sie für folgende Funktionen an den gegebenen Stellen $\vec{x}_0$ die Richtungsableitung in Richtung $\vec{r}$.

a) $f(x,y) = \frac{x}{x+y}, \vec{x}_0 = (1;2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $f(x,y,z) = x\sin z - y\cos(2z), \vec{x}_0 = (0;0;0), \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2\sqrt{x_2} + x_4 e^{x_3}, \vec{x}_0 = (-1;1;0;2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy, \vec{x}_0 = (3;-2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie ausserdem, in welcher Richtung die Richtungsableitung maximal wird und auch wie gross dieser Maximalwert ist.

a)

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,2) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

b)

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(2z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(z) + 2y\sin(2z)$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0,0) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(0,0,0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}$$

c)

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1\sqrt{x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1^2}{2\sqrt{x_2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4 e^{x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = e^{x_3}$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(-1,1,0,2) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(-1,1,0,2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2-\frac{1}{2}-2+1}{2} = -\frac{7}{4}$$

d)

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(3,-2) = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} f(3,-2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(3-12) = -\frac{9}{5}$$

Maximale Steigung in Richtung

$$\operatorname{grad} f(3,-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem Wert

$$|\operatorname{grad} f(3,-2)| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

6. Aussagen über eine Funktion

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sin x + \cos y$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Funktion f hat eine kritische Stelle.		X
b) Der Graph von f steigt an keinem Punkt und in keine Richtung stärker als 45°.		X
c) Die Funktion f hat an der Stelle (0;0) einen Sattelpunkt.		X
d) Die Funktion f hat an der Stelle (π/2;0) ein lokales Maximum.	X	
e) Es gibt eine Gerade in der xy-Ebene, die auf einer Höhenlinie der Funktion f liegt.	X	

7. Extrema unter Nebenbedingungen

a) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

b) Finden Sie ein Dreieck, das bei gegebenem Umfang U einen maximalen Flächeninhalt F hat.

c) Sie möchten einen Quader basteln. Die Holzstangen für die Kanten des Quaders kosten 2 Euro pro Meter; die Kosten für den Stoff für die Seitenflächen des Quaders betragen 3 Euro je Quadratmeter. Sie haben 50 Euro zur Verfügung und möchten diese 50 Euro vollständig ausgeben. Ausserdem wollen Sie das Volumen des Quaders maximieren. Formulieren Sie diese Bastelarbeit als Maximierungsaufgabe mit Nebenbedingungen, und lösen Sie die Aufgabenstellung unter Verwendung Lagrange´scher Multiplikatoren.

a)
Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

und lösen das System

$$\operatorname{grad} f(x, y) + \lambda \operatorname{grad} g(x, y) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.$$

Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} -x + \lambda &= 0, \\ -2y + \lambda &= 0, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Dies ist glücklicherweise ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$, und wie Sie leicht nachrechnen, lautet die eindeutige Lösung

$$(x, y, \lambda) = (2/3,\ 1/3,\ 2/3)\,.$$

Die Funktion f nimmt also über der Geraden $G := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y = 1\}$ im Punkt $\mathbf{x}_0 = (2/3,\ 1/3)$ ein Maximum an mit dem Funktionswert $f(\mathbf{x}_0) = 11/3$.

Alternativ lässt sich hier die Nebenbedingung sehr leicht nach einer der beiden Variablen auflösen, z. B.

$$y = 1 - x.$$

Damit ergibt sich eine Funktion in einer Variablen

$$h(x) := f(x, 1 - x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 3.$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung liefert

$$h'(x) = -3x + 2 \stackrel{!}{=} 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

und damit $y = 1/3$. Die hinreichende Bedingung

$$h''(x) = -3 = h(2/3) < 0$$

bestätigt das Maximum in diesem Punkt.

b)
Sind x, y, z die Seitenlängen, dann gilt

$$U = x + y + z,$$

wobei $\in \mathbb{R}_+$ gegeben ist. Der Flächeninhalt lautet damit

$$F(x, y, z) = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right)}.$$

Wenn F maximal wird, wird auch F^2 maximal, demnach wählen wir die einfachere Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = \frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x + y + z - U = 0.$$

Mithilfe des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,z,\lambda) := \frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) + \lambda(x + y + z - U)$$

erhalten wir die Bedingungen

$$L_x(x,y,z,\lambda) = -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) + \lambda \stackrel{!}{=} 0, \qquad (1)$$

$$L_y(x,y,z,\lambda) = -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) + \lambda \stackrel{!}{=} 0, \qquad (2)$$

$$L_z(x,y,z,\lambda) = -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right) + \lambda \stackrel{!}{=} 0, \qquad (3)$$

$$L_\lambda(x,y,z,\lambda) = \qquad x + y + z - U \stackrel{!}{=} 0. \qquad (4)$$

Subtraktion von (1) und (2) bzw. (2) und (3) ergibt mit (4) die Lösung

$$x_0 + y_0 + z_0 = \frac{U}{3} \quad \text{und} \quad \lambda_0 = \frac{U^3}{72},$$

also

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \left(\frac{U}{3}, \frac{U}{3}, \frac{U}{3}, \frac{U^3}{72}\right).$$

Diese Lösung führt auf

$$f(x,y,z) = \frac{U^4}{432}.$$

Die nachfolgenden drei weiteren Lösungen sind unmittelbar zu sehen:

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \left(\frac{U}{2}, \frac{U}{2}, 0, 0\right),$$

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \left(\frac{U}{2}, 0, \frac{U}{2}, 0\right),$$

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \left(0, \frac{U}{2}, \frac{U}{2}, 0\right).$$

Diese führen allerdings auf $f(x,y,z) = 0$, und somit liegt an keinem dieser drei Punkte ein Maximum vor.

c)
Es seien a, b, c die Kantenlängen. Dann lautet die Nebenbedingung

$$g(a,b,c) = \underbrace{2}_{\text{Geld}} \cdot \underbrace{4(a+b+c)}_{\text{Holz}} + \underbrace{3}_{\text{Geld}} \cdot \underbrace{2(ab+bc+ac)}_{\text{Stoff}} - \underbrace{50}_{\text{Geld}} = 0.$$

Damit gilt

$$\operatorname{grad} g(a,b,c) = \begin{pmatrix} 8+6b+6c \\ 8+6a+6c \\ 8+6a+6b \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$f(a,b,c) = abc.$$

Nun ermitteln wir aus

$$\operatorname{grad} f(a,b,c) + \lambda \operatorname{grad} g(a,b,c) = \begin{pmatrix} bc + \lambda(8+6b+6c) \\ ac + \lambda(8+6a+6c) \\ ab + \lambda(8+6a+6b) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

die Werte $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Wir subtrahieren die 2. Zeile von der 1. Zeile und erhalten

$$bc - ac + \lambda(6b - 6a) = 0$$

$$\iff (b-a)(c+6\lambda) = 0$$

$$\iff \boxed{a = b \text{ oder } \lambda = -\frac{c}{6}.}$$

Auf ähnliche Art und Weise (2. Zeile - 3. Zeile, 1. Zeile - 3. Zeile) bekommen wir

$$\boxed{b = c \text{ oder } \lambda = -\frac{a}{6},}$$

$$\boxed{a = c \text{ oder } \lambda = -\frac{b}{6}.}$$

Es liegen jetzt verschiedene Fallunterscheidungen vor:

i) $a = b$ und $\lambda = -\frac{a}{6} = -\frac{b}{6}$. Daraus ergibt sich ein Widerspruch. Denn aus $ab + \lambda(8+6a+6b) = 0$ resultiert

$$a^2 + \left(-\frac{a}{6}\right)(8+12a) = 0 \iff a = 0 \text{ oder } a = -\frac{8}{6}.$$

ii) $b = c$ und $\lambda = -\frac{b}{6} = -\frac{c}{6}$. Daraus ergibt sich ein analoger Widerspruch.

iii) $a = c$ und $\lambda = -\frac{a}{6} = -\frac{c}{6}$. Daraus ergibt sich ein analoger Widerspruch.

iv) $\underline{a = b = c}$ und $\lambda = -\frac{-a^2}{8+12a}$. Jetzt kommt endlich etwas Vernünftiges heraus. Aus der Nebenbedingung ergibt sich

$$24a + 18a^2 - 50 = 0.$$

Die Lösungen lauten

$$a = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 50 \cdot 18}}{36} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{25}{9}}.$$

Also ist das Volumen maximal bei den positiven Seitenlängen

$$a = b = c = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{29}{9}}.$$