Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe lineares Gleichungssystem, Dimensionszahl, Äquivalenzumformung, Gauß-Schema, Gauß-Verfahren, Gauß-Jordan-Verfahren, Stufenform, reduzierte Stufenform, Pivot-Element sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können ein lineares Gleichungssystem in ein Gauß-Schema überführen und umgekehrt.
- Sie können ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß- bzw. Gauß-Jordan-Verfahrens lösen.

1. Aussagen über lineare Gleichungssystem

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jedes lineare Gleichungssystem besteht aus gleich vielen Gleichungen wie Variablen.		X
b) Jedes lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.		X
c) Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens lässt sich die Lösungsmenge jedes linearen Gleichungssystems bestimmen.	X	
d) Ein sogenannter Gauß-Schritt ändert die Lösungsmenge eines lineare Gleichungssystems nicht.	X	
e) Die Multiplikation einer Gleichung eines linearen Gleichungssystems mit einer beliebigen reellen Zahl ist eine Äquivalenzumformung.		X

2. Gauß-Schemata

Bringen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in ein Gauß-Schema und bestimmen Sie die Dimensionszahlen n_V und n_G.

a) $2x - 3y = 6$
$5x + 7y = -8$

b) $x + y = 1$
$x - y = -2$
$2x - y = 1$

c) $1 + x = y - 1$
$2y - x + 3 = 0$

d) $x + 2y - z = 8$
$5x - 2y + 3z = 1$
$3x + z = 7$

e) $2x - 3y = 6z$
$5z - 2x = y + 1$

f) $3x + 2y - 2x - 1 = 4$
$x - 2z + 2 = x$
$3z - 4 = x$

a) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5x + 7y = -8, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum GAUSS-*Schema*

$$\underline{\underline{\begin{array}{|cc|c|} \hline 2 & -3 & 6 \\ 5 & 7 & -8 \\ \hline \end{array}}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_{\mathrm{V}} = n_{\mathrm{G}} = 2}}$.

b) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -2 \\ 2x - y = 1, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum GAUSS-*Schema*

$$\underline{\underline{\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_{\mathrm{V}} = 2}}$ und $\underline{\underline{n_{\mathrm{G}} = 3}}$.

c) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 1 + x = y - 1 \\ 2y - x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 2y = -3, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum GAUSS-*Schema*

$$\underline{\underline{\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ \hline \end{array}}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_{\mathrm{V}} = n_{\mathrm{G}} = 2}}$.

d) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 5x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + z = 7, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum Gauss-*Schema*

$$\underline{\underline{\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right|}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_V = n_G = 3}}$.

e) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6z \\ 5z - 2x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 6z = 0 \\ -2x - y + 5z = 1, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum Gauss-*Schema*

$$\underline{\underline{\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -6 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right|}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_V = 3}}$ und $\underline{\underline{n_G = 2}}$.

f) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2x - 1 = 4 \\ x - 2z + 2 = x \\ 3z - 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2z = -2 \\ -x + 3z = 4, \end{cases}$$

welches äquivalent ist zum Gauss-*Schema*

$$\underline{\underline{\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right|}}\,.$$

Offensichtlich gilt $\underline{\underline{n_V = n_G = 3}}$.

3. Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme für 2 Variablen
Bringen Sie die linearen Gleichungssysteme in ein Gauß-Schema und bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Gauß- oder Gauß-Jordan-Verfahrens.

a)	b)	c)
$2x - y = 1$	$5x + 3y = 1$	$3x - 2y = 5/6$
$2y - x = 7$	$2x + y = 0$	$-1/2x + y = 1/12$

a)

Variante 1: Wir wenden das Gauss-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rr|r|}\hline 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline -1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \end{array}\begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & -2 & -7 \\ 0 & [3] & 15 \\ \hline\end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* finden wir

$$\begin{aligned} 3y = 15 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{15}{3} = 5 \\ x - 2y = -7 \quad &\Rightarrow \quad x = 2y - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rr|r|}\hline 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline -1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \end{array}\begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & -2 & -7 \\ 0 & [3] & 15 \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} -2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & -2 & -7 \\ 0 & [1] & 5 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline [1] & 0 & 3 \\ 0 & [1] & 5 \\ \hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(3; 5)\}.}}$$

b)

Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Variante 1: Wir wenden das Gauss-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rr|r|}\hline 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \frac{5}{2} \end{array}\begin{array}{|rr|r|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 0 & [1] & 2 \\ \hline\end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* finden wir

$$\begin{aligned} 1\,y = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = 2 \\ 2x + y = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -\frac{y}{2} = -\frac{2}{2} = -1. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \frac{5}{2} \end{array}\begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 1 & 0 \\ 0 & [1] & 2 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 0 & -2 \\ 0 & [1] & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & 0 & -1 \\ 0 & [1] & 2 \\ \hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-1; 2)\}.}}$$

c)

Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 3x - 2y = \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2}x + y = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Variante 1: Wir wenden das Gauss-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 3 & -2 & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{12} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \end{array}\begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 3 & -2 & \frac{5}{6} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 4 & \frac{8}{6} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \\ \hline\end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* finden wir

$$1\,y = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$$

$$x - 2y = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 2y - \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Variante 2: Wir wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 3 & -2 & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{12} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \end{array}\begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 3 & -2 & \frac{5}{6} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 4 & \frac{8}{6} \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} -2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & -2 & -\frac{1}{6} \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline [1] & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \\ \hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{3})\}.}}$$

4. Auslastung von Mitarbeitenden

Ein Produktionsteam besteht aus 2 Mitarbeitenden (MA) mit unterschiedlichen von einander unabhängigen Aufgaben und stellt 2 Produkte her. Um jeweils eines der beiden Produkte herzustellen, werden folgende Arbeitseinsätze benötigt:

Arbeitsbedarf	MA 1	MA 2
Produkt A	18 min	5 min
Produkt B	6 min	15 min

Wie viele der jeweiligen Produkte müssen täglich jeweils produziert werden, damit die beiden Mitarbeiter während der gesamten Arbeitszeit von 8 Stunden ganz ausgelastet sind?

Wenn täglich a Produkte A und b Produkte b hergestellt werden und beide Mitarbeiter jeweils 8 h = 8*60 min = 480 min arbeiten, dann muss gelten:
a*18 min + b*6 min = 480 min

a*5 min + b*15 min = 480 min

Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 18\,\mathrm{min} & 6.0\,\mathrm{min} & 480\,\mathrm{min} \\ 5.0\,\mathrm{min} & 15\,\mathrm{min} & 480\,\mathrm{min} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 80 \\ 1 & 3 & 96 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \end{array}\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 3 & 1 & 80 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 0 & -8 & -208 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 0 & [1] & 26 \end{array}\right| .$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \cdot b = 26 \quad &\Rightarrow \quad b = 26 \\ 1 \cdot a + 3 \cdot b = 21 \quad &\Rightarrow \quad a = 96 - 3 \cdot b = 96 - 3 \cdot 26 = 96 - 78 = 18. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 18\,\mathrm{min} & 6.0\,\mathrm{min} & 480\,\mathrm{min} \\ 5.0\,\mathrm{min} & 15\,\mathrm{min} & 480\,\mathrm{min} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 80 \\ 1 & 3 & 96 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \end{array}\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 3 & 1 & 80 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 0 & -8 & -208 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 3 & 96 \\ 0 & [1] & 26 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 0 & 18 \\ 0 & [1] & 26 \end{array}\right| .$$

5. Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme für 3 Variablen

Bringen Sie die linearen Gleichungssysteme in ein Gauß-Schema und bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Gauß- oder Gauß-Jordan-Verfahrens.

a) 2x – 3y + z = 3
-x + 3y – 2z = 0
3x – y + 5z = 1

b) 2x + z = 6y
6x + 3y = 2 + 2z
2x + 3y + 1 = 3z

a)

Variante 1: Wir wenden das GAUSS-*Verfahren* an. Es gilt

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}\left|\begin{array}{ccc|c} [1] & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 8 \end{array}\left|\begin{array}{ccc|c} [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 0 & [1] & -1 \end{array}\right| .$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* finden wir

$$\begin{aligned} & z = -1 \\ y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad & y = 1 + z = 1 - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad & x = 3y - 2z = 3 \cdot 0 - 2\,(-1) = 2. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rrr|r|}\hline 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 8 \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 2 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \\ 0 & 0 & [1] & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & -3 & 0 & 2 \\ 0 & [1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & 0 & 0 & 2 \\ 0 & [1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & -1 \\ \hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;0;-1)\}}}.$$

b)

Variante 1: Wir wenden das GAUSS-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{r} \\ 3 \\ 1 \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \frac{3}{7} \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -4 & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{13}{7} \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* finden wir

$$\begin{aligned} & & z &= 1 \\ 21y - 5z = 2 &\quad\Rightarrow & y &= \frac{2+5z}{21} = \frac{2+5\cdot 1}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \\ 2x - 6y + z = 0 &\quad\Rightarrow & x &= \frac{6y - z}{2} = \frac{6\cdot\frac{1}{3} - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{r} \\ 3 \\ 1 \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \frac{3}{7} \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -4 & -1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{13}{7} \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ -5 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 1 & 0 \\ 0 & [21] & -5 & 2 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 0 & -1 \\ 0 & [21] & 0 & 7 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & -6 & 0 & -1 \\ 0 & [3] & 0 & 1 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [2] & 0 & 0 & 1 \\ 0 & [3] & 0 & 1 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline [1] & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & [1] & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{3};1)\}}}.$$

6. Altmetallverwertung

Es sind 3 verschiedene Altmetalle (AM) vorhanden, die aus jeweils unterschiedlichen Anteilen von Eisen, Kupfer und Zinn bestehen. Es sollen 200 t einer neuen Legierung hergestellt werden, die aus 31 % Eisen, 46 % Kupfer und 23 % Zinn besteht. Die Zusammensetzung der Altmetalle ist folgendermassen gegeben:

Elemente	AM 1	AM 2	AM 3
Eisen	60 %	20 %	< 0,2 %
Kupfer	30 %	40 %	70 %
Zinn	10 %	40 %	30 %

Wieviel (Masse) von jedem der 3 Altmetalle muss eingeschmolzen werden, um die gewünschte neue Legierung herstellen zu können?

Es sind die Massen m_1, m_2 und m_3 der Altmetalle zu berechnen, die eingeschmolzen werden müssen, um die neue Legierung herzustellen. Da der Eisengehalt des 3. Altmetalls sehr gering ist, können wir es vernachlässigen. Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 60\% \cdot m_1 + 20\% \cdot m_2 &= 31\% \cdot m = \frac{31}{100} \cdot 200\,\mathrm{t} = 62\,\mathrm{t} \\ 30\% \cdot m_1 + 40\% \cdot m_2 + 70\% \cdot m_3 &= 46\% \cdot m = \frac{46}{100} \cdot 200\,\mathrm{t} = 92\,\mathrm{t} \\ 10\% \cdot m_1 + 40\% \cdot m_2 + 30\% \cdot m_3 &= 23\% \cdot m = \frac{23}{100} \cdot 200\,\mathrm{t} = 46\,\mathrm{t}. \end{aligned}$$

Um keine Prozentschreibung nehmen zu müssen, mit 100 multiplizieren (1 % = 1/100):

$$\begin{cases} \text{I:} & 60 \cdot m_1 + 20 \cdot m_2 = 6'200\,\mathrm{t} \\ \text{II:} & 30 \cdot m_1 + 40 \cdot m_2 + 70 \cdot m_3 = 9'200\,\mathrm{t} \\ \text{III:} & 10 \cdot m_1 + 40 \cdot m_2 + 30 \cdot m_3 = 4'600\,\mathrm{t}. \end{cases}$$

Variante 1: Wir wenden das GAUSS-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 60 & 20 & 0 & 6'200\,\mathrm{t} \\ 30 & 40 & 70 & 9'200\,\mathrm{t} \\ 10 & 40 & 30 & 4'600\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 3 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 3 & 1 & 0 & 310\,\mathrm{t} \\ 3 & 4 & 7 & 920\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & -11 & -9 & -1'070\,\mathrm{t} \\ 0 & -8 & -2 & -460\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \frac{11}{4} \end{array} \begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 11 & 9 & 1'070\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & \frac{25}{4} & \frac{1'750}{4}\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & [1] & 70\,\mathrm{t} \\ \hline \end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \cdot m_3 = 70\,\mathrm{t} \quad &\Rightarrow \quad m_3 = 70\,\mathrm{t} \\ 4 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 = 230\,\mathrm{t} \quad &\Rightarrow \quad m_2 = \tfrac{1}{4} \cdot (230\,\mathrm{t} - 70\,\mathrm{t}) = 40\,\mathrm{t} \\ 1 \cdot m_1 + 4 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 = 460\,\mathrm{t} \quad &\Rightarrow \quad m_1 = 460\,\mathrm{t} - 4 \cdot 40\,\mathrm{t} - 3 \cdot 70\,\mathrm{t} = 90\,\mathrm{t}. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 60 & 20 & 0 & 6'200\,\mathrm{t} \\ 30 & 40 & 70 & 9'200\,\mathrm{t} \\ 10 & 40 & 30 & 4'600\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \\ 3 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 3 & 1 & 0 & 310\,\mathrm{t} \\ 3 & 4 & 7 & 920\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & -11 & -9 & -1'070\,\mathrm{t} \\ 0 & -8 & -2 & -460\,\mathrm{t} \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \frac{11}{4} \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 11 & 9 & 1'070\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & \frac{25}{4} & \frac{1'750}{4}\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 3 & 460\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 1 & 230\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & [1] & 70\,\mathrm{t} \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 0 & 250\,\mathrm{t} \\ 0 & [4] & 0 & 160\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & [1] & 70\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} 4 \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 4 & 0 & 250\,\mathrm{t} \\ 0 & [1] & 0 & 40\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & [1] & 70\,\mathrm{t} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} [1] & 0 & 0 & 90\,\mathrm{t} \\ 0 & [1] & 0 & 40\,\mathrm{t} \\ 0 & 0 & [1] & 70\,\mathrm{t} \end{array}\right|.$$

7. Eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für 3 Variablen mit 2 rechten Seiten

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit $a, b, c \in \mathbb{R}$:
3x – 2y + z = a
-x +3y – z = b
2x + y - 3z = c.
Bestimmen Sie jeweils die eindeutige Lösung für die rechten Seiten a = 2, b = 1 und c = 0 bzw. a = 4, b = 1 und c = 5 mit Hilfe des Gauß- oder Gauß-Jordan-Verfahrens. Führen Sie die Berechnung derart durch, dass Sie jeden Gauß-Schritt nur einmal durchführen.

$$\left|\begin{array}{ccc|c|c} 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c|c} [1] & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c|c} [1] & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & [7] & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 2 & 7 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c|c} [1] & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & [7] & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c|c} [1] & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & [7] & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \end{array}\right|.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir für die erste rechte Seite

$$\begin{aligned} & z_1 = 1 \\ 7y_1 - 2z_1 = 5 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = \frac{5 + 2z_1}{7} = \frac{5 + 2 \cdot 1}{7} = \frac{7}{7} = 1 \\ x_1 - 3y_1 + z_1 = -1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 3y_1 - z_1 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 - 1 = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir für die zweite rechte Seite

$$\begin{aligned} & z_2 = 0 \\ 7y_2 - 2z_2 = 7 \quad &\Rightarrow \quad y_2 = \frac{7 + 2z_2}{7} = \frac{7 + 2 \cdot 0}{7} = \frac{7}{7} = 1 \\ x_2 - 3y_2 + z_2 = -1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 3y_2 - z_2 - 1 = 3 \cdot 1 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Variante 2: Wir wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rrr|r|r|}\hline 3&-2&1&2&4\\ -1&3&-1&1&1\\ 2&1&-3&0&5\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|r|}\hline -1&3&-1&1&1\\ 3&-2&1&2&4\\ 2&1&-3&0&5\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 3\\ 2\end{array}\begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&1&-1&-1\\ 3&-2&1&2&4\\ 2&1&-3&0&5\\\hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 1\end{array}\begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&1&-1&-1\\ 0&[7]&-2&5&7\\ 0&7&-5&2&7\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&1&-1&-1\\ 0&[7]&-2&5&7\\ 0&0&-3&-3&0\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 1\\ -2\\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&1&-1&-1\\ 0&[7]&-2&5&7\\ 0&0&[1]&1&0\\\hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&0&-2&-1\\ 0&[7]&0&7&7\\ 0&0&[1]&1&0\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -3\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&-3&0&-2&-1\\ 0&[1]&0&1&1\\ 0&0&[1]&1&0\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rrr|r|r|}\hline [1]&0&0&1&2\\ 0&[1]&0&1&1\\ 0&0&[1]&1&0\\\hline\end{array}.$$

Die *Lösungsmengen* des Gleichungssystems für die erste und zweite rechte Seite sind demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L}_1 = \{(1;1;1)\}}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\mathbb{L}_2 = \{(2;1;0)\}}}.$$

8. Planung von 2 Hotels

Es sollen 2 neue Hotels gebaut werden, in denen es jeweils Zweier- und Dreierzimmer geben soll. Das kleinere Hotel soll 21 Zimmer für 50 Gäste und das grössere 45 Zimmer für 100 Gäste zur Verfügung stellen. Aus wie vielen Zweier- und Dreierzimmern können die Hotels gebaut werden?

Variante 1: Wir wenden das GAUSS-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rr|r|r|}\hline 1&1&21&45\\ 2&3&50&100\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2\end{array}\begin{array}{|rr|r|r|}\hline [1]&1&21&45\\ 2&3&50&100\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|r|}\hline [1]&1&21&45\\ 0&[1]&8&10\\\hline\end{array}.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* für das kleinere Hotel erhalten wir

$$1 \cdot y_\text{k} = 8 \quad \Rightarrow \quad y_\text{k} = 8$$
$$1 \cdot x_\text{k} + 1 \cdot y_\text{k} = 21 \quad \Rightarrow \quad x_\text{k} = 21 - y_\text{k} = 21 - 8 = 13.$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* für das grössere Hotel erhalten wir

$$1 \cdot y_\text{g} = 10 \quad \Rightarrow \quad y_\text{g} = 10$$
$$1 \cdot x_\text{g} + 1 \cdot y_\text{g} = 45 \quad \Rightarrow \quad x_\text{g} = 45 - y_\text{g} = 45 - 10 = 35.$$

Variante 2: Wir wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|rr|r|r|}\hline 1&1&21&45\\ 2&3&50&100\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2\end{array}\begin{array}{|rr|r|r|}\hline [1]&1&21&45\\ 2&3&50&100\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 1\\ \\ \end{array}\begin{array}{|rr|r|r|}\hline [1]&1&21&45\\ 0&[1]&8&10\\\hline\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|r|}\hline [1]&0&13&35\\ 0&[1]&8&10\\\hline\end{array}.$$

9. Lineares Gleichungssystem mit Parameter

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$rx_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + rx_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + rx_3 = 1$

Mit Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right)$$

1. Fall: $r = 1$. In diesem Fall kann man die Lösungsmenge direkt ablesen: $L = \{(1-s-t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ (das sind unendlich viele Lösungen).

2. Fall: $r \neq 1$. Wir führen einen weiteren Eliminationsschritt durch. Hierbei multiplizieren wir die erste und die dritte Zeile mit $\frac{1}{1-r}$ und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1+r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+r & 1 \end{array}\right)$$

Im Fall $r = -2$ gilt offenbar $L = \emptyset$.

Und im Fall $r \neq -2$ gibt es offenbar genau eine Lösung. Es ist $L = \{(\frac{1}{2+r}, \frac{1}{2+r}, \frac{1}{2+r})\}$ die Lösungsmenge.

10. Lineare Gleichungssysteme mit Python lösen

a) Lösen Sie die linearen Gleichungssystem aus Aufgabe 3 und 5 mit Python/Numpy.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssystem aus Aufgabe 3 und 5 mit Python/Sympy.

a) Lösung für Aufgabe 3a) (b) und c) analog).
Mit Numpy:

```
# Python initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
A=np.array([[2,-1],[-1,2]]); → Variablen auf die linke Seite bringen und
                                sortieren, dann erste Zeile in eckige Klammern,
                                anschliessend zweite Zeile in eckige Klammern
b=np.array([1,7]);              → rechte Seite
pr_L=3;
# Berechnungen
L=np.linalg.solve(A,b);          → lineares Gleichungssystem wird gelöst
# Ausgabe
print(f"L={np.array2string(L,precision=pr_L)}");
```

Lösung für Aufgabe 5a) (b) und c) analog).

```
# Python initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
A=np.array([[2,-3,1],[-1,3,-2],[3,-1,5]]);
```

```
b=np.array([3,0,1]);
pr_L=1;
# Berechnungen
L=np.linalg.solve(A,b);
# Ausgabe
print('L =',L);
```
→ „normale“ Ausgabe

```
print(f"L={np.array2string(L,precision=pr_L)}");
```
→ Ausgabe mittels eines f-strings; über precision werden die Nachkommastellen vorgegeben

b) Lösung für Aufgabe 3a)
Mit Sympy:

```
# Initialisieren
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter
G=sp.Matrix([[2,-1,1],[-1,2,7]]);
```
→ Koeffizienten vor den Variablen und auch rechte Seite wird eingegeben

```
# Berechnungen
H=G.rref();
```
→ reduzierte Stufenform (Gauß-Jordan) wird berechnet

```
# Ausgabe
dp.display(G,H);
```
→ zuerst werden die Koeffizienten des linearen Gleichungssystem angezeigt, anschliessend die reduzierte Stufenform und die rechte Spalte gibt die Lösung an

Lösung für Aufgabe 5a) (b) und c) analog).

```
# Initialisieren
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter
G=sp.Matrix([[2,-3,1,3],[-1,3,-2,0],[3,-1,5,1]]);
# Berechnungen
H=G.rref();
# Ausgabe
dp.display(G,H);
```