FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 1

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Fakultät, Binomialkoeffizient, Pascalsches Dreieck, Permutation, Kombination und können diese erklären und anwenden.
- Sie können Fakultäten und Binomialkoeffizienten für natürliche Zahlen berechnen.
- Sie kennen die Formeln für die Permutationen von n Elementen und für die Kombinationen k-ter Ordnung.

---

1. Aussagen über die Fakultät
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Fakultät ist für alle reellen Zahlen definiert.		X
b) Für alle $n \epsilon \mathbb{N}^+$ gilt: $n! = (n-1)! \cdot n$.	X	
c) Für alle $n \epsilon \mathbb{N}^+$ gilt $n! \leq n^n$.	X	
d) Gilt $m, n \epsilon \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, dann ist $n!/m! \, \epsilon \mathbb{N}$.	X	
e) Die Fakultät $n!$ Ist gerade die Anzahl Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte auf n unterscheidbare Plätze zu verteilen.	X	

2. Fakultäten berechnen
Berechnen Sie jeweils den angegebenen Term.

a) 2!
b) 3!
c) 4!
d) 5!
e) $\frac{7!}{6!}$
f) $\frac{780!}{779!}$
g) $\frac{(n+1)!}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$
h) $\frac{4!}{0! \cdot 5!}$
i) $\frac{4!}{1! \cdot 3!}$
j) $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$

a) Gemäss Definition der *Fakultät* gilt

$$\underline{\underline{2!}} = 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2.}}$$

b) Gemäss Definition der *Fakultät* gilt

$$\underline{\underline{3!}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6.}}$$

c) Wir zeigen mehrere Varianten, um 4! zu berechnen.

Variante 1: Gemäss Definition der *Fakultät* gilt

$$\underline{\underline{4!}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{\underline{24.}}$$

Variante 2: Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* erhalten wir

$$\underline{\underline{4!}} = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = \underline{\underline{24.}}$$

d) Wir zeigen mehrere Varianten, um 5! zu berechnen.

Variante 1: Gemäss Definition der *Fakultät* gilt

$$\underline{\underline{5!}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{\underline{120.}}$$

Variante 2: Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* erhalten wir

$$\underline{\underline{5!}} = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = \underline{\underline{120.}}$$

e) Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{7!}{6!}}} = \frac{6! \cdot 7}{6!} = \frac{7}{1} = \underline{\underline{7.}}$$

f) Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{780!}{779!}}} = \frac{779! \cdot 780}{779!} = \frac{780}{1} = \underline{\underline{780.}}$$

g) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{(n+1)!}{n!}}} = \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = \frac{n+1}{1} = \underline{\underline{n+1.}}$$

h) Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{4!}{0! \cdot 5!}}} = \frac{4!}{0! \cdot 4! \cdot 5} = \frac{1}{1 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}.$$

i) Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{4!}{1! \cdot 3!}}} = \frac{3! \cdot 4}{1! \cdot 3!} = \frac{4}{1!} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4.}}$$

j) Durch Anwenden der *Rekursionseigenschaften* der *Fakultät* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2}{1} = \underline{\underline{6.}}$$

3. Aussagen über den Binomialkoeffizienten
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jeder Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist eine natürliche Zahl.	X	
b) Verdoppelt man sowohl *n* als auch *k*, dann ändert sich der Wert des Binomialkoeffizienten nicht.		X
c) Ersetzt man *k* durch *n-k*, dann änderst sich der Wert des Binomialkoeffizienten nicht.	X	

4. Binomialkoeffizienten berechnen

a) $\binom{3}{2}$ b) $\binom{2}{3}$ c) $\binom{7}{5}$

d) $\binom{7}{2}$ e) $\binom{871}{1}$ f) $\binom{935}{934}$

g) $\binom{100}{4}$ h) $\binom{100}{5}$

a) Wir zeigen mehrere Varianten, um den gesuchten *Binomialkoeffizienten* zu berechnen

Variante 1: Aufgrund der Struktur des PASCAL-Dreiecks gilt

$$\underline{\underline{\binom{3}{2}}} = \binom{3}{3-1} = \underline{\underline{3.}}$$

Variante 2: Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{3}{2}}} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{2! \cdot 3}{2! \cdot 1!} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3.}}$$

b) *Binomialkoeffizienten* der Form

$$\binom{n}{k}$$

sind nur definiert für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Die letzte Voraussetzung ist im vorliegenden Fall mit $n = 2$ und $k = 3$ nicht erfüllt.

c) Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{7}{5}}} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{1} = \underline{\underline{21.}}$$

d) Wir zeigen mehrere Varianten, um den gesuchten *Binomialkoeffizienten* zu berechnen

Variante 1: Mit Hilfe von (35) erhalten wir

$$\underline{\underline{\binom{7}{2}}} = \binom{7}{7-2} = \binom{7}{5} = \underline{\underline{21.}}$$

Variante 2: Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{7}{2}}} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{1} = \underline{\underline{21.}}$$

e) Wir zeigen mehrere Varianten, um den gesuchten *Binomialkoeffizienten* zu berechnen

Variante 1: Aufgrund der Struktur des PASCAL-Dreiecks gilt

$$\underline{\underline{\binom{871}{1} = 871.}}$$

Variante 2: Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{871}{1}}} = \frac{871!}{1! \cdot (871-1)!} = \frac{870! \cdot 871}{1! \cdot 870!} = \frac{871}{1} = \underline{\underline{871.}}$$

f) Wir zeigen mehrere Varianten, um den gesuchten *Binomialkoeffizienten* zu berechnen

Variante 1: Aufgrund der Struktur des PASCAL-Dreiecks gilt

$$\underline{\underline{\binom{935}{934} = 935.}}$$

Variante 2: Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{935}{934}}} = \frac{935!}{934! \cdot (935-934)!} = \frac{934! \cdot 935}{934! \cdot 1!} = \frac{935}{1} = \underline{\underline{935.}}$$

g) Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{100}{4}}} = \frac{100!}{4! \cdot (100-4)!} = \frac{96! \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 100}{4! \cdot 96!} = \frac{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{97 \cdot 49 \cdot 33 \cdot 25}{1}$$

$$= \underline{\underline{3'921'225.}}$$

h) Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{100}{5}}} = \frac{100!}{5! \cdot (100-5)!} = \frac{95! \cdot 96 \cdot \ldots \cdot 100}{5! \cdot 95!} = \frac{96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{96 \cdot 97 \cdot 49 \cdot 33 \cdot 5}{1}$$

$$= \underline{\underline{75'287'520.}}$$

i) Wir zeigen mehrere Varianten, um den gesuchten *Binomialkoeffizienten* zu berechnen

Variante 1: Aufgrund der Struktur des PASCAL-Dreiecks und mit Hilfe von g) und h) erhalten wir

$$\underline{\underline{\binom{101}{5}}} = \binom{101-1}{5-1} + \binom{101-1}{5} = \binom{100}{4} + \binom{100}{5} = 3'921'225 + 75'287'520$$

$$= \underline{\underline{79'208'745.}}$$

Variante 2: Gemäss Definition der *Binomialkoeffizienten* gilt

$$\underline{\underline{\binom{101}{5}}} = \frac{101!}{5!\cdot(101-5)!} = \frac{96!\cdot 97\cdot\ldots\cdot 101}{5!\cdot 96!} = \frac{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$= \frac{97\cdot 49\cdot 33\cdot 5\cdot 101}{1} = \underline{\underline{79'208'745.}}$$

5. Permutationen

a) Wir haben drei Kugeln vor uns liegen, von denen die erste rot r, die zweite schwarz s und die dritte weiss w ist. In wie viel unterschiedliche Reihenfolgen können wir diese Kugeln bringen?

b) Vor uns liegen vier rote, sechs schwarze und drei weisse Kugeln. In wie viele unterschiedliche Reihenfolgen können wir sie bringen?

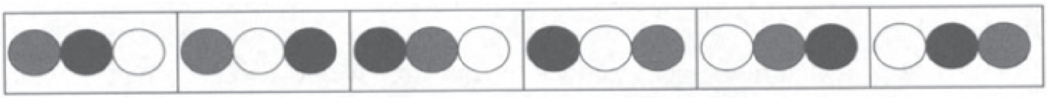
c) Wie viele verschieden Möglichkeiten gibt es, 5 Personen
(i) an einen rechteckigen Tisch,
(ii) an einen runden Tisch
mit jeweils 5 Stühlen zu platzieren?

d) Ein vergesslicher Student weiss, dass seine Geheimzahl für den Bankautomaten aus den Ziffern 4, 2, 3 und 5 besteht. An die Reihenfolge kann er sich allerdings nicht mehr erinnern. Wie oft muss er beim Bankautomaten probieren, um alle Möglichkeiten überprüft zu haben?

a)

Es ist $\quad P_{3,3} = 3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$.

Die möglichen Reihenfolgen sind r s w, r w s, s r w, s w r, w r s und w s r.



Dieses Ergebnis kann man sich relativ leicht plausibel machen:

- Für die erste Position stehen alle drei Kugeln zur Verfügung.
- Ist die erste Position besetzt, so kann die zweite Position noch von zwei unterschiedlichen Kugeln eingenommen werden.
- Stehen erste und zweite Position fest, so ist damit die Farbe der dritten Kugel festgelegt; für sie besteht nur noch eine Möglichkeit.

b)

$$P_{13,3} = \frac{13!}{4!\cdot 6!\cdot 3!} = \frac{6.227.020.800}{24\cdot 720\cdot 6} = 60.060\ .$$

Auch diese Formel lässt sich leicht intuitiv verstehen:

- Wären alle Kugeln verschiedenfarbig, also unterscheidbar, gäbe es 13! unterschiedliche Anordnungen.

- Aus diesen müssen aber jene herausgerechnet werden, die jetzt nicht mehr existieren, da eine Reihe von Kugeln gleichfarbig, also nicht mehr unterscheidbar, sind.

So entfallen durch vier (sechs, drei) gleichfarbige rote (schwarze, weiße) Kugeln 4! (6!, 3!) Reihungsmöglichkeiten.

c) (i)

$$P(5) = 5! = 120$$

(ii)

Eine Person nimmt einen beliebigen, dann aber festen Platz ein. Für die übrigen vier Personen gibt es dann $P(4) = 4! = 24$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten. Somit sind 24 verschiedene Plazierungen möglich.

d)

Hier sollen 4 Ziffern angeordnet werden, von denen keine gleich sind (Permutation ohne Wiederholung). Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

$$P_{4,4} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 .$$

S muss also 24 Mal am Bankautomaten probieren, damit er mit Sicherheit die richtige Zahl gefunden hat.