Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 7

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Vektor, Vektorgeometrie, Linearkombination, Einheitsvektor, Richtungsvektor und Betrag eines Vektors und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können Vektoren und deren Addition/Subtraktion durch Pfeile darstellen und konstruieren.
- Sie können Linearkombinationen von Vektoren berechnen.
- Sie können einen Vektor in eine Linearkombination von anderen Vektoren zerlegen und auch in Betrag und Richtungsvektor zerlegen.

---

1. Aussagen über Vektoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jeder Vektor kann durch einen Pfeil visualisiert werden.		X
b) Zwei Vektoren aus demselben Raum können addiert werden.	X	
c) Zwei Vektoren aus demselben Raum können multipliziert werden.		X
d) Ein Vektor kann mit einer reellen Zahl multipliziert werden.	X	

2. Linearkombinationen von Vektoren

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die folgenden Linearkombinationen.

a) $\vec{u} + \vec{v}$
b)$4 \cdot \vec{w}$
c) $\vec{u} - 1/3 \cdot \vec{v}$
d) $2 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{w}$
e) $2 \cdot \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$
f) $2 \cdot (\vec{v} + 3 \cdot \vec{w})$

a)

$$\underline{\underline{\mathrm{r}}} = \mathrm{u} + \mathrm{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ -1+3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{\mathrm{r}}} = 4 \cdot \mathrm{w} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \mathbf{u} - \frac{1}{3}\cdot\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{1}{3}\cdot(-3) \\ -1-\frac{1}{3}\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$

d)

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = 2\cdot\mathbf{u} - 2\cdot\mathbf{w} = 2\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = 2\cdot\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = 2\cdot\begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = 2\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} = (2+1)\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 - 3 \\ 3\cdot(-1)+3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

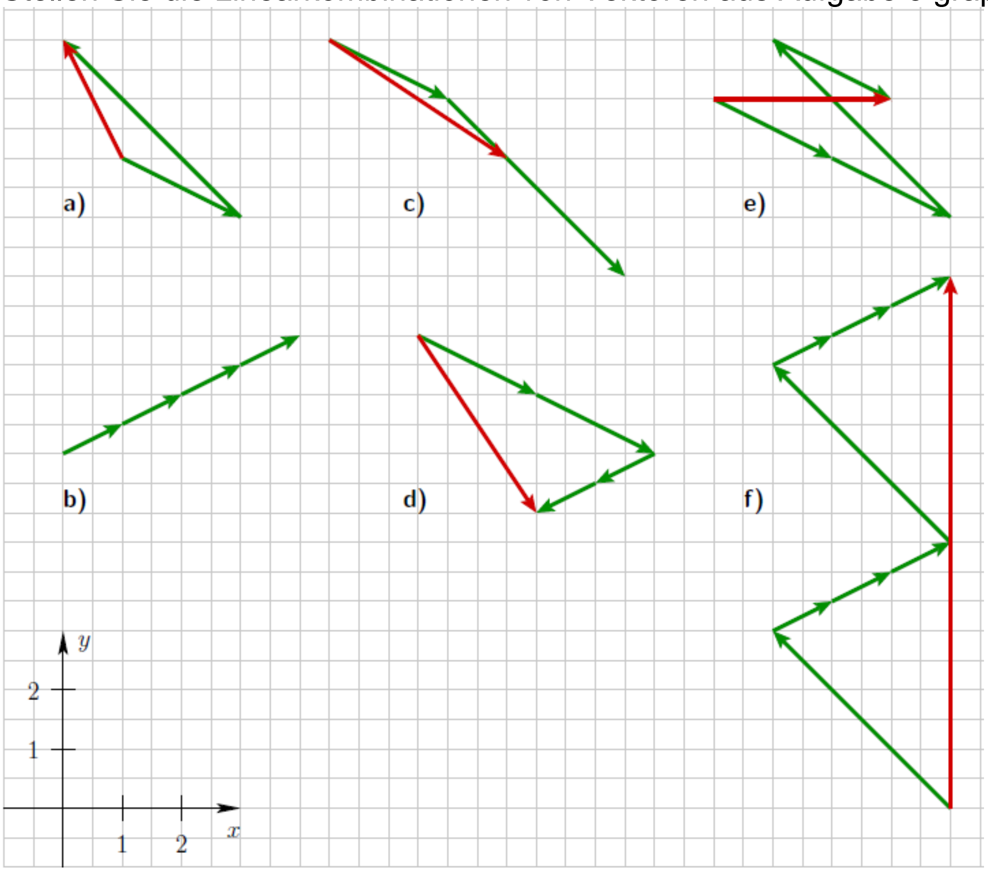
f)

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = 2\cdot(\mathbf{v} + 3\cdot\mathbf{w}) = 2\cdot\mathbf{v} + 6\cdot\mathbf{w} = 2\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 6\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-3)+6\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 6\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}}}.$$

3. Graphische Darstellung von Linearkombinationen von Vektoren

Stellen Sie die Linearkombinationen von Vektoren aus Aufgabe 3 graphisch dar.



4. Linearkombinationen von Vektoren mit Python/Numpy berechnen
Berechnen Sie die Linearkombinationen von Vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
u=np.array([2,-1]);
v=np.array([-3,3]);
w=np.array([1,1/2]);
# Berechnungen:
a=u+v;
b=4*w;
c=u-1/3*v;
d= 2*u-2*w;
e=2*u+v+u;
f=2*(v+3*w);
# Ausgabe:
print('a=',a);
print('b=',b);
print('c=',c);
print('d=',d);
print('e=',e);
print('f=',f);
```

5. Linearkombinationen von Vektoren mit Python/Sympy berechnen
Berechnen Sie die Linearkombinationen von Vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Sympy.

```
# Python initialisieren:
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter:
u=sp.Matrix([[2],[-1]]);
v=sp.Matrix([[-3],[3]]);
w=sp.Matrix([[1],[1/2]]);
sp.init_printing();
# Berechnungen:
a=u+v
b=4*w;
c=u-1/3*v;
d= 2*u-2*w;
e=2*u+v+u;
f=2*(v+3*w);
# Ausgabe:
dp.display(a);
dp.display(b);
dp.display(c);
dp.display(d);
dp.display(e);
dp.display(f);
```

6. Vektoren in Linearkombinationen zerlegen

Zerlegen Sie den Vektor $\vec{r}$ in eine Linearkombination der anderen gegebenen Vektoren.

a)

$\vec{r} = \binom{4}{5}, \vec{v} = \binom{2}{1}, \vec{w} = \binom{-1}{1}$.

b)

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a)

$$a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - b \\ a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten ein LGS für a und b:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} [1] & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} [1] & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} [1] & 1 & 5 \\ 0 & [1] & 2 \end{array}\right]$$

$$1 \cdot b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$a + b = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 5 - b = 5 - 2 = 3.$$

Es ergibt sich:

$\vec{r} = 3\vec{v} + 2\,\vec{w}$

b)

$$a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a \\ -a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -2b \\ -3b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c \\ 3c \\ 4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b - 2c \\ -a - 2b + 3c \\ a - 3b + 4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten ein LGS für a, b und c:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -18 \\ 1 & -3 & 4 & -27 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -3 & 18 \\ 1 & -3 & 4 & -27 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -3 & 18 \\ 0 & -5 & 7 & -45 \\ 0 & -3 & 4 & -26 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \frac{3}{5} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -3 & 18 \\ 0 & [5] & -7 & 45 \\ 0 & 3 & -4 & 26 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -3 & 18 \\ 0 & [5] & -7 & 45 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} [1] & 2 & -3 & 18 \\ 0 & [5] & -7 & 45 \\ 0 & 0 & [1] & -5 \end{array}\right].$$

$$1c = -5 \quad \Rightarrow \quad c = -5$$

$$5b - 7c = 45 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{45 + 7c}{5} = \frac{45 + 7 \cdot (-5)}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$1a + 2b - 3c = 18 \quad \Rightarrow \quad a = 18 - 2b + 3c = 18 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = -1.$$

$\vec{r} = -\vec{u} + 2\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$.

7. Aussagen über trigonometrische Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Jeder Vektor kann in ein Produkt aus Betrag und Richtungsvektor zerlegt werden.	X	
b) Jeder Vektor kann eindeutig in ein Produkt aus Betrag und Richtungsvektor zerlegt werden.		X
c) Jeder Richtungsvektor ist ein Einheitsvektor.	X	
d) Der Betrag eines Vektors ist eine positive reelle Zahl, die je nach Anwendung eine Masseinheit trägt.	X	

8. Vektoren in Betrag und Richtungsvektor zerlegen

Zerlegen Sie jeweils den Vektor in Betrag und Richtungsvektor.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

b)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

c)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{5 \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}}}.$$

d)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{6} \\ \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{6 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}}}.$$

e)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\sqrt{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}.$$

f)

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die *Zerlegung*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\sqrt{14} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}}}.$$

9. Vektoren bestimmen

Bestimmen Sie jeweils die Komponenten des gesuchten Vektors.

a) Ein Vektor in 2D mit Betrag 5, der in Richtung der positiven x-Achse zeigt.

b) Ein Vektor in 2D mit Betrag 4, der vom Punkt (3;-2) in Richtung des Punktes (5;-1) zeigt.

c) Ein Vektor in 2D mit Betrag 3, der entlang der Winkelhalbierenden im xy-Diagramm in positive x- und y-Richtung zeigt.

d) Ein Vektor in 2D mit Betrag 10 und Steigung -3 gegenüber der x-Achse.

a)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 5 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

b)

Wir suchen den *Vektor* $\mathbf{v}$ in 2D mit *Betrag* $|\mathbf{v}| = 4$ der vom *Punkt* $A = (3; -2)$ in Richtung des *Punktes* $B = (5; -1)$ zeigt. Ein *Vektor*, der offensichtlich in die gleiche Richtung zeigt, ist der *Verbindungsvektor*

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ -1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 4 \cdot \hat{\mathbf{w}} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

c)

Wir suchen den *Vektor* $\mathbf{v}$ in 2D mit *Betrag* $|\mathbf{v}| = 3$, der entlang der *Winkelhalbierenden* im x-y-Diagramm in positive x-Richtung und positive y-Richtung zeigt. Ein *Vektor*, der offensichtlich in die gleiche Richtung zeigt, ist

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 3 \cdot \hat{\mathbf{w}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

d)

Wir suchen den *Vektor* $\mathbf{v}$ in 2D mit *Betrag* $|\mathbf{v}| = 10$ und *Steigung* $S = -3$ gegenüber der x-Achse. Ein *Vektor*, der offensichtlich in die gleiche Richtung zeigt, ist

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Betrag und *Richtungsvektor* sind

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

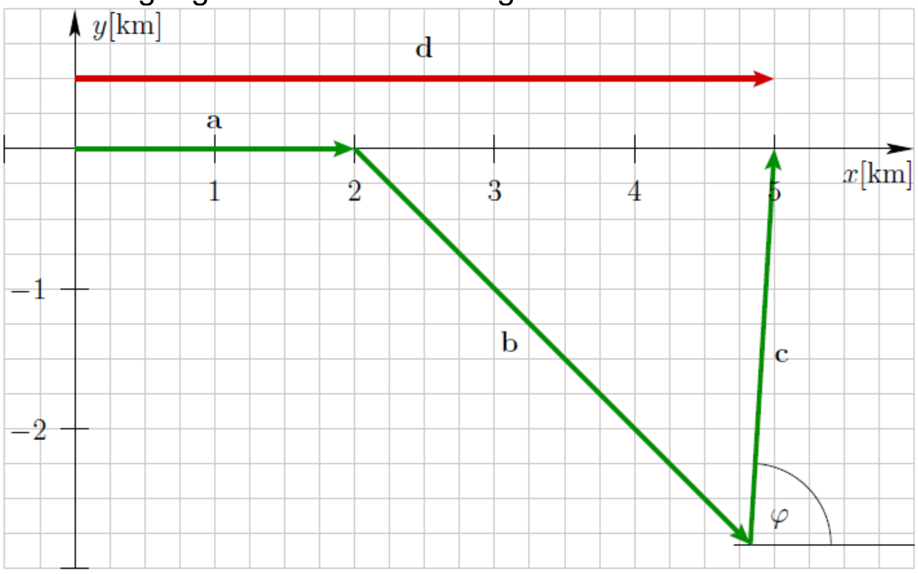
Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 10 \cdot \hat{\mathbf{w}} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \sqrt{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ -3\sqrt{10} \end{bmatrix}}}.$$

10. Bootsfahrt

Ein Boot fahre zuerst 2 km Richtung Osten, dann 4 km Richtung Südosten und dann eine Distanz in unbekannte Richtung. Die Endposition des Bootes liegt 5 km östlich vom Startpunkt. Bestimmen Sie Länge und Winkel gegenüber der östlichen Richtung des dritten Fahrabschnitts.

Die Bewegung des Bootes sieht folgendermassen aus:



Die Richtungsvektoren der ersten beiden Fahrabschnitte sind

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{e}}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\left|\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right|} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Als Distanzen erhalten wir

$$\mathbf{a} = a \cdot \hat{\mathbf{a}} \approx 2.0\,\mathrm{km} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 2.0\,\mathrm{km} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0\,\mathrm{km} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = b \cdot \hat{\mathbf{b}} \approx 4.0\,\mathrm{km} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \frac{4.0\,\mathrm{km}}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \\ -2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = d \cdot \hat{\mathbf{d}} \approx 5.0\,\mathrm{km} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 5.0\,\mathrm{km} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0\,\mathrm{km} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} \approx \begin{bmatrix} 5.0\,\mathrm{km} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0\,\mathrm{km} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \\ -2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.0\,\mathrm{km} - 2.0\,\mathrm{km} - 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \\ 0 - 0 + 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3.0 - 2.0 \cdot \sqrt{2})\,\mathrm{km} \\ 2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.17\,\mathrm{km} \\ 2.8\,\mathrm{km} \end{bmatrix}$$

Länge und Winkel gegenüber der östlichen Richtung des dritten Fahrtabschnitts

$$\underline{\underline{|\mathbf{c}|}} = \sqrt{(3.0 - 2.0 \cdot \sqrt{2})^2 + (2.0 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot \mathrm{km} = \sqrt{9.0 - 2.0 \cdot 3.0 \cdot 2.0 \cdot \sqrt{2} + 8.0 + 8.0} \cdot \mathrm{km}$$

$$= \sqrt{25 - 12 \cdot \sqrt{2}} \cdot \mathrm{km} \approx \underline{\underline{2.8\,\mathrm{km.}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi}} = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \arctan\left(\frac{2.0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km}}{(3.0 - 2.0 \cdot \sqrt{2})\,\mathrm{km}}\right) = \arctan\left(\frac{2.0 \cdot \sqrt{2}}{3.0 - 2.0 \cdot \sqrt{2}}\right) \approx \underline{\underline{0.48\,\pi.}}$$