Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 6

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Funktionsgraphen verschieben

Wir modifizieren jeweils den *Funktionsterm*, so dass der *Graph* die verlangte Verschiebung erfährt.

a) Wir verschieben $f(x) = x^2$ um $\Delta y = 3$ nach oben. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x) + \Delta y = f(x) + 3 = \underline{\underline{x^2 + 3.}} \tag{1}$$

b) Wir verschieben $f(x) = 1/x$ um $\Delta x = 2$ nach rechts. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x - \Delta x) = f(x - 2) = \underline{\underline{\frac{1}{x-2}}}. \tag{2}$$

c) Wir verschieben $f(x) = 2^x$ um $\Delta x = 3$ nach links. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x + \Delta x) = f(x + 3) = \underline{\underline{2^{x+3}.}} \tag{3}$$

d) Wir verschieben $f(x) = \sqrt{x-2}$ um $\Delta y = 2$ nach unten. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x) - \Delta y = \underline{\underline{\sqrt{x-2} - 2.}} \tag{4}$$

e) Wir verschieben $f(x) = x^2 \cdot \sin(x-3)$ um $\Delta x = 4$ nach links. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x + \Delta x) = f(x + 4) = (x+4)^2 \cdot \sin(x + 4 - 3) = \underline{\underline{(x+4)^2 \cdot \sin(x+1).}} \tag{5}$$

f) Wir verschieben $f(x) = 3^{x+2} \cdot \cosh(2x)$ um $\Delta x = 1$ nach rechts. Der modifizierte *Funktionsterm* lautet

$$\underline{\underline{g(x)}} = f(x - \Delta x) = f(x - 1) = 3^{x-1+2} \cdot \cosh\big(2 \cdot (x-1)\big) = \underline{\underline{3^{x+1} \cdot \cosh(2x-2).}} \tag{6}$$

2. Parität von Funktionen

Wir bestimmen jeweils die *Parität* des angegebenen *Funktionsterms*.

a) Wir betrachten $f(x) = x^2$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2 = \underline{f(x).} \tag{7}$$

Die *Funktion* hat demnach *positive Parität*.

b) Wir betrachten $f(x) = 1/x$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = \underline{-f(x).} \tag{8}$$

Die *Funktion* hat demnach *negative Parität*.

c) Wir betrachten $f(x) = -2^{|x|}$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = -2^{|-x|} = -2^{|x|} = \underline{f(x).} \tag{9}$$

Die *Funktion* hat demnach *positive Parität*.

d) Wir betrachten $f(x) = \sin(3x)$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = \sin\big(3 \cdot (-x)\big) = \sin(-3x) = -\sin(3x) = \underline{-f(x).} \tag{10}$$

Die *Funktion* hat demnach *negative Parität*.

e) Wir betrachten $f(x) = x \cdot \cos(5x)$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = (-x) \cdot \cos\big(5 \cdot (-x)\big) = -x \cdot \cos(-5x) = -x \cdot \cos(5x) = \underline{-f(x).} \tag{11}$$

Die *Funktion* hat demnach *negative Parität.*

f) Wir betrachten $f(x) = \cosh(x) \cdot \sinh\big(x^2\big)$. Es gilt

$$\underline{f(-x)} = \cosh(-x) \cdot \sinh\Big((-x)^2\Big) = \cosh(x) \cdot \sinh\big(x^2\big) = \underline{f(x).} \tag{12}$$

Die *Funktion* hat demnach *positive Parität*.

3. Aussagen über lineare Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der *Graph* einer *linearen Funktion* ist in jedem Fall eine *Gerade*.	●	○
b) Jede *lineare Funktion* ist *injektiv*.	○	●
c) Eine *lineare Funktion* ist genau dann *bijektiv*, wenn ihre *Steigung* nicht verschwindet.	●	○
d) Der *Graph* jeder *linearen Funktion* schneidet die y-Achse.	●	○

4. Umkehrfunktion einer linearen Funktion

Wir betrachten $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}$ und die *lineare Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := m \cdot x + q. \end{aligned} \tag{13}$$

a) Um die *Umkehrfunktion* von f zu berechnen, bestimmen wir die *Lösung* der *Gleichung*

$$y = f(x) = m \cdot x + q \qquad \Big| -q \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \qquad y - q = m \cdot x \qquad \Big| : m \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{y-q}{m} = x. \tag{16}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{f^{-1}(y) = \frac{y-q}{m} = \frac{1}{m} \cdot y - \frac{q}{m}}}\,. \tag{17}$$

b) Wir zeigen mehrere Varianten, um zu begründen, warum die *Umkehrfunktion* von f nur für $m \neq 0$ existiert.

Variante 1: Für $m = 0$ würde gelten

$$f(x) = m \cdot x + q = 0 \cdot x + q = 0 + q = q \equiv \textit{konst}. \tag{18}$$

Das bedeutet, für jedes $x \in \mathbb{R}$ hätte der *Funktionswert* $f(x)$ den gleichen Wert q. Die *Funktion* f wäre demnach nicht *injektiv*, somit nicht *bijektiv* und folglich nicht *umkehrbar*.

Variante 2: Für $m = 0$ wäre der *Graph* von f eine *horizontale Gerade* im x-y-Diagramm. Somit wäre f offensichtlich nicht *bijektiv* und folglich nicht *umkehrbar*.

Variante 3: Um die *Umkehrfunktion* von f zu berechnen, haben wir in (15) durch m *dividiert*. Diese *Division* wäre für $m = 0$ nicht möglich, was die Existenz der *Umkehrfunktion* in diesem Fall ausschliesst.

c) Für den x-Achsabschnitt p von f gilt

$$f(p) = 0. \tag{19}$$

Daraus und durch Einsetzen von (17) folgt

$$\underline{\underline{p}} = f^{-1}(0) = \frac{0-q}{m} = \frac{-q}{m} = \underline{\underline{-\frac{q}{m}}}\,. \tag{20}$$

d) Wir betrachten die *lineare Funktion*

$$f(x) = 3 \cdot x + 5 \tag{21}$$

mit den *Grund-Form-Parametern* $m = 3$ und $q = 5$. Gemäss (17) und (20) sind die *Umkehrfunktion* und der x-Achsabschnitt

$$\underline{\underline{f^{-1}(y)}} = \frac{y-q}{m} = \underline{\underline{\frac{y-5}{3} = \frac{1}{3} \cdot y - \frac{5}{3}}} \tag{22}$$

$$\underline{\underline{p}} = -\frac{q}{m} = \underline{\underline{-\frac{5}{3}}}\,. \tag{23}$$

5. Arbeiten mit linearen Funktionen

Wir bestimmen jeweils das gesuchte Objekt.

a) Gesucht ist eine *lineare Funktion* mit *Steigung* $m = -2$, deren *Graph* durch den *Punkt* $\big(x_0\,;\,y_0\big) = \big(1\,;\,-14\big)$ verläuft. *Wir* erhalten wir

$$\underline{\underline{f(x)}} = m \cdot \big(x - x_0\big) + y_0 = -2 \cdot (x-1) + (-14) = -2 \cdot x + 2 - 14 = \underline{\underline{-2 \cdot x - 12.}} \tag{24}$$

b) Gesucht ist eine *lineare Funktion*, deren *Bildmenge* nicht ganz $\mathbb{R}$ umfasst und deren *Graph* durch den *Punkt* $\big(-3; 5\big)$ verläuft. Eine *lineare Funktion* ist genau dann nicht *surjektiv*, wenn ihre *Steigung* verschwindet, d.h. wenn $m = 0$. Eine solche *Funktion* ist *konstant*. Wir erhalten

$$\underline{\underline{f(x)}} = f(-3) = \underline{\underline{5.}} \tag{25}$$

c) Wir suchen den *Schnittpunkt* $\big(x_\mathrm{T}\,;\,y_\mathrm{T}\big)$ der *Geraden* durch die *Punkte* $\big(x_1\,;\,y_1\big) = \big(0; -10\big)$ und $\big(x_2\,;\,y_2\big) = \big(-1; -14\big)$ mit der *Geraden* durch die *Punkte* $\big(x_3\,;\,y_3\big) = \big(-8; 13\big)$ und $\big(x_4\,;\,y_4\big) = \big(7; -2\big)$. Mit Hilfe der *Zwei-Punkt-Form* für *lineare Funktionen* können wir die beiden *Geraden* beschreiben als *Graphen* der *linearen Funktionen*

$$\begin{aligned} f(x) &= m \cdot \big(x - x_1\big) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \big(x - x_1\big) + y_1 = \frac{-14 - (-10)}{-1 - 0} \cdot \big(x - 0\big) + (-10) \\ &= \frac{-14 + 10}{-1} \cdot x - 10 = 4 \cdot x - 10 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \tilde{m} \cdot \big(x - x_0\big) + y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \cdot \big(x - x_3\big) + y_3 = \frac{-2 - 13}{7 - (-8)} \cdot \big(x - (-8)\big) + 13 \\ &= \frac{-15}{15} \cdot (x + 8) + 13 = -x - 8 + 13 = -x + 5. \end{aligned} \tag{27}$$

Es muss gelten

$$f\big(x_\mathrm{T}\big) = \tilde{f}\big(x_\mathrm{T}\big) \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot x_\mathrm{T} - 10 = -x_\mathrm{T} + 5 \qquad \big| + x_\mathrm{T} + 10 \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot x_\mathrm{T} = 15 \qquad \big| : 5. \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_\mathrm{T} = \frac{15}{5} = 3 \tag{31}$$

und

$$y_\mathrm{T} = f\big(x_\mathrm{T}\big) = f(3) = 4 \cdot 3 - 10 = 12 - 10 = 2. \tag{32}$$

Der *Schnittpunkt* der *Geraden* ist demnach

$$\underline{\underline{\big(x_\mathrm{T}\,;\,y_\mathrm{T}\big) = \big(3; 2\big)\,.}} \tag{33}$$

d) Gesucht ist eine *lineare Funktion* mit *Steigungswinkel* $\alpha = 60°$, deren *Graph* die x-Achse bei $x_0 = 1/\sqrt{3}$ schneidet. Der *Graph* dieser *Funktion* hat demnach die *Steigung*

$$m = \tan(\alpha) = \tan(60°) = \sqrt{3} \tag{34}$$

und verläuft durch den *Punkt* $\big(x_0\,;\,y_0\big) = \big(1/\sqrt{3}\,;\,0\big)$. *Wir* erhalten

$$\underline{\underline{f(x)}} = m\cdot\big(x - x_0\big) + y_0 = \sqrt{3}\cdot\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 0 = \underline{\underline{\sqrt{3}\cdot x - 1.}} \tag{35}$$

6. Aussagen über eine Funktion

Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto f(z) := 2\cdot(2 - z). \end{aligned} \tag{36}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Funktion* f ist eine *lineare Funktion*.	●	○
b) Der *Graph* von f ist eine *Gerade* mit *Steigung* 2.	○	●
c) Es gilt $f(0) = 2$.	○	●
d) Der *Graph* von f verläuft durch den *Punkt* $\big(-2\,;\,8\big)$.	●	○
e) Die *Bildmenge* von f ist ganz $\mathbb{R}$.	●	○
f) Die *Gleichung* $f(z) = z$ hat keine *Lösung*.	○	●

7. Preise eines Taxis

Wir betrachten ein Taxi, dessen Taxometer so eingestellt ist, dass jede Fahrt mindestens $P_0 = 8.00$ CHF kostet und pro gefahrenen *Kilometer* noch $\Delta K = 2.50$ CHF hinzukommen.

a) Wir beschreiben den *Fahrpreis* P in Abhängigkeit der *Fahrstrecke* s durch eine *lineare Funktion* mit *Funktionsterm* der Form

$$P(s) = m\cdot s + q. \tag{37}$$

Offensichtlich soll gelten

$$P_0 = P(0) = m\cdot 0 + q = 0 + q = q. \tag{38}$$

Für die *Steigung* muss gelten

$$m = \frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{2.50\,\text{CHF}}{1\,\text{km}} = 2.50\,\frac{\text{CHF}}{\text{km}}. \tag{39}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{P(s)}} = m\cdot s + q = \underline{\underline{2.50\,\frac{\text{CHF}}{\text{km}}\cdot s + 8.00\,\text{CHF}.}} \tag{40}$$

b) Die Fahrt über eine Strecke von $s_\text{b} \approx 14.0\,\text{km}$ von Chur nach Landquart kostet

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P_\text{b}}} = P(s_\text{b}) \approx P(14.0\,\text{km}) &= 2.50\,\frac{\text{CHF}}{\text{km}}\cdot 14.0\,\text{km} + 8.00\,\text{CHF} = 35.0\,\text{CHF} + 8.00\,\text{CHF} \\ &= \underline{\underline{43.00\,\text{CHF}.}} \end{aligned} \tag{41}$$

c) Wenn dafür ein Budget von $B \approx 68.00\,\mathrm{CHF}$ zur Verfügung steht, dann kann mit dem Taxi eine *Strecke* gefahren werden von

$$\underline{\underline{s_\mathrm{c}}} = K^{-1}(B) = \frac{B-q}{m} \approx \frac{68.00\,\mathrm{CHF} - 8.00\,\mathrm{CHF}}{2.50\,\frac{\mathrm{CHF}}{\mathrm{km}}} = \underline{\underline{24.0\,\mathrm{km}.}} \tag{42}$$

8. Aussagen über eine lineare Funktion

Wir betrachten die *lineare Funktion*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto h(t) := 3 \cdot (t-5) + 9. \end{aligned} \tag{43}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der *Graph* von h ist eine *Gerade* mit *Steigung* 3.	●	○
b) Es gilt $h(2) = 0$.	●	○
c) Der *Graph* von h verläuft durch den *Punkt* $\big(-5\,;9\big)$.	○	●
d) Der *Graph* von h schneidet die y-Achse bei $q = -6$.	●	○
e) Die *Funktion* h ist *bijektiv*.	●	○

9. Notenskala einer Prüfung

Wir betrachten eine Mathematik-Prüfung, für welche eine *lineare Notenskala* festgelegt werden soll, so dass $p_1 = 0$ Punkte mit der Note $N_1 = 1$ und $p_2 = 60$ Punkte mit der Note $N_2 = 6$ bewertet werden.

a) Wir beschreiben die Notenskala durch eine *lineare Funktion*. Deren *Steigung* ist

$$m = \frac{\Delta N}{\Delta p} = \frac{N_2 - N_1}{p_2 - p_1} = \frac{6-1}{60-0} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}\,. \tag{44}$$

Mit Hilfe der *Zwei-Punkt-Form* für *linare Funktionen* erhalten wir

$$\underline{\underline{N(p)}} = m \cdot (p - p_1) + N_1 = \frac{1}{12} \cdot (p-0) + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{12} \cdot p + 1\,.}} \tag{45}$$

b) Eine Punktzahl von $p_\mathrm{b} = 43$ wird bewertet mit der Note

$$\underline{\underline{N_\mathrm{b}}} = N(p_\mathrm{b}) = N(43) = \frac{1}{12} \cdot 43 + 1 \approx \underline{\underline{4.58\,.}} \tag{46}$$

c) Für eine genügende Note $N_\mathrm{c} = 4$ muss mindestens eine Punktzahl erzielt werden von

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p_\mathrm{c}}} &= N^{-1}(N_\mathrm{c}) = \frac{1}{m} \cdot N_\mathrm{c} - \frac{q}{m} = \frac{1}{\frac{1}{12}} \cdot 4 - \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12 \cdot 4 - 12 = 12 \cdot (4-1) = 12 \cdot 3 \\ &= \underline{\underline{36.}} \end{aligned} \tag{47}$$

10. Aussagen über verallgemeinerte Exponentialfunktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) *Verallgemeinerte Exponentialfunktionen* beschreiben jeweils die Beziehung zwischen zwei Grössen in vielen Anwendungen aus Alltag, Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft.	●	○
b) *Verallgemeinerte Exponentialfunktionen* sind immer *injektiv.*	●	○
c) *Verallgemeinerte Exponentialfunktionen* sind immer *strikt monoton.*	●	○
d) Jede *verallgemeinerte Exponentialfunktion* hat eine *Umkehrfunktion*, sofern man die *Zielmenge* geschickt wählt.	●	○
e) Jede *eigentliche Exponentialfunktion* ist auch eine *verallgemeinerte Exponentialfunktion.*	●	○

11. Eigenschaften von verallgemeinerten Exponentialfunktionen

Seien $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\Sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und f die *verallgemeinerte Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}}. \end{aligned} \tag{48}$$

Wir beweisen die folgenden Eigenschaften von f für alle $x, \Delta x \in \mathbb{R}$.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{f(x_0)}} = y_0 \cdot a^{\frac{x_0-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^0 = y_0 \cdot 1 = \underline{\underline{y_0.}} \tag{49}$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f(x+\Sigma)}} &= y_0 \cdot a^{\frac{x+\Sigma-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{\Sigma}{\Sigma}+\frac{x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{\Sigma}{\Sigma}} \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^1 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} = a \cdot y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} \\ &= \underline{\underline{a \cdot f(x).}} \end{aligned} \tag{50}$$

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f(x-\Sigma)}} &= y_0 \cdot a^{\frac{x-\Sigma-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{-\Sigma}{\Sigma}+\frac{x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{-\frac{\Sigma}{\Sigma}} \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{-1} \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} \\ &= \frac{1}{a} \cdot y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} = \underline{\underline{\frac{f(x)}{a}}}. \end{aligned} \tag{51}$$

d) Für alle $x, \Delta x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\underline{\underline{f(x+\Delta x)}} = y_0 \cdot a^{\frac{x+\Delta x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{\Delta x}{\Sigma}+\frac{x-x_0}{\Sigma}} = y_0 \cdot a^{\frac{\Delta x}{\Sigma}} \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} = \underline{\underline{a^{\frac{\Delta x}{\Sigma}} \cdot f(x).}} \tag{52}$$

12. Falten eines Papiers

Wir betrachten ein *rechteckiges* Blatt Papier mit *Dicke* und *Fläche* gemäss

$$d_0 \approx 0.100\,\mathrm{mm} = 1.00 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 1.00 \cdot 10^{-1-3}\,\mathrm{m} = 1.00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \tag{53}$$

$$A_0 \approx 1.00\,\mathrm{m}^2. \tag{54}$$

a) Das Papier werde in der Mitte gefaltet. Dabei werden die beiden Falt-Teile aufeinander gelegt und das Ganze als neues Blatt betrachtet. *Dicke* und *Fläche* des Papiers ändern beim Falten um die *Faktoren*

$$\underline{\underline{a = 2}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}. \tag{55}$$

b) Wir beschreiben die Entwicklungen der *Dicke* und der *Fläche* des Papiers bei wiederholtem Falten durch je eine *verallgemeinerte Exponentialfunktion*. Als unabhängige Variable verwenden wir dazu

$$n :\equiv \text{Anzahl durchgeführte Faltungen.} \tag{56}$$

Gemäss Situationsangaben legen wir sinnvollerweise die folgenden Parameter fest. (57)

Funktion:	RS:	RW:	BA:	SW:
Dicke:	$n_0 = 0$	$d_0 \approx 1.00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$	$a = 2$	$\Sigma = 1$
Fläche:	$n_0 = 0$	$A_0 \approx 1.00\,\mathrm{m}^2$	$b = 1/2$	$\Sigma = 1$

Daraus erhalten wir die *verallgemeinerten Exponentialfunktionen*

Dicke: $$\underline{\underline{d(n)}} = d_0 \cdot a^{\frac{n-n_0}{\Sigma}} = d_0 \cdot 2^{\frac{n-0}{1}} = d_0 \cdot 2^n \approx \underline{\underline{1.00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 2^n}} \tag{58}$$

Fläche: $$\underline{\underline{A(n)}} = A_0 \cdot b^{\frac{n-n_0}{\Sigma}} = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-0}{1}} = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \underline{\underline{1.00\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1}{2^n}}}. \tag{59}$$

c) Es sei n_E die Anzahl durchzuführende Faltungen, bis die *Dicke* des Papiers die *mittlere Distanz* zwischen Erde und Mond von

$$d_\mathrm{E} \approx 400 \cdot 10^3\,\mathrm{km} = 4.00 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 4.00 \cdot 10^{2+3+3}\,\mathrm{m} = 4.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \tag{60}$$

übersteigt. Gemäss (58) gilt

$$d_\mathrm{E} = d(n_\mathrm{E}) = d_0 \cdot 2^{n_\mathrm{E}} \qquad \big|\, : d_0 \tag{61}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{d_\mathrm{E}}{d_0} = 2^{n_\mathrm{E}} \qquad \big|\, \log_2(\ldots). \tag{62}$$

Daraus und durch *Aufrunden* auf die nächst grössere *natürliche Zahl* erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{n_\mathrm{E}}} &= \left\lceil \log_2\left(\frac{d_\mathrm{E}}{d_0}\right) \right\rceil \approx \left\lceil \log_2\left(\frac{4.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{1.00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}\right) \right\rceil = \left\lceil \log_2\left(4.00 \cdot 10^{12}\right) \right\rceil \\ &= \left\lceil \log_2(4.00) + 12 \cdot \log_2(10) \right\rceil \approx \lceil 41.9 \rceil = \underline{\underline{42.}} \end{aligned} \tag{63}$$

d) Es sei n_{E} die Anzahl durchzuführende Faltungen, bis die *Fläche* des Papiers den von Auge gerade noch sichtbaren Wert von

$$A_{\mathrm{E}} \approx 0.100\,\mathrm{mm}^2 = 1.00 \cdot 10^{-1} \cdot \left(10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2 = 1.00 \cdot 10^{-1-2\cdot 3}\,\mathrm{m}^2 = 1.00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \tag{64}$$

unterschreitet. Gemäss (58) gilt

$$A_{\mathrm{E}} = A\big(n_{\mathrm{E}}\big) = A_0 \cdot \frac{1}{2^{n_{\mathrm{E}}}} \qquad \Big| \cdot 2^{n_{\mathrm{E}}} \tag{65}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2^{n_{\mathrm{E}}} \cdot A_{\mathrm{E}} = A_0 \qquad \Big| : A_{\mathrm{E}} \tag{66}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2^{n_{\mathrm{E}}} = \frac{A_0}{A_{\mathrm{E}}} \qquad \Big| \log_2(\ldots). \tag{67}$$

Daraus und durch *Aufrunden* auf die nächst grössere *natürliche Zahl* erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{n_{\mathrm{E}}}} &= \left\lceil \log_2\left(\frac{A_0}{A_{\mathrm{E}}}\right) \right\rceil \approx \left\lceil \log_2\left(\frac{1.00\,\mathrm{m}^2}{1.00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2}\right) \right\rceil = \left\lceil \log_2\big(1.00 \cdot 10^7\big) \right\rceil \\ &= \left\lceil \log_2(1.00) + 7 \cdot \log_2(10) \right\rceil \approx \left\lceil 23.3 \right\rceil = \underline{\underline{24.}} \end{aligned} \tag{68}$$

15. Aussagen über eine verallgemeinerte Exponentialfunktion

Wir betrachten die *verallgemeinerte Exponentialfunktion*

$$R(z) = 12\,\mathrm{J} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{z-2\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}}} . \tag{69}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gibt ein z, so dass gilt $R(z) = 13\,\mathrm{J}$.	●	○
b) Alle *Funktionswerte* von R sind *positiv.*	●	○
c) Die *Funktion* R lässt sich auch mit Hilfe der *Basis* $1/2$ ausdrücken.	●	○
d) Die *Funktion* R ist *monoton steigend.*	○	●
e) Der *Graph* der *Funktion* R verläuft durch den *Punkt* $\big(5\,;4\big)$.	○	●