Analysis

Aussagenlogik

Ana 1

- Lehre vom folgerichtigen Denken
- Befasst sich mit Aussagen: es wird überprüft, ob eine Aussage wahr oder falsch ist (es gibt keine weiteren Möglichkeiten)
- Die Aussagen werden typischerweise mit Buchstaben abgekürzt

Beispiel:
Wenn die Sonne scheint und er keinen Besuch bekommt, dann geht Peter am Sonntag Pilze sammeln.

Wenn die Sonne scheint und er keinen Besuch bekommt, dann geht Peter am Sonntag Pilze sammeln.

→ 3 Aussagen, die miteinander verknüpft sind: A, B, C

A: w
B: w

dann C: w

Aussagenlogik

Verbindungen von Aussagen

Wahrheitstabelle

- Negation: „nicht", ¬

A	¬A
w	f
f	w

- Konjunktion: „und", ∧

A	B	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1 Aussage falsch → Konjunktion auch falsch

Aussagenlogik

Verbindungen von Aussagen

- Implikation: „wenn A dann B“, „A ist hinreichend für B“, „B ist notwendig für A“, $A \Rightarrow B$

Beispiel:
Fussballstar Huber wird vom Schiedsrichter ermahnt: wenn sie den Ball nochmals absichtlich mit der Hand spielen, erhalten sie die rote Karte.

A: Ball absichtlich mit der Hand spielen
B: rote Karte erhalten

$A \Rightarrow B$

1. Fall: Huber spielt Ball mit der Hand bevor das Spiel zu Ende ist

   A: w $\Rightarrow$ B: w

2. Fall: Huber spielt den Ball nicht mit der Hand bis Ende des Spiels

   A: f $\Rightarrow$ B: w, d. h. er erhält die rote Karte z. B. wegen einem Foul

   $\Rightarrow$ B: f, d. h. er erhält keine rote Karte, begeht also kein Foul, spielt den Ball nicht mit der Hand

→ Es können also die Fälle B: w und B: f eintreten, wenn A: f vorausgeht

Aussagenlogik

Disjunktion: „oder“, $\vee$

ergibt eine wahre Aussage, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist

Äquivalenz: „A genau dann, wenn B“, „A ist notwendig und hinreichend für B“, $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	w	w	f
f	f	f	w	w

Quantoren

Häufig verwendete Abkürzungen = Quantoren:

$\exists$: es existiert, es gibt

$\nexists$: es existiert kein

$\exists_1$ oder $\exists\,!$: es existiert genau ein

$\forall$: für alle

Grundlagen Logik

Satz 1.1 *Seien A, B und C Aussagen. Dann gelten die*

1. *Assoziativgesetze:*

$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C),$$
$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C).$$

2. *Distributivgesetze:*

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)),$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

3. *Kommutativgesetze:*

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A),$$
$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A).$$

4. De Morgan*schen Regeln:*

$$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)),$$
$$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)).$$

Beweis. Stellvertretend überprüfen wir die Regeln von De Morgan[1].

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

qed

Mengenlehre

Begründer der naiven Mengenlehre: Georg Cantor (1845 – 1918), dt. Mathematiker

Definition:
Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung bestimmter unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit. Die (realen oder abstrakten) Objekte nennen wir Elemente.

→ Es muss eindeutig sein, ob ein Objekt Element einer Menge ist oder nicht.

Grundlegende Aussage:
- $x \in M$ oder $M \ni x$, d. h. Element x ist in Menge M enthalten
- $x \notin M$ oder $\mathrm{M} \not\ni x$, d. h. x ist nicht Element der Menge M

Generell:
- Für Elemente werden Kleinbuchstaben verwendet
- Für Mengen werden Grossbuchstaben verwendet

Schreibweisen:
- Aufzählende Form: A = {1, 2, 3, 4, 5}
- Beschreibende Form: $A = \{x \in \mathbb{N} | \underbrace{1 \leq x \leq 10}\}$

Grundmenge Bedingung

Mengenlehre

Bemerkung:

- Mengen müssen nicht Zahlen als Elemente haben.
- Angabe der Grundmenge nicht zwingend.

Bemerkung:
Eine Menge A kann Element einer Menge B sein. Dann sind jedoch die Elemente von A keine Elemente von B.

Beispiel:

- $1 \in \{1, 2, 3\}$
- $\{1\} \notin \{1, 2, 3\}$

$\{1\} \in \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 1, 2, 3\}$

Leere Menge: $\emptyset = \{\}$, enthält keine Elemente

Mengenlehre

Mengenrelationen

$A = B$: A und B besitzen dieselben Elemente

$A \subseteq B$: A ist Teilmenge von B, d. h. jedes Element von A ist auch Element von B; $A = B$ ist möglich

$A \subset B$: A ist <u>echte</u> Teilmenge von B, d. h. B besitzt mehr Elemente als A; $\{A \subseteq B \wedge A \neq B\}$

$A \not\subset B$: A ist keine Teilmenge von B

$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$
$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$

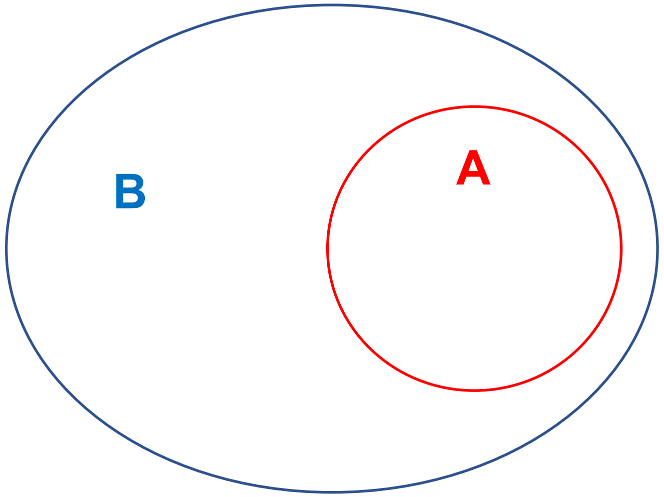
Beispiele:

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$
- $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2\}$
- $\varnothing \subseteq A$
- $\varnothing \subset A$

Mengenlehre

Darstellung mittels Venn-Diagrammen

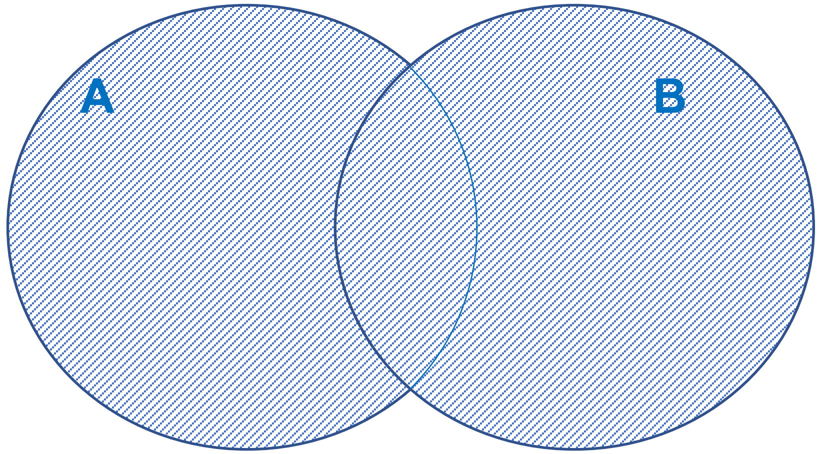
$A \subseteq B$



Mengenlehre

Mengenoperationen

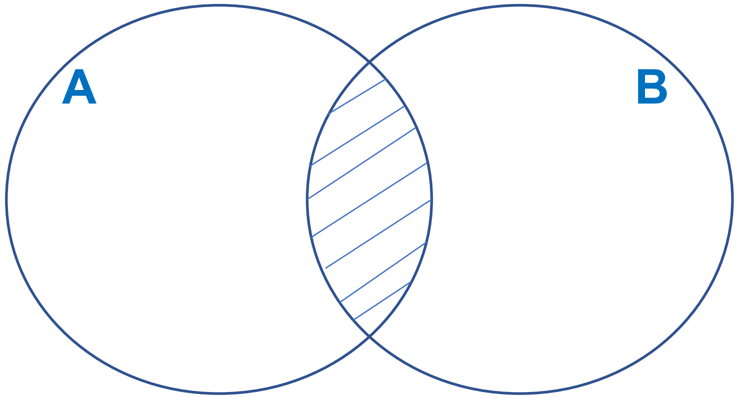
Vereinigung: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



Beispiel:

- $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} =$ $\{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \cup \{5, 8\} =$ $\{1, 2, 5, 8\}$

Schnittmenge: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



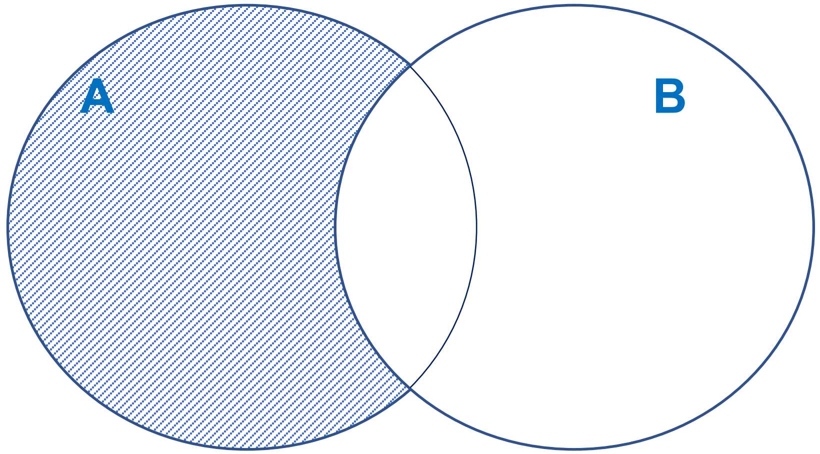
Beispiel:

- $\{1, 2\} \cap \{2, 4\} =$ $\{2\}$
- $\{1, 4\} \cap \{3, 5, 7\} =$ $\{\ \}$
- $\{2, 3\} \cap \varnothing =$ $\{\ \}$

Mengenlehre

Mengenoperationen

Mengendifferenz: $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



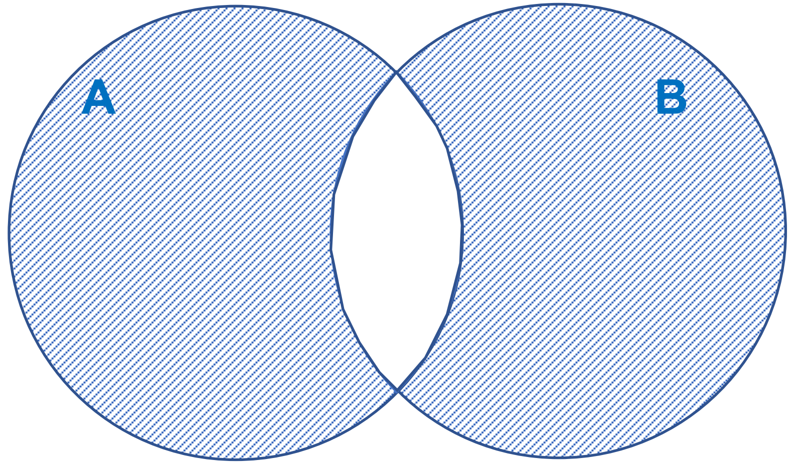
Beispiel:

- $\{1, 2\} \backslash \{2, 3\} =$ $\{1\}$
- $\{1, 2\} \backslash \{1, 2\} =$ $\{\ \}$

Symmetrische Differenz: $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Beispiel:

- $\{1, 2\}\ \Delta\ \{2, 3\} =$ $\{1, 3\}$
- $\{1, 2\}\ \Delta\ \{1, 2\} =$ $\{\ \}$
- $\{1, 2\}\ \Delta\ \{3, 4\} =$ $\{1, 2, 3, 4\}$

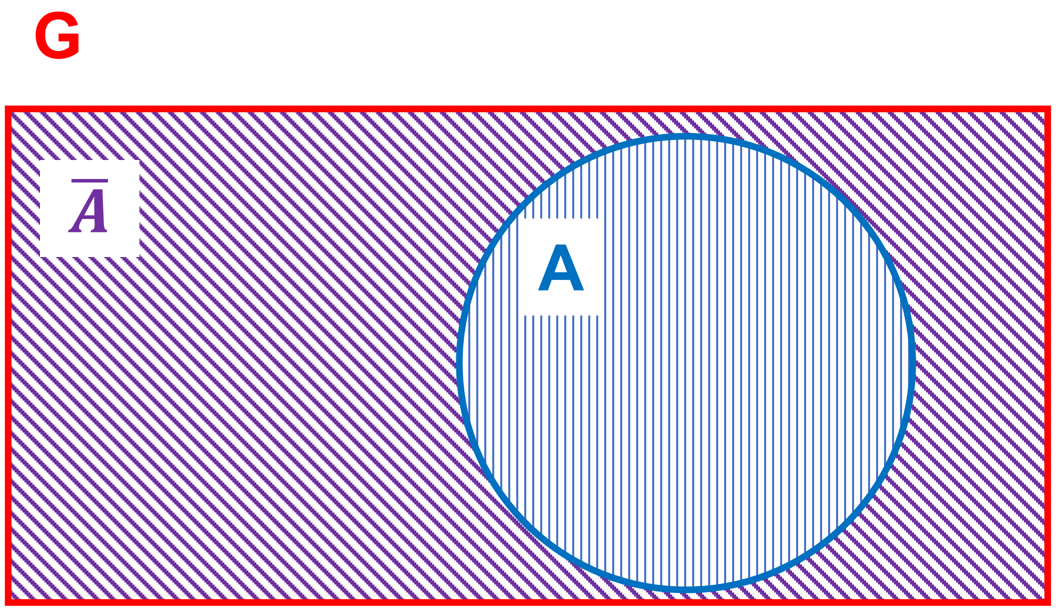


Mengenlehre

Mengenoperationen

G = Grundmenge, A $\subseteq$ G

Komplementärmenge: $\bar{A} = G\backslash A = \{x \in G | x \notin A\}$



Mengenlehre

Satz 1.9 *Seien A, B und C Mengen. Dann gelten die*

1. *Assoziativgesetze:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

2. *Distributivgesetze:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. *Kommutativgesetze:*

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

4. *Transitivität:*

$$A \subset B \text{ und } B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

5. *Falls $B, C \subset A$, dann gelten die* de Morgan*schen Regeln:*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen {1, 2, 3, 4 …}
$\mathbb{N}_0$: natürliche Zahlen mit 0

$\mathbb{Z}$: ganze Zahlen {… -2, -1, 0, 1, 2 …}

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen $\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \neq 0\}$

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen = rationale + irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen = $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$:
Nachkommastellen laufen unendlich weiter ohne periodisch zu werden

Bemerkung: $\infty \notin \mathbb{R}, -\infty \notin \mathbb{R}$

$\boxed{\rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

Zahlenmengen

Intervalle

- Geschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offen: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffen: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Beispiele:

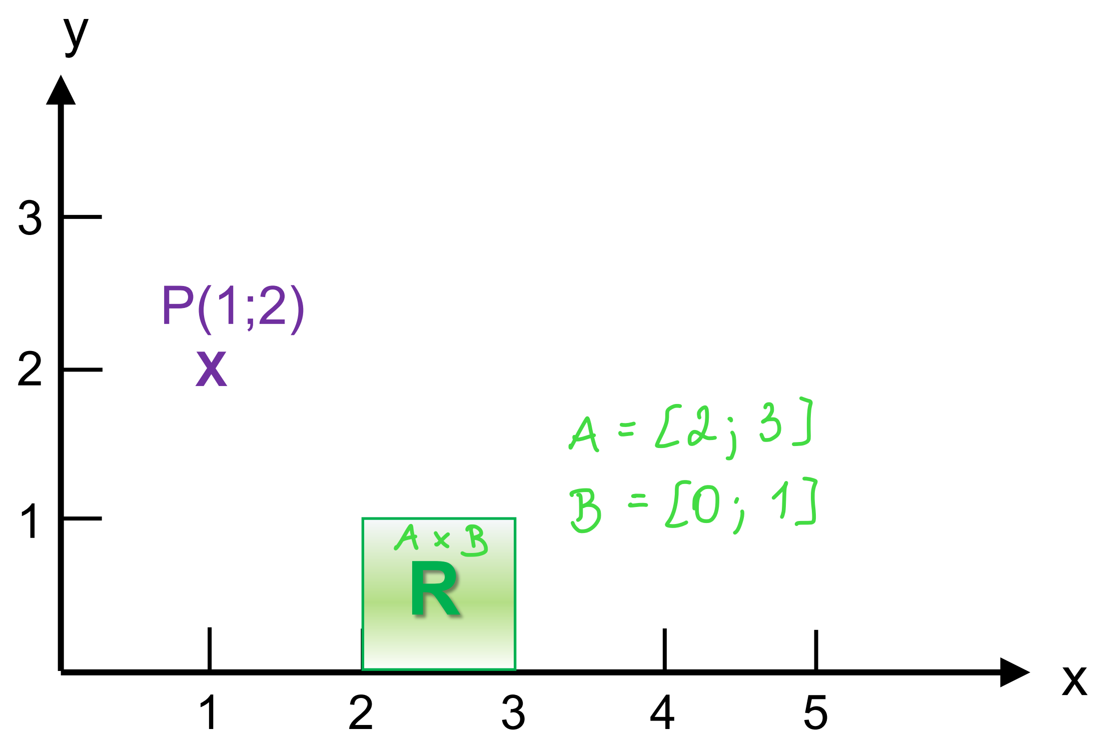
- $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$
- $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0[$

Beispiele:

- $1 \quad \in \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $3{,}2 \quad \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $-8 \quad \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $\sqrt{10} \quad \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{7} \quad \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $0 \quad \in \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Kartesisches Produkt

xy-Diagramm wird zur Darstellung genutzt, z. B. für Funktionen oder in der Geometrie.
Ein Punkt P wird durch ein Zahlenpaar (ein Tupel) beschrieben.



Beschreibung von Punkten innerhalb des Rechtecks R sehr aufwändig (es wären sehr viele Tupel nötig)

Definition:
Kartesisches Produkt von 2 Mengen A und B:

$$AxB = \{(x, y) | x \in A \land y \in B\}$$

Geordnetes Paar,
Tupel

Kartesisches Produkt

Beispiel: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

- $A \times B = \{(1;3), (1;4), (2;3), (2;4)\}$
- $B \times A = \{(3;1), (3;2), (4;1), (4;2)\}$

→ $A \times B \neq B \times A$

Bemerkung:
Falls $A \neq B$, dann $A \times B \neq B \times A$

Rechteck R durch kartesisches Produkt beschreiben:
$R = [2;3] \times [0;1]$

Abbildungen

- grundlegendes Konzept in Mathe
- einem Element der Menge A wird ein Element der Menge B zugeordnet

$$A \xrightarrow{f} B$$

Def: Eine Abbildung f aus einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b = f(a) \in f(b) \subseteq B$ zuordnet.

A : Definitionsmenge

B : Werte- / Zielmenge

$f(A)$: Bild(menge)

$$= \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ mit } b = f(a) \}$$

↳ es gibt ein

→ Zielmenge B darf grösser als $f(A)$ sein

→ Abbildung ist eindeutig definiert durch Definitionsmenge, Zielmenge und Abbildungsvorschrift

Schreibweise : $f: A \to B$
$a \to f(a)$
$b \to f(b)$

a : unabhängige Variable, Argument
b : abhängige Variable

Bsp: • $f: \{1, 2\} \to \{3, 5, 6\}$

$$x \to f(x) = 3x$$

$f(1) = 3$
$f(2) = 6$

↳ Wert 5 aus Zielmenge wird nicht angenommen

- $f : [0;1] \rightarrow [1;3]$

  $x \rightarrow f(x) = x+2$

  $f(0{,}5) = 2{,}5$

  $f([0{,}2 ; 0{,}7]) = [2{,}2 ; 2{,}7]$

- $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$

  $f(x) = x^2$

  $f(-1) = 1$ $\qquad$ $f(\{-1; 1\}) = 1$

  $f([-2; 2]) = [0; 4]$

- sei $A = \{x_1; x_2\}$ und $B = \{y\}$, dann ist

  $f : A \rightarrow B$ mit $f(x_1) = y$ und $f(x_2) = y$ eine Abbildung

- sei $A = \{x\}$ und B $\{y_1, y_2\}$, dann ist

  $f : A \rightarrow B$ mit $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$ keine Abbildung

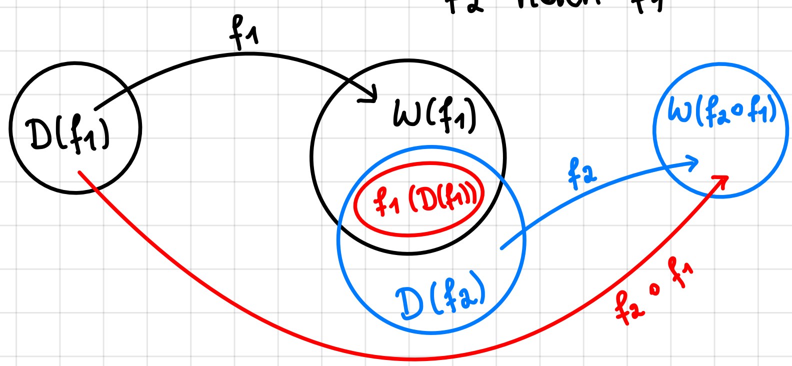
Verkettung von Abbildungen

- Hintereinanderausführung
- möglich, wenn Wertebereich der 1. Abbildung in Definitionsbereich der 2. Abbildung enthalten

$f_1 : A \rightarrow B, \quad f_2 : B \rightarrow C$

Verkettung : $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$

f_2 nach f_1



Bsp:

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$n \to \frac{1}{n} \qquad x \to \sqrt{x}$$

$$f_2 \circ f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$
$$n = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Def: Eine Abbildung $f : A \to B$, $a \to f(a)$ heisst

a) injektiv,

wenn aus $a_1 \neq a_2$ auch immer $f(a_1) \neq f(a_2)$ folgt

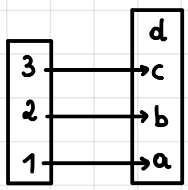
b) surjektiv,

wenn auf jedes Element der Wertemenge B abgebildet wird, d.h. $\forall b \in B \; \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

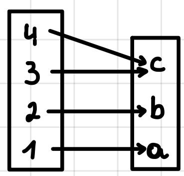
c) bijektiv,

wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist, d.h. $\forall b \in B \; \exists_1 a \in A$ mit $f(a) = b$

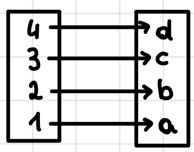
injektiv: jedes Element der Zielmenge höchstens einmal



surjektiv: jedes Element der Wertemenge mindestens einmal



bijektiv: jedes Element der Wertemenge genau einmal angenommen



→ Injektivität kann durch Verkleinern der Definitionsmenge erreicht werden

→ Surjektivität kann durch Verkleinern der Werte- auf Bildmenge erreicht werden

<u>Bsp:</u>

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^2$
  injektiv, nicht surjektiv (weil zB 3,5 wird nicht angenommen)
- $f: \mathbb{N} \to \{-1; 1\}$ $f(x) = (-1)^x$
  surjektiv, nicht injektiv
- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = 1 - x$
  bijektiv
- Definitions- & Zielmenge bestimmen, dass $f(x) = x^2$ bijektiv
  $f: \{1\} \to \{1\}$
  $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
  $f: \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$

<u>Urbild</u> von $Y \subseteq B$

enthält all jene Elemente der Definitionsmenge A, die nach Y abgebildet werden:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

<u>Bsp:</u>

- $f: M \to N$ $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
  $f(m) = m^2$ $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  $f(M) = \{0, 1, 2, 4, 9\} \subset N$

betrachte $\{4,9\} \subset N$:

dann ist Urbild von $\{4,9\}$:

$$f^{-1}(\{4,9\}) = \{-3,-2,2,3\}$$

Umkehrabbildung

aus jedem Bildelement soll eindeutig das Ausgangselement rekonstruiert werden

→ dies ist nicht immer möglich

<u>obiges Bsp:</u> • nicht alle Elemente von N haben Entsprechung in M

• Problem mit Eindeutigkeit :

-2 und +2 werden auf 4 abgebildet

⇒ Abbildung f muss bijektiv sein, damit sie umkehrbar ist

↳ Funktionsterm wird nach dem Argument aufgelöst

<u>obiges Bsp:</u> $M' = \{0,1,2,3\}$, $N' = \{0,1,4,9\}$

$f: M' \to N'$ $\quad f(m) = m^2 = n$

$m^2 = n \quad \Leftrightarrow \quad m = \sqrt{n}$

$f^{-1}: N' \to M$ $\quad \underline{f'(n) = \sqrt{n}}$

Folgen

Ein Baggersee wird vergrößert. Er hat eine Fläche von $1500\ m^2$, die jede Woche um $200\ m^2$ vergrößert wird. Algen bedecken den See, anfangs sind dies $1\ m^2$. Die Algenfläche verdreifacht sich wöchentlich.
Veränderung der See- und Algenfläche:

Wochenzahl n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Seefläche in m^2	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900	3100
Algenfläche in m^2	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Seefläche: $s(n) = 1500 + 200n$ $\qquad n \in \mathbb{N}_0$

Algenfläche: $a(n) = 3^n$ $\qquad n$: Woche

$\longrightarrow$ $s(n)$ & $a(n)$ sind Folgen

Definition: Eine Folge a_n von reelen Zahlen ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) = a_n$$

die jedem n eindeutig ein a_n zuordnet.

a_n: Folgeglieder

$\longrightarrow$ jede Folge hat einen Startwert

$\longrightarrow$ jedes a_k hat einen eindeutigen Nachfolger a_{k+1}

$\hookrightarrow$ Reihenfolge wichtig

Bsp:
- reziproke Folge

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{1}{3} \quad \ldots$$

- identische Folge

$a_n = n$

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = 3$

- alternierende Folge

$a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = -1 \quad \dots$

- rekursive Folge

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

z.B. $a_1 = 0 \qquad a_2 = 1$

$\longrightarrow a_3 = 1 \qquad a_4 = 2 \qquad a_5 = 3 \quad \dots$

- arithmetische Folge

$a_n = a_0 + n \cdot d \qquad d \in \mathbb{R}$

↳ Differenz der Folgeglieder konstant

$$a_{n+1} - a_n = a_0 + (n+1) \cdot d - (a_0 + n \cdot d) = \underline{\underline{d}}$$

- geometrische Folge

$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad a_0 \neq 0, \ q \neq 0$

↳ Quotient aufeinanderfolgender a_n ist konstant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_0 \cdot q^{n+1}}{a_0 \cdot q^n} = \underline{\underline{q}}$$

Def: a) Reele Folge a_n heisst genau dann noch oben beschränkt, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) a_n ist genau noch unten beschränkt, wenn ein $m \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) a_n ist beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

$$\underset{\text{untere}}{m} \leq a_n \leq \underset{\text{obere}}{M}$$

Schranke

Def: Reele Folge a_n heisst genau dann:

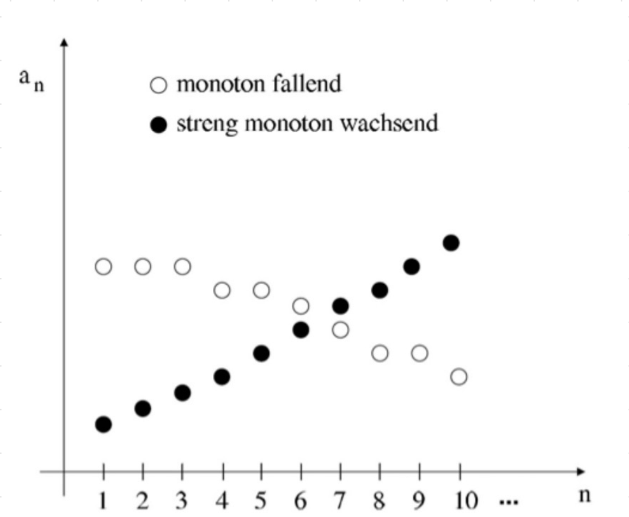
a) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$

b) streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$

c) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$

d) streng monoton fallend $a_n > a_{n+1}$

$\longrightarrow$ Folge kann monoton fallend und wachsend sein: wenn sie konstant ist



Bsp: geometrische Folge $a_n = q^n$ ist:

- streng monoton fallend für $0 < q < 1$:

$$a_{n+1} = q \cdot \underbrace{q^n}_{= a^n} < q^n = a_n$$

- streng monoton steigend für $q > 1$:

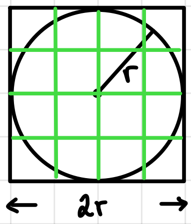
$$a_{n+1} = q \cdot q^n > q^n = a_n$$

Konvergenz / Divergenz von Folgen

Bsp: Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r

- Quadrat mit Seitenlänge 2π

- in n^2 Quadrate zerlegen :



wie viele Quadrate im Kreis = b_n

↳ Flächeninhalt der Quadrate :

$$c_n = b_n \cdot \left(\frac{2r}{n}\right)^2 = b_n \cdot \frac{4r^2}{n^2}$$

$n \longrightarrow \infty$, um Kreis optimal zu beschreiben

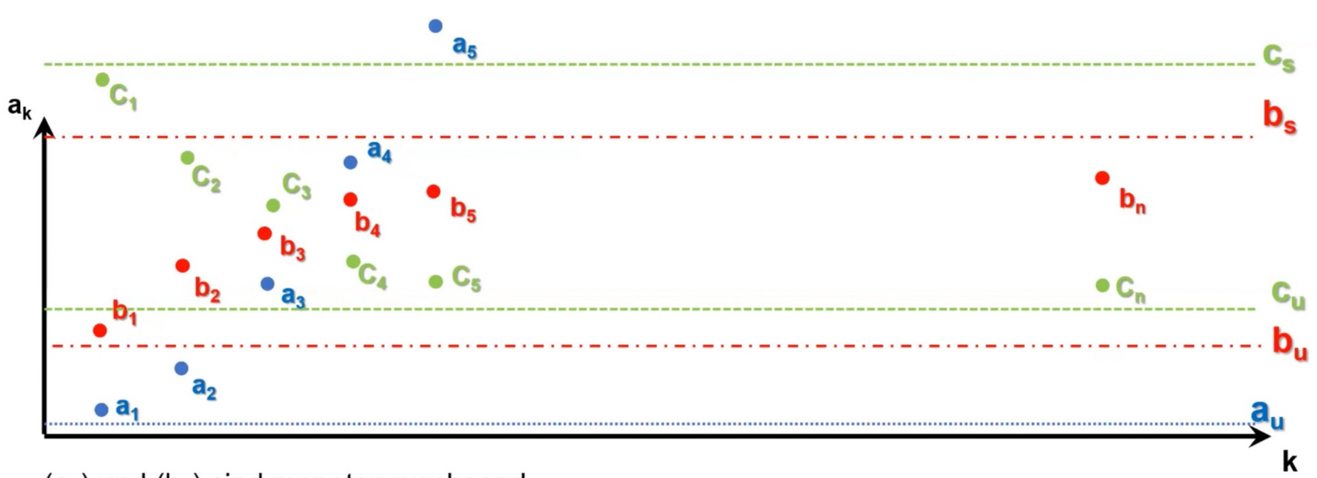
$c_n \longrightarrow \pi r^2$

Def: a_n heisst genau dann konvergent, wenn $\exists\, a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt : zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $\forall n > n_0(\varepsilon)$ gilt : $|a_n - a| < \varepsilon$.

a heisst Grenzwert / Limes der Folge a_n / Ansonsten ist a_n divergent.

Folgen

Folge: n → (a_n) $\quad n \in \mathbb{N}$



(a_n) und (b_n) sind monoton wachsend

(a_n) hat eine untere Schranke a_u, jedoch keine obere: divergent

(b_n) hat eine obere und untere Schranke: konvergent

Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

$a_n \to a$ für $n \to \infty$

Bsp:

- $a_n = \frac{1}{n}$

  streng monoton fallend, obere Schranke: 1

  untere Schranke: 0

  $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- $a_n = 1$ monoton fallend & wachsend

  $$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

- $a_n = (1, 0, 1, 0 \dots)$

  ist beschränkt, konvergiert aber nicht

- $$a_n = \frac{28n^4 - 20n^3 + 10n}{14n^4 + 200}$$

  $$= \frac{\cancel{n^4}\left(28 - \frac{20}{n} + \frac{10}{n^3}\right)}{\cancel{n^4}\left(14 + \frac{200}{n^4}\right)}$$

  0 für $n \to \infty$

  0 für $n \to \infty$

  $$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{28}{14} = 2$$

→ jede konvergente Folge ist beschränkt

→ jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent

→ nicht beschränkt . divergent

Summenzeichen : $\Sum$

verwendet, um eine Summe mit gleichartigen Summanden kurz aufschreiben

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

k : Laufvariable, durchläuft Werte von $1 \dots n$

→ Laufvariable kann geändert werden

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

→ Indexverschiebung kann durchgeführt werden

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+s}^{n+s} a_{k-s}$$

↳ hilfreich beim Zusammenfassen von 2 oder mehr Summen

→ Regeln:

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

Bsp:

- $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
- $\sum_{k=m}^{n} c = c \cdot \sum_{k=m}^{n} 1 = c \cdot (n - m + 1)$ $\quad c \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{-1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{-1}{32}$
- $\sum_{k=5}^{8} a_k = \sum_{k=0}^{3} a_{k+5}$ → Indexverschiebung
- $\sum_{k=4}^{40} (k+4)^2 = \sum_{k=8}^{44} k^2$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$

- Summe der ersten n natürlichen Zahlen :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(n+1)}_{\text{fixe Zahl}} - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= (n+1)(n+1-1) - \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) \cdot n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n+1) \cdot n$$

arithmetische Summe / Gaußsche Summenformel

- Geometrische Summe

$$G_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} (x)^k = x^m + x^{m+1} + \ldots + x^n = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Bsp: - $\sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{10}}\right) = 1 - \frac{1}{2^9}$

→ typische Anwendung : Rentnerrechnung

Reihen

- Partial- / Teilsumme :

a_n sei Folge reeler Zahlen

$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ heisst Partialsumme

Die einzelnen S_n bilden auch eine Folge : (S_n).

→ Die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst Reihe.

↳ Die Reihe konvergiert gegen ein $s \in \mathbb{R}$, wenn gilt : $\lim_{n\to\infty} S_n = s$

Eine nicht konvergente Reihe divergiert.

- <u>Spezielle Reihen</u>
  - Geometrische Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{n} x^k$$

$$= \begin{cases} \frac{x^m}{1-x} & x \in]-1;1[\\ \text{divergent} & |x| > 1 \end{cases}$$

<u>Bsp:</u>

- $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 3^k$

$$= \lim_{n\to\infty} (3^1 + 3^2 + 3^3 \ldots) \longrightarrow \infty \quad \text{divergent}$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{3})^k$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{3})^1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

- Basler Reihen

gehen auf sogenanntes Basler Problem zurück:

was ergibt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Basler Mathematiker wie Euler und Bernoulli haben darüber diskutiert, 1735 durch Euler gelöst: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \ln 2$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi^2}{12}$

Divergenzkriterium:

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dann folgt, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ gilt.
Jedoch folgt aus $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ nicht, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Bsp:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

  es gilt: $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$

- $$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$
  $$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{= 2\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{= 4\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$
  $$= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{m\to\infty} \infty$$

Sympy

Summenberechnung: `S = sp.summation(k**2,(k,1,5));`

$\rightarrow S = \sum_{k=1}^{5} k^2$

Grenzwertberechnung: `a = sp.limit_seq(1/k, k);`

$\rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$

Geometrische Summenformel

$$G_{(m;n)}(x) := \sum_{k=m}^{n} x^k$$

$\rightarrow (1-x)\cdot G_{(m;n)}(x) = x^m - x^{n+1} \qquad x \notin \{0;1\}$

Elementarfunktionen

Def: reele Funktion

Abbildung von $D \subseteq \mathbb{R}$ auf $W \subseteq \mathbb{R}$ mit reeler Variable

$f: D \longrightarrow W, \quad f(x) = y$

D: Definitionsbereich

W: Wertebereich

x: unabhängige Variable, Argument

y: abhängige Variable, Funktionswert

eindeutige Zuordnung: zu jedem x ein $f(x)$

Bsp:

- $f(x) = \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$

  $f(x) = x^2$
- $f(x): [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$

  $f(x) = \sqrt{x-1}$

Beschränkte Funktion

$f: A \longrightarrow B$ sei reele Funktion

a) f ist nach oben beschränkt, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert

mit $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

b) f ist nach unten beschränkt, wenn ein $m \in \mathbb{R}$ existiert

mit $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$.

c) f heisst beschränkt, wenn a) und b) zutreffen

$m \leq f(x) \leq M$

untere Schranke obere

Bsp:

- $f(x) = 1 - x^2$ $\quad x \in \mathbb{R}$

  obere Schranke : $M = 1$

  Keine untere Schranke

- $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

  obere Schranke : $M = 4$

  untere Schranke : $m = 0$

Monotonie bei einer Funktion

$f : A \to B$ sei reele Funktion

a) f heisst monoton wachsend / steigend, wenn

$f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

b) f heisst streng monoton wachsend, wenn

$f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

c) f heisst monoton fallend, wenn

$f(x_1) \geq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

d) f heisst streng monoton fallend, wenn

$f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

→ Funktionen haben oftmals auf Teilbereichen Monotonieeigenschaften

Bsp:

- $f(x) = 3x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

  streng monoton steigend

- $f(x) = 4$

  monoton fallend und steigend

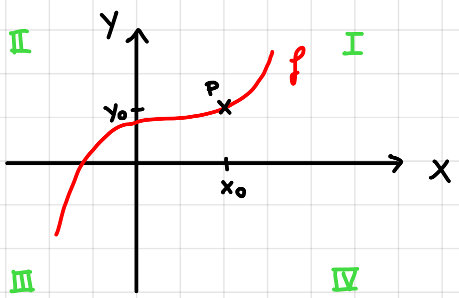
- $f(x) = x^2$

  für $x \leq 0$: streng monoton fallend

für $x \geq 0$: streng monoton steigend

Visualisierung

mittels Funktionsgraphen : in kartesisches Koordinatensystem trägt man Punkt $(x, f(x))$ ein :

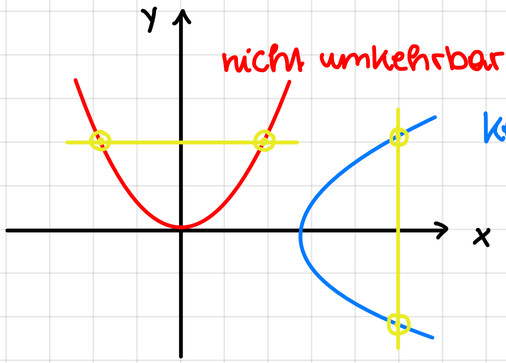


$P(x_0, y_0)$ – Absaisse, Ordinate

I, II, III, IV : Quadranten

→ wegen eindeutiger Zuordnung : Parallele zu y - Achse schneidet f höchstens einmal

→ schneidet Parallele zu x- Achse die Funktion f mehr als einmal, dann ist f nicht umkehrbar



Funktionen

algebraisch

- $y = 3x^2 + 4$
- $y = \frac{2x}{x^3 + 2x^2 - 7}$
- $y = \sqrt{3x - 4}$

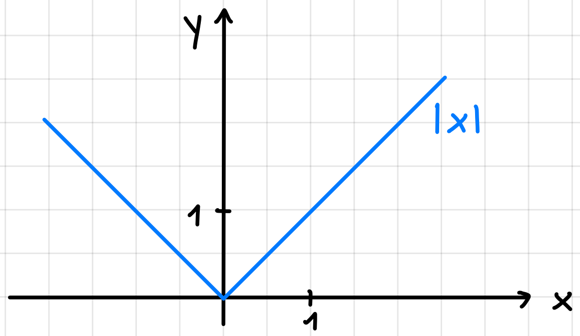
transzendent

- $y = e^x$
- $y = \ln x$
- $y = \sin x$

Def: Betragsfunktion

$\text{abs}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$

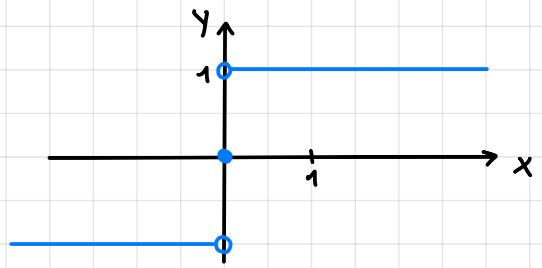
$$x \longrightarrow \text{abs}(x) := |x| \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$



Def: Vorzeichenfunktion / Signumfunktion

$\text{sgn}: \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$x \longrightarrow \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



es gilt: $x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$

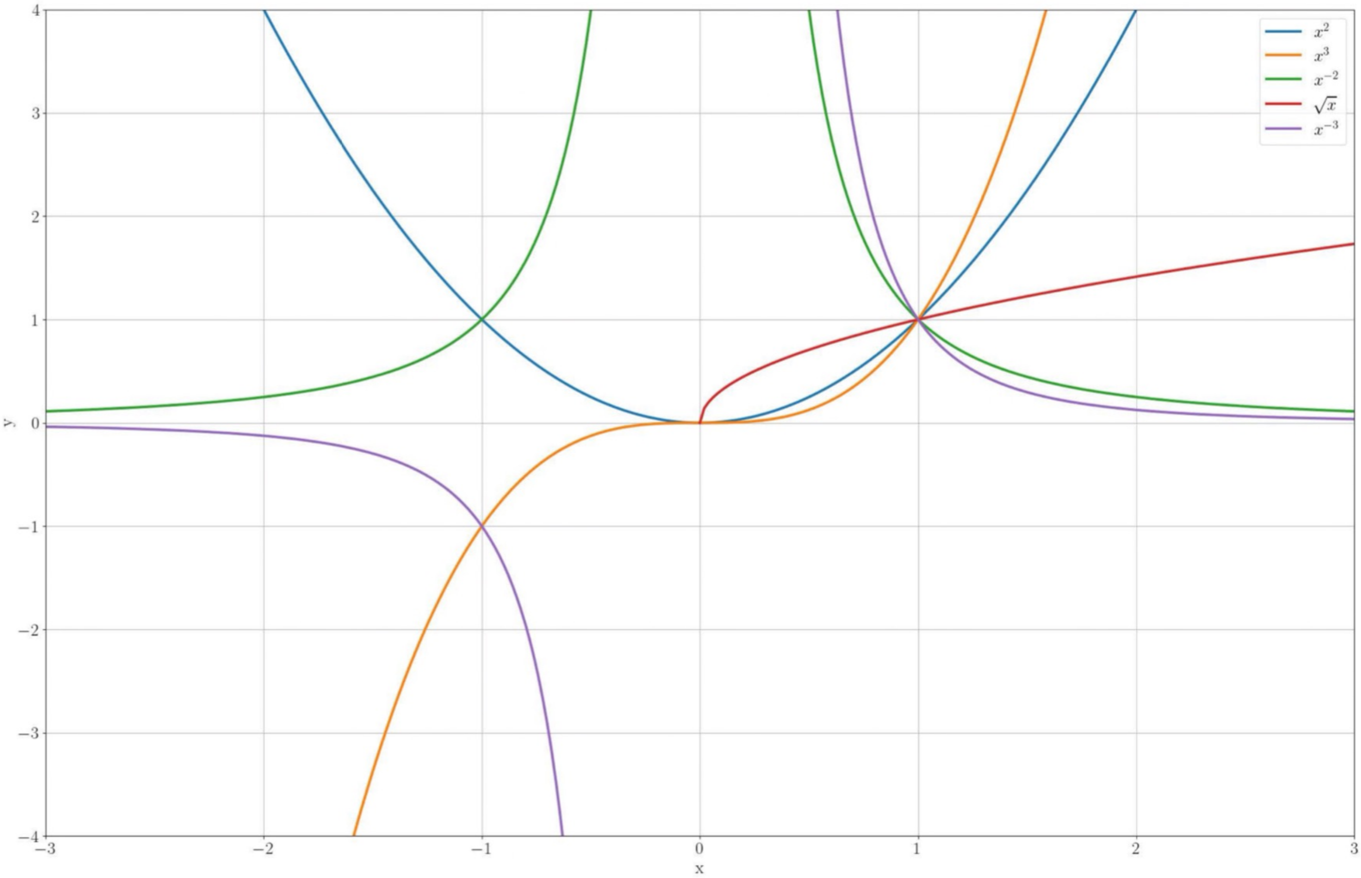
- $|x| = \text{sgn}(x) \cdot x$
- Dreiecksungleichung: $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

Def: Potenzfunktion

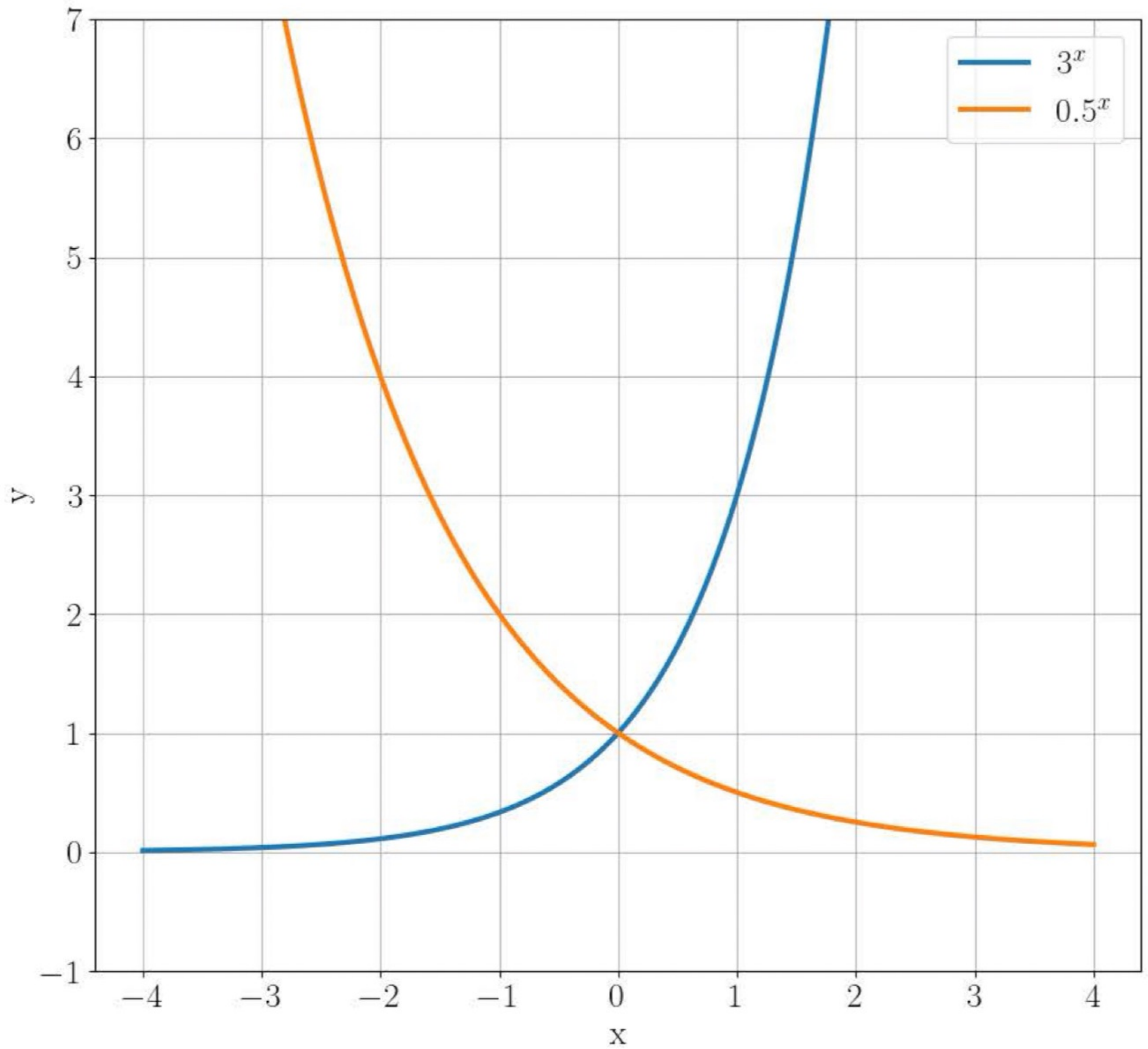
$f: x \longrightarrow a \cdot x^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad a, n \in \mathbb{R}$

- für $n \in \mathbb{N}$ heisst $a \cdot x^n$ ein Monom

↳ Graph für $a \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ heisst Parabel n-ter Ordnung, für $n \in -\mathbb{N}$ heissd der Graph Hyperbel n-ter Ordnung



x^2
x^3
x^{-2}
$\sqrt{x}$
x^{-3}
x
y



3^x
0.5^x
x
y

Def: Eigentliche Exponentialfunktion

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longrightarrow f(x) = a^x \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

→ nur positive Funktionswerte

→ alle eigentlichen Exponentialfunktionen gehen durch $f(0) = 1$

→ $f(x+1) = a \cdot f(x)$

$= a^{x+1} = \overset{f(x)}{\overbrace{a^x}} + a^1 = a \cdot f(x)$

→ $0 < a < 1$: streng monoton fallend

$a > 1$: streng monoton steigend

Def: Hyperbolische Funktion / Hyperbelfunktion

a) $\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $\cos h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

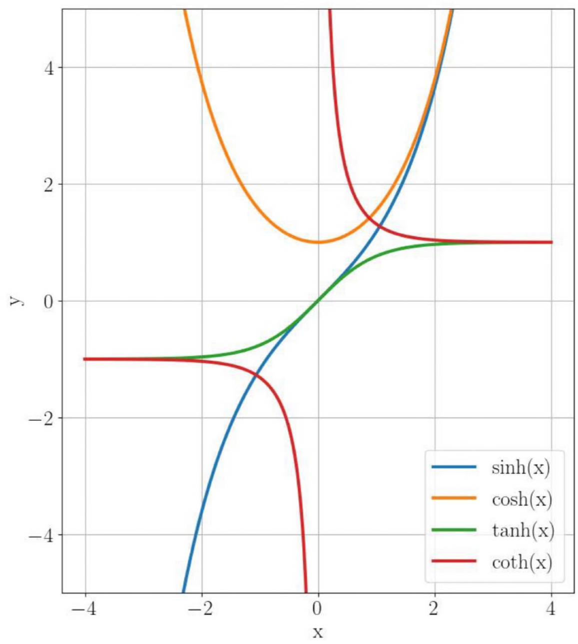
$x \longrightarrow \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $\tan h : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$

$x \longrightarrow \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

d) $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

$x \longrightarrow \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$



→ sind über Exponentialfunktionen definiert

→ sind nicht periodische Funktionen – im Gegensatz zu trigonometrischen Funktionen

→ bis auf $\cosh(x)$ alle bijektiv

→ Umkehrfunktionen heissen Area-Funktionen

→ Pythagoras-Satz : $\cos h^2(x) - \sin h^2(x) = 1$

Funktionseigenschaften

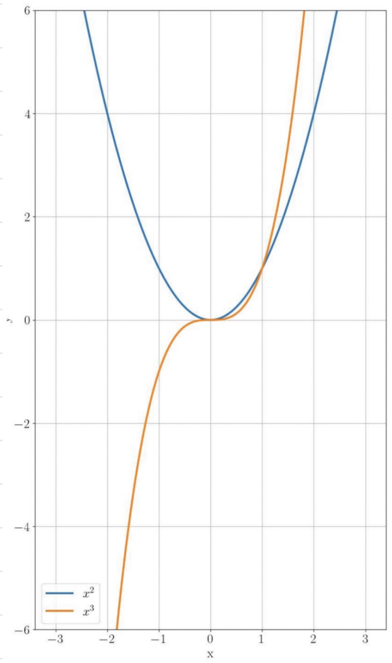
$f(x)$ sei reele Funktion

Symmetrie

- symmetrisch zu y-Achse bzw. gerade bzw. positive Parität :

  $f(-x) = f(x)$

- punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade bzw negative Parität : $f(-x) = -f(x)$



Bsp:

- $f(x) = x^2$

  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 \longrightarrow$ gerade

- $f(x) = x^3$

  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \longrightarrow$ ungerade

Verschiebung

- entlang der x-Richtung um Δx, $\Delta x > 0$:

  nach rechts (zunehmende x-Werte):

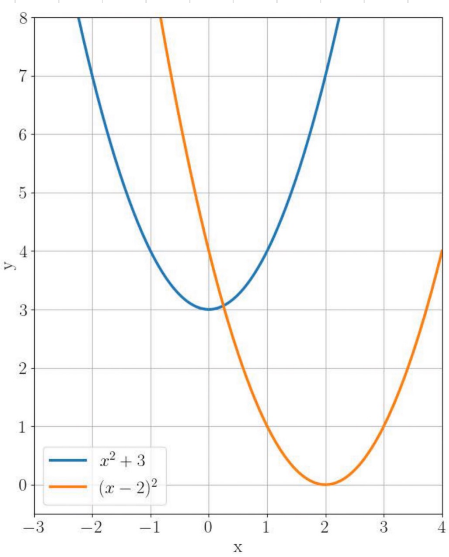
  $g(x) = f(x - \Delta x)$

  nach links : $g(x) = f(x + \Delta x)$

- entlang der y-Richtung um Δy, $\Delta y > 0$:

  nach oben : $g(x) = f(x) + \Delta y$

  nach unten : $g(x) = f(x) - \Delta y$



Bsp:

- $f(x) = x^2$

  $\Delta x = 2$ nach rechts : $g(x) = f(x-2)$

  $= (x-2)^2$

$\Delta y = 3$ nach oben: $g(x) = f(x) + 3$

$= x^2 + 3$

$\Delta x = 2$ nach rechts und $\Delta y = 3$ nach oben:

$$g(x) = f(x - \Delta x) + \Delta y = (x-2)^2 + 3$$

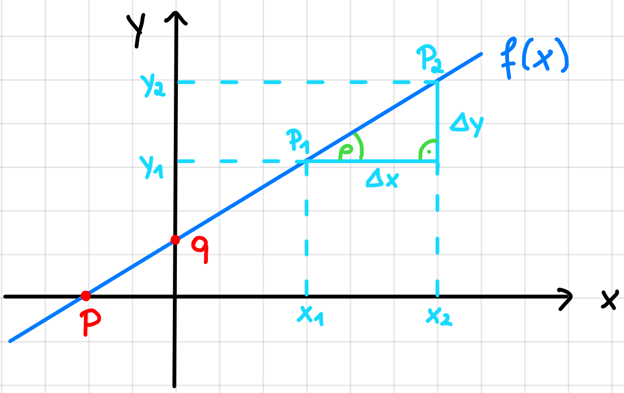
Skalierung (Dehnung / Stauchung)

- entlang der x-Achse um Faktor k: $g(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$
- entlang der y-Achse um Faktor k: $g(x) = k \cdot f(x)$

Bsp.: • $f(x) = x^2$ $\quad k = 3$ entlang x

$$g(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}x^2$$

Lineare Funktion



$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

wichtige Kenngrösse: Steigung m

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.} \quad m = \tan \rho$$

ρ: Steigungswinkel

p: x-Achsenabschnitt

q: y-Achsenabschnitt

Darstellungen:

- Grundform: m und q gegeben, $m, q \in \mathbb{R}$
  $f(x)$ lässt sich durch
  $f(x) = m \cdot x + q$ darstellen

Bsp.:
- $m = 5$, $q = -2$
  $f(x) = 5x - 2$

- Taylorform: m und $P(x_0, y_0)$ gegeben
  $\longrightarrow f(x) = m(x - x_0) + y_0$

Bsp.:
- $m = 0{,}5$ $\quad P(1;3)$
  $f(x) = 0{,}5(x-1) + 3 = 0{,}5x - 0{,}5 + 3$
  $= 0{,}5x + 2{,}5$

- 2-Punkt-Form: 2 Punkte $P_1(x_1, y_1)$ & $P_2(x_2, y_2)$ gegeben
  $\longrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  $\longrightarrow f(x) = m(x - x_1) + y_1$
  $= m(x - x_2) + y_2$

Bsp.:
- $P_1(1;3)$ $\quad P_2(4;5)$
  $m = \frac{5-3}{4-1} = \frac{2}{3}$
  $f(x) = \frac{2}{3}(x-1) + 3 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 3$
  $= \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

Eigenschaften lineare Funktion

- Monotonie : $m > 0$ streng monoton steigend

  $m < 0$ streng monoton fallend

  $m = 0$ monoton fallend & steigend

- Umkehrfunktion :

$m \neq 0$: f ist bijektiv, also umkehrbar

$\longrightarrow f(x) = mx + q$ nach x auflösen

$y - q = mx$

$x = \frac{y}{m} - \frac{q}{m} = f^{-1}(y)$

$\longrightarrow$ Umkehrfunktion hat Steigung $\frac{1}{m}$

Bsp: • $f(x) = 2x - 4$

$m = 2$, d.h. streng monoton steigend

Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{-4}{2} = \frac{1}{2}y + 2$

$m = 0$: $f(x) =$ konstant $\longrightarrow f(x)$ ist nicht bijektiv und somit nicht umkehrbar

Verallgemeinerte Exponentialfunktion

Bsp: Population besteht um 7:00 aus 500 Individuen und verdoppelt sich alle 3h.

a) Wie viele Individuen um 13:00? 2 000

b) Wann waren es 125 Individuen? 1:00

c) In welcher Zeit Vervierfachung? 13:00

d) Populationsgrösse als Funktion der Zeit. $f(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t-t_0}{3}}$

Zeit	1.00	4.00	7.00	10.00	13.00
Anzahl	125	250	500	1000	2000

$$f(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t-t_0}{3}} \qquad t \text{ in Stunden}, \; t_0 = 7h$$

<u>allgemein:</u> $f(t) = A_0 \cdot a^{\frac{t-t_0}{\Sigma}}$

A_0 : Referenzwert $\qquad$ t_0 : Referenzstelle

a : Basis $\qquad$ Σ : Schrittweite

<u>Anwendungen:</u>

- Biologie (Wachstum von Populationen von Bakterien etc.)
- Kapitalentwicklung (Zinseszins ..)
- radioaktiver Zerfall
- elektrische Schaltungen (Spannungs- Stromverläufe)

$\longrightarrow$ $f(t_0) = A_0$

$\longrightarrow$ $f(t+\Sigma) = a \cdot f(t) = A_0 \cdot a^{\frac{t+\Sigma-t_0}{\Sigma}}$

$$= \underbrace{A_0 \cdot a^{\frac{t-t_0}{\Sigma}}}_{f(t)} \cdot \underbrace{a^{\frac{\Sigma}{\Sigma}}}_{a}$$

$\longrightarrow$ $f(t-\Sigma) = \frac{1}{a} \cdot f(t)$

$\longrightarrow$ falls die Zielmenge der Bildmenge B entspricht,

ist $f(t)$ umkehrbar

$f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = t_0 \cdot \Sigma \cdot \log_a\left(\frac{y}{A_0}\right)$

fürs Anfangsbeispiel könnte man auch

$A_0 = 125$ und $t_0 = 1h$ wählen : A_0 und t_0 müssen zusammen geändert werden

ODER

man könnte Vervierfachung in 6h wählen :

a und Σ müssen gemeinsam gewählt werden

Parameterwechsel für Referenzpunkt :

a) $\tilde{A}_0 = f(\tilde{t}_0) = A_0 \cdot a^{\frac{\tilde{t}_0 - t_0}{\Sigma}}$

b) $\tilde{t}_0 = f^{-1}(\tilde{A}_0) = \Sigma \cdot \log_a\left(\frac{\tilde{A}_0}{A_0}\right) + t_0$

Parameterwechsel für Basis und Schrittweite :

a) $\tilde{a} = a^{\frac{\tilde{\Sigma}}{\Sigma}}$

b) $\tilde{\Sigma} = \Sigma \log_a \tilde{a}$

Stetigkeit einer Funktion

Def: Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heisst stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert von $f(x)$ an x_0 vorhanden ist und mit dem Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Bsp:

- $f(x) = x^2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $f(1) = 1$ $\qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

  $\Rightarrow$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\qquad f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ $f(x)$ ist an $x = 1$ nicht stetig, da nicht definiert an dieser Stelle (Definitionslücke)

- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & < 0 \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ $f(x)$ ist an $x = 0$ nicht stetig

Unstetigkeitsstellen:
- Lücken im Definitionsbereich
- endliche Sprünge
- Polstellen

Bsp:

- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ bei $x_0 = -1$ Definitionslücke

  $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

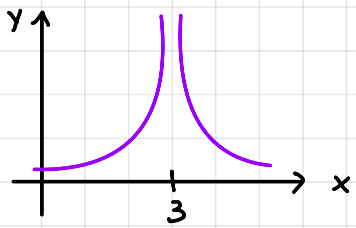
  Beheben der Lücke: Funktionswert = Grenzwert

  $$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ -2 & x = -1 \end{array} \right\} = x - 1 \quad \Rightarrow g(x) \text{ ist stetig}$$

- Polstelle

$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ Definitionslücke bei $x_0 = 3$

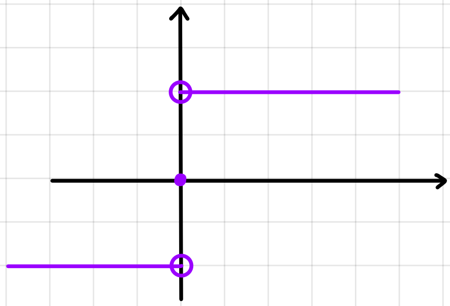
$\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} \to \infty$



$\Rightarrow$ Beheben der Lücke nicht möglich, $f(x)$ an $x_0 = 3$ nicht stetig

- Sprungstelle

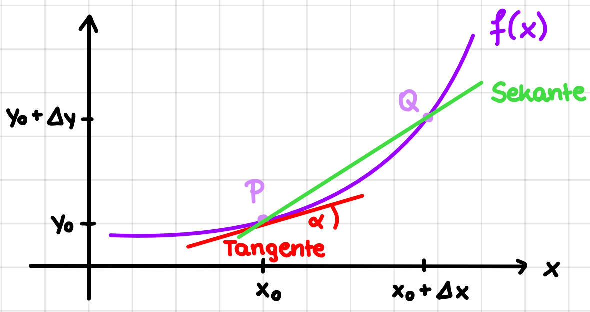
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} = -1$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} = 1$

$\Rightarrow$ an $x_0 = 0$ ist $f(x)$ nicht stetig

Differentialrechnung



$P(x_0, y_0)$

$Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Was ist Steigung von $f(x)$ im Punkt P?

- Annäherung durch Sekante, die P und Q verbindet

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Differenzquotient}}$$

- Q rückt immer näher zu P: $\Delta x \to 0$, Sekante geht in Tangente über

$$m_t = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Grenzwert nennt sich Ableitung der Funktion $f(x)$ an x_0.

Man schreibt: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

$\frac{dy}{dx}$: Differentialquotient

<u>Def:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst an x_0 differenzierbar, wenn Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ vorhanden ist.

→ $f'(x)$ nennt sich 1. Ableitung von $f(x)$

→ Ableitung ordnet jedem x-Wert von $f(x)$ den Steigungswert zu

→ wählt man Q rechts (links) von P, so erhält man die rechtsseitige (linksseitige) Ableitung

↳ stimmen beide überein, dann ist f an P differenzierbar

→ ist f auf Intervall I differenzierbar, so ist f stetig auf I

↳ Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit

→ höhere Ableitungen:
- $f''(x)$: 2. Ableitung
- $f'''(x)$: 3. Ableitung

  ⋮
- $f^{(n)}(x)$ n. Ableitung

Ableitung lineare Funktion

$f(x) = mx + q$

$f'(x) = m$

<u>Bsp:</u>
- $f(x) = 3x + 5$

  $f'(x) = 3$
- $f(x) = 8$

  $f'(x) = 0$

Ableitung mittels Differenzquotient:

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2 \cdot \Delta x \cdot x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\longrightarrow \quad f(x) = x^2 \,, \quad f'(x) = 2x$$

Monom - Regel:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad f(x) = x^p \quad \text{mit } p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

Bsp:

- $f(x) = x^5$

  $f'(x) = 5 \cdot x^4$

- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

  $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

  $f'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Regeln:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a \cdot g(x) \\ f'(x) &= a \cdot g'(x) \end{aligned}\right\} \text{Produktregel}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f'(x) &= g'(x) + h'(x) \end{aligned}\right\} \text{Summenregel}$$

Bsp:

- $f(x) = 10x^4$

  $f'(x) = 10 \cdot 4x^3 = 40x^3$

  $f''(x) = 40 \quad 3x^2 = 120x^2$

- $f(x) = 7x^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{3x} - \frac{1}{x^2}$

  $= 7x^3 - \frac{1}{2}x + \sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}$

  $f'(x) = 21x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$

Umkehrung der Ableitung nennt sich Aufleitung

→ für Monome gilt:

$f(x) = x^p \qquad p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$

Aufleitung $F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + c \qquad c \in \mathbb{R}$

Bsp:

- $f(x) = x^3$

  $F(x) = \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$

Differentialrechnung

Produktregel

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

wie sieht $f'(x)$ aus ?

$\rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$ FALSCH

z.B. $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

mit $f(x) = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{x}_{h(x)}$

wäre $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x) = 1 \cdot 1 = 1$

Produktregel: $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

g & h sind differenzierbar. Dann gilt:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Bsp:

- $f(x) = x^2 = x \cdot x$

  $f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x$ $\rightarrow$ stimmt mit Monomregel überein

betrachte Differenzquotient:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \cdot h(x+\Delta x) - g(x) \cdot h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \cdot h(x+\Delta x) + g(x) \, h(x+\Delta x) - g(x) \cdot h(x+\Delta x) - g(x) \cdot h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) \cdot [g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x) \cdot [h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) \, [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) \, [h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x}$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} h(x+\Delta x)}_{= h(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{= g'(x)} + g(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x - h(x)}{\Delta x}}_{= h'(x)}$$

$$= h(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Bsp:

- $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$

  $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$

- $f(x) = \underbrace{(4x^3 - 3x)}_{g(x)} \underbrace{(\sqrt{x} - 7)}_{h(x)}$

  $f'(x) = (4 \cdot 3 \cdot x^2 - 3)(\sqrt{x} - 7) + (4x^3 - 3x)(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}})$

  $= (12x^2 - 3)(\sqrt{x} - 7) + (4x^3 - 3x)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

Quotientenregel:

$f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$g(x)$ und $h(x)$ sind differenzierbar

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

Bsp:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g(x) = 1, \quad h(x) = x$

  $f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

  mit Monomregel: $f(x) = x^{-1}$

  $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

- $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ $\qquad g(x) = x^2, \quad h(x) = 1 + x$

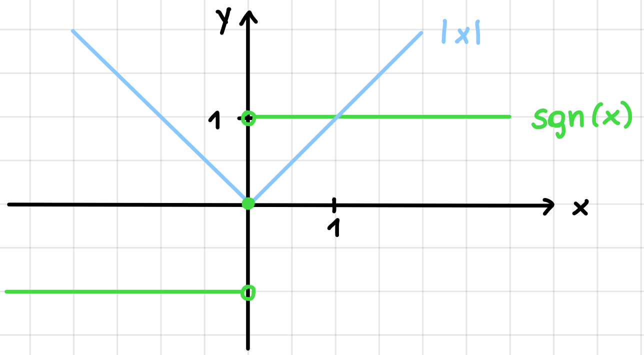
  $f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x) - x^2 - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2}$

  $= \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$

Ableitung von Betrags- und Umkehrfunktion:

Betragsfunktion: $|x| = \text{abs}(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Vorzeichenfunktion: $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $|x|$ und $\text{sgn}(x)$ differenzierbar. Es gilt:

a) $f(x) = |x|$

$f'(x) = \text{sgn}(x)$

b) $f(x) = \text{sgn}(x)$

$f'(x) = 0$

Bsp: • $f(x) = \text{sgn}(x) \cdot x^2$

Fallunterscheidung: a) $x \neq 0$ b) $x = 0$

a) $f'(x) = 0 \cdot x^2 + \text{sgn}(x) \cdot 2x$

$= \text{sgn}(x) \cdot 2x = 2 \cdot \underbrace{\text{sgn}(x) \cdot x}_{=|x|} = 2 \cdot |x|$

b) $f(x)$ auf Stetigkeit an $x = 0$ überprüfen,

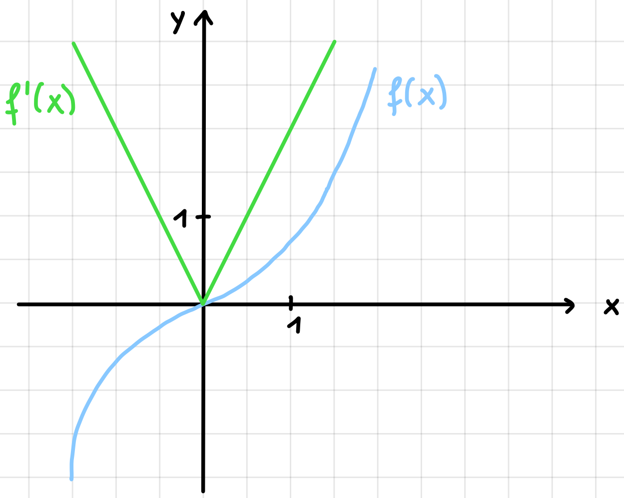
d.h. links- und rechtsseitigen Grenzwert bilden

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$

für Ableitung auch links- und rechtsseitigen Grenzwert

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2 \cdot |x| = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 0$

$f(x)$ ist an $x = 0$ stetig und differenzierbar



Kettenregel :

g, h seien auf $\mathbb{R}$ differenzierbar

$f(x) = g(h(x))$

Es gilt : $f'(x) = \underbrace{g'(h(x))}_{\text{äussere}} \cdot \underbrace{h'(x)}_{\text{innere}}$

Ableitung

⟶ kann als wichtigste Ableitungsregel betrachtet werden, da viele Funktionen in Wissenschaft und Technik zusammengesetzt sind

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dh}{dh}\right) = \lim_{dx \to 0} \left(\underbrace{\frac{dy}{dh}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{h'(x)}\right) = g'(h) \cdot h'(x)$$

Bsp :

- $f(x) = (3x-4)^8$ $\quad g(h) = h^8 \quad g'(h) = 8h^7$

  $h(x) = 3x - 4 \quad h'(x) = 3$

  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

  $= 8 \cdot (3x-4)^7 \cdot 3 = 24(3x-4)^7$

- $f(x) = \sqrt{h(x)}$ $\quad g(h) = \sqrt{h} = h^{\frac{1}{2}}$

  $g'(h) = \frac{1}{2\sqrt{h}}$

  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h'(x)$ $\quad$ Wurzelregel

Ableitung der Umkehrfunktion :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und bijektiv

Es gilt : $\boxed{f^{-1}(y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

Bsp :

- $f(x) = (x^2 - x + 1)^4$ $\quad g(h) = h^4 \quad g'(h) = 4h^3$

  $h(x) = x^2 - x + 1 \quad h'(x) = 2x - 1$

  $f'(x) = 4(x^2 - x + 1)^3 \cdot (2x - 1)$

- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

  $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2 + 3 - 2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2 + 3}{(x^2+3)^2}$

Ableitung Exponentialfunktion

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = ?$

mit Differentialquotient :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{= z_a} = a^x \cdot z_a = z_a \cdot f(x)$$

Näherungswerte für z_a bestimmen :

$a = 2$: $z_2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \approx \frac{2^{0,001} - 1}{0,001} \approx 0,69$

$\rightarrow (2^x)' \approx 0,69 \cdot 2^x$

$a = 3$: $z_3 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \approx \frac{3^{0,001} - 1}{0,001} \approx 1,1$

$\rightarrow (3^x)' = 1,1 \cdot 3^x$

$\rightarrow$ es gibt eine Basis a, für die gilt .

$(a^x)' = a^x$

$\hookrightarrow$ dies ist die Eulersche Zahl (nach Leonard Euler)

$e = 2,7182 \ldots \quad \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

natürliche Exponential - und Logarithmusfunktion :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$\boxed{f(x) = e^x}$

$\boxed{f'(x) = e^x}$

Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$: $x = \log_e y$

$= \ln y$

$= f^{-1}(y)$

Ableitung von natürlichen Logarithmusfunktionen :

$f(x) = \ln x$

$f'(x)$ durch Nutzung der Inversenregel :

$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$(\ln y)' = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$

$\rightarrow$ $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$\rightarrow$ natürliche Exponentialfunktion sehr wichtig zum Lösen von Differentialgleichungen

$f(x) = a^x = \exp(\ln a^x) = e^{\ln a^x}$

$f'(x) = \underbrace{e^{x \cdot \ln a}}_{\text{äussere}} \cdot \underbrace{\ln a}_{\text{innere}} = a^x \cdot \ln a$

Ableitung

$\rightarrow z_a = \ln a$

verallgemeinerte Exponentialfunktion

$f(x) = y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{z}}$ $\quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = y_0 \cdot \ln a \cdot \frac{1}{z} \; a^{\frac{x-x_0}{z}}$

$= \frac{y_0 \cdot \ln a}{z} \cdot a^{\frac{x-x_0}{z}}$

Bsp :

- $f(x) = 9 \cdot 3^{\frac{x-2}{5}}$

  $f'(x) = \frac{9 \cdot \ln 3}{5} \cdot 3^{\frac{x-2}{5}}$

  $\approx 1{,}98 \cdot 3^{\frac{x-2}{5}}$

- $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{x-3}{10}}$

  $f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln 5}{10} \cdot 5^{\frac{x-3}{10}}$

  $\approx 0{,}08 \cdot 5^{\frac{x-3}{10}}$

Bsp.

a) $f(x) = 2x \cdot \ln x$

$f'(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot x^{-1}$

$= 2 \cdot \ln x + 2x^0 = 2\ln x + 2$

$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = x^n \cdot e^x$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + x^n \cdot e^x$

$= x^{n-1} \cdot e^x \cdot (n+1)$

$f''(x) = (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot e^x \cdot (n+x) + x^{n-1} \cdot [e^x (n+1) + e^x \cdot 1]$

$= (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot e^x (n+x) + x^{n-1} \cdot e^x (n+1) + x^{n-1} \cdot e^x$

$= x^{n-2} \cdot e^x \cdot [(n-1)(n+x) + x \cdot (n+x) + x]$

c) $f(x) = \underbrace{(x^2-1)^2}_{2(x^2-1)\cdot 2x} \cdot \underbrace{(x+5)^3}_{3(x+5)^2 \cdot 1}$

$f'(x) = 4x(x^2-1) \cdot (x+5)^3 + (x^2-1)^2 \cdot 3(x+5)^2$

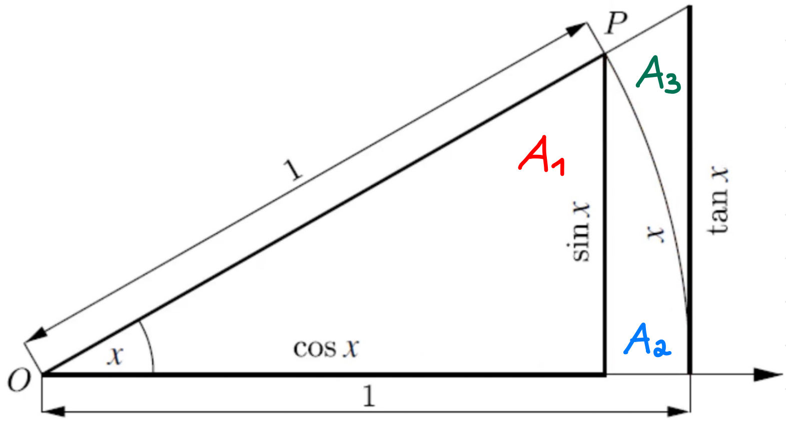
$= (x^2-1)(x+5)^2 \cdot [4x(x+5) + 3 \cdot (x^2-1)]$

$= (x^2-1)(x+5)^2 \cdot [4x^2 + 20x + 3x^2 - 3]$

$= (x^2-1)(x+5)^2 \cdot [7x^2 + 20x - 3]$

Ableitung trigonometrischer Funktionen

um Ableitung von sin (x) zu bestimmen, müssen wir den Grenzwert von $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ kennen



beliebiger Punkt P auf Einheitskreis : $P(\cos x, \sin x)$

$\rightarrow$ betrachtete Fläche kleines Dreieck : $A_1 = \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x$

Kreisausschnitt : $A_2 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x \qquad | \cdot 2$$

$$\sin x \cdot \cos x \leq x \leq \tan x \qquad | : \sin x$$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \qquad | \text{ Kehrwert}$$

$$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x$$

$$x \rightarrow 0 : \quad 1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

jetzt Ableitung von $f(x) = \sin x$ mit Differenzquotient :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Additionstheorem nutzen :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad (2)$$

$$(1)-(2): \quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$$

Ersetzen : $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\longrightarrow \sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\longrightarrow$ $\alpha = x + \Delta x$ und $\beta = x$:

Differenzquotient

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$f(x) = \sin x$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1}\cdot\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) = \underline{\underline{\cos x}}$$

weitere trigonometrische Funktionen :

- $f(x) = \cos x$

  $f'(x) = -\sin x$

- $f(x) = \tan x$

  $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $f(x) = \cot x$

  $f'(x) = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Ableitung der Arcus-Funktion: (wichtig für Integration)

- $f(x) = \arcsin x$

  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arcsinh} x$

  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- $f(x) = \arccos x$

  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arccosh} x$

  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- $f(x) = \arctan x$

  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arctanh} x$

  $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccot} x$

  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccoth} x$

  $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Ableitung der Hyperbelfunktionen:

$\longrightarrow$ exponentielle Schreibweise nutzen

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \longrightarrow \sinh'(x) = \cosh(x)$

- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \longrightarrow \cosh'(x) = \sinh(x)$

- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \longrightarrow \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

- $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \longrightarrow \coth'(x) = 1 - \coth^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$

Bsp.:

- $f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$

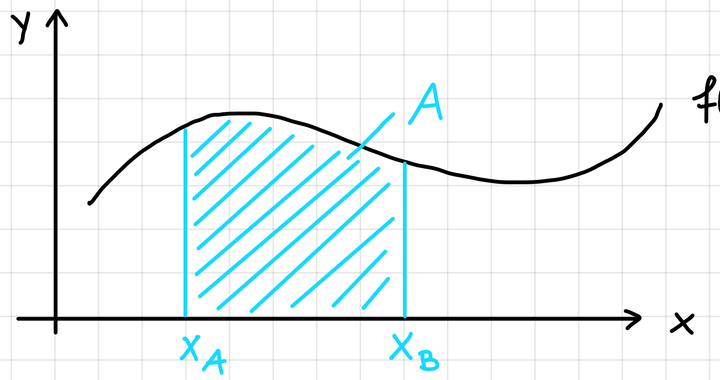
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)\cdot(1-\sin x) - (1+\cos x)\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{1 - \sin x + \cos x}{(1-\sin x)^2}$$

Integralrechnung

Motivation :



→ Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen

→ Volumenberechnung beliebig geformter Körper

→ Fluss einer Strömung durch ein Flächenstück

→ Wie kehrt man Differentiation um ?

wie löst man $F'(x) = f(x)$, wenn $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist und

F bestimmt werden soll

Def: Eine Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

wenn gilt : $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

→ Es gibt ∞ viele Stammfunktionen zu $f(x)$, die sich durch eine Konstante c unterscheiden :

↪ wenn $F(x)$ Stammfunktion ist, dann auch $F(x) + c$:

$$F'(x) = f(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x)$$

Bsp: • $f(x) = 2x$

$F(x) = x^2 + c$ z. B. $F(x) = x^2$; $F(x) = x^2 + 1$

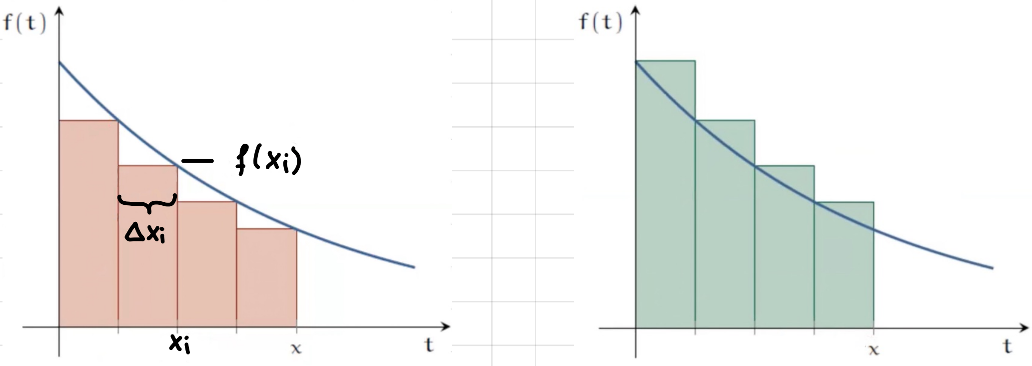
$F(x) = x^2 - 1$

Für das Auffinden einer Stammfunktion schreiben wir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Bestimmung von Flächeninhalten

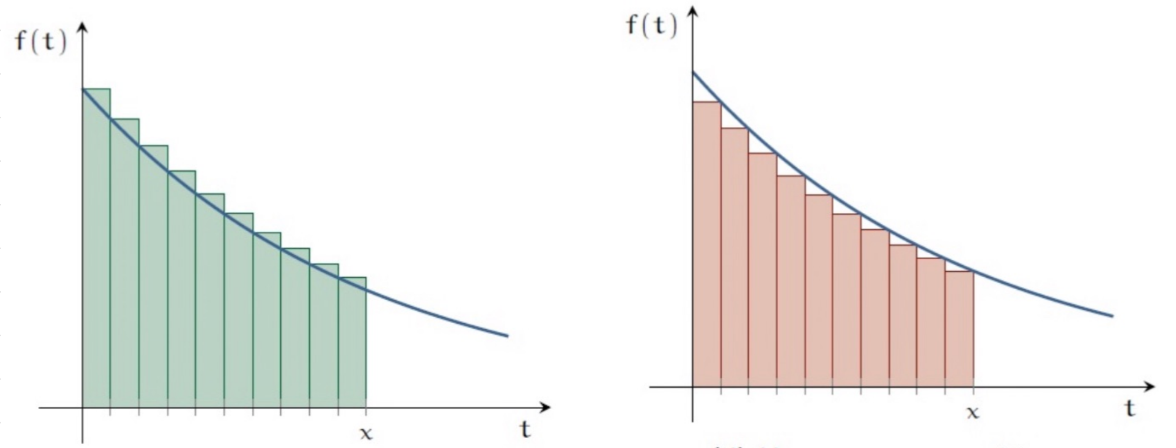
- Annäherung durch Rechtecke: $f(x_i) \cdot \Delta x_i$



(b) Untersumme $n = 4$. (a) Obersumme $n = 4$.

→ wir bilden Unter- und Obersumme, wobei Δx_i immer kleiner werden, um Genauigkeit zu erhöhen

→ Grenzwertbildung: Untersumme ≤ Flächeninhalt ≤ Obersumme

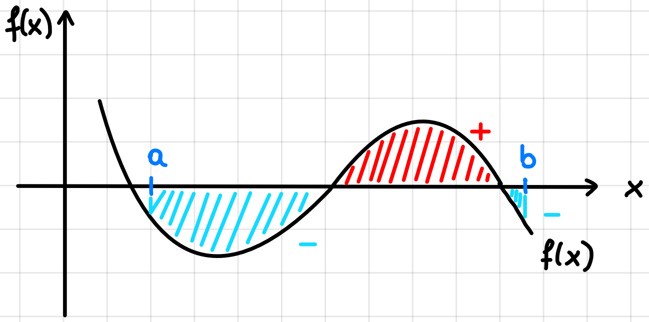


(c) Obersumme $n = 10$. (d) Untersumme $n = 10$.

Def: Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k) \cdot \Delta x_k$ heisst bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ in den Grenzen $x = a$ bis $x = b$ und wird durch $\int_a^b f(x)\,dx$ gekennzeichnet

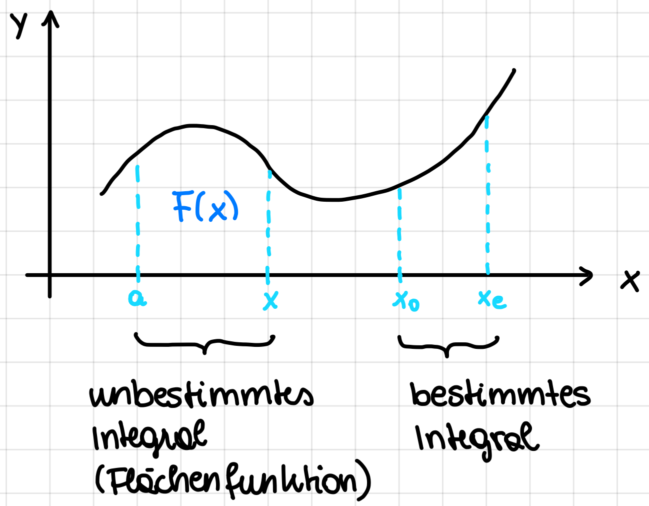
→ Integral muss zwischen $x = a$ und $x = b$ beschränkt sein,
$f(x)$ muss stetig sein

→ Wert des bestimmten Integrals kann > 0, < 0 oder $= 0$ sein



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion



→ a sei feste Integrationsgrenze (Referenzstelle),
x sei variabel. Wert des Integrals hängt von x ab

→ $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ zuerst $F(x)$ ermitteln

→ Bestimmung der Fläche in den Grenzen x_0 und x_e.

$$\int_{x_0}^{x_e} f(x)\,dx = F(x_e) - F(x_0) = [F(x)]_{x_0}^{x_e}$$

→ entscheidend für Bestimmung der Fläche:
Auffinden einer Stammfunktion von $f(x)$

Rechenregeln :

$f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

a) **Faktorregel** : $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

b) **Summenregel** : $\int (g(x) + h(x))\, dx = \int g(x)\, dx + \int h(x)\, dx$

c) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

d) **Zerlegungssatz** : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

c muss nicht zwischen a und b liegen

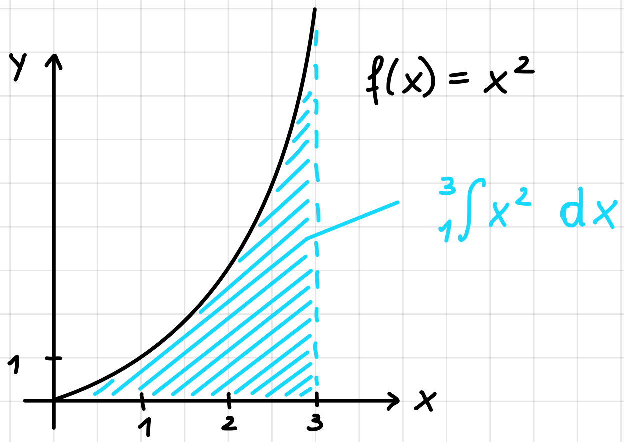
e) **Potenzregel** : $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

weitere Stammfunktionen :

- $\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$
- $\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + c$

Bsp. :

- $\int 3x\, dx = 3 \int x\, dx = 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{3}{2} x^2 + c$ Integrationskonstante unbestimmtes I.
- $\int (4x^3 - 3x^2)\, dx = 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + c = x^4 - x^3 + c$
- $\int_1^3 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ bestimmtes I.



Stammfunktionen

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \qquad \text{auf } \mathbb{R}_{<-1},\ (-1,1) \text{ oder } \mathbb{R}_{>1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x \qquad \text{auf } (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arcosh} x & \text{auf } \mathbb{R}_{>1} \\ -\operatorname{arcosh}(-x) & \text{auf } \mathbb{R}_{<-1} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x \qquad \text{auf } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\cot x \qquad \text{auf } (0, \pi)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, \mathrm{d}x = \tanh x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, \mathrm{d}x = -\coth x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln |\cos x| \qquad \text{auf } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln |\sin x| \qquad \text{auf } (0, \pi)$$

$$\int \tanh x \, \mathrm{d}x = \ln(\cosh x) \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \coth x \, \mathrm{d}x = \ln |\sinh x| \qquad \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \text{ oder } \mathbb{R}_{<0}$$

Anwendung der Differentialrechnung

Monotonie und Beschränktheit von Funktionen können mit Differentialrechnung untersucht werden: 1. Ableitung vor allem.

Monotonie

f sei auf $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und differenzierbar. Dann gilt:

a) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$: f ist monoton steigend

b) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$: f ist streng monoton steigend

c) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$: f ist monoton fallend

d) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$: f ist streng monoton fallend

$\rightarrow$ es gibt Äquivalenz

Bsp.:

- $f(x) = x^2$

  $f'(x) = 2x$

  $I =]-\infty; 0[$: $f'(x) < 0$

  $\rightarrow$ f ist streng monoton fallend

- $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

  $I =]-\infty; 0[$: $f'(x) < 0$

  $\rightarrow$ f ist streng monoton fallend

Maxima / Minima

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$

a) $f(x) \leq f(a) \quad \forall a$ in Umgebung von a:

a heisst lokale Maximalstelle und $f(a)$ heisst lokales Maximum oder Hochpunkt

b) $f(x) \geq f(a) \quad \forall x$ in Umgebung von a:

a heisst lokale Minimalstelle und $f(a)$ heisst lokales Minimum oder Tiefpunkt

c) gilt a) bzw. b) auf gesamten Definitionsbereich, so ist a eine globale Maximal- bzw. Minimalstelle und $f(a)$ ein globales Maximum bzw. Minimum

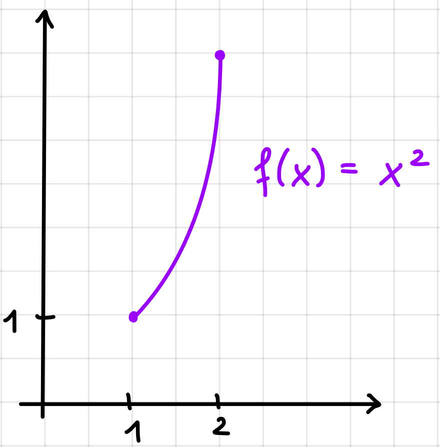
d) $x = a$ heisst auch kritische bzw. Extremstelle. $f(a)$ ist Extremum oder kritischer Punkt.

Bsp: $f(x) = x^2$

$x = 0$ ist Extremstelle und stellt globale Minimalstelle dar,

$f(0) = 0$ ist globales Minimum

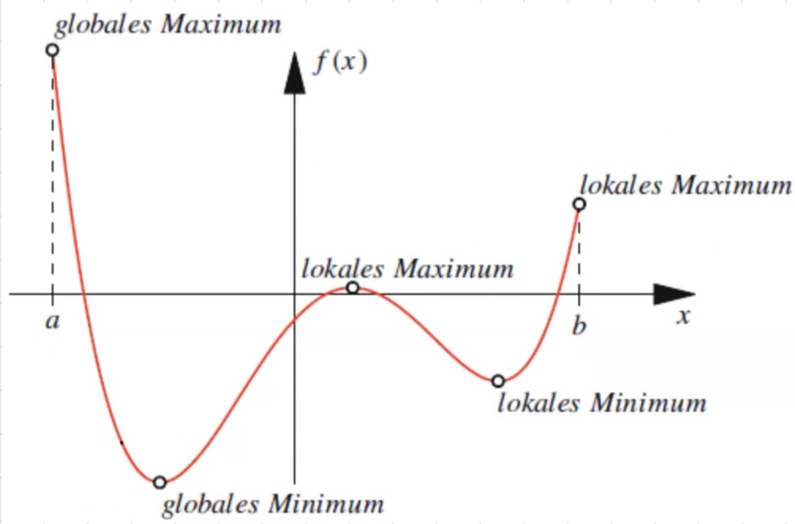
↳ betrachte Intervall $[1;2]$, $f: [1;2] \to \mathbb{R}$



$f(1) = 1$ ist globales Minimum

$f(2) = 4$ ist globales Maximum

→ wir müssen die Ränder des Definitionsbereichs betrachten bei Untersuchung auf globale Extrema



lokale Extremstellen

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf D differenzierbar.

$x = a$ sei lokale Extremstelle, dann gilt : $f'(a) = 0$

→ die Umkehrung muss nicht richtig sein, stellt somit notwendige Bedingung dar

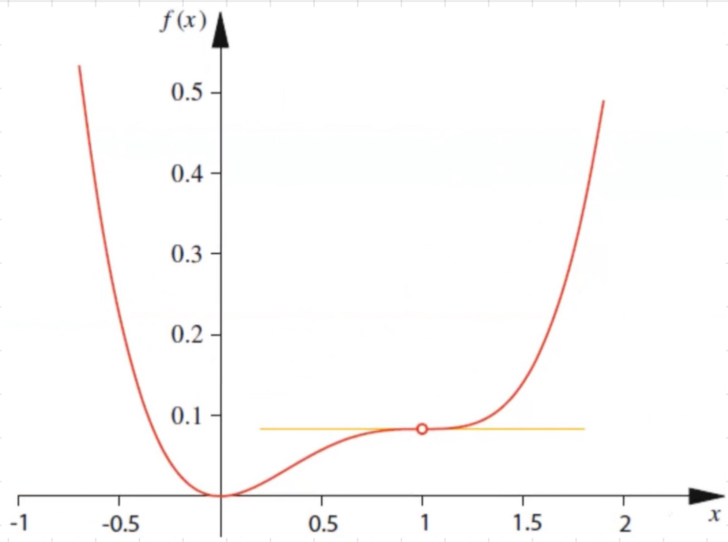
Bsp : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x \cdot (x-1)^2$

$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$

→ bei $x = 1$ liegt weder lokale Maximal- noch Minimalstelle vor : es handelt sich um einen Sattelpunkt



→ bei Maxima / Minima ändert sich das Vorzeichen der Ableitung

↳ wir müssen die 2. Ableitung betrachten, um zu entscheiden, ob Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt

hinreichende Bedingung für lokale Extrema

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar

Für $a \in D$ gilt: $f'(a) = 0$. Dann gilt:

a) $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ hat in a lokales Maximum

b) $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ hat in a lokales Minimum

c) $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f$ hat in a Sattelpunkt

→ falls gilt $f''(a) = f'''(a) = 0$, müssen erweiterte Kriterien betrachtet werden: es gelte $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ und $f^{(m)} \neq 0$

a) m sei gerade und $f^{(m)}(a) < 0$:

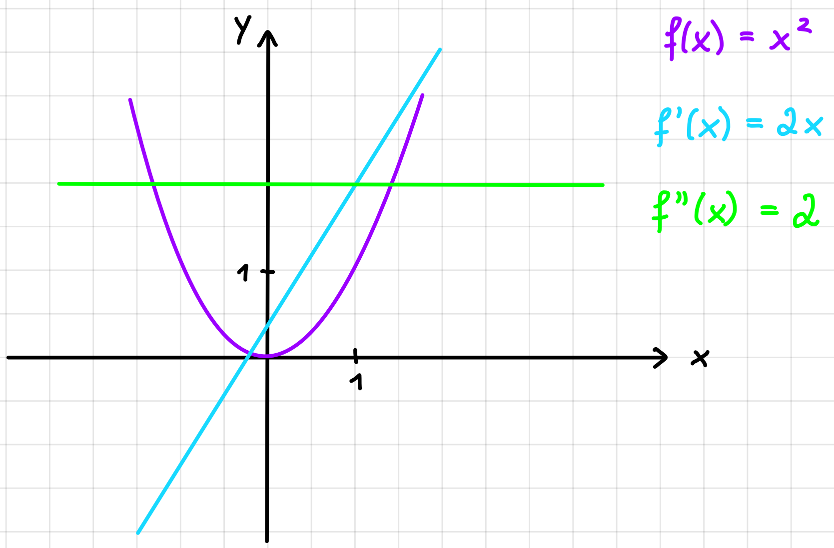
an $(a, f(a))$ liegt lokales Maximum vor

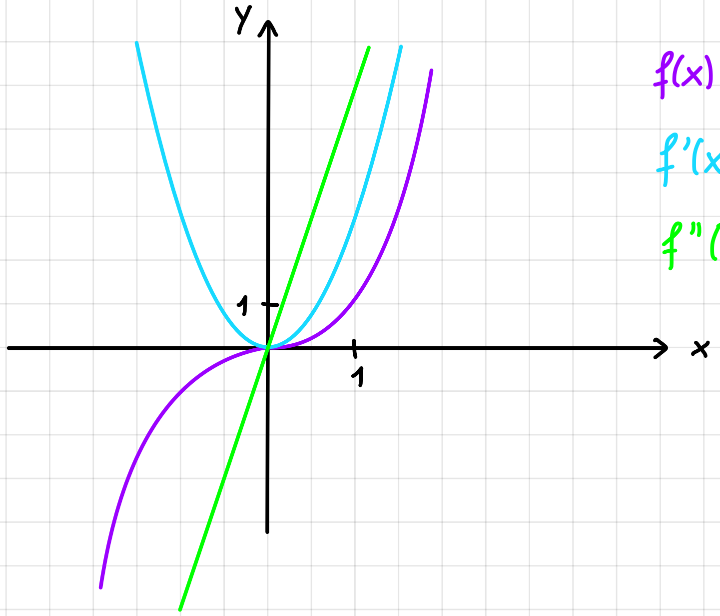
b) m sei gerade und $f^{(m)}(a) > 0$:

an $(a, f(a))$ liegt lokales Minimum vor

c) m sei ungerade: $(a, f(a))$ ist Sattelpunkt

<u>Bsp:</u> $f(x) = x^2$





$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

Hauptsatz der Algebra:

Ein Polynom vom Grad n mit

$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ besitzt höchstens n Nullstellen

→ zwischen 2 Nullstellen liegt ein lokales Extremum

→ 1. Ableitung $p'(x)$ hat den Grad $n-1$ und somit höchstens $(n-1)$ Nullstellen, d.h. f hat höchstens $(n-1)$ Extremstellen

Bsp.:

- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f''(x) = 6x - 8$

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \quad : \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 4 > 0$

$f''(\frac{2}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 < 0$

- an $(2;0)$ liegt Tiefpunkt vor
- an $\left(\frac{2}{3};\frac{32}{37}\right)$ liegt Hochpunkt vor
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \longrightarrow -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \longrightarrow +\infty$

keine globalen Extremstellen

Bestimmung der Extremstellen einer differenzierbaren Funktion

Reelle Funktion f ist gegeben und f ist auf einer Menge D definiert.

- Man bestimmt die Nullstellen $f'(x)$.
- Ist a eine Nullstelle von f', so berechnet man $f''(a)$.
- Ist $f''(a)>0$, so ist a eine lokale Minimalstelle; ist $f''(a)<0$, so ist a eine lokale Maximalstelle.
- Ist $f''(a)=0$, so berechnet man die höheren Ableitungen beginnend mit $f'''(a)$, bis das erste Mal ein Wert ungleich 0 auftritt und bestimmt dann, ob Extremstelle oder Sattelpunkt vorliegt.
- Hat die Menge D Randpunkte, so muss man diese separat untersuchen. Hierzu berechnet man die Funktionswerte der Randpunkte und vergleicht sie mit den lokalen Extremwerten.

Krümmungsverhalten von Funktionen

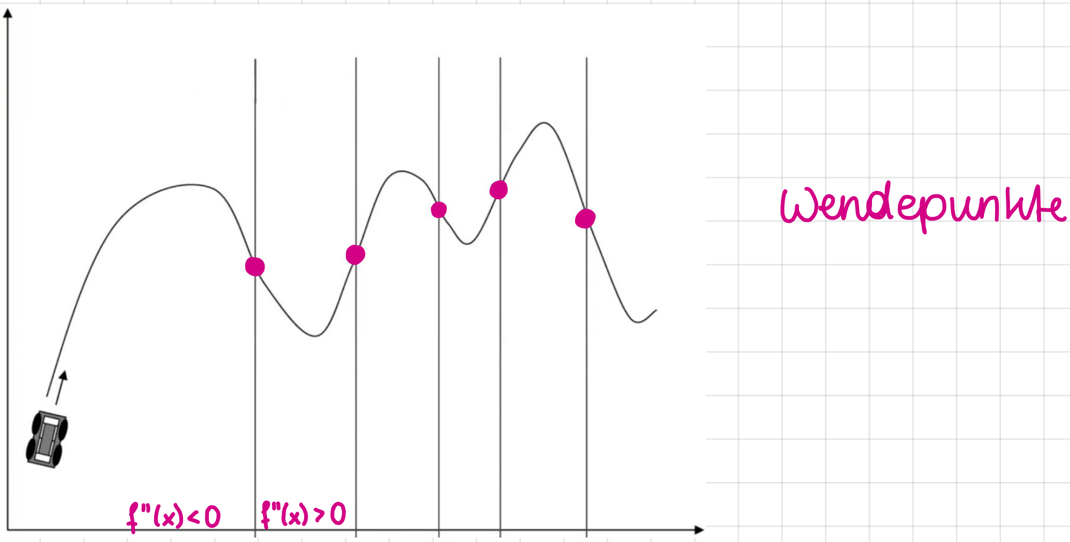
- $f(x)$ heisst konvex bzw. linksgekrümmt, wenn gilt: $f''(x) > 0$
- $f(x)$ heisst konkav bzw rechtsgekrümmt, wenn gilt: $f''(x) < 0$

→ Punkt an denen die Krümmung ihr Vorzeichen wechselt, heissen Wendepunkte

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

↳ falls gilt: $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, dann ist $(x, f(x))$ ein Sattelpunkt



Analytische Krümmung: $K_A(x) = f''(x)$

<u>Bsp:</u>

- $f(x) = mx + q$

  $f'(x) = m$

  $f''(x) = 0$

  → Gerade hat keine Krümmung

- $f(x) = ax^2 + bx + c$

  $f'(x) = 2ax + b$

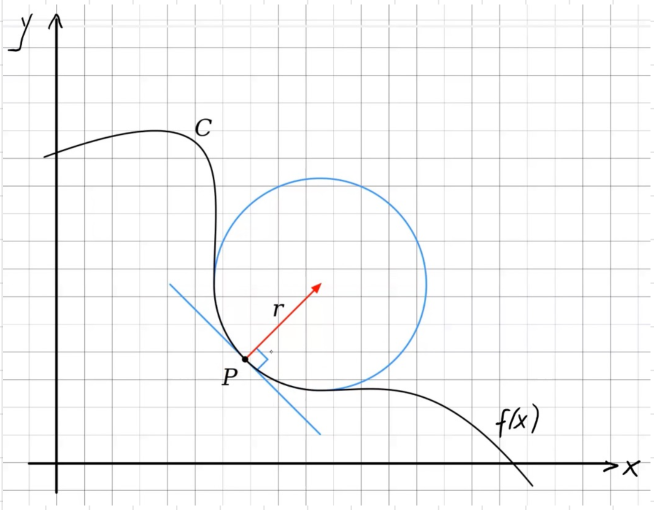
  $f''(x) = 2a = K_a(x)$

→ Parabel hat konstante Krümmung

→ sollte aus geometrischer Sicht nicht so sein : Kurve konstanter Krümmung sollte Kreis oder Kreisbogen sein

Geometrische Krümmung :

$$K_G(x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$



in Punkt P wird der Graph von f(x) durch Kreis angenähert : Krümmung ist $K_G = \frac{1}{r}$, r = Radius

Symmetrie :

- $f(-x) = f(x)$: f(x) ist gerade, d.h. symmetrisch zu y-Achse (z.B. $f(x) = x^2$)

- $f(-x) = -f(x)$: f(x) ist ungerade, d.h. symmetrisch zum Ursprung (z.B. $f(x) = x^3$)

Kurvendiskussion

Man sammelt Informationen über den Verlauf einer Funktion, um sie skizzieren zu können.

- Ableitung enthält Informationen, in welchen Bereichen die Funktion steigt bzw. fällt, wo Extremwerte wie Maxima und Minima vorliegen.
- Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion, wo eventuelle Wendepunkte vorliegen.

Typischerweise werden folgende Schritte bei der Kurvendiskussion durchgeführt:

- Nullstellen bestimmen
- Ordinatenabschnitt (y-Achsenabschnitt) bestimmen
- Extremwerte bestimmen
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte
- Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs, um festzustellen, an welchen Stellen globale Maxima bzw. Minima vorliegen
- Skizze

nützlich: eventuelle Symmetrie der Funktion bestimmen, indem $f(-x)$ gebildet wird

Bsp: $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Extremstellen und Wendestellen bestimmen

$$f'(x) = (2x-1) \cdot e^{-x} + (x^2 - x) \cdot (-e^{-x})$$
$$= e^{-x}(2x - 1 - x^2 + x)$$
$$= e^{-x}(-x^2 + 3x - 1)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 3x - 1) + e^{-x}(-2x + 3)$$
$$= e^{-x}(x^2 - 3x + 1 - 2x + 3)$$
$$= e^{-x}(x^2 - 5x + 4)$$
$$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 5x + 4) + e^{-x}(2x - 5)$$
$$= e^{-x}(-x^2 + 5x - 4 + 2x - 5)$$
$$= e^{-x}(-x^2 + 7x - 9)$$

Extremstellen: $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$e^{-x}(-x^2+3x-1) = 0$$

$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{-x} \neq 0$

$\rightarrow -x^2+3x-1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$f''(x_1) = -1{,}53 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; 0{,}31\right)$

$f''(x_2) = 1{,}53 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; -0{,}16\right)$

Wendestellen: $f''(x) \overset{!}{=} 0$

$$e^{-x}(x^2-5x+4) = 0$$

$$x^2-5x+4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 1$$

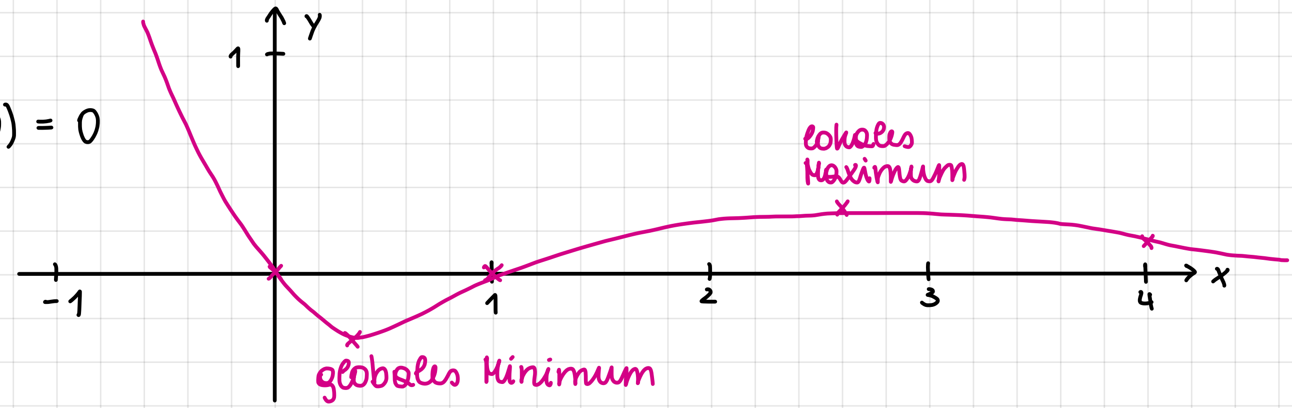
$f'''(x_1) = 0{,}55 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(4; 0{,}22)$

$f'''(x_2) = -1{,}10 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(1; 0)$

Ränder des Definitionbereichs untersuchen:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$f(0) = 0$



Bsp: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$ $\qquad f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$

Nullstellen: $f(x) \overset{!}{=} 0 \to$ keine Nullstelle

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2-1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}\,1} - (x^2-6x-1)\cdot 2\,\cancel{(x-3)}\cdot 1}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x+2}{(x-3)^3} = \frac{20}{(x-3)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-20\cdot 3\,\cancel{(x-3)^2}}{(x-3)^{\cancel{6}\,4}} = -\frac{60}{(x-3)^4} \neq 0$$

Extremstellen: $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$x^2-6x-1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{40}}{2}$$

$$x_1 = 3+\sqrt{10} \qquad x_2 = 3-\sqrt{10}$$

$f''(x_1) > 0$: lokales Minimum bei $(6{,}16 \,;\, 12{,}32)$

$f''(x_2) < 0$: lokales Maximum bei $(-0{,}16 \,;\, -0{,}32)$

Wendestellen nicht möglich

Randverhalten:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -\infty$$