

Übungsblatt DGL 13

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen den Begriff des Separationsansatzes und können diesen zur Lösung von PDGLs einsetzen.
- Sie kennen die Methode von d'Alembert zur Lösung von bestimmten PDGLs und können diese für die Wellengleichung anwenden.
- Sie kennen die Methode der Charakteristiken zur Lösung von PDGLs 1. Ordnung und können diese anwenden.

1. Lösen der Laplace-Gleichung

Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u_y(x, 0) = 0, u(x, 1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x) \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ sowie}$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad \text{für } y \in [0, 1]$$

mithilfe eines Separationsansatzes.

Der Separationsansatz der Form $u(x, y) = V(x)W(y)$ führt auf

$$V''(x)W(y) + V(x)W''(y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{V''(x)}{V(x)} = -\frac{W''(y)}{W(y)},$$

wenn $V(x) \not\equiv 0$ und $W(y) \not\equiv 0$ sind. Es folgt, dass diese Identität nur erfüllt werden kann, wenn beide Seiten konstant sind. Damit ergeben sich die gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$V''(x) = kV(x) \quad \text{und} \quad W''(y) = -kW(y)$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$V(x) = a_1 \exp(\sqrt{k}x) + a_2 \exp(-\sqrt{k}x),$$

$$W(y) = a_3 \exp(\sqrt{-k}y) + a_4 \exp(-\sqrt{-k}y).$$

Aus den Randbedingungen $u(0, y) = u(1, y) = 0$ folgt $V(0) = V(1) = 0$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} V(0) &= (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \\ V(1) &= a_1 \exp(\sqrt{k}) - a_1 \exp(-\sqrt{k}) = 0 \\ &\Rightarrow \exp(\sqrt{k}) = \exp(-\sqrt{k}) \Rightarrow \exp(2\sqrt{k}) = 1 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{k} = 2\pi i n \Rightarrow k = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

So sind mit

$$W_n(y) = \tilde{d}_n (\exp(\pi ny) + \exp(-\pi ny)) = 2\tilde{d}_n \cosh(\pi ny)$$

und

$$V_n(x) = \tilde{c}_n (\exp(i\pi nx) - \exp(-i\pi nx)) = 2\tilde{c}_n \sin(\pi nx)$$

die zugehörigen Lösungen durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi nx) \cosh(\pi ny)$$

gegeben.

Die Koeffizienten c_n sind noch aus der Bedingung $u(x, 1) = x$ zu bestimmen, d. h.

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi nx) \cosh(\pi n) \\ &= \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $c_1 = -2 \cosh(\pi)$, $c_3 = 1$ und $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$. Damit ergibt sich insgesamt die Lösung

$$u(x, t) = -\frac{2}{\cosh \pi} \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + \sin(3\pi x) \cosh(3\pi y).$$

A1

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ODE}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0$$

IC

$$u(x,1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x) \\ x \in [0,1]$$

$$\rightarrow u(0,y) = u(1,y) = 0 \quad y \in [0,1]$$

$$\text{Separationsansatz: } u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$$

Einsetzen in Laplace Gl.:

$$w(y) \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + v(x) \cdot \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$w(y) \cdot v''(x) + v(x) \cdot w''(y) = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = - \frac{w''(y)}{w(y)} = \text{konst.} \rightarrow v(x) \neq 0 \wedge w(y) \neq 0$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \text{konst.} \Leftrightarrow v''(x) = k \cdot v(x)$$

$$v'(x) = \int k \cdot v(x) dx$$

$$= k \cdot \int v(x) dx$$

$$\text{wirkt: } v(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

(1)

$$v'(x) = c_1 \sqrt{k} e^{\sqrt{k}x} - c_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}x}$$

$$v''(x) = c_1 k e^{\sqrt{k}x} + c_2 k e^{-\sqrt{k}x}$$

wähle: $w(y) = c_3 e^{\sqrt{k}y} + c_4 e^{-\sqrt{k}y}$

IC: $v(0,y) = v(0) \cdot w(y) = v(1) \cdot w(y) = 0$
 $v(0) = v(1) = 0$

$$v(0) = c_1 + c_2 = c_1 \cdot e^{\sqrt{k}0} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{k}0} = 0$$

$$\rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\rightarrow c_1 \cdot e^{\sqrt{k}0} - c_1 \cdot e^{-\sqrt{k}0} = 0$$

$$c_1 \cdot (e^{\sqrt{k}0} - e^{-\sqrt{k}0}) = 0$$

$$e^{\sqrt{k}0} = e^{-\sqrt{k}0}$$

$$e^{2\sqrt{k}0} = 1$$

$$2\sqrt{k}0 = 2\pi i \cdot n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$k = -\pi^2 n^2$$

es ergibt sich für $w(y)$:

$$w(y) = c_3 e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y} + c_4 e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial y} = v(x) \cdot w'(0) = 0 \Leftrightarrow w'(0) = 0$$

$$w'(y) = c_3 \sqrt{-\pi^2 n^2} e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y}$$

$$+ c_4 \sqrt{-\pi^2 n^2} e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}$$

(2)

$$w'(0) = 0$$

$$c_3 e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} \cdot 0} = c_4 e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} \cdot 0}$$

$$c_3 = c_4$$

$$\Rightarrow w(y) = c_3 [e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y} + e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}]$$

$$= c_3 \cdot 2 \cosh(\pi n y)$$

$$\hookrightarrow \text{wähle Anzahl } w(y) = c_3 e^{\sqrt{-k} y} + c_4 e^{-\sqrt{-k} y}$$

$$\rightarrow w(y) = 2c_3 \cosh(\pi n y)$$

$$\rightarrow v_n(x) = c_1 [e^{i\pi n x} - e^{-i\pi n x}]$$

$$= c_1 [\cos(\pi n x) + i \sin(\pi n x) - \cos(-\pi n x) - i \sin(-\pi n x)] \\ = c_1 [2i \sin(\pi n x)]$$

$$\Rightarrow u(x, y) = v(x) \cdot w(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n} \sin(\pi n x) \cdot \tilde{c}_{3,n} \cosh(\pi n y) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x) \cdot \cosh(\pi n y)$$

c mittels IC bestimmen:

$$u(x, 1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x) \cosh(\pi n)$$

(3)

Koeffizientenvergleich:

$$C_3 = 1$$

$$C_1 \sin(\pi x) \cosh(\pi) = -2 \sin(\pi x)$$

$$C_1 \cdot \cosh(\pi) = -2$$

$$C_1 = -\frac{2}{\cosh(\pi)}, \text{ alle anderen } C_n = 0$$

$$\rightarrow U(x, y) = -\frac{2}{\cosh(\pi)} \cdot \sin(\pi x) \cdot \cosh(\pi y)$$

$$\oplus \\ + \sin(3\pi x) \cdot \cosh(3\pi y)$$

2. Helmholtz-Gleichung

- a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ mit $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ mithilfe des Separationsansatzes $u(x, t) = e^{ikt} U(x)$ auf die Helmholtz-Gleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ führt.
- b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k^2 u = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(x_1, 0) = u(x_1, b) = u(0, x_2) = u(a, x_2) = 0$$

für $0 < a, b \in \mathbb{R}$, indem Sie $k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2$ setzen und einen Separationsansatz benutzen.

(a) Der Ansatz

$$u(x, t) = e^{ikt} U(x)$$

liefert

$$u_{tt} = (ik)^2 \exp(ikt) U(x) = -k^2 \exp(ikt) U(x),$$

$$u_{x_j x_j} = \exp(ikt) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_j^2}, \quad j = 1, 2.$$

Somit folgt aus $u_{tt} = \Delta u$ die Identität

$$-k^2 \exp(ikt) U(x) = \exp(ikt) (U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2}),$$

d. h., es gilt die Helmholtz-Gleichung $-k^2 U(x) = \Delta U(x)$.

(b) Ein Separationsansatz der Form

$$u(x_1, x_2) = U(x_1)V(x_2)$$

führt auf

$$U''(x_1)V(x_2) + U(x_1)V''(x_2) + k^2U(x_1)V(x_2) = 0$$

bzw.

$$\frac{U''(x_1)}{U(x_1)} + \frac{V''(x_2)}{V(x_2)} + k^2 = 0,$$

wenn $U(x_1) \neq 0$ und $V(x_2) \neq 0$ sind. Diese Identität kann nur erfüllt werden, wenn

$$U''(x_1)/U(x_1) = -k_{x_1}^2 \text{ und } V''(x_2)/V(x_2) = -k_{x_2}^2$$

mit $k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = k^2$ gilt. Die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differenzialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} U(x_1) &= a_1 \exp(\sqrt{-k_{x_1}^2}x_1) + a_2 \exp(-\sqrt{-k_{x_1}^2}x_1) \\ V(x_2) &= a_3 \exp(\sqrt{-k_{x_2}^2}x_2) + a_4 \exp(-\sqrt{-k_{x_2}^2}x_2). \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen $u(x_1, 0) = u(x_1, b) = 0$ folgt $V(0) = V(b) = 0$. Wir erhalten:

$$V(0) = a_3 + a_4 \Rightarrow a_3 = -a_4$$

$$V(b) = a_3 \left(\exp\left(\sqrt{-k_{x_2}^2}b\right) - \exp\left(-\sqrt{-k_{x_2}^2}b\right) \right) = 0$$

Also folgt

$$\exp\left(\sqrt{-k_{x_2}^2}b\right) = \exp\left(-\sqrt{-k_{x_2}^2}b\right) \text{ bzw. } \exp\left(2\sqrt{-k_{x_2}^2}b\right) = 1.$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $2\sqrt{-k_{x_2}^2}b = 2\pi i n$ bzw. $\sqrt{k_{x_2}^2} = \frac{\pi n}{b}$. Also ist $k_{x_2}^2 = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Analog erhalten wir aus $u(0, x_2) = u(a, x_2) = 0$ die Bedingungen $U(0) = U(a) = 0$ und damit

$$a_1 = -a_2 \quad \text{und} \quad k_{x_1}^2 = \frac{\pi^2 m^2}{a}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Damit ergeben sich die zugehörigen Lösungen

$$\begin{aligned} V_n(x_2) &= \tilde{c}_n \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right), \\ U_m(x_1) &= \tilde{d}_m \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \end{aligned}$$

Jegliche Linearkombinationen dieser Funktionen sind weitere Lösungen. Insgesamt können wir die Klasse der Lösungen beschreiben durch Entwicklungen der Form

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_m(x_1) V_n(x_2) \\ &= \sum_{n,m} c_{nm} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \end{aligned}$$

mit

$$k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

und bei entsprechender Konvergenz der Reihe.

A2

$$\text{Wellengl. : } v_{tt} = \Delta v \quad v(\vec{x}, t)$$

$$\frac{\partial^2 v(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(\vec{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v(\vec{x}, t)}{\partial x_2^2}$$

a)

$$\text{Separationsansatz: } v(\vec{x}, t) = e^{ikt} U(\vec{x})$$

$$\text{einsetzen: } -k^2 e^{ikt} U(\vec{x}) = e^{ikt} \left[\frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_2^2} \right]$$

$$-k^2 U(\vec{x}) = \Delta U(\vec{x})$$

$$b) \quad \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_2^2} + k^2 \cdot U(\vec{x}) = 0 \quad \text{PDE}$$

$$U(x_1, 0) = U(x_1, b) = U(0, x_2) = U(a, x_2) = 0 \quad \text{IC}$$

$$\text{nunze: } k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2$$

$$\text{Ansatz: } v(\vec{x}) = v(x_1) \cdot w(x_2)$$

einsetzen in PDE:

$$w(x_2) \cdot v''(x_1) + v(x_1) \cdot w''(x_2) + k^2 v(x_1) \cdot w(x_2) = 0$$

$$\frac{v''(x_1)}{v(x_1)} + \frac{w''(x_2)}{w(x_2)} + k^2 = 0 \quad v(x_1) \neq 0 \neq w(x_2)$$

$$= k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2$$

$$\rightarrow \frac{v''(x_1)}{v(x_1)} = -k_{x_1}^2 \quad \wedge \quad \frac{w''(x_2)}{w(x_2)} = -k_{x_2}^2$$

(5)

$$\rightarrow v(x_1) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1}$$

$$w(x_2) = c_3 \cdot e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2} + c_4 \cdot e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2}$$

Betrachte IC: $v(x_1, 0) = v(x_1, b) = 0$

$$c_3 + c_4 = 0 \Leftrightarrow c_3 = -c_4$$

$$w(b) = c_3 [e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} b} - e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} b}] = 0$$

$$e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} b} = e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} b}$$

$$e^{2\sqrt{-k_{x_2}^2} b} = 1$$

$$2\sqrt{-k_{x_2}^2} b = 2\pi i \cdot n$$

$$b = \frac{2\pi i n}{2\sqrt{-k_{x_2}^2}} = \frac{\pi i n}{k_{x_2} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\pi n}{k_{x_2}}$$

$$k_{x_2} = \frac{\pi n}{b}$$

Betrachte IC: $v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0$

$$c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -c_2$$

$$v(a) = c_1 [e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} a} - e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} a}] = 0$$

$$e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} a} = e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} a}$$

$$e^{2\sqrt{-k_{x_1}^2} a} = 1 \quad (\text{Exponent} = 0)$$

$$2\sqrt{-k_{x_1}^2} a = 2\pi i \cdot m$$

$$+ k_{x_1}^2 = \frac{+\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}$$

$$\rightarrow v_m(x_1) = c_m [e^{\sqrt{\frac{\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}} x_1} - e^{-\sqrt{-\frac{\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}} x_1}]$$

$$= c_m [\cos(\frac{\tilde{\pi}m}{a} x_1) + i \sin(\frac{\tilde{\pi}m}{a} x_1)$$

$$- \cos(-\frac{\tilde{\pi}m}{a} x_1) - i \sin(-\frac{\tilde{\pi}m}{a} x_1)]$$

$$= \underbrace{c_m \cdot 2i}_{=\tilde{c}_m} \sin(\frac{\tilde{\pi}m}{a} \cdot x_1)$$

$$w_n(x_2) = c_n [e^{\sqrt{-\frac{\tilde{\pi}^2 n^2}{b^2}} x_2} - e^{-\sqrt{-\frac{\tilde{\pi}^2 n^2}{b^2}} x_2}]$$

$$= c_n [\cos(\frac{\tilde{\pi}n}{b} x_2) + i \sin(\frac{\tilde{\pi}n}{b} x_2)$$

$$- \cos(-\frac{\tilde{\pi}n}{b} x_2) - i \sin(-\frac{\tilde{\pi}n}{b} x_2)]$$

$$= \underbrace{c_n \cdot 2i}_{=\tilde{c}_n} \sin(\frac{\tilde{\pi}n}{b} \cdot x_2)$$

allg. Lsg: $U(\vec{x}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{c}_m \tilde{c}_n \sin(\frac{\tilde{\pi}m}{a} \cdot x_1) \cdot \sin(\frac{\tilde{\pi}n}{b} \cdot x_2)$

$$k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = \left(\frac{\tilde{\pi}m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\pi}n}{b}\right)^2$$

3. Lösen einer PDGL 1. Ordnung mit dem Charakteristikenverfahren

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u = 0, \quad x, y > 0,$$

$$u(x, -x^2) = e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Finden Sie die Lösung $u = u(x, y)$ mit dem Charakteristikenverfahren.

a) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$tu_t + u_x = 2u, \quad u(x, 1) = x \quad (u, t > 0).$$

Benutzen Sie das Charakteristikenverfahren zur Bestimmung der Lösung u.

a)

Das System der charakteristischen Differenzialgleichungen ist mit $w(s) := u(k_1(s), k_2(s))$:

$$k'_1(s) = k_1(s),$$

$$k'_2(s) = k_2(s),$$

$$w'(s) = -(k_1(s)^2 + k_2(s)^2) w(s).$$

Es folgt $k_1(s) = c_1 e^s$, $k_2(s) = c_2 e^s$ und somit

$$w'(s) = -(c_1^2 + c_2^2) e^{2s} w(s).$$

Dies liefert die Lösung

$$w(s) = c_3 \exp\left(-\frac{1}{2}(k_1(s)^2 + k_2(s)^2)\right).$$

Als nächstes wird die Anfangskurve parametrisiert:

$$(x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = \left(t, -t^2, \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\right).$$

Für $s = 0$ soll $(k(s), w(s))$ auf dieser Anfangskurve liegen.
Damit folgt $c_1 = t$, $c_2 = -t^2$ und $c_3 = \exp(\frac{1}{2}t^4)$ und

$$x(s, t) = t e^s, \quad y(s, t) = -t^2 e^s.$$

Dies liefert

$$t = -\frac{y}{x}.$$

Setzt man jetzt alles ein, erhält man

$$u(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{y^4}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right).$$

b)

https://www.youtube.com/watch?v=Gy_nl5BHkYg

A3

d) $xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u = 0 \quad PDE$
 $u(x, -x^2) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad IC$

$$x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + (x^2 + y^2)u(x,y) = 0 \quad PDE$$

Charakteristiken: $\langle \tilde{a}'(\tilde{x}, u(\tilde{x})), \nabla u(\tilde{x}) \rangle$
 $+ b(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = 0$

$\tilde{a}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{k}'(s) \quad w(s) = u(\tilde{k}(s))$
 $w'(s) = \langle \nabla u, \tilde{k}'(s) \rangle$
 $= -(x^2 + y^2)w(s)$

$$\rightarrow \tilde{a}' = \tilde{k}'(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$w'(s) = -(k_1^2 + k_2^2)w(s) \quad (3)$$

aus (1) und (2): $k_1(s) = c_1 \cdot e^{s}$
 $k_2(s) = c_2 \cdot e^{s}$

aus (3): $w'(s) = -e^{2s}(c_1^2 + c_2^2)w(s)$

$$\frac{1}{w(s)} \frac{dw}{ds} = -e^{2s}(c_1^2 + c_2^2)$$

$$\ln |w| = -\frac{1}{2}e^{2s}(c_1^2 + c_2^2) + c_3$$

$$w(s) = e^{-\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)} \cdot e^{c_3}$$

(8)

$$w(s) = \tilde{c}_3 e^{-\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)}$$

Anfangskurve: $(x_0, y_0, v(x_0, y_0)) \rightarrow (x_0(t), y_0(t), v_0(t))$
 $\rightarrow (t, -t^2, e^{-\frac{t^2}{2}})$ aus IC

$\begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$ soll auf dieser Anfangskurve liegen
für $s=0$

⇒ $c_1 \cdot e^s = t \stackrel{s=0}{\rightarrow} c_1 = t$

$$c_2 \cdot e^s = -t^2 \stackrel{s=0}{\rightarrow} c_2 = -c_1^2 = -t^2$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2 + t^4)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^4} = 1$$

D
 $\tilde{c}_3 = e^{\frac{1}{2}t^4}$

$$\rightarrow x = k_1(s) = c_1 \cdot e^s = t \cdot e^s \Leftrightarrow e^s = \frac{x}{t}$$

$$y = k_2(s) = c_2 \cdot e^s = -t^2 \cdot e^s$$

$$= -t^2 \cdot \frac{x}{t} = -x \cdot t \Leftrightarrow t = -\frac{y}{x}$$

$$\rightarrow v(x, y) = e^{\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^4} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

$$b) t \cdot v_t + v_x = 2v \quad v(x,t)$$

$$t \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - 2v = 0 \quad PDE$$

$$v(x,1) = x \quad IC$$

$$\text{Charakteristiken: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s)$$

$$w(s) = v(\vec{k}(s))$$

$$w'(s) = 2 \cdot w(s)$$

$$\rightarrow k_1'(s) = 1 \quad k_1(s) = s + c_1 \quad (1)$$

$$k_2'(s) = t = k_2(s) \quad k_2(s) = c_2 \cdot e^s \quad (2)$$

$$w'(s) = 2 \cdot w(s) \Leftrightarrow \frac{dw}{w} = 2 \, ds$$

$$|\ln|w|| = 2s + c_3 \quad (3)$$

$$w = e^{2s} \cdot e^{c_3} = \tilde{c}_3 \cdot e^{2s}$$

$$\text{Kfangskurve: } (x_0, t_0, v(x_0, t_0)) = (x_0(\gamma), t_0(\gamma), v_0(\gamma))$$

$$\rightarrow (\gamma, 1, \gamma)$$

$$\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \\ w(0) \end{pmatrix} \text{ auf dieser Kurve: } c_1 = \gamma$$

$$c_2 = 1$$

$$\tilde{c}_3 = \gamma = c_1$$

$$x = k_1(s) = s + c_1 = s + \gamma \iff s = x - \gamma$$

$$\hookrightarrow t = k_2(s) = c_2 \cdot e^s = e^s = e^{x-\gamma} = \frac{e^x}{e^\gamma}$$

$$e^{\gamma t} = \frac{e^x}{t} \iff \ln \frac{e^x}{t} = \gamma$$

$$\ln e^x - \ln t = \gamma$$

$$\gamma = x - \ln t$$

$$\boxed{u(x,t) = V \cdot \frac{e^x}{e^\gamma} \cdot \frac{e^x}{e^\gamma} = (x - \ln t) \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2(x-\ln t)}}}$$

$$= (x - \ln t) \frac{e^{2x}}{e^{2x} \cdot e^{-2\ln t}} = (x - \ln t) \cdot e^{2\ln t}$$

$$= (x - \ln t) \cdot t^2$$