Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 5

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen den Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Standardnormalverteilung und können eine Binomialverteilung durch eine Standardnormalverteilung approximieren.
- Sie können die Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswerte und Varianzen stochastisch unabhängiger 2-dimensionaler stetiger Zufallsvariabler aus ihren gegebenen Verteilungen bestimmen.
- Sie können aus der Dichtefunktion einer stetigen 2-dimensionalen Zufallsvariablen Erwartungswerte, Varianzen und Wahrscheinlichkeiten bestimmen.
- Sie können die stochastische Unabhängigkeit von 2-dimensionalen diskreten Zufallsvariablen überprüfen.

---

1. Standardnormalverteilung - Quantile

Bestimmen Sie anhand der Tabelle für die Standardnormalverteilung die jeweils unbekannte Intervallgrenze (U: standardnormalverteilte Zufallsvariable):

a) $P(U \leq a) = 0{,}321$ b) $P(-0{,}22 \leq U \leq b) = 0{,}413$ c) $P(U \geq a) = 0{,}8002$

a)

$$\phi(a) = 0{,}3210 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad (\text{Wir setzen } a = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow$$
$$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}3210 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}6790 \quad \Rightarrow$$
$$k = 0{,}465 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}465$$

b)

$$\phi(b) - \phi(-0{,}22) = \phi(b) - 1 + \phi(0{,}22) = \phi(b) - 1 + 0{,}5871 =$$
$$= \phi(b) - 0{,}4129 = 0{,}413 \quad \Rightarrow \quad \phi(b) = 0{,}8259 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}938$$

c)

$$P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$$
$$\phi(a) = 0{,}1998 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad (\text{Wir setzen } a = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow$$
$$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}1998 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$$
$$k = 0{,}842 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}842$$

2. Wurf einer Münze

Eine homogene Münze wird 20-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsvariable

X = Anzahl „Wappen" bei 20 Würfen

soll durch eine Normalverteilung approximiert werden. Berechnen Sie mit dieser Näherung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 8 und höchstens 12 der insgesamt 20 Würfe zum Ergebnis „Wappen" führen. Welches (exakte) Ergebnis liefert die Binomialverteilung?

$$n = 20, \quad p = 1/2, \quad q = 1 - p = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 10; \quad \sigma^2 = npq = 5;$$

$$\sigma = \sqrt{5}; \qquad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{\sqrt{5}}; \qquad P^*(8 \le X \le 12)$$

Stetigkeitskorrektur: (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(8 \le X \le 12) \approx P(7{,}5 \le X \le 12{,}5) = P(-1{,}118 \le U \le 1{,}118) =$$
$$= P(|U| \le 1{,}118) = 2 \cdot \phi(1{,}118) - 1 = 2 \cdot 0{,}8682 - 1 = 0{,}7364$$

Exakte Lösung (*Binomialverteilung* mit $n = 20$ und $p = q = 1/2$):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x} = \frac{1}{2^{20}}\binom{20}{x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 20)$$

$$P(8 \le X \le 12) = f(8) + f(9) + f(10) + f(11) + f(12) =$$
$$= \frac{1}{2^{20}}\left(\binom{20}{8} + \binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} + \binom{20}{12}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{20}}\left(\frac{20!}{8!\,12!} + \frac{20!}{9!\,11!} + \frac{20!}{10!\,10!} + \frac{20!}{11!\,9!} + \frac{20!}{12!\,8!}\right) =$$
$$= \frac{20!}{2^{20} \cdot 8!\,10!}\left(\frac{2}{11 \cdot 12} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{1}{9 \cdot 10}\right) = 0{,}7368$$

3. Geräteprüfung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Gerätetyp einer Zuverlässigkeitsprüfung nicht standhält, betrage p = 0,06. Es werden insgesamt 200 Geräte unabhängig voneinander dieser Prüfung unterzogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Geräten mindestens 10 und höchstens 15 diese Zuverlässigkeitsprüfung nicht bestehen.

Die Zufallsvariable X (= Anzahl derjenigen Geräte in der Stichprobe vom Umfang $n = 200$, die einer Zuverlässigkeitsprüfung *nicht* standhalten) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 200$, $p = 0{,}06$ und $q = 1 - p = 0{,}94$, kann jedoch durch eine *Normalverteilung* mit den folgenden Parametern ersetzt werden:

$$\mu = np = 200 \cdot 0{,}06 = 12; \quad \sigma^2 = npq = 200 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94 = 11{,}28; \quad \sigma = \sqrt{11{,}28}$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 12}{\sqrt{11{,}28}}; \qquad P^*(10 \le X \le 15)$$

Stetigkeitskorrektur (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(10 \le X \le 15) \approx P(9{,}5 \le X \le 15{,}5) = P(-0{,}744 \le U \le 1{,}042) =$$
$$= \phi(1{,}042) - \phi(-0{,}744) = \phi(1{,}042) - 1 + \phi(0{,}744) =$$
$$= 0{,}8513 - 1 + 0{,}7716 = 0{,}6229$$

4. Diskrete 2-dimensionale Zufallsvariable

Bestimmen Sie aus der jeweils vorgegebenen Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) die Verteilungen der beiden Komponenten X und Y (Randverteilungen) sowie deren Erwartungswerte und Varianzen:

a)

$X \backslash Y$	-2	1	4
1	$1/8$	$1/4$	$1/8$
3	$1/8$	$1/8$	$1/4$

b)

$X \backslash Y$	-2	-1	1	2
0	$0{,}15$	$0{,}05$	$0{,}10$	$0{,}30$
1	$0{,}10$	$0{,}10$	$0{,}05$	$0{,}15$

a)

x_i	1	3
$f_1(x_i)$	$1/2$	$1/2$

y_i	-2	1	4
$f_2(y_i)$	$1/4$	$3/8$	$3/8$

$$\mu_X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2; \qquad \sigma_X^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\mu_Y = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\sigma_Y^2 = \left(-\frac{27}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{21}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{351}{64}$$

b)

x_i	0	1
$f_1(x_i)$	$0{,}6$	$0{,}4$

y_i	-2	-1	1	2
$f_2(y_i)$	$0{,}25$	$0{,}15$	$0{,}15$	$0{,}45$

$$\mu_X = 0 + 0{,}4 = 0{,}4; \qquad \sigma_X^2 = (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$$
$$\mu_Y = -0{,}5 - 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}9 = 0{,}4$$
$$\sigma_Y^2 = (-2{,}4)^2 \cdot 0{,}25 + (-1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}15 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}45 = 2{,}94$$

5. Diskrete 2-dimensionale Zufallsvariable II

Gegeben ist die unvollständige Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) (siehe unten).

a) Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten.
b) Wie lauten die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der beiden Komponenten sowie deren Mittelwerte und Varianzen?
c) Zeigen Sie: Die Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig.

X \ Y	0	1	2	$f_1(x)$
2		0,08	0,04	0,4
4	0,14			0,2
6			0,04	
$f_2(y)$	0,7		0,1	

a)

$f_1(6) = 1 - 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}4\,; \qquad f_2(1) = 1 - 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}2$

$f(2;0) = 0{,}4 - 0{,}08 - 0{,}04 = 0{,}28\,; \qquad f(6;0) = 0{,}7 - \underbrace{f(2;0)}_{0{,}28} - 0{,}14 = 0{,}28$

$f(6;1) = \underbrace{f_1(6)}_{0{,}4} - \underbrace{f(6;0)}_{0{,}28} - 0{,}04 = 0{,}08\,; \qquad f(4;1) = \underbrace{f_2(1)}_{0{,}2} - 0{,}08 - \underbrace{f(6;1)}_{0{,}08} = 0{,}04$

$f(4;2) = 0{,}1 - 0{,}04 - 0{,}04 = 0{,}02$

X \ Y	0	1	2	$\sum$ ($f_1(x)$)
2	0,28	0,08	0,04	0,40
4	0,14	0,04	0,02	0,20
6	0,28	0,08	0,04	0,40
$\sum$ ($f_2(y)$)	0,70	0,20	0,10	

b)

x_i	2	4	6
$f_1(x_i)$	0,4	0,2	0,4

y_i	0	1	2
$f_2(y_i)$	0,7	0,2	0,1

$\mu_X = 0{,}8 + 0{,}8 + 2{,}4 = 4\,; \qquad \sigma_X^2 = (-2)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$

$\mu_Y = 0 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4\,; \qquad \sigma_Y^2 = (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}7 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}44$

c)

$$f_1(2) \cdot f_2(0) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 = f(2;0)$$

$$f_1(2) \cdot f_2(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08 = f(2;1)$$

$$f_1(2) \cdot f_2(2) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04 = f(2;2) \quad \text{usw.}$$

Es gilt: $f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (für $x = 2, 4, 6$ und $y = 0, 1, 2$) $\Rightarrow$
X und Y sind stochastisch unabhängige Zufallsvariable.

6. Stetige 2-dimensionale Zufallsvariable

Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) besitze die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot e^{-2x-y} & \text{für } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{alle übrigen } (x,y) \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante k durch Normierung der Dichtefunktion.
b) Wie lauten die Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$ der Randverteilungen?
c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte E(X) und E(Y) sowie die Varianzen Var(X) und Var(Y).
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(0 \leq X \leq 2;\ 0 \leq Y \leq 3)$.

a)
$$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} k \cdot e^{-2x-y}\, dy\, dx = k \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy =$$

$$= k \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} \cdot \left[-e^{-y} \right]_0^{\infty} = k\left(0 + \frac{1}{2}\right)(0 + 1) = \frac{1}{2} k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

(Integrale: 312 mit $a = -2$ bzw. $a = -1$)

b)
$$f_1(x) = 2 \cdot \int_{y=0}^{\infty} e^{-2x-y}\, dy = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = 2 \cdot e^{-2x} \left[-e^{-y} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2 \cdot e^{-2x}(0 + 1) = 2 \cdot e^{-2x} \qquad \text{(Integral 312 mit } a = -1)$$

$$f_2(y) = 2 \cdot \int_{x=0}^{\infty} e^{-2x-y}\, dx = 2 \cdot e^{-y} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = 2 \cdot e^{-y} \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2 \cdot e^{-y}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = e^{-y} \qquad \text{(Integral 312 mit } a = -2)$$

c)
$$E(X) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x}\, dx}_{\text{Integral 313 mit } a = -2} = 2 \left[\frac{-2x - 1}{4} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-2x}\, dx}_{\text{Integral 314 mit } a = -2} = 2 \left[\frac{4x^2 + 4x + 2}{-8} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2\left(0 + \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = \underbrace{\int_0^\infty y \cdot e^{-y}\,dy}_{\text{Integral 313 mit } a\,=\,-1} = \Big[(-y-1)\cdot e^{-y}\Big]_0^\infty = 0 + 1 = 1$$

$$E(Y^2) = \underbrace{\int_0^\infty y^2 \cdot e^{-y}\,dy}_{\text{Integral 314 mit } a\,=\,-1} = \left[\frac{y^2 + 2y + 2}{-1}\cdot e^{-y}\right]_0^\infty = 0 + 2 = 2$$

$$\operatorname{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - 1^2 = 1$$

d) $$P(0 \le X \le 2;\; 0 \le Y \le 3) = 2 \cdot \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3} e^{-2x-y}\,dy\,dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 e^{-2x}\,dx \cdot \int_0^3 e^{-y}\,dy = 2\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right]_0^2 \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^3 =$$

$$= \Big[e^{-2x}\Big]_0^2 \cdot \Big[e^{-y}\Big]_0^3 = (e^{-4} - 1)(e^{-3} - 1) = 0{,}9328$$

22 Integrale mit e^{ax} $(a \neq 0)$
(312) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax}$
(313) $\int x \cdot e^{ax}\,dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)\cdot e^{ax}$
(314) $\int x^2 \cdot e^{ax}\,dx = \left(\frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3}\right)\cdot e^{ax}$

7. Cafe

Bei einem Cafebesitzer entfallen 60 % der Bestellungen auf Kaffee und Kuchen sowie 40 % auf Eis. An seinen Öffnungstagen herrscht zu 30 % Sonnenschein und zu 70 % Bewölkung oder Regen. Wie gross sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten, wenn die beiden Zufallsvariablen "Bestellungen" und "Wetter" unabhängig voneinander sind?

Gegeben sind die Randverteilungen der beiden Zufallsvariablen X und Y. Ihr Produkt muss bei Unabhängigkeit mit den gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten p_{ik} identisch sein. Wir bestimmen die p_{ik} mittels einer Verteilungstabelle:

X (Bestellung) \ Y (Wetter)	y_1 (Sonnenschein)	y_2 (Bewölkung oder Regen)	$\sum_{k=1}^{2}$
x_1 (Kaffee und Kuchen)	$p_{11} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0{,}60 \cdot 0{,}30 = 0{,}18$	$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} = 0{,}60 \cdot 0{,}70 = 0{,}42$	$p_{1\bullet} = 0{,}60$
x_2 (Eis)	$p_{21} = p_{2\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0{,}40 \cdot 0{,}30 = 0{,}12$	$p_{22} = p_{2\bullet} \cdot p_{\bullet 2} = 0{,}40 \cdot 0{,}70 = 0{,}28$	$p_{2\bullet} = 0{,}40$
$\sum_{j=1}^{2}$	$p_{\bullet 1} = 0{,}30$	$p_{\bullet 2} = 0{,}70$	1

8. Stetige 2-dimensionale Zufallsvariable II
Die stochastisch unabhängigen stetigen Zufallsvariablen X und Y besitzen die folgenden Dichtefunktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}(x+1), \quad 0 \le x \le 2$$

$$f_2(y) = y + \frac{1}{2}, \quad 0 \le y \le 1$$

(im übrigen Bereich verschwinden beide Funktionen).
a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion f(x,y) der gemeinsamen Verteilung.
b) Wie lautet die Verteilungsfunktion F(x,y) der gemeinsamen Verteilung?
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(0 ≤ X ≤ 1; 0 ≤ Y ≤ 1).

a) $$f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{4}(x+1)\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(x+1)(2y+1)$$

b) $$F(x;y) = \int_{u=0}^{x} \int_{v=0}^{y} f(u;v)\,dv\,du = \frac{1}{8} \cdot \int_{u=0}^{x} \int_{v=0}^{y} (u+1)(2v+1)\,dv\,du =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_0^x (u+1)\,du \cdot \int_0^y (2v+1)\,dv = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}u^2 + u\right]_0^x \cdot \left[v^2 + v\right]_0^y =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)(y^2 + y) = \frac{1}{16}(x^2 + 2x)(y^2 + y)$$

c) $$P(0 \le X \le 1;\ 0 \le Y \le 1) = F(1;1) = \frac{1}{16} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{8}$$

9. Diskrete 2-dimensionale Zufallsvariable III
Die diskreten Zufallsvariablen X und Y mit den folgenden Verteilungsfunktionen sind stochastisch unabhängig:

x_i	1	2	3
$f_1(x_i)$	0,5	0,3	0,2

y_k	5	10	15
$f_2(y_k)$	0,15	0,6	0,25

Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung.

X \ Y	5	10	15	$\sum$
1	0,075	0,300	0,125	0,500
2	0,045	0,180	0,075	0,300
3	0,030	0,120	0,050	0,200
$\sum$	0,150	0,600	0,250	

$f_1(x)$

$f_2(y)$