

# Übungsblatt LA 4

Computational and Data Science  
FS2024

## Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Matrix, symmetrische/schiefsymmetrische Matrix, Einheitsmatrix, inverse Matrix, Transposition und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können Matrizen addieren, subtrahieren und mit einem Skalar bzw. mit einer anderen Matrix multiplizieren und bestimmen, ob diese Operationen für gegebene Matrizen durchführbar sind oder nicht.

### 1. Aussagen über Matrizen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Eine reelle $2 \times 3$ Matrix besteht aus 2 Zeilen und 3 Spalten.	X	
b) Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann als $1 \times 1$ Matrix aufgefasst werden.	X	
c) Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ kann als reelle $3 \times 1$ Matrix interpretiert werden.	X	
d) Eine reelle $2 \times 3$ Matrix hat 8 Komponenten.		X
e) Wenn A eine $2123 \times 8248$ Matrix ist und B eine $8248 \times 9178$ Matrix, dann ist die Summe A+B definiert.		X
f) Wenn A eine $2123 \times 8248$ Matrix ist und B eine $8248 \times 9178$ Matrix, dann ist das Produkt A•B definiert.	X	
g) Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren sind, dann ist das Produkt $\vec{v} \cdot \vec{u}^T$ definiert.	X	
h) Für zwei beliebige quadratische $n \times n$ Matrizen gilt: $A \bullet B = B \bullet A$ .		X
i) Für jede beliebige Matrix gilt: $((((A^T)^T)^T)^T = (A^T)^T$ .	X	
j) Hat eine Matrix genau 13 Komponenten, so handelt es sich entweder um eine $13 \times 1$ oder eine $1 \times 13$ Matrix.	X	
k) Wenn A eine $16 \times 20$ Matrix und B eine $16 \times 30$ Matrix ist, dann ist das Produkt $A^T \bullet B$ definiert.	X	
l) Für 2 beliebige $2 \times 2$ Matrizen A und B mit $A \neq B$ gilt: $A \bullet B \neq B \bullet A$ .		X
m) Ist eine $2 \times 2$ Matrix sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, dann gilt: $A=0$ .	X	

### 2. Addition, Subtraktion, Transposition mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a)  $C = A + B$

b)  $C = -2A$

c)  $C = B/3$

d)  $C = 2B - A$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

e)  $D + E + F$

f)  $3D - 2(E + 5F)$

g)  $3D^T - 3(E + 2F)^T$

h)  $2(D + E) - 3(D^T - E^T)^T + 5(F - 2D)$

a)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-3) & 3 + 9 & -1 + 3 \\ 4 + (-6) & -2 + 6 & 8 + 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 12 & 2 \\ -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\underline{\underline{C}} = -2 \cdot A = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -8 & 4 & -16 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\underline{\underline{C}} = \frac{B}{3} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{3} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{6}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\underline{\underline{C}} = 2 \cdot B - A = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) - 1 & 2 \cdot 9 - 3 & 2 \cdot 3 - (-1) \\ 2 \cdot (-6) - 4 & 2 \cdot 6 - (-2) & 2 \cdot 3 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 15 & 7 \\ -16 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 + 1 + 5 & 2 + 8 + 0 & 5 - 2 + 10 \\ -1 + 3 + 0 & 2 + 0 - 2 & 3 + 1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} -43 & -10 & -81 \\ -9 & 26 & -73 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} -35 & -15 \\ -26 & 22 \\ -57 & -59 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} -3 & 18 & -15 \\ 26 & -32 & 12 \end{pmatrix}$$

### 3. Matrizen berechnen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Matrizen aus Aufgabe 2a) – d) mit Python/Numpy.

```
# Initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[1,3,-1],[4,-2,8]]);
B=np.array([[-3,9,3],[-6,6,3]]);
# Berechnungen:
C=A+B;
E=-2*A;
F=(1/3)*B;
G=2*B-A;
# Ausgabe:
print('C=',C);
print('E=',E);
print('F=',F);
print('G=',G);
```

### 4. Produkte von Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte der Matrizen.

$$\text{a) } C = A \cdot B \quad \text{b) } C = B \cdot A \quad \text{c) } C = A \cdot \mathbb{E} \quad \text{d) } C = \mathbb{E} \cdot A$$

a)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 8 & 8 - 12 \\ -3 + 2 & 12 - 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = B \cdot A &= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3 & (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 12 & -4 + 4 \\ 4 - 9 & 8 - 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \neq A \cdot B. \end{aligned}$$

c)

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 & 0 + 4 \\ 3 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}.$$

d)

$$\underline{\underline{C}} = \mathbb{1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 & 4 + 0 \\ 0 + 3 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}.$$

→ Die Multiplikation von Matrizen ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. abhängig von den Matrizen A und B kann entweder  $AB = BA$  oder  $AB \neq BA$  gelten.

## 5. Produkte mit Matrizen II

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte der Matrizen.

a)  $C = A^T \cdot A$

b)  $C = A \cdot A^T$

c)  $C = (A \cdot B)^T$

d)  $C = A^T \cdot B^T$

e)  $C = B^T \cdot A^T$

f)  $C = (B^T \cdot A^T)^T$

Transponierte Matrizen:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = A^T \cdot A &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 4 & -3 - 2 \\ -3 - 2 & 1 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 1 & -6 - 1 \\ -6 - 1 & 4 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \neq A^T \cdot A. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = (A \cdot B)^T &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 - 3 & -3 - 4 \\ -4 + 3 & 2 + 4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = A^T \cdot B^T &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 2 & 9 - 8 \\ -2 - 1 & -3 + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \neq (A \cdot B)^T. \end{aligned}$$

e)

$$\underline{\underline{C}} = B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 3 & -4 + 3 \\ -3 - 4 & 2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = (A \cdot B)^T.$$

f)

$$\underline{\underline{C}} = (B^T \cdot A^T)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = A \cdot B.$$

## 6. Produkte mit Matrizen III

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte (falls definiert) der Matrizen.

- a)  $A \cdot B$       b)  $B \cdot A$       c)  $A \cdot \vec{u}$       d)  $A^2$       e)  $B^2$   
 f)  $\vec{v}^T \cdot \vec{u}$       g)  $\vec{v} \cdot \vec{u}$       h)  $\vec{u} \cdot \vec{v}^T$       i)  $B^T \cdot \vec{v}$       j)  $\vec{v}^T \cdot B$

a)

$$\underline{\underline{A \cdot B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 45 & 58 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

b)

Das Produkt  $B \cdot A$  ist nicht definiert.

c)

$$\underline{\underline{A \cdot \vec{u}}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -16 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

d)

$$\underline{\underline{A^2}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -22 & -1 \\ 31 & -24 & 37 \\ -19 & -7 & -3 \end{bmatrix}.$$

e)

Das Produkt  $B^2$  ist nicht definiert.

f)

$$\underline{\underline{\vec{v}^T \cdot \vec{u}}} = [1 \ 3 \ -3] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = [18] = \underline{\underline{18}}.$$

g)

Das Produkt  $\vec{v} \cdot \vec{u}$  ist nicht definiert.

h)

$$\underline{\underline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}.$$

i)

$$\underline{\underline{\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

j)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -8 \end{bmatrix} = (\underline{\underline{\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{v}}})^T.$$

## 7. Matrizen berechnen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Matrizen aus Aufgabe 7 mit Python/Numpy.

```
# Initialisieren:  
import numpy as np;  
# Parameter:  
A=np.array([[4,-3,2],[6,2,5],[-1,-2,3]]);  
B=np.array([[3,4],[1,2],[5,6]]);  
u=np.array([[0],[2],[-4]]);  
v=np.array([[1],[3],[-3]])  
# Berechnungen:  
C=A@B;  
# D=B@A; nicht definiert  
E=A@u;  
F=A@A;  
# G=B@B; nicht definiert  
H=v.T@u;  
# J=v@u; nicht definiert  
K=u@v.T;  
L=B.T@v;  
M=v.T@B;  
# Ausgabe:  
print('C= ',C);  
print('D kann nicht gebildet werden');  
print('E= ',E);  
print('F= ',F);  
print('G kann nicht gebildet werden');  
print('H= ',H);  
print('J kann nicht gebildet werden');  
print('K= ',K);  
print('L= ',L);  
print('M= ',M);
```