FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

ā`sleq`j_rr ?l_ 13

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über die Krümmung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Verschwindet die analytische Krümmung einer Funktion an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion linear oder sogar konstant.	●	○
b) Haben zwei Funktionen die gleiche analytische Krümmung, dann haben ihre Funktionsgraphen auch die gleiche geometrische Krümmung.	○	●
c) Die geometrische Krümmung jedes Funktionsgraphen ist gerade $f''(x)$.	○	●
d) Jede quadratische Funktion hat konstante, analytische Krümmung.	●	○
e) Jede Parabel hat konstante geometrische Krümmung.	○	●
f) Verschwindet an einem Punkt die analytische Krümmung einer Funktion, dann gilt dies auch für die geometrische Krümmung ihres Funktionsgraphen.	●	○

2. Bestimmung von Wendestellen

Wir bestimmen jeweils alle Wende*p*unkte der angegebenen Funktion.

a) Wir betrachten die Funktion

$$a(x) := x^3 - x + 1. \tag{1}$$

Für die erste, zweite und dritte Ableitung von a erhalten wir

$$a'(x) = 3 \cdot x^{3-1} - 1 + 0 = 3x^2 - 1 \tag{2}$$

$$a''(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 6x \tag{3}$$

$$a'''(x) = 6. \tag{4}$$

Da a'' linear ist, kann a höchstens eine *Wendes*telle haben. Aus

$$0 = a''(x) = 6x \qquad \big| : 6 \tag{5}$$

erhalten wir die *Wendes*telle

$$x_1 = 0. \tag{6}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$a(x_1) = a(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1 \tag{7}$$

$$a'(x_1) = a'(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1. \tag{8}$$

$$a'''(x_1) = a'''(0) = 6 > 0. \tag{9}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$a(x_k)$	$a'(x_k)$	$a''(x_k)$	$a'''(x_k)$	Typ
1	0	1	-1	0	$6 > 0$	Wende*pu*nkt

(10)

b) Wir betrachten die **Funktion**

$$b(x) := x^4 - 6x^2 + 2. \tag{11}$$

Für die **erste**, **zweite** und **dritte** **Ableitung** von b erhalten wir

$$b'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 12x \tag{12}$$

$$b''(x) = 4 \cdot 3x^{3-1} - 12 = 12x^2 - 12 \tag{13}$$

$$b'''(x) = 12 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 24x. \tag{14}$$

Da $b''(x)$ **quadratisch** ist, hat b höchstens zwei ***Wendes*tellen**. Aus

$$0 = b''(x) = 12x^2 - 12 = 12 \cdot \left(x^2 - 1\right) = 12 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \tag{15}$$

erhalten wir die ***Wendes*tellen**

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1. \tag{16}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$b(x_1) = b(-1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3 \tag{17}$$

$$b'(x_1) = b'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1) = -4 + 12 = 8. \tag{18}$$

$$b'''(x_1) = b'''(-1) = 24 \cdot (-1) = -24 < 0 \tag{19}$$

$$b(x_2) = b(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3 \tag{20}$$

$$b'(x_2) = b'(1) = 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 = 4 - 12 = -8. \tag{21}$$

$$b'''(x_2) = b'''(1) = 24 \cdot 1 = 24 > 0. \tag{22}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$b(x_k)$	$b'(x_k)$	$b''(x_k)$	$b'''(x_k)$	Typ
1	-1	-3	$+8$	0	$-24 < 0$	Wende*pu*nkt
2	$+1$	-3	-8	0	$+24 > 0$	Wende*pu*nkt

(23)

c) Wir betrachten die **Funktion**

$$c(x) := 4^x - 2^x - 1. \tag{24}$$

Für die **erste**, **zweite** und **dritte Ableitung** von c erhalten wir

$$c'(x) = \ln(4) \cdot 4^x - \ln(2) \cdot 2^x - 0 = 2\ln(2) \cdot 4^x - \ln(2) \cdot 2^x \tag{25}$$

$$c''(x) = 2\ln(2) \cdot \ln(4) \cdot 4^x - \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^x = 4\ln^2(2) \cdot 4^x - \ln^2(2) \cdot 2^x \tag{26}$$

$$c'''(x) = 4\ln^2(2) \cdot \ln(4) \cdot 4^x - \ln^2(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^x = 8\ln^3(2) \cdot 4^x - \ln^3(2) \cdot 2^x. \tag{27}$$

An den *Wendestellen* von c gilt

$$0 = c''(x) = 4\ln^2(2) \cdot 4^x - \ln^2(2) \cdot 2^x = \ln^2(2) \cdot \left(4 \cdot 4^x - 2^x\right) \qquad \Big| : \ln^2(2) \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 4 \cdot 4^x - 2^x = 2^2 \cdot \left(2^2\right)^x - 2^x = 2^2 \cdot 2^{2x} - 2^x = 2^{2x+2} - 2^x \qquad \Big| + 2^x \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{2x+2} \qquad \Big| \log_2(\ldots) \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2x + 2 \qquad \Big| - 2 - x. \tag{31}$$

Daraus erhalten wir die *Wendestelle*

$$x_1 = -2. \tag{32}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$\begin{aligned} c\left(x_1\right) &= c(-2) = 4^{-2} - 2^{-2} - 1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{16} - \frac{4}{16} - \frac{16}{16} \\ &= \frac{1-4-16}{16} = -\frac{19}{16} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} c'\left(x_1\right) &= c'(-2) = 2\ln(2) \cdot 4^{-2} - \ln(2) \cdot 2^{-2} = \frac{2\ln(2)}{16} - \frac{\ln(2)}{4} \\ &= \frac{\ln(2)}{8} - \frac{2\ln(2)}{8} = -\frac{\ln(2)}{8}. \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} c'''\left(x_1\right) &= c'''(-2) = 8\ln^3(2) \cdot 4^{-2} - \ln^3(2) \cdot 2^{-2} = \frac{8\ln^3(2)}{16} - \frac{\ln^3(2)}{4} \\ &= \frac{2\ln^3(2)}{4} - \frac{\ln^3(2)}{4} = \frac{\ln^3(2)}{4} > 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$c(x_k)$	$c'(x_k)$	$c''(x_k)$	$c'''(x_k)$	Typ
1	-2	$-19/16$	$-\ln(2)/8$	0	$\ln^3(2)/4 > 0$	Wendepunkt

(36)

d) Wir betrachten die **Funktion**

$$d(x) = x \cdot \mathrm{e}^x. \tag{37}$$

Für die **erste**, **zweite** und **dritte Ableitung** von d erhalten wir

$$d'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = (1 + x) \cdot \mathrm{e}^x \tag{38}$$

$$d''(x) = (1+0)\cdot \mathrm{e}^x + (1+x)\cdot \mathrm{e}^x = (1+1+x)\cdot \mathrm{e}^x = (2+x)\cdot \mathrm{e}^x \tag{39}$$

$$d'''(x) = (0+1)\cdot \mathrm{e}^x + (2+x)\cdot \mathrm{e}^x = (1+2+x)\cdot \mathrm{e}^x = (3+x)\cdot \mathrm{e}^x. \tag{40}$$

An den *Wende*stellen von d gilt

$$0 = d''(x) = (2+x)\cdot \mathrm{e}^x \qquad \Big|: \mathrm{e}^x \tag{41}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = 2+x \qquad \Big| -2. \tag{42}$$

Daraus erhalten wir die *Wende*stelle

$$x_1 = -2. \tag{43}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$d\big(x_1\big) = d(-2) = -2\cdot \mathrm{e}^{-2} = -\frac{2}{e^2} \tag{44}$$

$$d'\big(x_1\big) = d'(-2) = (1-2)\cdot \mathrm{e}^{-2} = -\frac{1}{e^2} \tag{45}$$

$$d'''\big(x_1\big) = d'''(-2) = (3-2)\cdot \mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0. \tag{46}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$d\big(x_k\big)$	$d'\big(x_k\big)$	$d''\big(x_k\big)$	$d'''\big(x_k\big)$	Typ
1	-2	$-2/\mathrm{e}^2$	$-1/\mathrm{e}^2$	0	$1/\mathrm{e}^2 > 0$	Wende*p*unkt

(47)

e) Wir betrachten die Funktion

$$e(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}. \tag{48}$$

Für die erste, zweite und dritte Ableitung von e erhalten wir

$$e'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{49}$$

$$e''(x) = \frac{\mathrm{e}^x + (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{50}$$

$$e'''(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \tag{51}$$

An den *Wende*stellen von e gilt

$$0 = e''(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \Big| \cdot 2 \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \qquad \Big| + \mathrm{e}^{-x} \tag{53}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x \qquad \Big| \ln(\ldots) \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -x = x \qquad \Big| + x \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = 2x \qquad \Big| : 2. \tag{56}$$

Daraus erhalten wir die *Wendestelle*

$$x_1 = 0. \tag{57}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$e(x_1) = e(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \tag{58}$$

$$e'(x_1) = e'(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \tag{59}$$

$$e'''(x_1) = e'''(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1. \tag{60}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$e(x_k)$	$e'(x_k)$	$e''(x_k)$	$e'''(x_k)$	Typ
1	0	0	1	0	$1 > 0$	Wendepunkt

(61)

f) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{62}$$

Für die erste, zweite und dritte Ableitung von d erhalten wir

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{63}$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot (-1) \cdot \frac{2x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{64}$$

$$f'''(x) = (2x - 0) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(x^2 - 1\right) \cdot (-1) \cdot \frac{2x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(3x - x^3\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{65}$$

An den *Wendestellen* von f gilt

$$0 = f''(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Big| : e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{66}$$

$$0 = \left(x^2 - 1\right) = (x+1) \cdot (x-1). \tag{67}$$

Daraus erhalten wir die *Wendestellen*

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1. \tag{68}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$f(x_1) = f(-1) = e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \tag{69}$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = -(-1) \cdot e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \tag{70}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-1) = \left(3 \cdot (-1) - (-1)^3\right) \cdot e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = (-3+1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{e}} \tag{71}$$

$$f\left(x_2\right) = f(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \tag{72}$$

$$f'\left(x_2\right) = f'(1) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2}} = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \tag{73}$$

$$f'''\left(x_2\right) = f'''(1) = \left(3 \cdot 1 - 1^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2}} = (3-1) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,. \tag{74}$$

Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	$f\left(x_k\right)$	$f'\left(x_k\right)$	$f''\left(x_k\right)$	$f'''\left(x_k\right)$	Typ
1	-1	$1/\sqrt{\mathrm{e}}$	$+1/\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$-2/\sqrt{\mathrm{e}} < 0$	Wendepunkt
2	$+1$	$1/\sqrt{\mathrm{e}}$	$-1/\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$+2/\sqrt{\mathrm{e}} > 0$	Wendepunkt

(75)

3. Aussagen über Wendestellen

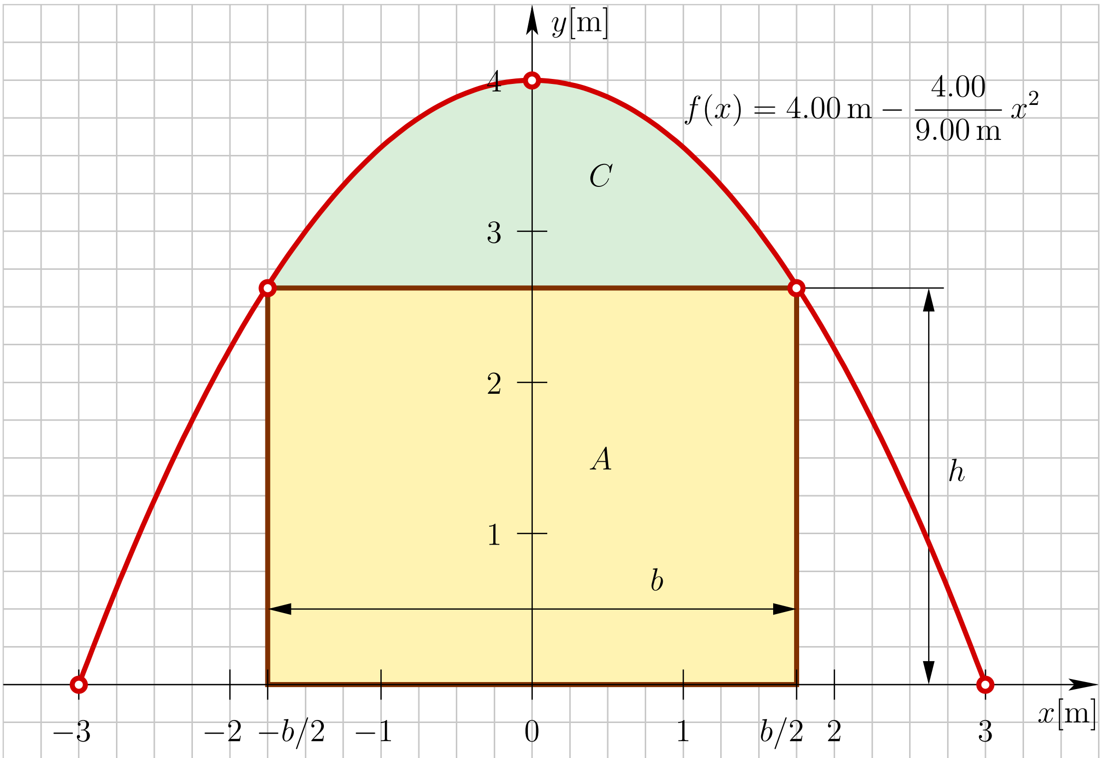
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die quadratische Standardfunktion hat keine Wendestellen.	●	○
b) Null ist eine Wendestelle der kubischen Standardfunktion.	●	○
c) Gilt $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$ und $f^{IV}(3) < 0$, dann hat f an der Stelle $x = 3$ eine Wendestelle.	○	●
d) An jeder Wendestelle einer Funktion verschwindet die geometrische Krümmung ihres Funktionsgraphen.	●	○
e) Ein Sattelpunkt einer Funktion kann niemals an einer Wendestelle der Funktion liegen.	○	●

4. Torbogen

Wir betrachten einen **parabelförmigen** Torbogen, der sich als **Graph** der **Funktion**

$$f(x) = 4.00\,\mathrm{m} - \frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}\,x^2 =: c - a \cdot x^2 \tag{76}$$

beschreiben lässt. In den Torbogen soll eine **rechteckige** Türe eingebaut werden, deren untere beiden Ecken auf dem Boden und obere beiden Ecken auf dem **Graphen** von f liegen. Dabei stehen mehrere Varianten zur Diskussion. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Wir bestimmen jeweils die **Breite** b und die **Höhe** h der Türe, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt. In jedem Fall muss gelten

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) = c - a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c - a \cdot \frac{b^2}{4} = c - \frac{a}{4} \cdot b^2. \tag{77}$$

Die **Schnittpunkte** des Torbogens mit der x-Achse sind gerade die **Nullstellen** von f. Diese erfüllen die **Gleichung**

$$0 = c - a \cdot x^2 \qquad \Big| + a \cdot x^2 \tag{78}$$

$$\Leftrightarrow \qquad a \cdot x^2 = c \qquad \Big| : a \tag{79}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 = \frac{c}{a} \qquad \Big| \pm\sqrt{\ldots} \tag{80}$$

Daraus erhalten wir die beiden **Lösungen**

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} \approx \pm\sqrt{\frac{4.00\,\mathrm{m}}{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}} = \pm\sqrt{9.00\,\mathrm{m}^2} = \pm 3.00\,\mathrm{m}. \tag{81}$$

a) Wenn die Türe **quadratisch** sein soll, dann muss gelten

$$b = h = c - \frac{a}{4} \cdot b^2 \qquad \Big| - c + \frac{a}{4} \cdot b^2 \tag{82}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{a}{4} \cdot b^2 + b - c = 0 \qquad \big| \, \text{MF.} \tag{83}$$

Mit Hilfe der **Mitternachtsformel** zur Lösung von **quadratischen Gleichungen** erhalten wir

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot (-c)}}{2 \cdot \frac{a}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + ac}}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{a} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + ac}\right) \\ &\approx \frac{2}{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}} \cdot 4.00\,\mathrm{m}}\right) = \frac{2 \cdot 9.00\,\mathrm{m}}{4.00} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{\frac{9.00 + 16.0}{9.00}}\right) \\ &= 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{\frac{25.0}{9.00}}\right) = 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(-1 \pm \frac{5.00}{3.00}\right). \end{aligned} \tag{84}$$

Die beiden **Lösungen** sind demnach

$$b_1 = 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(-1 - \frac{5.00}{3.00}\right) = 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(-\frac{8.00}{3.00}\right) = -12.0\,\mathrm{m} \tag{85}$$

$$b_2 = 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(-1 + \frac{5.00}{3.00}\right) = 4.50\,\mathrm{m} \cdot \left(\frac{2.00}{3.00}\right) = 3.00\,\mathrm{m}. \tag{86}$$

Weil **Breite** und **Höhe** der Türe beide **positiv** sein müssen, finden wir

$$\underline{\underline{h = b \approx 3.00\,\mathrm{m}.}} \tag{87}$$

b) Die Türe soll die maximal mögliche **Fläche** haben. Zunächst formulieren wir die Aufgabe als **Optimierungsproblem**. Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} z &:= b && \text{(unabhängige Variable)} \\ A &:\equiv \textbf{Fläche} \text{ der Türe} && \text{(zu optimierende Variable).} \end{aligned} \tag{88}$$

Wir drücken nun die Variablen b, h und A durch die unabhängige Variable z aus. Mit Hilfe von (77) erhalten wir

$$b(z) = z \tag{89}$$

$$h(z) = c - \frac{a}{4} \cdot b^2(z) = c - \frac{a}{4} \cdot z^2 \tag{90}$$

$$A(z) = b(z) \cdot h(z) = z \cdot h(z) = z \cdot \left(c - \frac{a}{4} \cdot z^2\right) = c \cdot z - \frac{a}{4} \cdot z^3\,. \tag{91}$$

Weil die Türe innerhalb des Torbogens gebaut werden soll, muss gelten

$$0 \leq z \leq 6.00\,\mathrm{m}\,. \tag{92}$$

Wir suchen somit das **globale Maximum** der **Funktion** $A(z)$ auf dem **geschlossenen Intervall**

$$I := \big[z_0, z_\mathrm{E}\big] = \big[0, 6.00\,\mathrm{m}\big]. \tag{93}$$

Dabei gehen wir gemäss den folgenden drei Schritten vor.

S1 **Kritische Stellen:** Die erste Ableitung von A ist

$$A'(z) = c \cdot 1 - \frac{a}{4} \cdot 3z^{3-1} = c - \frac{3a}{4} \cdot z^2 . \tag{94}$$

Für die **kritischen Stellen** von A gilt

$$0 = A'(z) = c - \frac{3a}{4} \cdot z^2 \qquad \Big| + \frac{3a}{4} \cdot z^2 \tag{95}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{3a}{4} \cdot z^2 = c \qquad \Big| \cdot \frac{4}{3a} \tag{96}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z^2 = c \cdot \frac{4}{3a} = \frac{4c}{3a} \qquad \Big| \sqrt{\dots} . \tag{97}$$

Daraus erhalten wir die **kritische Stelle**

$$z_1 = \sqrt{\frac{4c}{3a}} \approx \sqrt{\frac{4 \cdot 4.00\,\mathrm{m}}{3 \cdot \frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4.00\,\mathrm{m} \cdot 9.00\,\mathrm{m}}{3 \cdot 4.00}} = \sqrt{4 \cdot 3.00\,\mathrm{m}^2} = 2\sqrt{3.00}\,\mathrm{m}. \tag{98}$$

Durch Einsetzen finden wir die Werte

$$b_1 = b\big(z_1\big) = z_1 \approx 2\sqrt{3.00}\,\mathrm{m} \approx 3.46\,\mathrm{m} \tag{99}$$

$$h_1 = h\big(z_1\big) = c - \frac{a}{4} \cdot z_1^2 \approx 4.00\,\mathrm{m} - \frac{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}{4} \cdot \big(2\sqrt{3.00}\,\mathrm{m}\big)^2 = \frac{8.00\,\mathrm{m}}{3} \approx 2.67\,\mathrm{m} \tag{100}$$

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 2\sqrt{3.00}\,\mathrm{m} \cdot \frac{8}{3} \cdot 1.00\,\mathrm{m} \approx 9.24\,\mathrm{m}^2. \tag{101}$$

S2 **Randstellen:** An den **Randstellen** $z_0 = 0$ und $z_\mathrm{E} = 6.00\,\mathrm{m}$ finden wir die Werte

$$b_0 = z_0 = 0 \tag{102}$$

$$h_0 = h\big(z_0\big) = c - \frac{a}{4} \cdot z_0^2 \approx 4.00\,\mathrm{m} - \frac{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}{4} \cdot 0^2 = 4.00\,\mathrm{m} \tag{103}$$

$$A_0 = b_0 \cdot h_0 \approx 0 \cdot 4.00\,\mathrm{m} = 0 \tag{104}$$

$$b_\mathrm{E} = z_\mathrm{E} \approx 6.00\,\mathrm{m} \tag{105}$$

$$h_\mathrm{E} = h\big(z_\mathrm{E}\big) = c - \frac{a}{4} \cdot z_\mathrm{E}^2 \approx 4.00\,\mathrm{m} - \frac{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}{4} \cdot (6.00\,\mathrm{m})^2 = 0.00\,\mathrm{m} \tag{106}$$

$$A_\mathrm{E} = b_\mathrm{E} \cdot h_\mathrm{E} \approx 6.00\,\mathrm{m} \cdot 0.00\,\mathrm{m} = 0.00\,\mathrm{m}^2. \tag{107}$$

S3 **Kandidatenvergleich:** Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	z_k	b_k	h_k	A_k	Typ
0	0	0	4.00 m	0	**globales Minimum**
1	3.46 m	3.46 m	2.67 m	9.24 m^2	**globales Maximum**
E	6.00 m	6.00 m	0.00 m	0.00 m^2	**globales Minimum**

(108)

Die Türe hat demnach genau dann die maximal mögliche **Fläche**, wenn gilt

$$\underline{\underline{b}} = b_1 \approx \underline{\underline{3.46\,\mathrm{m}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{h}} = h_1 \approx \underline{\underline{2.67\,\mathrm{m}.}} \tag{109}$$

Die maximal mögliche Fläche der Türe ist somit

$$A = A_1 \approx 9.24\,\mathrm{m}^2 . \tag{110}$$

c) Die Fläche innerhalb des Torbogens oberhalb der Türe soll $C \approx 1.00\,\mathrm{m}^2$ betragen. In diesem Fall muss gelten

$$C = \int_{-b/2}^{b/2} f(x)\,\mathrm{d}x - A = 2\int_0^{b/2} f(x)\,\mathrm{d}x - b\cdot h = 2\int_0^{b/2} \left(c - a\cdot x^2\right)\mathrm{d}x - b\cdot h$$

$$= 2\cdot\left(c\cdot x - \frac{a}{3}\cdot x^3\right)\Big|_0^{b/2} - b\cdot h = 2\cdot c\cdot\frac{b}{2} - 2\cdot\frac{a}{3}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^3 - b\cdot\left(c - \frac{a}{4}\cdot b^2\right)$$

$$= c\cdot b - 2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b^3}{8} - b\cdot c + \frac{a}{4}\cdot b^3 = \left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\cdot a\cdot b^3 = \frac{2}{12}\cdot a\cdot b^3 = \frac{a}{6}\cdot b^3. \tag{111}$$

Die Breite b erfüllt demnach die Gleichung

$$C = \frac{a}{6}\cdot b^3 \qquad \Big|\cdot\frac{6}{a} \tag{112}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{6C}{a} = b^3 \qquad \Big|\sqrt[3]{\ldots}. \tag{113}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{b}} = \sqrt[3]{\frac{6C}{a}} \approx \sqrt[3]{\frac{6\cdot 1.00\,\mathrm{m}^2}{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}} = \sqrt[3]{\frac{6\cdot 9.00\,\mathrm{m}^3}{4.00}} = \sqrt[3]{13.5\,\mathrm{m}^3} \approx \underline{\underline{2.38\,\mathrm{m}}} \tag{114}$$

$$\underline{\underline{h}} = c - \frac{a}{4}\cdot b^2 \approx 4.00\,\mathrm{m} - \frac{\frac{4.00}{9.00\,\mathrm{m}}}{4}\cdot\left(\sqrt[3]{13.5\,\mathrm{m}^3}\right)^2 = 4.00\,\mathrm{m} - \frac{1}{9.00\,\mathrm{m}}\cdot\left(13.5\,\mathrm{m}^3\right)^{2/3}$$

$$\approx \underline{\underline{3.37\,\mathrm{m}}}. \tag{115}$$

5. Aussagen über das Verhalten einer Funktion

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto f(x) := \mathrm{e}^x\cdot(x-1). \end{aligned} \tag{116}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
b) Die Funktion f hat genau eine Wendestelle.	●	○
c) Die Funktion f ist injektiv.	○	●
d) Die Funktion f' hat bei $x = -1$ ein lokales Minimum.	●	○
e) Die Funktion $g(x) := \mathrm{e}^{x+1}\cdot(x-1)$ fällt nirgends steiler ab als mit einem Winkel von 45°.	●	○
f) Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)\geq -1$.	●	○