

Übungsblatt DGL 7

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe freie gedämpfte harmonische Schwingung, Dämpfungskonstante, schwache/kritische/starke Dämpfung sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können den qualitativen Verlauf einer freien gedämpften harmonischen Schwingung anhand der Parameter in der DGL beurteilen.
- Sie können das AWP der freien gedämpften harmonischen Schwingung für einen RLC Schaltkreis aufstellen und qualitativ beurteilen.

1. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung berücksichtigt.	X	
b) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung vernachlässigt.		X
c) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen berücksichtigt.		X
d) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen vernachlässigt.	X	
e) Die Frequenz einer freien gedämpften harmonischen Schwingung lässt sich direkt aus der DGL ablesen.	X	

2. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Sei $\omega_0, \delta > 0$ und $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das folgende AWP der freien gedämpften harmonischen Schwingung:

DGL: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

AB: $x(t_0) = x_0$

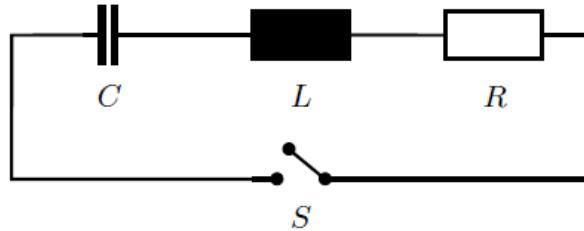
$\dot{x}(t_0) = v_0.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Ist x_1 eine Lösung der DGL, dann auch die Funktion $x_2 = 7x_1$.	X	
b) Sind x_1 und x_2 Lösungen des AWP, dann auch die Funktion $x_3 = x_2 + x_1$.		X
c) Gilt $\delta > \omega_0$, dann oszilliert die Lösung $x(t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega_d < \omega_0$.		X
d) Gilt $\delta < \omega_0$, dann oszilliert die Lösung $x(t)$ mit der Kreisfrequenz ω_0 .		X

3. RLC-Schaltkreis

Gegeben sei ein RLC-Schaltkreis, der aus einem Widerstand $R = 1,2 \Omega$, einer Induktivität $L = 15 \text{ mH}$ und einer Kapazität $C = 168 \mu\text{F}$ bestehe. Der Kondensator werde durch eine externe Spannungsquelle auf eine Spannung von 5 V aufgeladen. Anschliessend wird die Spannungsquelle entfernt und der Schalter S wird geschlossen.



- Stellen Sie das AWP für die Spannung $U_C(t)$ auf, die am Kondensator anliegt.
- Bestimmen Sie die ungedämpfte Kreisfrequenz und die Dämpfungskonstante des Systems. Welcher Fall liegt vor?
- Mit welcher Frequenz schwingt das System?

a)

Mit der Maschenregel ergibt sich

$$U_R + U_L + U_C = 0$$

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = 0$$

Wir erhalten als DGL (2. Ordnung, homogen, konstante Koeffizienten, autonom)

$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{LC} \cdot U_C = 0$$

Wir wählen als Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ und es ergeben sich somit als ABs

$$U_C(0) = U_0 \approx 5.00 \text{ V}$$

$$\dot{U}_C(0) = \frac{1}{C} \cdot \dot{Q}(0) = \frac{1}{C} \cdot I(0) = \frac{1}{C} \cdot 0 = 0.$$

Das AWP sieht folgendermassen aus

$$\text{DGL: } \ddot{U}_C + \frac{R}{L} \dot{U}_C + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

$$\text{AB: } U_C(0) = U_0$$

$$\dot{U}_C(0) = 0$$

b)

Vergleich der DGL aus a) mit der DGL für die freie gedämpfte harmonische Schwingung liefert

$$\ddot{U}_C + 2\delta \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0.$$

Die ungedämpfte Kreisfrequenz ergibt sich zu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{1.50 \cdot 10^{-2} \text{ H} \cdot 1.68 \cdot 10^{-4} \text{ F}}} \approx 629 \frac{1}{\text{s}},$$

die Dämpfungskonstante zu

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{R}{2L} \approx \frac{1.20 \Omega}{2 \cdot 1.50 \cdot 10^{-2} \text{ H}} \approx \underline{\underline{40.0 \frac{1}{\text{s}}}}.$$

Da $\delta < \omega_0$, liegt schwache Dämpfung vor.

c)

Das System schwingt mit der Frequenz

$$\underline{\underline{\nu_d}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{1.50 \cdot 10^{-2} \text{ H} \cdot 1.68 \cdot 10^{-4} \text{ F}} - \frac{(1.20 \Omega)^2}{4 \cdot (1.50 \cdot 10^{-2} \text{ H})^2}} \approx \underline{\underline{100 \text{ Hz}}}.$$

4. Lösen von AWP von freien gedämpften harmonischen Schwingungen

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen AWP und bestimmen Sie die Lösung sowohl in Sinus-Cosinus-Form als auch in Sinus-Phasen-Form.

a) DGL: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 0$

AB: $x(0) = 1$

$\dot{x}(0) = -2$.

b) DGL: $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

AB: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 3$.

a)

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm 5j; \quad x = e^{-2t} [C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)];$$

$$\dot{x} = e^{-2t} [-(2C_1 + 5C_2) \cdot \sin(5t) + (5C_1 - 2C_2) \cdot \cos(5t)]$$

Lösung: $x(t) = e^{-2t} \cdot \cos(5t)$

b)

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}j; \quad x = e^{-\frac{1}{2}t} \left[C_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right];$$

$$\dot{x} = e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{1}{2}(C_1 + \sqrt{7}C_2) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + \frac{1}{2}(\sqrt{7}C_1 - C_2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right]$$

Lösung: $x(t) = \frac{6}{7}\sqrt{7} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)$

5. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Gegeben sei das folgende AWP der freien ungedämpften harmonischen Schwingung:

DGL: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

AB: $x(3) = 5$

$\dot{x}(3) = 0$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das AWP beschreibt ein schwach gedämpftes System.	X	
b) Die Lösung des AWP verläuft durch den Punkt (5;-5).	X	
c) Die Lösung des AWP hat ein lokales Maximum bei $t = 3$.	X	
d) Die Lösung des AWP ist periodisch.		X
e) Für die Lösung des AWP gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.	X	
f) Für die Lösung des AWP gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$.	X	

6. Aperiodischer Grenzfall

Die DGL einer freien gedämpften Schwingung laute

$$\ddot{x} + p\dot{x} + 2x = 0, p > 0.$$

- a) Für welchen Wert des Parameters p ist der aperiodische Grenzfall vorhanden?
- b) Wie lautet die spezielle Lösung für die ABs $x(0) = 10, \dot{x}(0) = -1$, wenn der unter
a) bestimmte aperiodische Grenzfall vorliegt? Skizzieren Sie den zeitlichen
Verlauf dieser „Schwingung“.

a)

Aperiodischer Grenzfall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + 2 = 0$ hat eine *doppelte* (reelle) Lösung.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - 2}_{0}} = -\frac{p}{2} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

b)

Allgemeine Lösung ($\lambda_{1/2} = -\sqrt{2}$): $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

$$\dot{x} = (C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_1 t) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

Spezielle Lösung:

$$x = [(10\sqrt{2} - 1)t + 10] \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

