FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

ā`sleq`j_rr ?l_8

Am knsr_rgml_j _lb B_r_ Qagclac @Qa
FQ 0.01

JĘqslecl

K_rfck_rgi 1

1. Aussagen über die Produkt-Regel

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Mit Hilfe der *Produkt-Regel* lässt sich die *Monom-Regel* für *ganzzahlige Exponenten* beweisen.	●	○
b) Die *Faktor-Regel* ist ein Spezialfall der *Produkt-Regel*.	●	○
c) Gilt $f(x) = x^2 \cdot g(x)$, dann folgt $f'(x) = 2 \cdot x \cdot g'(x)$.	○	●
d) Gilt $f(x) = x^2 \cdot g(x)$, dann folgt $f'(x) = 2 \cdot x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$.	●	○

2. Ableitung von Produkten

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* f mit Hilfe der *Produktregel*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = x \cdot \big(x^3 - 1\big). \tag{1}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \cdot \big(x^3 - 1\big) + x \cdot \big(x^3 - 1\big)' = 1 \cdot \big(x^3 - 1\big) + x \cdot \big(3x^2 - 0\big) = x^3 - 1 + 3x^3 \\ &= \underline{\underline{4x^3 - 1.}} \end{aligned} \tag{2}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x + 3). \tag{3}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (x + 2)' \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot (x + 3)' = 1 \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot 1 = \underline{\underline{2x + 5.}} \tag{4}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \left(x^3 - 1\right) \cdot (1 - x). \tag{5}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \left(x^3 - 1\right)' \cdot (1 - x) + \left(x^3 - 1\right) \cdot (1 - x)' = 3x^2 \cdot (1 - x) + \left(x^3 - 1\right) \cdot (-1) \\ &= 3x^2 - 3x^3 + 1 - x^3 = \underline{\underline{3x^2 - 4x^3 + 1.}}\end{aligned} \tag{6}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^2 = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 - x + 1\right). \tag{7}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \left(x^2 - x + 1\right)' \cdot \left(x^2 - x + 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 - x + 1\right)' \\ &= 2\left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 - x + 1\right)' = 2\left(x^2 - x + 1\right) \cdot (2x - 1) \\ &= 4x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 2x - 2 = \underline{\underline{4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.}}\end{aligned} \tag{8}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{x}\,. \tag{9}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= (x + 1)' \cdot \sqrt{x} + (x + 1) \cdot \left(\sqrt{x}\,\right)' = (1 + 0) \cdot \sqrt{x} + (x + 1) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot x + x + 1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{3x + 1}{2\sqrt{x}}}}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x + 1) \cdot \frac{1}{x}\,. \tag{11}$$

Für die *Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= (x + 1)' \cdot \frac{1}{x} + (x + 1) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = (1 + 0) \cdot \frac{1}{x} + (x + 1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x}{x^2} - \frac{x + 1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

3. Konsequenzen der Produkt-Regel

Mit Hilfe der *Produktregel* der *Differentialrechnung* lassen sich einige weitere, nützliche Regeln herleiten.

a) Es sei f eine *Funktion* der Form

$$f(x) = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) = a(x) \cdot \big(b(x) \cdot c(x)\big). \tag{13}$$

Gemäss *Produktregel* gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f'(x)}} &= a'(x) \cdot \big(b(x) \cdot c(x)\big) + a(x) \cdot \big(b(x) \cdot c(x)\big)' \\ &= a'(x) \cdot b(x) \cdot c(x) + a(x) \cdot \big(b'(x) \cdot c(x) + b(x) \cdot c'(x)\big) \\ &= \underline{\underline{a'(x) \cdot b(x) \cdot c(x) + a(x) \cdot b'(x) \cdot c(x) + a(x) \cdot b(x) \cdot c'(x).}} \end{aligned} \tag{14}$$

b) Es sei f eine *Funktion* der Form

$$f(x) = h^2(x) = h(x) \cdot h(x)\,. \tag{15}$$

Mit Hilfe der *Produktregel* erhalten wir die *Quadratregel*, d.h.

$$\underline{\underline{f'(x)}} = h'(x) \cdot h(x) + h(x) \cdot h'(x) = \underline{\underline{2 \cdot h(x) \cdot h'(x).}} \tag{16}$$

c) Es sei f eine *Funktion* der Form

$$f(x) = \sqrt{h(x)}\,. \tag{17}$$

Durch Umformen, beidseitig *Ableiten* und Anwenden der *Quadratregel* aus Teilaufgabe b) erhalten wir

$$f(x) = \sqrt{h(x)} \qquad \Big|\, (\ldots)^2 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \qquad f^2(x) = h(x) \qquad \Big|\, (\ldots)' \tag{19}$$

$$\Rightarrow \qquad 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = h'(x) \qquad \Big|\, : \big(2\, f(x)\big). \tag{20}$$

Es gilt also die *Wurzelregel*, d.h.

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{h'(x)}{2\, f(x)} = \underline{\underline{\frac{h'(x)}{2\,\sqrt{h(x)}}}}\,. \tag{21}$$

d) Es sei f eine *Funktion* der Form

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}\,. \tag{22}$$

Durch Umformen, beidseitig *Ableiten* und Anwenden der *Produkt-Regel* erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{h(x)} \qquad \Big|\, \cdot h(x) \tag{23}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x)\cdot h(x) = 1 \qquad \Big| (\ldots)' \tag{24}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot h'(x) = 0 \qquad \Big| -f(x)\cdot h'(x) \tag{25}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x)\cdot h(x) = -f(x)\cdot h'(x) \qquad \Big| : h(x). \tag{26}$$

Daraus erhalten wir die *Reziprokenregel*, d.h.

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{f(x)\cdot h'(x)}{h(x)} = -\frac{\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)}{h(x)} = -\frac{h'(x)}{h(x)\cdot h(x)} = \underline{\underline{-\frac{h'(x)}{h^2(x)}}}\,. \tag{27}$$

e) Es sei f eine *Funktion* der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)\cdot\frac{1}{h(x)}\,. \tag{28}$$

Mit Hilfe der *Produktregel* und der *Reziprokenregel* aus Teilaufgabe d) erhalten wir die *Quotientenregel*, d.h.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{h(x)}\right)' = g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} - g(x)\cdot\frac{h'(x)}{h^2(x)}\\ &= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)} = \frac{g'(x)\cdot h(x)}{h^2(x)} - \frac{g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}\\ &= \underline{\underline{\frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}}}\,.\end{aligned} \tag{29}$$

4. Ableitung von Quotienten

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* f mit Hilfe der *Reziprokenregel* oder *Quotientenregel*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{2+x} \text{ für } x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}. \tag{30}$$

Mit Hilfe der *Reziprokenregel* erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{(2+x)'}{(2+x)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{(2+x)^2}}}\,. \tag{31}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \text{ für } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}. \tag{32}$$

Mit Hilfe der *Quotientenregel* erhalten wir die *Ableitung*

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \frac{(1+x)'\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(1-x)^2}}}\,.\end{aligned} \tag{33}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

Mit Hilfe der *Quotientenregel* erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{x' \cdot \left(x^2+3\right) - x \cdot \left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{1 \cdot \left(x^2+3\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{x^2+3-2x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3-x^2}{\left(x^2+3\right)^2}}}\,. \tag{35}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ für } x \in \mathbb{R}^+. \tag{36}$$

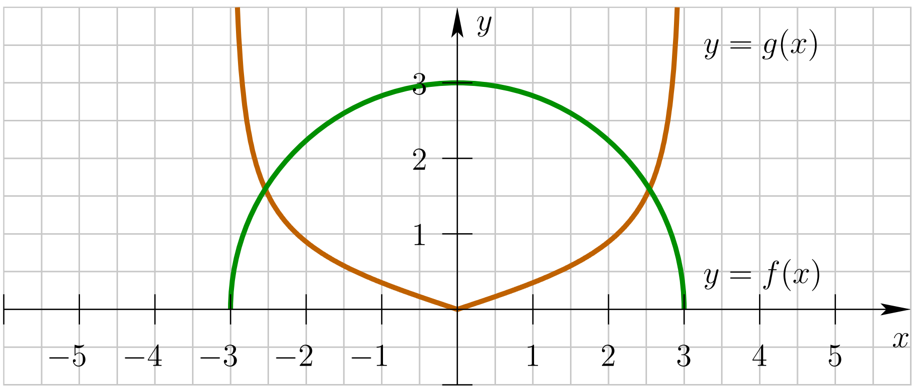
Mit Hilfe der *Reziprokenregel* erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{(1+\sqrt{x}\,)'}{(1+\sqrt{x}\,)^2} = -\frac{0+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+2\sqrt{x}+x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+2\sqrt{x}+x)}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2\sqrt{x}+4\,x+2\,x^{\frac{3}{2}}}}}\,. \tag{37}$$

5. Aussagen über zwei Funktionsgraphen

Wir betrachten die *Graphen* der *Funktionen* f (grün) und g (orange).



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $f'(0) = 3$.	○	●
b) Es gilt $g'(0) = 0$.	○	●
c) Es gilt $f'(-2) > 0$.	●	○
d) Es gibt eine Stelle x, an der gilt $f'(x) = g(x)$.	●	○
e) Gemäss *Graphen* wäre es denkbar, dass $\lvert f'(x) \rvert = g(x)$.	●	○
f) Gemäss *Graphen* wäre es denkbar, dass $\lvert g'(x) \rvert = f(x)$.	○	●

6. Ableitung von Termen mit Beträgen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* f mit Hilfe geeigneter *Ableitungsregeln*.

a) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$f(x) = |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x. \tag{38}$$

Mit Hilfe der *Produktregel* erhalten wir für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \operatorname{sgn}'(x) \cdot x + \operatorname{sgn}(x) \cdot x' = 0 \cdot x + \operatorname{sgn}(x) \cdot 1 = \underline{\underline{\operatorname{sgn}(x).}} \tag{39}$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$f(x) = \sqrt{|x|}\,. \tag{40}$$

Mit Hilfe der *Wurzelregel* und (39) erhalten wir für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{|x|'}{2\sqrt{|x|}} = \underline{\underline{\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}}}\,. \tag{41}$$

c) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}\,. \tag{42}$$

Mit Hilfe der *Reziproken-Regel* und (39) erhalten wir für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{\big(1+|x|\big)'}{\big(1+|x|\big)^2} = -\frac{0+\operatorname{sgn}(x)}{\big(1+|x|\big)^2} = \underline{\underline{-\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\big(1+|x|\big)^2}}}\,. \tag{43}$$

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) = \left|x^3\right| = \operatorname{sgn}\big(x^3\big) \cdot x^3 = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^3. \tag{44}$$

Für die Berechnung der *Ableitung* von f betrachten wir die Fälle $x \neq 0$ und $x = 0$ getrennt.

Fall 1: $x \neq 0$. Mit Hilfe der *Produkt-Regel* erhalten wir

$$f'(x) = \operatorname{sgn}'(x) \cdot x^3 + \operatorname{sgn}(x) \cdot \big(x^3\big)' = 0 \cdot x^3 + \operatorname{sgn}(x) \cdot 3x^2 = \operatorname{sgn}(x) \cdot 3x^2. \tag{45}$$

Fall 2: $x = 0$. Wir betrachten die *einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0}\big(\operatorname{sgn}(x) \cdot 3x^2\big) = +1 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0 = \operatorname{sgn}(0) \cdot 3 \cdot 0^2 = 0 \tag{46}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0}\big(\operatorname{sgn}(x) \cdot 3x^2\big) = -1 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0 = \operatorname{sgn}(0) \cdot 3 \cdot 0^2 = 0. \tag{47}$$

Demnach macht die *Ableitung* bei $x = 0$ keinen Sprung.

Somit erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot 3x^2 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.}} \tag{48}$$

7. Aussagen über die Kettenregel

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Mit Hilfe der *Kettenregel* lassen sich die *Quadratregel* und die *Wurzelregel* beweisen.	●	○
b) Gilt $f(x) = g(mx+q)$, dann folgt $f'(x) = m \cdot g'(x)$.	○	●
c) Gilt $f(x) = g(mx+q)$, dann folgt $f'(x) = m \cdot g'(mx+q)$.	●	○
d) Gilt $f(x) = g(7-x)$, dann folgt $f'(x) = -g'(7-x)$.	●	○
e) Gilt $f(x) = g^3(x)$, dann folgt $f'(x) = 3 \cdot g^2(x)$.	○	●
f) Gilt $f(x) = g^4(x)$, dann folgt $f'(x) = 4 \cdot g^3(x) \cdot g'(x)$.	●	○

8. Ableitung von Verschachtelungen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* f mit Hilfe der *Ketten-Regel*.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot (x-3)^{2-1} \cdot (x-3)' = 2 \cdot (x-3) \cdot (1-0) = \underline{\underline{2x-6.}} \tag{49}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 3 \cdot (2-x)^{3-1} \cdot (2-x)' = 3 \cdot (2-x)^2 \cdot (0-1) = \underline{\underline{-3\,(2-x)^2.}} \tag{50}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 3 \cdot \left(x^3-1\right)^{3-1} \cdot \left(x^3-1\right)' = 3 \cdot \left(x^3-1\right)^2 \cdot \left(3x^2-0\right) = \underline{\underline{9x^2\left(x^3-1\right)^2.}} \tag{51}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= 7 \cdot \left(x^2-x+1\right)^{7-1} \cdot \left(x^2-x+1\right)' = 7 \cdot \left(x^2-x+1\right)^6 \cdot \left(2x^{2-1}-1+0\right) \\ &= 7 \cdot (2x-1) \cdot \left(x^2-x+1\right)^6 = \underline{\underline{(14x-7)\left(x^2-x+1\right)^6.}}\end{aligned} \tag{52}$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \left(x^3-1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \left(3x^{3-1}-0\right) = \underline{\underline{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}}}\,. \tag{53}$$

f) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \frac{1}{2\sqrt{x^4-x^2-1}} \cdot \left(x^4-x^2-1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^4-x^2-1}} \cdot \left(4x^{4-1}-2x^{2-1}-0\right) \\ &= \frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2-1}} = \frac{2 \cdot \left(2x^3-x\right)}{2 \cdot \sqrt{x^4-x^2-1}} = \underline{\underline{\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}}}\,.\end{aligned} \tag{54}$$