Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 12 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Divergenz, Rotation, quellenfrei, wirbelfrei, konservativ, Potential-/Gradientenfeld und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Rotation und Divergenz von Vektorfeldern bestimmen.
- Sie können bestimmen, ob ein Vektorfeld quellen- bzw. wirbelfrei ist.

1. Divergenz von Vektorfeldern
Bestimmen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+1 \\ xy^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^{-y} \\ y \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^3z^2 \\ x^2-z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy-x^2z \\ 2yz^2 \\ x^2y-yz \end{pmatrix}$

a)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+1) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 3x^2 + 2xy$$

b)

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^{-y}) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot e^{-x}) = e^{-y} + e^{-x}$$

c)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2-z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) =$$

$$= 6x^2z^2 + 0 + xy = 6x^2z^2 + xy$$

d)

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y + yz) =$$

$$= y - 2xz + 2z^2 + y =$$

$$= 2y - 2xz + 2z^2$$

2. Rotation von Vektorfeldern
Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{y}{-x}$ b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2z - y^2z \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z)$

a)

$$F_x = y(x^2 + y^2)^{-1/2}; \qquad F_y = -x(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2)^{-1/2}] - \frac{\partial}{\partial y}[y(x^2+y^2)^{-1/2}] =$$

$$= -(x^2+y^2)^{-1/2} + x^2(x^2+y^2)^{-3/2} - (x^2+y^2)^{-1/2} + y^2(x^2+y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2(x^2+y^2)^{-1/2} + (x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2(x^2+y^2)^{-1/2} + (x^2+y^2)^{-1/2} = -(x^2+y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{Somit:} \quad \operatorname{rot}\vec{F} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{e}_z = -\frac{1}{r}\,\vec{e}_z \qquad (\text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2})$$

b)

$$F_x = xy - z^2; \qquad F_y = 2xyz; \qquad F_z = x^2z - y^2z$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -2yz - 2xy \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2z - 2xz \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yz - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} -2y(x+z) \\ -2z(x+1) \\ 2yz - x \end{pmatrix}$$

c)

$$F_x = x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}; \; F_y = y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}; \; F_z = z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) =$$

$$= z\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2y - y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2z =$$

$$= -yz(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + yz(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = 0$$

Analog: $(\mathrm{rot}\,\vec{F})_y = (\mathrm{rot}\,\vec{F})_z = 0$ (alle Ableitungen mit der *Kettenregel*)

Somit: $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}$ ist *wirbelfrei.*

3. Potentialfeld bestimmen

Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz + y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ wirbelfrei und somit als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(x,y,z)$ darstellbar ist. Bestimmen Sie dieses Potentialfeld.

$F_x = 2xz + y^2; \quad F_y = 2xy; \quad F_z = x^2$

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{rot}\,\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\mathrm{rot}\,\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2x - 2x = 0 \\ (\mathrm{rot}\,\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ ist somit *wirbelfrei*. Die Vektorkomponenten von $\vec{F}$ sind demnach die partiellen Ableitungen 1. Ordnung eines (noch unbekannten) Skalarfeldes $\phi = \phi(x; y; z)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = 2xz + y^2; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = 2xy; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = x^2$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int (2xz + y^2)\,dx = x^2 z + xy^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y und z abhängen: $K = K(y; z)$. Sie wird aus den bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach y bzw. z wie folgt bestimmt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 z + xy^2 + K(y; z)) = 2xy + \frac{\partial K}{\partial y} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

K ist *unabhängig* von y, *kann* aber noch von z abhängen: $K = K_1(z)$

Zwischenergebnis: $\phi = x^2 z + xy^2 + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z + xy^2 + K_1(z)) = x^2 + K_1'(z) = x^2 \quad \Rightarrow \quad K_1'(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$K_1(z) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi(x; y; z) = x^2 z + xy^2 + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

4. Aussagen über ein Vektorfeld

Gegeben sei das Vektorfeld

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) $\vec{v}$ ist konservativ.		X
b) $\vec{v}$ ist quellenfrei.	X	
c) $\vec{v}$ ist wirbelfrei.		X
d) Es gibt ein Skalarfeld ϕ, so dass $\vec{v} = \nabla\phi$.		X

5. Laplace-Operator

Welche Funktion erhält man, wenn man den Laplace-Operator auf das Skalarfeld $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ anwendet?

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 + z^2); \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) \qquad (\textit{Produkt-} \text{ und } \textit{Kettenregel})$$

$$\text{Analog:} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4(x^2 + y^2 + 3z^2)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^2 + 3y^2 + z^2) + 4(x^2 + y^2 + 3z^2) =$$

$$= 4(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) = 20\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = 20r^2$$