Übungsblatt LA 9

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen das Vektor- und Spatprodukt, deren wichtigste Eigenschaften und die jeweiligen Rechenregeln.
- Sie können die Rechenregeln für Vektor- und Spatprodukt anwenden, um Flächen und Volumen in 3D zu bestimmen.

1. Aussagen über das Vektorprodukt

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das Vektorprodukt von 2 Vektoren ist nur in 3D definiert.	X	
b) Das Vektorprodukt von 2 Vektoren ist wieder ein Vektor.	X	
c) Es gilt: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.		X
d) Es gilt: $\vec{v} \times (2 \cdot \vec{w}) = 2 \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.	X	
e) Es gilt: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v}$.		X
f) Gilt $\vec{w} = 7 \cdot \vec{v}$, dann folgt $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.	X	
g) Das Vektorprodukt von 2 Vektoren ist eine reelle Zahl.		X
h) Mit Hilfe des Vektorprodukts lässt sich eine Fläche im 4-dimensionalen Raum berechnen.		X
i) Gilt $\vec{v} \times \vec{w} = 0$, dann ist entweder $\vec{v} = 0$ oder $\vec{w} = 0$.		X
j) Gilt $\lvert\hat{v} \times \hat{w}\rvert = 1$, dann folgt $\vec{v} \perp \vec{w}$.	X	
k) Es gilt: $\vec{w} \times (\vec{v} + \vec{w}) = -\vec{v} \times \vec{w}$.	X	
l) Es gilt: $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{w}, \vec{v} \rangle$.		X

2. Vektorprodukt

Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}}}$$

b)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 6 - 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

c)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 - (-2) \cdot (-4) \\ (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 4 \\ 8 - 8 \\ 4 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

d)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 1 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

e)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

f)

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \\ \sqrt{8} \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \sqrt{8} - (-\sqrt{2}) \cdot 0 \\ -\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \\ \sqrt{2} \cdot 0 - 0 \cdot \sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ -\sqrt{2 \cdot 8} - \sqrt{2 \cdot 8} \\ 0 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot \sqrt{16} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

3. Vektorprodukt mit Python/Numpy berechnen

Berechnen Sie die Vektorprodukte aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy.

a)

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
v=np.array([1,2,3]);
w=np.array([4,5,6]);
# Berechnungen:
u=np.cross(v,w);
# Ausgabe:
print('u=', u);
```

analog für b) – f)

4. Vektorprodukt mit Python/Sympy berechnen
Berechnen Sie die Vektorprodukte aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren:
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter:
sp.init_printing();
v=sp.Matrix([1,2,3]);
w=sp.Matrix([4,5,6]);
# Berechnungen:
u=v.cross(w);
# Ausgabe:
dp.display(u);
```

analog für b) – f)

5. Aussagen über Vektoren

Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Der Vektor $\vec{v}$ ist ein Einheitsvektor.	X	
b) Es gilt: $\vec{w} = 2 \cdot \hat{w}$.		X
c) Es gilt: $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \lvert\vec{w}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert$.		X
d) Es gilt: $\lvert\vec{v} \times \vec{w}\rvert = \lvert\vec{w}\rvert$.	X	
e) Es gilt: $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = 0$.		X
f) Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so dass $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = 0$.		X

6. Eigenschaften des Vektorprodukts
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Vektorprodukts für $a \in \mathbb{R}$ und beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ durch Einsetzen.

a) $(a \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = a \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
c) $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$
d) $\vec{v} \times \vec{v} = 0$
e) $(\vec{v} + \vec{w} \times (\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} \times \vec{v}$
f) $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w}_\perp$ mit $\vec{w}_\perp = \vec{w} - \langle \vec{w}, \hat{v} \rangle \cdot \hat{v}$
g) $\langle \vec{v}, \vec{w} \times \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$
h) $\vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$ und $\vec{w} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$
i) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{w}$
j) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
k) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{w} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle$
l) $\lvert\vec{v} \times \vec{w}\rvert = \sqrt{\lvert\vec{v}\rvert^2 \cdot \lvert\vec{w}\rvert^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2} = \lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert \cdot \sin \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$

a)

$$\underline{\underline{(a \cdot \mathrm{v}) \times \mathrm{w}}} = \begin{bmatrix} a \cdot v_1 \\ a \cdot v_2 \\ a \cdot v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_2 \cdot w_3 - a \cdot v_3 \cdot w_2 \\ a \cdot v_3 \cdot w_1 - a \cdot v_1 \cdot w_3 \\ a \cdot v_1 \cdot w_2 - a \cdot v_2 \cdot w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \\ a \cdot (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) \\ a \cdot (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{a \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w})}}$$

b)

$$\underline{\underline{\mathbf{u} \times (\mathbf{v}+\mathbf{w})}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \cdot (v_3+w_3) - u_3 \cdot (v_2+w_2) \\ u_3 \cdot (v_1+w_1) - u_1 \cdot (v_3+w_3) \\ u_1 \cdot (v_2+w_2) - u_2 \cdot (v_1+w_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 + u_2 \cdot w_3 - u_3 \cdot v_2 - u_3 \cdot w_2 \\ u_3 \cdot v_1 + u_3 \cdot w_1 - u_1 \cdot v_3 - u_1 \cdot w_3 \\ u_1 \cdot v_2 + u_1 \cdot w_2 - u_2 \cdot v_1 - u_2 \cdot w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 + u_2 \cdot w_3 - u_3 \cdot w_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 + u_3 \cdot w_1 - u_1 \cdot w_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 + u_1 \cdot w_2 - u_2 \cdot w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \cdot w_3 - u_3 \cdot w_2 \\ u_3 \cdot w_1 - u_1 \cdot w_3 \\ u_1 \cdot w_2 - u_2 \cdot w_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}.}}$$

c)

$$\underline{\underline{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_1 \\ v_2 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \\ -(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) \\ -(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\mathbf{v} \times \mathbf{w}.}}$$

d)

$$\underline{\underline{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \cdot v_3 - v_3 \cdot v_2 \\ v_3 \cdot v_1 - v_1 \cdot v_3 \\ v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0.}}$$

e)

$$\underline{\underline{(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \times (\mathbf{v}-\mathbf{w})}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0 + \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} - 0$$

$$= \underline{\underline{2\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\mathbf{v} \times \mathbf{w}_\perp}} = \mathbf{v} \times (\mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \mathbf{v} \times (\langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \cdot \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{v}}$$

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \cdot 0 = \underline{\underline{\mathbf{v} \times \mathbf{w}.}}$$

g)

$$\underline{\underline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{u} \rangle}} = \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_2 \cdot u_3 - w_3 \cdot u_2 \\ w_3 \cdot u_1 - w_1 \cdot u_3 \\ w_1 \cdot u_2 - w_2 \cdot u_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= v_1 \cdot (w_2 \cdot u_3 - w_3 \cdot u_2) + v_2 \cdot (w_3 \cdot u_1 - w_1 \cdot u_3) + v_3 \cdot (w_1 \cdot u_2 - w_2 \cdot u_1)$$

$$= v_1 \cdot w_2 \cdot u_3 - v_1 \cdot w_3 \cdot u_2 + v_2 \cdot w_3 \cdot u_1 - v_2 \cdot w_1 \cdot u_3 + v_3 \cdot w_1 \cdot u_2 - v_3 \cdot w_2 \cdot u_1$$

$$= (v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) \cdot u_1 + (v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) \cdot u_2 + (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1) \cdot u_3$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \underline{\underline{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle.}}$$

h)

Mit Hilfe von g) und d) ergibt sich:

$$\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\times\mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{v}\times\mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle = \langle 0, \mathrm{w}\rangle = 0$$

$$\langle \mathrm{w}, \mathrm{v}\times\mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{v}\times\mathrm{w}, \mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\times\mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{v}, 0\rangle = 0.$$

Somit gilt:

$$\underline{\underline{\mathrm{v}\perp(\mathrm{v}\times\mathrm{w})}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\mathrm{w}\perp(\mathrm{v}\times\mathrm{w}).}}$$

i)

$$G = \underline{\underline{\mathrm{u}\times(\mathrm{v}\times\mathrm{w})}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2\cdot w_3 - v_3\cdot w_2 \\ v_3\cdot w_1 - v_1\cdot w_3 \\ v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2\cdot(v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1) - u_3\cdot(v_3\cdot w_1 - v_1\cdot w_3) \\ u_3\cdot(v_2\cdot w_3 - v_3\cdot w_2) - u_1\cdot(v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1) \\ u_1\cdot(v_3\cdot w_1 - v_1\cdot w_3) - u_2\cdot(v_2\cdot w_3 - v_3\cdot w_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2\cdot v_1\cdot w_2 - u_2\cdot v_2\cdot w_1 - u_3\cdot v_3\cdot w_1 + u_3\cdot v_1\cdot w_3 \\ u_3\cdot v_2\cdot w_3 - u_3\cdot v_3\cdot w_2 - u_1\cdot v_1\cdot w_2 + u_1\cdot v_2\cdot w_1 \\ u_1\cdot v_3\cdot w_1 - u_1\cdot v_1\cdot w_3 - u_2\cdot v_2\cdot w_3 + u_2\cdot v_3\cdot w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_2\cdot v_1\cdot w_2 + u_3\cdot v_1\cdot w_3 - u_2\cdot v_2\cdot w_1 - u_3\cdot v_3\cdot w_1 \\ u_1\cdot v_2\cdot w_1 + u_3\cdot v_2\cdot w_3 - u_1\cdot v_1\cdot w_2 - u_3\cdot v_3\cdot w_2 \\ u_1\cdot v_3\cdot w_1 + u_2\cdot v_3\cdot w_2 - u_1\cdot v_1\cdot w_3 - u_2\cdot v_2\cdot w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1\cdot v_1\cdot w_1 + u_2\cdot v_1\cdot w_2 + u_3\cdot v_1\cdot w_3 - u_1\cdot v_1\cdot w_1 - u_2\cdot v_2\cdot w_1 - u_3\cdot v_3\cdot w_1 \\ u_1\cdot v_2\cdot w_1 + u_2\cdot v_2\cdot w_2 + u_3\cdot v_2\cdot w_3 - u_1\cdot v_1\cdot w_2 - u_2\cdot v_2\cdot w_2 - u_3\cdot v_3\cdot w_2 \\ u_1\cdot v_3\cdot w_1 + u_2\cdot v_3\cdot w_2 + u_3\cdot v_3\cdot w_3 - u_1\cdot v_1\cdot w_3 - u_2\cdot v_2\cdot w_3 - u_3\cdot v_3\cdot w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + u_3\cdot w_3)\cdot v_1 - (u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3)\cdot w_1 \\ (u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + u_3\cdot w_3)\cdot v_2 - (u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3)\cdot w_2 \\ (u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + u_3\cdot w_3)\cdot v_3 - (u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3)\cdot w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot v_1 \\ \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot v_2 \\ \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot w_1 \\ \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot w_2 \\ \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot w_3 \end{bmatrix} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{v} - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{w}.}}$$

j)

$$J = \underline{\underline{\mathrm{u}\times(\mathrm{v}\times\mathrm{w}) + \mathrm{v}\times(\mathrm{w}\times\mathrm{u}) + \mathrm{w}\times(\mathrm{u}\times\mathrm{v})}}$$

$$= \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{v} - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{w} + \langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle\cdot\mathrm{w} - \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{u} + \langle \mathrm{w}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{u} - \langle \mathrm{w}, \mathrm{u}\rangle\cdot\mathrm{v}$$

$$= \langle \mathrm{w}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{u} - \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{u} + \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{v} - \langle \mathrm{w}, \mathrm{u}\rangle\cdot\mathrm{v} + \langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle\cdot\mathrm{w} - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{w}$$

$$= (\langle \mathrm{w}, \mathrm{v}\rangle - \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle)\cdot\mathrm{u} + (\langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle - \langle \mathrm{w}, \mathrm{u}\rangle)\cdot\mathrm{v} + (\langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle - \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle)\cdot\mathrm{w}$$

$$= 0\cdot\mathrm{u} + 0\cdot\mathrm{v} + 0\cdot\mathrm{w} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0.}}$$

k)

Mit g) und i) ergibt sich:

$$\underline{\underline{\langle \mathrm{a}\times\mathrm{b}, \mathrm{v}\times\mathrm{w}\rangle}} = \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\times(\mathrm{v}\times\mathrm{w})\rangle = \langle \mathrm{a}, \langle \mathrm{b}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{v} - \langle \mathrm{b}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{w}\rangle$$

$$= \langle \mathrm{a}, \langle \mathrm{b}, \mathrm{w}\rangle\cdot\mathrm{v}\rangle - \langle \mathrm{a}, \langle \mathrm{b}, \mathrm{v}\rangle\cdot\mathrm{w}\rangle = \underline{\underline{\langle \mathrm{a}, \mathrm{v}\rangle\cdot\langle \mathrm{b}, \mathrm{w}\rangle - \langle \mathrm{a}, \mathrm{w}\rangle\cdot\langle \mathrm{b}, \mathrm{v}\rangle.}}$$

l)

Es gilt:

$$\alpha := \measuredangle(\mathrm{v}, \mathrm{w}) \in [0, \pi] \;\Rightarrow\; \sin(\alpha) \geq 0.$$

Mit k) ergibt sich:

$$\underline{\underline{|\mathrm{v}\times\mathrm{w}|}} = \sqrt{\langle \mathrm{v}\times\mathrm{w}, \mathrm{v}\times\mathrm{w}\rangle} = \sqrt{\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle\cdot\langle \mathrm{w},\mathrm{w}\rangle - \langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle\cdot\langle \mathrm{w},\mathrm{v}\rangle}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{|\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2 - \langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle^2}}} = \sqrt{|\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2 - \Big(|\mathrm{v}|\cdot|\mathrm{w}|\cdot\cos(\alpha)\Big)^2}$$

$$= \sqrt{|\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2 - |\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2\cdot\cos^2(\alpha)} = \sqrt{|\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2\cdot\Big(1-\cos^2(\alpha)\Big)}$$

$$= \sqrt{|\mathrm{v}|^2\cdot|\mathrm{w}|^2\cdot\sin^2(\alpha)} = |\mathrm{v}|\cdot|\mathrm{w}|\cdot|\sin(\alpha)| = \underline{\underline{|\mathrm{v}|\cdot|\mathrm{w}|\cdot\sin\big(\measuredangle(\mathrm{v},\mathrm{w})\big).}}$$

7. Terme mit Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme jeweils soweit wie möglich unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für Vektoren in 3D.

a) $(\vec{a} - 2\,\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$.

b) $\langle \vec{a} \times (\vec{b} - 2\vec{a}), 4\,\vec{b} - 2\vec{a}\rangle$.

c) $\langle \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{b}\rangle$.

d) $\langle \hat{a} \times \vec{b}, \hat{a} \times \vec{c}\rangle$ für $\vec{a} \perp \vec{b}$.

a)

$$\underline{\underline{(\mathrm{a}-2\,\mathrm{b})\times(3\,\mathrm{a}-\mathrm{b})}} = \mathrm{a}\times 3\,\mathrm{a} - 2\,\mathrm{b}\times 3\,\mathrm{a} - \mathrm{a}\times\mathrm{b} + 2\,\mathrm{b}\times\mathrm{b} = 0 - 6\,\mathrm{b}\times\mathrm{a} - \mathrm{a}\times\mathrm{b} + 0$$

$$= 6\,\mathrm{a}\times\mathrm{b} - \mathrm{a}\times\mathrm{b} = \underline{\underline{5\,\mathrm{a}\times\mathrm{b}.}}$$

b)

$$\underline{\underline{\big\langle \mathrm{a}\times(\mathrm{b}-2\,\mathrm{a}), 4\,\mathrm{b}-2\,\mathrm{a}\big\rangle}} = \langle \mathrm{a}\times\mathrm{b} - 2\cdot\mathrm{a}\times\mathrm{a}, 4\,\mathrm{b}-2\,\mathrm{a}\rangle = \langle \mathrm{a}\times\mathrm{b}, 4\,\mathrm{b}-2\,\mathrm{a}\rangle$$

$$= \langle \mathrm{a}\times\mathrm{b}, 4\,\mathrm{b}\rangle - \langle \mathrm{a}\times\mathrm{b}, 2\,\mathrm{a}\rangle = 0 - 0 = \underline{\underline{0.}}$$

c)

1. Möglichkeit:

$$\underline{\underline{\big\langle \mathrm{a}\times(\mathrm{a}\times\mathrm{b}), \mathrm{b}\big\rangle}} = \langle \mathrm{b}\times\mathrm{a}, \mathrm{a}\times\mathrm{b}\rangle = \langle -\mathrm{a}\times\mathrm{b}, \mathrm{a}\times\mathrm{b}\rangle = -\langle \mathrm{a}\times\mathrm{b}, \mathrm{a}\times\mathrm{b}\rangle$$

$$= \underline{\underline{-|\mathrm{a}\times\mathrm{b}|^2.}}$$

2. Möglichkeit:

$$\underline{\underline{\big\langle \mathrm{a}\times(\mathrm{a}\times\mathrm{b}), \mathrm{b}\big\rangle}} = \langle\langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle\cdot\mathrm{a} - \langle \mathrm{a},\mathrm{a}\rangle\cdot\mathrm{b}, \mathrm{b}\rangle = \langle\langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle\cdot\mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle - \langle\langle \mathrm{a},\mathrm{a}\rangle\cdot\mathrm{b}, \mathrm{b}\rangle$$

$$= \langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle\cdot\langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle - \langle \mathrm{a},\mathrm{a}\rangle\cdot\langle \mathrm{b},\mathrm{b}\rangle = -\Big(|\mathrm{a}|^2\cdot|\mathrm{b}|^2 - \langle \mathrm{a},\mathrm{b}\rangle^2\Big)$$

$$= \underline{\underline{-|\mathrm{a}\times\mathrm{b}|^2.}}$$

d)

$$\underline{\underline{\langle \hat{\mathrm{a}}\times\mathrm{b}, \hat{\mathrm{a}}\times\mathrm{c}\rangle}} = \langle \hat{\mathrm{a}},\hat{\mathrm{a}}\rangle\cdot\langle \mathrm{b},\mathrm{c}\rangle - \langle \hat{\mathrm{a}},\mathrm{c}\rangle\cdot\langle \mathrm{b},\hat{\mathrm{a}}\rangle = 1\cdot\langle \mathrm{b},\mathrm{c}\rangle - \langle \hat{\mathrm{a}},\mathrm{c}\rangle\cdot 0$$

$$= \underline{\underline{\langle \mathrm{b},\mathrm{c}\rangle.}}$$

8. Dreieck in 3D

Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A = (1;-2;0), B = (2;1;4), C = (0;-2;-2).

a) Berechnen Sie die Länge der Seite a.

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks.
d) Bestimmen Sie die Eckpunkte eines Dreiecks, das zu dem gegebenen parallel ist, jedoch einen Abstand von 14 hat.

a)
Bestimmung der Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ -2-1 \\ -2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ -2-(-2) \\ 0-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-(-2) \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{a}} = |\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7.}}$$

b)
Ein *Normalen-Vektor* an die *Fläche* des *Dreiecks* ist

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 2 - (-6)\cdot 0 \\ (-6)\cdot 1 - (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 0 - (-3)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Die *Fläche* des *Dreiecks* beträgt

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{n}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$$

c)
Der *Schwerpunkt* des *Dreiecks* liegt bei

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{1}{3} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1+2+0 \\ -2+1+(-2) \\ 0+4+(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}}}.$$

d)
Zuerst muss ein Einheitsnormalenvektor zur Dreiecksfläche berechnet werden.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hieraus ergibt sich der Abstandsvektor:

$$\mathbf{d} = d \cdot \hat{\mathbf{n}} = 14 \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$