

# Übungsblatt DGL 3

Computational and Data Science  
BSc HS2024

## Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Methode der Trennung der Variablen und können diese sowohl zur Lösung von separierbaren DGL anwenden als zur Lösung von AWP, die eine separierbare DGL enthalten.

### 1. Aussagen über separierbare DGL

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede analytisch isolierbare autonome DGL 1. Ordnung ist separierbar.	X	
b) Jede elementar integrierbare DGL ist separierbar.	X	
c) Jede separierbare DGL hat genau eine Lösung.		X
d) Die Methode der Trennung der Variablen beruht auf der Substitutionsregel, die in der Integralrechnung ihre Anwendung findet.	X	
e) Die Methode der Trennung der Variablen kann nur auf lineare DGL angewandt werden.		X
f) Um ein AWP mit separierbarer DGL zu lösen, muss zuerst die allgemeine Lösung der DGL bestimmt werden.		X

### 2. Separierbare DGL

- a)  $y' = 2y$   
d)  $y' = x^2 y^3$   
g)  $x^2 y' = y(x-y)$

- b)  $y' = xy$   
e)  $y' = 1 + y^2$   
h)  $xyy' = 4x^2 + y^2$

- c)  $y' = y^2$   
f)  $y' = 3x^2 y + x^2$

a)

Statische Lösungen:  $y_s(x) = 0$ .

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 y' &= 2 \cdot y & | : y \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' &= 2 & | \int \dots dx \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx &= \int \frac{1}{y} dy = \int 2 dx = 2 \int 1 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(|y|) = 2x + c && | \cdot e^{\dots} \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{2x+c} = e^{2x} \cdot e^c = C_1 \cdot e^{2x} \\
&\Leftrightarrow y(x) = \pm C_1 \cdot e^{2x} = C_2 \cdot e^{2x}
\end{aligned}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^+$  und  $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{2x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.}}$$

b)

Statische Lösungen:  $y_s(x) = 0$ .

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
&y' = x \cdot y && | : y \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x && | \int \dots dx \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} dy = \int x dx \\
&\Leftrightarrow \ln(|y|) = \frac{1}{2} x^2 + c && | \cdot e^{\dots} \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\
&\Leftrightarrow y(x) = \pm C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = C_2 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^+$  und  $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.}}$$

c)

Statische Lösungen:  $y_s(x) = 0$ .

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
&y' = 1 \cdot y^2 && | : y^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot y' = 1 && | \int \dots dx \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + c && | -\text{rez}(\dots) \\
&\Leftrightarrow y(x) = -\frac{1}{x+c} = -\frac{1}{x-C} = \frac{1}{C-x}
\end{aligned}$$

für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{C\}$  mit  $c, C \in \mathbb{R}$ .

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{C\} \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{cases}}}$$

d)

Statische Lösungen:  $y_s(x) = 0$ .

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 y' &= x^2 \cdot y^3 && | : y^3 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} \cdot y' &= x^2 && | \int \dots dx \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^3} \cdot y' dx &= \int \frac{1}{y^3} dy = \int x^2 dx \\
 \Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} &= \frac{1}{3}x^3 + c && | \cdot (-2) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} &= -\frac{2}{3}x^3 - 2c = C - \frac{2}{3}x^3 && | \text{rez}(\dots) \\
 \Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{C - \frac{2}{3}x^3} && | \pm\sqrt{\dots} \\
 \Leftrightarrow y(x) &= \pm \sqrt{\frac{1}{C - \frac{2}{3}x^3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}}
 \end{aligned}$$

$c, C \in \mathbb{R}$

Reelle Lösungen existieren genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 C - \frac{2}{3}x^3 &> 0 && | + \frac{2}{3}x^3 \\
 \Leftrightarrow C &> \frac{2}{3}x^3 && | \cdot \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{2}C &> x^3 && | \sqrt[3]{\dots} \\
 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{2}C} &> x.
 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}} & \text{für } x \in ]-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2}C}[ \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

e)

Statische Lösungen gibt es nicht.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 y' &= 1 \cdot (1 + y^2) && | : (1 + y^2) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' &= 1 && | \int \dots dx \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' dx &= \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int 1 dx \\
 \Leftrightarrow \arctan(y) &= x + c && | \tan(\dots) \\
 \Leftrightarrow y(x) &= \tan(x + c) = \tan(x - C)
 \end{aligned}$$

$c, C \in \mathbb{R}$

Reelle Lösungen existieren genau dann, wenn gilt

$$(x - C) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ C \pm \frac{\pi}{2}, C \pm \frac{3\pi}{2}, C \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$

Es ergeben sich die folgenden allgemeinen Lösungen:

$$y(x) = \tan(x - C) \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ C \pm \frac{\pi}{2}, C \pm \frac{3\pi}{2}, C \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$


---

f)

Statische Lösungen:

$$0 = x^2 \cdot (3y_s + 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3y_s + 1 \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow -1 = 3y_s \quad | :3.$$

Daraus erhalten wir genau eine *statische Lösung*, nämlich

$$y_s(x) = -\frac{1}{3}.$$

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$y' = x^2 \cdot (3y + 1) \quad | : (3y + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3y + 1} \cdot y' = x^2 \quad \left| \int \dots dx \right.$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{3y + 1} \cdot y' dx = \int \frac{1}{3y + 1} dy = \int x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln(|3y + 1|) = \frac{1}{3} x^3 + c \quad | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(|3y + 1|) = x^3 + 3c \quad | e^{\dots}$$

$$\Leftrightarrow |3y + 1| = e^{x^3 + 3c} = e^{x^3} \cdot e^{3c}$$

$$\Leftrightarrow |3y + 1| = C_1 \cdot e^{x^3}$$

$$\Leftrightarrow 3y + 1 = \pm C_1 \cdot e^{x^3} = C_2 \cdot e^{x^3} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow 3y = C_2 \cdot e^{x^3} - 1 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{C_2}{3} \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3} = C_3 \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^+$  und  $C_2, C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$y(x) = C \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$


---

g)

$$x^2 y' = y(x - y) = xy - y^2 \Rightarrow y' = \frac{xy - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Sie lässt sich also durch die folgende *Substitution* in eine durch „*Trennung der Variablen*“ lösbare Dgl überführen:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \Rightarrow y' = 1 \cdot u + u' \cdot x = u + xu' \quad (\text{Ableitung mit der Produktregel})$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow u + xu' = u - u^2 \Rightarrow xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}$$

*Integration* beider Seiten führt zur Lösung für die Hilfsvariable  $u$ :

$$\int \frac{du}{u^2} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int u^{-2} du = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\ln|x| + C \quad \Big| \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| - C \Rightarrow u = \frac{1}{\ln|x| - C} \quad (\text{nach Kehrwertbildung})$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *Lösung*:

$$y = xu = x \cdot \frac{1}{\ln|x| - C} = \frac{x}{\ln|x| - C} \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

h)

$$y' = \frac{4x^2 + y^2}{xy} = \frac{4x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} = 4\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) = 4\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right)$$

darstellen ( $x/y$  ist der *Kehrwert* von  $y/x$ ). Die *Substitution*

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \Rightarrow y' = 1 \cdot u + u' \cdot x = u + xu' \quad (\text{Ableitung mit der Produktregel})$$

führt dann zu einer Dgl, die sich durch „*Trennung der Variablen*“ lösen lässt:

$$y' = 4\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = 4u^{-1} + u = \frac{4}{u} + u \Rightarrow xu' = \frac{4}{u} \Rightarrow$$

$$xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4}{u} \Rightarrow u du = \frac{4}{x} dx \Rightarrow \int u du = 4 \cdot \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} u^2 = 4(\ln|x| + \ln|C|) \Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = 4 \cdot \ln|Cx| \quad \Big| \cdot 2 \Rightarrow u^2 = 8 \cdot \ln|Cx| \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{8 \cdot \ln|Cx|} = \pm 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|} \quad (\text{Rechenregel: R1})$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die *allgemeine* Lösung der Dgl:

$$y = xu = \pm 2x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$$

### 3. AWP mit separierbarer DGL

Lösen Sie mit Hilfe der Trennung der Variablen das folgende AWP.

a) DGL:  $y' - xy^2 = x$ ; Anfangsbedingung:  $y(0) = 1$ .

b) DGL:  $y' - 2\sqrt{y} = 0$ ; Anfangsbedingung:  $y(2) = 9$ .

c) DGL:  $y' = (1 + x + y)^2$ ; Anfangsbedingung:  $y(0) = 2$ .

a)

Durch Umformen erhält man die analytisch isolierte Form

$$y' - xy^2 = x \quad | + xy^2$$

$$\Leftrightarrow y' = x + xy^2 = x \cdot (1 + y^2).$$

Statische Lösungen gibt es keine.

Nicht statische Lösungen durch Trennung der Variablen:

$$y' = x \cdot (1 + y^2) \quad | : (1 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' = x \quad | \int_0^x \dots dx$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' dx = \int_0^x x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^y \frac{1}{1 + y^2} dy = \int_0^x x dx$$

$$\Leftrightarrow \left[ \arctan(y) \right]_1^y = \arctan(y) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left[ x^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 0) \quad | + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \arctan(y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4} \quad | \tan(\dots)$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4}\right). \quad \boxed{*}$$

Die letzte Umformung stellt keine Äquivalenzumformung dar. Sie ist jedoch umkehrbar, wenn gilt

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad | - \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^2 < \frac{\pi}{4} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2} \quad | \pm \sqrt{\dots}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aus der nicht statischen Lösung (\*) erhält man die Lösung des AWP:

$$\underline{\underline{y(x) = \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \in \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[.}}$$

b)

Durch Umformen erhält man die analytisch isolierte Form

$$y' - 2\sqrt{y} = 0 \quad | + 2\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y' = 2\sqrt{y} = 1 \cdot 2\sqrt{y}.$$

Statische Lösungen:  $y_s(x) = 0$ .

Nicht statische Lösungen durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
& y' = 1 \cdot 2 \sqrt{y} && \Big| : (2 \sqrt{y}) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2 \sqrt{y}} \cdot y' = 1 && \Big| \int_2^x \dots dx \\
\Rightarrow & \int_2^x \frac{1}{2 \sqrt{y}} \cdot y' dx = \int_2^x 1 dx \\
\Leftrightarrow & \int_9^y \frac{1}{2 \sqrt{y}} dy = \int_2^x 1 dx \\
\Leftrightarrow & \left[ \sqrt{y} \right]_9^y = \sqrt{y} - \sqrt{9} = \left[ x \right]_2^x = x - 2 && \Big| + 3 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{y} = x + 1 && \Big| (\dots)^2 \\
\Rightarrow & y(x) = (x + 1)^2. && \boxed{*}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung stellt keine Äquivalenzumformung dar. Sie ist jedoch umkehrbar, wenn gilt

$$\begin{aligned}
& x + 1 \geq 0 && \Big| - 1 \\
\Leftrightarrow & x \geq -1.
\end{aligned}$$

Aus der nicht statischen Lösung (\*) erhält man die Lösung des AWP:

$$\underline{\underline{y(x) = (x + 1)^2 \quad \text{für } x \in [-1, \infty[.}}$$

c)

$$\begin{aligned}
u &= 1 + x + y, \quad u' = 0 + 1 + y' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow \\
y' &= (1 + x + y)^2 \Rightarrow u' - 1 = u^2 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{du}{1 + u^2} = dx
\end{aligned}$$

Nach der bereits vorgenommenen *Trennung der Variablen* werden beide Seiten *integriert*:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int 1 dx \Rightarrow \arctan u = x + C \Rightarrow u = \tan(x + C)$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *allgemeine Lösung*:

$$u = 1 + x + y = \tan(x + C) \Rightarrow y = \tan(x + C) - x - 1$$

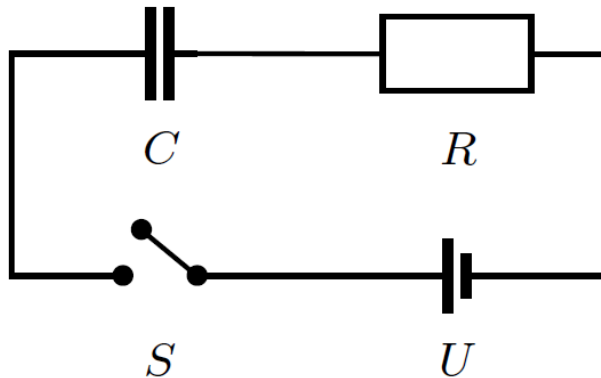
Aus dem *Anfangswert*  $y(0) = 2$  bestimmen wir die *spezielle Lösung*:

$$y(0) = 2 \Rightarrow \tan C - 1 = 2 \Rightarrow \tan C = 3 \Rightarrow C = \arctan 3 = 1,2490 \quad (\text{Bogenmaß!})$$

**Lösung:**  $y = \tan(x + 1,2490) - x - 1$

#### 4. RC-Schaltkreis mit Gleichspannungsquelle

Gegeben ist der unten abgebildete RC-Schaltkreis mit Widerstand  $R = 4 \, \Omega$ , einer zu Beginn vollständig entladenen Kapazität  $C = 15 \, \text{mF}$  und einer Gleichspannungsquelle mit  $U = 12 \, \text{V}$ .



- Stellen Sie die DGL und Anfangsbedingung (also das AWP) für die Spannung  $U_C(t)$  auf, die an der Kapazität  $C$  anliegt, und zwar ab dem Zeitpunkt, wenn der Schalter  $S$  geschlossen wird.
- Klassifizieren Sie die DGL, bestimmen Sie die statischen Lösungen und plotten Sie das Richtungsvektorfeld mit Python/Numpy. Beurteilen Sie die Stabilität der statischen Lösungen.
- Bestimmen Sie die Lösung des AWP.

a)  
Für die Spannung  $U_C(t)$ , die an der Kapazität anliegt, die Ladung  $Q(t)$ , die in der Kapazität zur Zeit  $t$  gespeichert ist und den Strom  $I(t)$ , der im Schaltkreis vorliegt, gilt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Der Schalter  $S$  werde zum Zeitpunkt  $t_0$  geschlossen. Solange der Schalter geschlossen ist, kann die Maschenregel nach Kirchhoff angewandt werden:

$$U_R + U_C = U$$

$$R \cdot I + U_C = U$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = U$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} = U - U_C$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot (U - U_C)$$

es gilt außerdem:  $U_C(t_0) = 0$ , da die Kapazität  $C$  zu Beginn entladen ist

es liegt folgendes AWP vor:

$$\text{DGL: } \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot (U - U_C)$$

$$\text{Anfangsbedingung: } U_C(t_0) = 0$$

b)

Die DGL ist 1. Ordnung, analytisch isolierbar, autonom, linear inhomogen mit konstanten Koeffizienten und separierbar. Für die statischen Lösungen muss gelten:

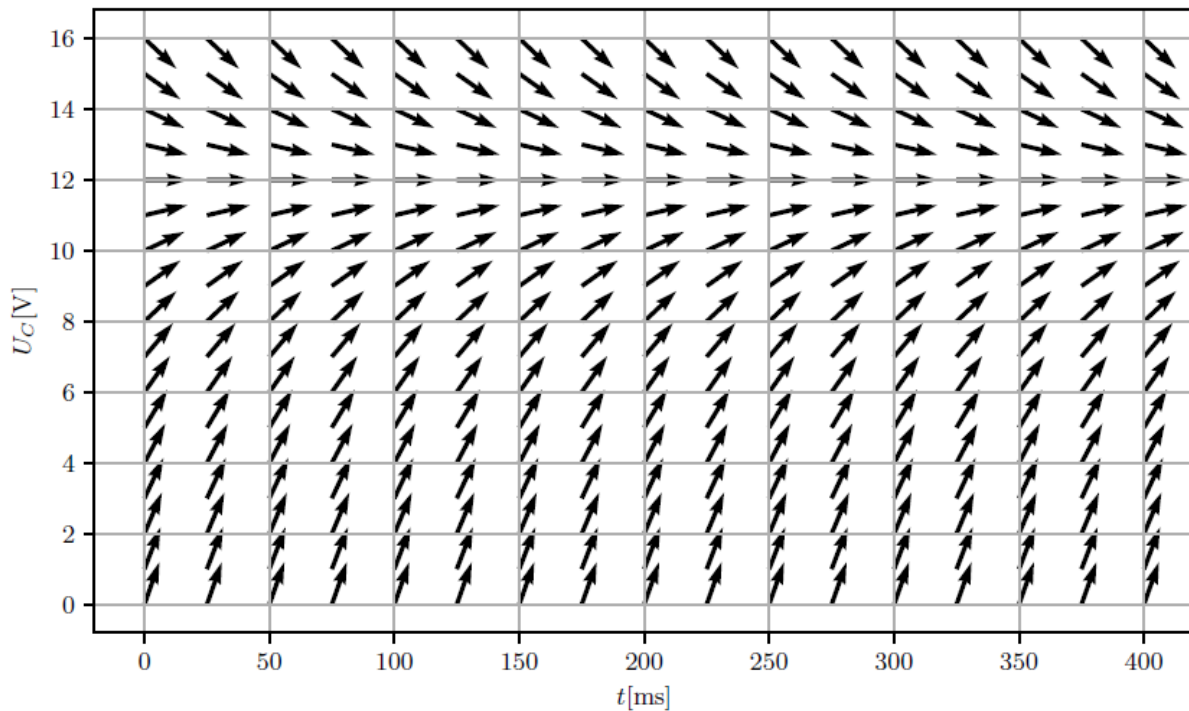
$$0 = -\frac{1}{RC} \cdot U_C + \frac{1}{RC} \cdot U = -\frac{1}{RC} \cdot (U_C - U).$$

Es ergibt sich somit als statische Lösung:  $U = 12 \text{ V}$ .

Python Code:

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as plt;
import numpy as np;
# Parameter:
R=4.00; C=15.0e-3; U=12.0;
t_a=0; t_b=0.4; U_a=0; U_b=16.0;
N_t=17; N_U=17; sc_t=1e3; sc=2.5e4; aw=0.004; fig=1;
# Funktionen:
def f(t,U_C): s=(U-U_C)/(R*C); return s;
def v(t,U_C):
    v_t=0*t+1;
    v_U_C=f(t,U_C);
    return v_t,v_U_C;
# Daten:
t_data=np.linspace(t_a,t_b,N_t);
U_C_data=np.linspace(U_a,U_b,N_U);
[t_grid,U_C_grid]=np.meshgrid(t_data,U_C_data);
[v_t_grid,v_U_C_grid]=v(t_grid,U_C_grid);
# Plot:
fh=plt.figure(fig);
plt.quiver(t_grid*sc_t,U_C_grid,v_t_grid*sc_t,v_U_C_grid,
           angles='xy',scale=sc,width=aw);
plt.xlabel('$t[\mathrm{ms}]$'); plt.ylabel('$U_C[\mathrm{V}]$');
plt.grid('on');
```

Richtungsvektorfeld:



Die ermittelte statische Lösung ist folglich ein globaler Attraktor und stabil.

c)

Die statische Lösung haben wir schon ermittelt:  $U = 12 \text{ V}$ .

Nicht statische Lösungen mittels Trennung der Variablen:

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{-1}{RC} \cdot (U_C - U)$$

$$\frac{1}{U_C - U} \cdot \frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC}$$

$$\int_0^{U_C} \frac{1}{U_C - U} dU_C = - \int_{t_0}^t \frac{1}{RC} dt$$

$$\ln \left( \frac{U_C - U}{-U} \right) = -\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)$$

$$\frac{U_C - U}{-U} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

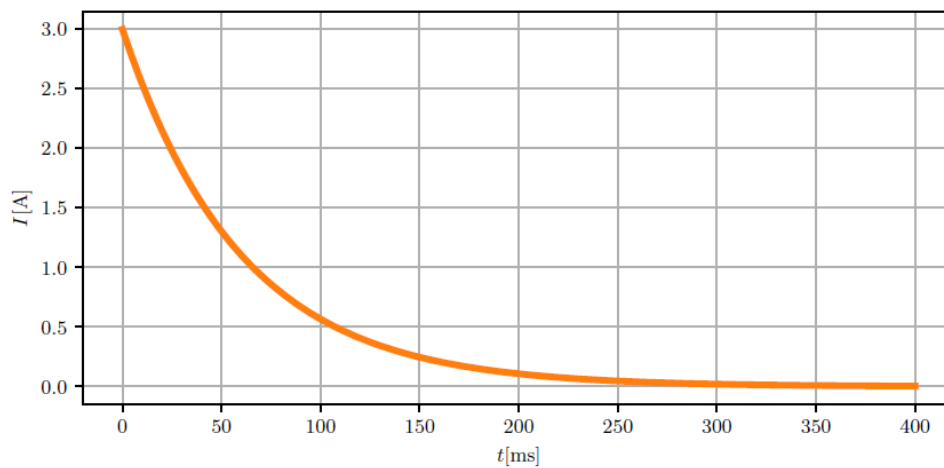
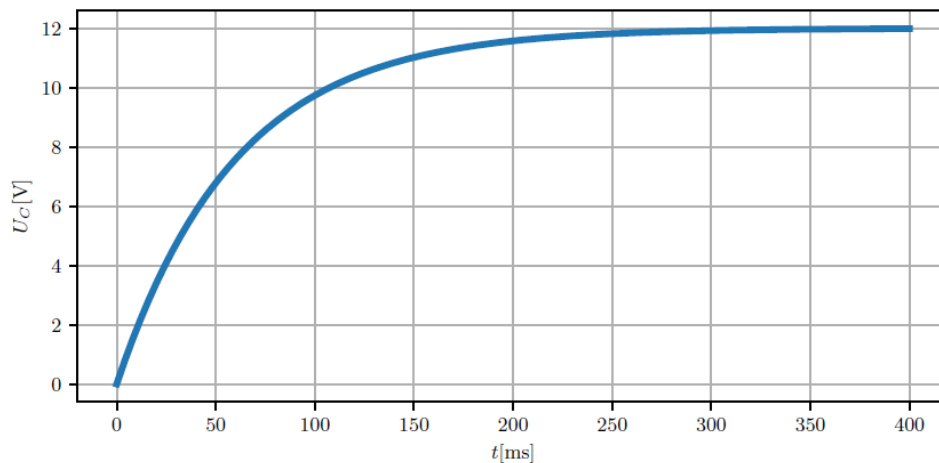
$$U_C - U = -U \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

$$U_C(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)} \right) \quad \text{Lösung des AWP}$$

Für den Strom  $I(t)$  ergibt sich:

$$I(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = C \cdot U \cdot \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

$$= \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$



## 5. Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer beschleunigten Masse unter Berücksichtigung der Reibung

Die Bewegung einer Masse, die durch eine konstante Kraft beschleunigt wird und einer der Geschwindigkeit  $v$  proportionalen Reibungskraft unterliegt, genüge der folgenden DGL:

$$10 \frac{dv}{dt} + v = 40 \text{ mit Anfangsbedingung } v(0) = 10.$$

- Wie lautet das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz?
- Welche Endgeschwindigkeit  $v_E$  erreicht die Masse?

Zunächst *trennen* wir die Variablen, dann werden beide Seiten *integriert*:

$$10 \cdot \frac{dv}{dt} = 40 - v = -(v - 40) \Rightarrow \frac{dv}{v - 40} = -\frac{dt}{10} = -0,1 dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v - 40} = -0,1 \cdot \int 1 dt$$

$$\ln |v - 40| = -0,1t + \ln |C| \Rightarrow \ln |v - 40| - \ln |C| = -0,1t \Rightarrow \ln \left| \frac{v - 40}{C} \right| = -0,1t$$

$$\left| \frac{v - 40}{C} \right| = e^{-0,1t} \Rightarrow \frac{v - 40}{C} = \pm e^{-0,1t} \Rightarrow v - 40 = \pm C \cdot e^{-0,1t} = K \cdot e^{-0,1t} \Rightarrow$$

$$v = 40 + K \cdot e^{-0,1t} \quad (\text{mit } K = \pm C)$$

Zu Beginn der Bewegung (d. h. zur Zeit  $t = 0$ ) beträgt die Geschwindigkeit  $v(0) = 10$ . Aus dieser Anfangsgeschwindigkeit lässt sich die Integrationskonstante  $K$  wie folgt berechnen:

$$v(0) = 10 \Rightarrow 40 + K \cdot e^0 = 40 + K \cdot 1 = 40 + K = 10 \Rightarrow K = 10 - 40 = -30$$

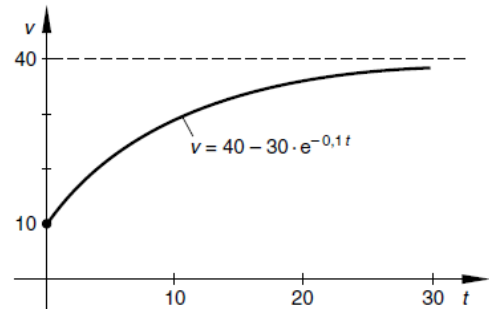
Das gesuchte Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz lautet damit

$$v = 40 - 30 \cdot e^{-0,1t}, \quad t \geq 0$$

Die Endgeschwindigkeit  $v_E$  erhält man für  $t \rightarrow \infty$ , d. h. nach (theoretisch) unendlich langer Zeit:

$$v_E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (40 - 30 \cdot e^{-0,1t}) = 40$$

( $e^{-0,1t}$  strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0)



## 6. Salzzugabe in Wassertank

Ein Tank enthalte 1000 l Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  strömen pro Minute 10 l der Lösung aus dem Tank heraus sowie 10 l Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg hinzu. Ein Superrührgerät mischt die Lösung sofort vollständig.

Wie gross ist der Salzgehalt  $u(t)$  für  $t > 0$ ?

Das Volumen des Wassers im Tank ist konstant, deshalb enthält jeder Liter zur Zeit  $t \geq 0$  die Menge  $u(t)/1000$  kg Salz. Der Ausfluss an Salz (in kg) im (kleinen) Zeitraum  $\Delta t$  ist

$$10 \cdot \frac{u(t)}{1000} \Delta t = 0,01 u(t) \Delta t.$$

Zugleich werden  $2\Delta t$  kg Salz in den Tank eingebracht. Die Änderung des Salzgehaltes ist also

$$\Delta u = -0,01 u(t) \Delta t + 2 \Delta t.$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  führt dies auf die Differentialgleichung

$$u' = -0,01 u + 2.$$

Lösung der Gleichung mit Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{du}{-0,01 u + 2} = \int dt \iff \ln |-0,01 u + 2| = -\frac{t}{100} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R},$$

und damit

$$u(t) = 200 - 100 c e^{-t/100}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung  $u(0) = 50$  folgt  $c = 1,5$  und

$$u(t) = 200 - 150 e^{-t/100}.$$