

# Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science BSc  
HS 2023

## Lösungen

Mathematik 1

### 1. Aussagen über zwei Mengen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{und} \quad B := \{A, 4, 5, 6, 7\}. \quad (1)$$

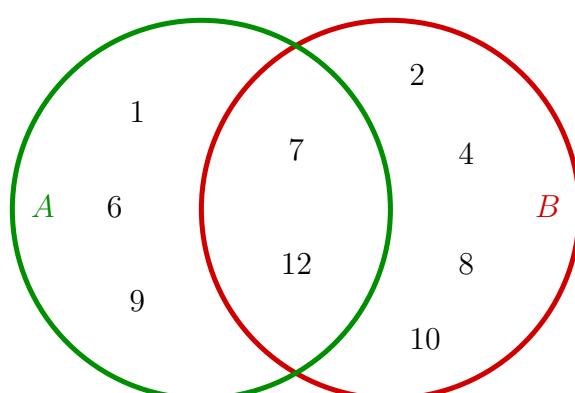
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Die Menge $A$ hat sechs Elemente.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Die Menge $B$ hat sieben Elemente.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Es gilt $\{4\} \in A$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Es gilt $A \subset B$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Es gilt $B \ni A$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Es gilt $B \supseteq \{A\}$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

### 2. Elementare Mengenoperationen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{1, 6, 7, 9, 12\} \quad \text{und} \quad B := \{2, 4, 7, 8, 10, 12\}. \quad (2)$$

- a) Wir skizzieren das VENN-Diagramm für die *Mengen*  $A$  und  $B$ .



- b)** Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in  $A$  und in  $B$  liegen, dann erhalten wir die *Schnittmenge*

$$\underline{\underline{A \cap B = \{7, 12\}}} \quad (3)$$

- c)** Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in  $A$  oder in  $B$  liegen, dann erhalten wir die *Vereinigungsmenge*

$$\underline{\underline{A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}}} \quad (4)$$

- d)** Wenn wir alle *Elemente* sammeln, welche in  $A$  aber nicht in  $B$  liegen, dann erhalten wir die *Mengendifferenz*

$$\underline{\underline{A \setminus B = \{1, 6, 9\}}} \quad (5)$$

Sammeln wir hingegen alle *Elemente*, welche in  $B$  aber nicht in  $A$  liegen, dann erhalten wir die *Mengendifferenz*

$$\underline{\underline{B \setminus A = \{2, 4, 8, 10\}}} \quad (6)$$

- e)** Wir zeigen mehrere Varianten, um die *symmetrische Mengendifferenz*  $A \Delta B$  zu berechnen.

**Variante 1:** Die Menge  $A \Delta B$  ist die *Vereinigung* der beiden *Mengendifferenzen* aus Teilaufgabe d). Wir erhalten

$$\underline{\underline{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 6, 9\} \cup \{2, 4, 8, 10\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}}} \quad (7)$$

**Variante 2:** Die Menge  $A \Delta B$  ist die *Mengendifferenz* der *Vereinigungsmenge* von  $A$  und  $B$  aus Teilaufgabe c) ohne die *Schnittmenge* von  $A$  und  $B$  aus Teilaufgabe b). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\} \setminus \{7, 12\}}} \\ = \underline{\underline{\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}}} \end{aligned} \quad (8)$$

- f)** Wir suchen alle *Teilmengen* von

$$C := A \cap B = \{7, 12\}. \quad (9)$$

Da  $C$  zwei *Elemente* hat, hat jede *Teilmenge* von  $C$  entweder null, ein oder zwei *Elemente*. Wir bestimmen für jede mögliche Anzahl *Elemente* die zugehörigen *Teilmengen* von  $C$  und stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

Anzahl Elemente	Teilmengen	
0	$\emptyset$	
1	$\{7\}, \{12\}$	
2	$\{7, 12\}$	

(10)

Insgesamt haben wir also vier *Teilmengen* von  $C$  gefunden. Alle *Teilmengen* ausser  $C$  selbst sind *echte Teilmengen* von  $C$ , d.h.

$$\underline{\underline{\emptyset, \{7\} \text{ und } \{12\}}}. \quad (11)$$

### 3. Mengen und Operationen in einer Grundmenge

Wir betrachten die *Grundmenge*  $G$  der Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets ohne Umlaute, d.h.

$$G := \{a, \dots, z\}. \quad (12)$$

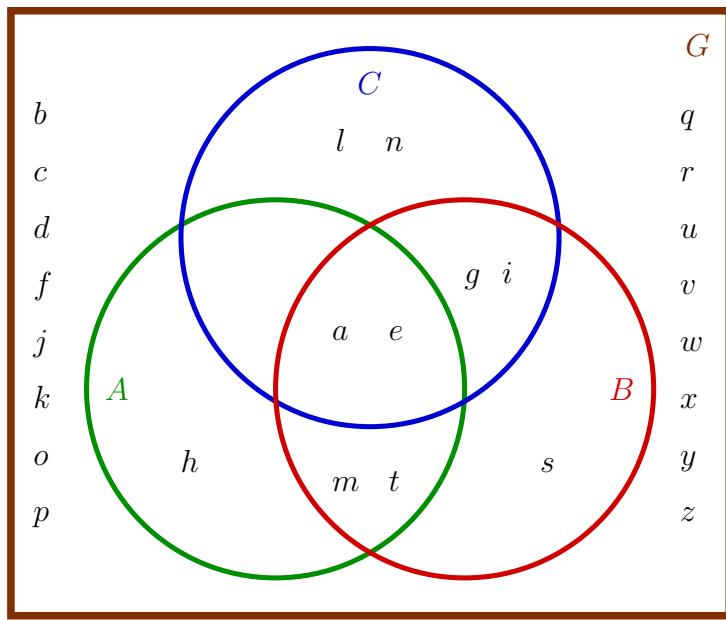
Ferner seien

$$A := \{m, a, t, h, e\}, \quad B := \{i, s, t, m, e, g, a\} \quad \text{und} \quad C := \{g, e, n, i, a, l\} \quad (13)$$

sowie

$$D := A \cap B \cap C \quad \text{und} \quad E := A \cup B \cup C. \quad (14)$$

**a)** Wir skizzieren das VENN-Diagramm für die drei Mengen  $A, B, C$  in der *Grundmenge*  $G$ .



**b)** Mit Hilfe des VENN-Diagramms aus Teilaufgabe a) bestimmen wir die *Schnittmengen*. Wir erhalten

$$\underline{\underline{A \cap B}} = \underline{\underline{\{a, e, m, t\}}} \quad (15)$$

$$\underline{\underline{A \cap C}} = \underline{\underline{\{a, e\}}} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{C \cap B}} = \underline{\underline{\{a, e, g, i\}}} \quad (17)$$

und

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\{a, e\}}}. \quad (18)$$

**c)** Mit Hilfe des VENN-Diagramms aus Teilaufgabe a) bestimmen wir die *Vereinigungsmengen*. Wir erhalten

$$\underline{\underline{A \cup B}} = \underline{\underline{\{a, e, g, h, i, m, t, s\}}} \quad (19)$$

$$\underline{\underline{A \cup C}} = \underline{\underline{\{a, e, g, h, i, l, m, n, t\}}} \quad (20)$$

$$\underline{\underline{C \cup B}} = \underline{\underline{\{a, e, g, i, l, m, n, t, s\}}} \quad (21)$$

und

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\{a, e, g, h, i, l, m, n, t, s\}}}. \quad (22)$$

- d)** Für das *Komplement* der *Schnittmenge*  $D$  erhalten wir

$$\underline{\underline{D}} = G \setminus D = \underline{\underline{\{a, \dots, z\}}} \setminus \underline{\underline{\{a, e\}}} = \underline{\underline{\{b, c, d, f, \dots, z\}}}. \quad (23)$$

Mit Hilfe des *VENN-Diagramms* aus Teilaufgabe a) bestimmen wir das *Komplement* der *Vereinigungsmenge*  $E$ . Es gilt

$$\underline{\underline{E}} = G \setminus E = \underline{\underline{\{b, c, d, f, j, k, o, p, q, r, u, v, w, x, y, z\}}}. \quad (24)$$

#### 4. Aussagen über rationale Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede <i>rationale Zahl</i> kann als <i>Bruch</i> von zwei <i>ganzen Zahlen</i> dargestellt werden.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Es gilt $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Es gilt $\sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Die <i>Wurzel</i> einer <i>rationalen Zahl</i> ist selbst auch <i>rational</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Alle <i>periodischen Dezimalbrüche</i> sind <i>rational</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

#### 5. Aussagen über reelle Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede <i>rationale Zahl</i> ist auch eine <i>reelle Zahl</i> , aber nicht umgekehrt.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Es gilt $\infty \in \mathbb{R}$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Falls $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$ sowie $y \leq x$ , dann gilt $x = y$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Die <i>Wurzel</i> jeder <i>reellen Zahl</i> ist auch eine <i>reelle Zahl</i> .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Alle <i>Dezimalbrüche</i> sind <i>reelle Zahlen</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

## 6. Elemente von Zahlenmengen

Wir markieren für jede *Zahl* die *Mengen*, von welchen die *Zahl* ein *Element* ist.

$x$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1, 1]$	$]0, 2[$	$]-\infty, 1[$	$[0, \infty[$	
a) $-1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
b) $0.5$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
c) $-1/3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
d) $\sqrt{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
e) $0.33$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
f) $\sqrt{25}$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>						
g) $-6/3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
h) $-\sqrt{2/3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
i) $7.34\bar{3}\bar{8}\bar{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
j) $-0.\overline{99}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

(25)

## 7. Aussagen über Intervalle

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Es gilt $[1, 10] \subset \mathbb{N}$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Es gilt $]2, 3[ \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $]a, b[ \subset [a, b[$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $]-\infty, x] \cap [x, \infty[ = \{x\}$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Falls $]a, b[ \cap ]c, d[ = \emptyset$ , dann gilt $c > b$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
f) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

## 8. Aussagen über das kartesische Produkt

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Das <i>kartesische Produkt</i> ist eine <i>Operation</i> zwischen zwei Zahlen.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Das <i>kartesische Produkt</i> ist eine <i>Operation</i> zwischen zwei <i>Mengen</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) In jedem Fall gilt $A \times B = B \times A$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) <i>Kartesische Produkte</i> können nur zwischen <i>Mengen</i> gebildet werden, welche aus Zahlen bestehen.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Haben $A$ und $B$ jeweils 10 <i>Elemente</i> , dann haben $A \times B$ und $B \times A$ jeweils 100 <i>Elemente</i> .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Für jede <i>Menge</i> $A$ gilt $\emptyset \times A = A$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

## 9. Kartesische Produkte

Wir bestimmen die folgenden *kartesischen Produkte* und stellen diese auf sinnvolle Weise dar.

a) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{\underline{A}} = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}. \quad (26)$$

b) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{\underline{B}} = \{1, 2\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4)\}. \quad (27)$$

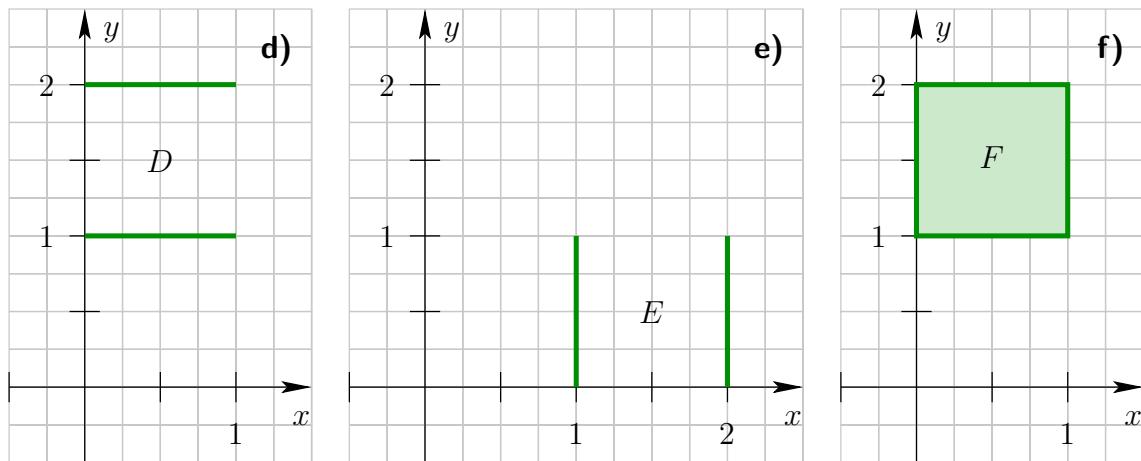
c) Wir betrachten die *Menge*

$$\underline{\underline{C}} = \{2, 3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2)\}. \quad (28)$$

Wir stellen die *Mengen*

$$D = [0, 1] \times \{1, 2\}, \quad E = \{1, 2\} \times [0, 1] \quad \text{und} \quad F = [0, 1] \times [1, 2] \quad (29)$$

jeweils in einem *xy*-Diagramm dar.



## 10. Aussagen über zwei Mengen

Wir betrachten die *Mengen*

$$A := \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad B := \{3, 4, 5\}. \quad (30)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Die Menge $A \times B$ hat drei Elemente.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
b) Es gilt $-1 \in A \times B$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Es gilt $(3; 0) \in B \times A$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Es gilt $A \times B = B \times A$ .	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Die graphische Darstellung von $A \times B$ im <i>xy</i> -Diagramm ist ein Rechteck.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
f) Es gilt $A \times B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>