Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

# Übungsblatt Sto 9

Computational and Data Science
BSc HS2023

## Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die speziellen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen hypergeometrische und Poisson-Verteilung und ihre Eigenschaften.
- Sie können für konkrete Beispiele bestimmen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt und können diese dann auch auf konkrete Situationen anwenden.

### 1. Zahlenlotto

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Zahlenlotto (es werden 6 aus 49 Kugeln gezogen) 3 Richtige zu haben? Bestimmen Sie auch den Erwartungswert und die Varianz.

Hier wird ohne Zurücklegen gezogen, weil eine einmal ausgewählte Kugel nicht ein weiteres Mal unter den "Richtigen" erscheinen darf. Insgesamt liegen $N = 49$ Kugeln in der Urne, von denen $M = 6$ "Richtige" sind. Die Wahrscheinlichkeit für $X = 3$ "Richtige" beträgt

$$f(3) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20 \cdot 12.341}{13.983.816} = 0{,}018\ .$$

Hierbei gibt es 20 verschiedene Möglichkeiten, 3 aus insgesamt 6 "Richtigen" zu ziehen, 12.341 verschiedene Möglichkeiten, 3 aus insgesamt 43 "Falschen" auszuwählen und 13.983.816 verschiedene Möglichkeiten, 6 aus insgesamt 49 Kugeln zu ziehen.

Wie groß sind arithmetisches Mittel und Varianz bei den Richtigen im Lottospiel? Pro Tippreihe hat man also im Durchschnitt 0,735 Richtige,

$$\mu = E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 6 \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{49} = 0{,}735\ .$$

Die Varianz beträgt:

$$\sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 6 \cdot \frac{6}{49} \cdot \left(1 - \frac{6}{49}\right) \cdot \left(\frac{49-6}{49-1}\right) = 0{,}578\ .$$

**2. Poisson-Verteilung**
X sei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda = 3$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(X = 0)$ b) $P(X \leq 3)$ c) $P(X > 3)$ d) $P(1 \leq X \leq 5)$.

$$P(X = x) = f(x) = \frac{3^x}{x!} \cdot e^{-3} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

a) $P(X = 0) = f(0) = 0{,}0498$

b) $P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}6472$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}6472 = 0{,}3528$

d) $P(1 \leq X \leq 5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}8663$

**3. Stifte**
Unter 40 Packungen, die laut Aufschrift je 10 Stifte enthalten sollen, befinden sich 4 unvollständige Packungen (sie enthalten weniger Stifte als angegeben).

a) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor, wenn es darum geht, wie viele unvollständige Packungen man beim Kauf einer oder mehrerer Packungen erhält?

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

b) beim Kauf von einer Packung eine vollständige Packung
c) beim Kauf von 10 Packungen genau zwei unvollständige Packungen erhält?

a)
Die Zufallsvariable $X$ (= Anzahl der *unvollständigen* Packungen unter $n$ gekauften Packungen) ist *hypergeometrisch* verteilt ($N = 40$; $M$ = Anzahl der *unvollständigen* Packungen = 4):

b)

$$N = 40, \quad M = 4, \quad n = 1; \quad P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{1-x}}{\binom{40}{1}}$$

$X = 0$ (nur *vollständige* Packungen): $P(X = 0) = f(0) = 0{,}9$

c)

$$N = 40, \quad M = 4, \quad n = 10; \quad P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{10-x}}{\binom{40}{10}}$$

$P(X = 2) = f(2) = 0{,}2142$

**4. Kernreaktor**
Bei einem Kernreaktor werden an die Brennelemente extrem hohe Qualitätsanforderungen gestellt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Brennelement diesen hohen Anforderungen nicht genügt, betrage $p = 10^{-4}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 1500 Brennelemente eines Reaktors die vorgeschriebenen Qualitätsbedingungen erfüllen?

Die Zufallsvariable $X$ (= Anzahl der Brennelemente, die den Anforderungen *nicht* genügen) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 1500$ und $p = 10^{-4}$. Sie darf jedoch durch eine (rechnerisch bequemere) *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter (Mittelwert) $\mu = np = 0{,}15$ ersetzt werden:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{0{,}15^x}{x!} \cdot e^{-0{,}15} \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$$

*Exakte* Verteilung (*Binomialverteilung* mit $n = 1500$, $p = 0{,}0001$ und $q = 1 - p = 0{,}9999$):

$$P(X = x) = f(x) = \binom{1500}{x} \cdot 0{,}0001^x \cdot 0{,}9999^{1500 - x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 1500)$$

$P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$ (in Übereinstimmung mit der Näherung)

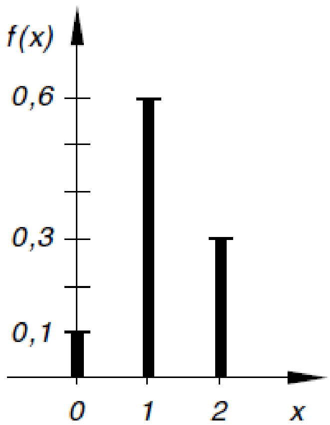
## 5. Urnenmodell

Einer Urne mit 5 Kugeln, darunter 3 weissen und zwei schwarzen, entnehmen wir nacheinander zufällig und ohne Zurücklegen 2 Kugeln. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X = Anzahl der gezogenen weissen Kugeln und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm.

*Hypergeometrische* Verteilung mit den Parametern $N = 5$, $M = 3$ (Anzahl der *weißen* Kugeln) und $n = 2$:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{2-x}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}\binom{3}{x}\binom{2}{2-x} \qquad (x = 0, 1, 2)$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |




## 6. Gabelstapler

Bei der Montage von Gabelstaplern in einem grossen Maschinenbaubetrieb arbeiten u.a. an einem Fliessband 80 angelernte Arbeitskräfte je Schicht. Die Wahrscheinlichkeit, wegen Krankheit zu fehlen, betragt für diese Arbeitskräfte 5 %, wobei die Erkrankung der Arbeitskräfte als unabhängig voneinander angenommen wird. Sinkt die Zahl der Arbeiter am Fliessband in einer Schicht unter 70 Personen, so müssen zur Erhaltung des Arbeitsablaufes zusätzliche Arbeitskräfte eingestellt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das der Fall?

diskrete Zufallsgröße X: *Anzahl der Krankenfälle in einer Schicht* ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 80$ und $p = 0{,}05$, da $n \cdot p = 4 < 10$ und $n = 80 > 1500 \cdot p = 75$ kann die Verteilung von X approximativ durch die POISSON-Verteilung mit $\lambda = n \cdot p = 4$ dargestellt werden, die Eigenschaft einer POISSON-Verteilung $E(X) = V(X)$ ist ebenfalls zumindest annähernd erfüllt, da $E(X) = 4 \approx V(X) = 3{,}8$ gilt, zusätzliche Arbeitskräfte müssen eingestellt werden, wenn mehr als 10 Personen in einer Schicht erkranken, somit bestimmt man unter Anwendung der POISSON-Verteilung folgende Wahrscheinlichkeit: $P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) \approx 1 - 0{,}9972 = 0{,}0028$

**7. Stoff**

Die Anzahl $X_r$ der Fehler auf einer Fläche von r Quadratmetern eines bestimmten Gewebes genüge einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = 0{,}25 \bullet r$.

a) Geben Sie konkret den Erwartungswert von $X_8$ für eine Fläche von acht Quadratmetern an und erläutern Sie seine Bedeutung.

b) Das Gewebe wird in Rollen mit einer Breite von 1,2 m geliefert. Von einer Rolle wird ein Stuck von fünf Meter Länge abgeschnitten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Stück mehr als zwei Fehler aufweist?

a) $E(X_8) = 0{,}25 \cdot 8 = 2$, d.h. auf einer Fläche von acht Quadratmetern des Gewebes sind durchschnittlich zwei Fehler zu erwarten

b) $r = 1{,}2\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 6\text{ m}^2$, also ist hier $\lambda = 1{,}5$ und folglich $P(X_6 > 2) = 1 - P(X_6 \le 2) =$
$1 - \frac{1.5^0}{0!}e^{-1.5} - \frac{1.5^1}{1!}e^{-1.5} - \frac{1.5^2}{2!}e^{-1.5} = 1 - (1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2})e^{-1.5} = 0{,}19115$