Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt DGL 5

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe linear homogene DGL 2. Ordnung, charakteristisches Polynom, Basislösung und Wronski Determinante sowie deren Bedeutung.
- Sie können DGL 2. Ordnung bzgl. linear, linear homogen und autonom klassifizieren.
- Sie können die allgemeine Lösung einer linear homogenen DGL 2. Ordnung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms bestimmen und können auch die Basislösungen bestimmen.

1. Aussagen über linear homogene DGL 2. Ordnung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Linear homogene DGL 2. Ordnung sind zur (theoretischen) Bestimmung von Schwingungen relevant.	X	
b) Das charakteristische Polynom einer linear homogenen DGL 2. Ordnung ist eine quadratische Funktion.	X	
c) Jede Lösung einer linear homogenen DGL 2. Ordnung kann als Linearkombination von 2 Basislösungen geschrieben werden.	X	
d) Ein eindeutig lösbares AWP mit einer linear homogenen DGL 2. Ordnung benötigt genau 2 ABs.	X	
e) Ein eindeutig lösbares RWP mit einer linear homogenen DGL 2. Ordnung benötigt genau 2 RBs.	X	

2. DGL 2. Ordnung

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Gegeben sei die folgende linear homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $ay'' + by' + cy = 0$.

a) $y_1(x)$ sei eine Lösung der DGL und es sei $C \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $y(x) := C \cdot y_1(x)$ ebenfalls eine Lösung der DGL ist.

b) $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien Lösungen der DGL. Zeigen Sie, dass die Summe $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ ebenfalls eine Lösung der DGL ist.

c) $y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien Lösungen der DGL und es sei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Linearkombination $y(x) := C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ ebenfalls eine Lösung der DGL ist.

a)
$y_1(x)$ sei eine Lösung der DGL und es sei $C \epsilon \mathbb{R}$. Ableitungen von $y(x) := C \cdot y_1(x)$: $y^{'}(x) := C \cdot y_1^{'}(x)$ und $y^{''}(x) := C \cdot y_1^{''}(x)$.
Einsetzen in die DGL:

$$\underline{\underline{a\,y'' + b\,y' + c\,y}} = a \cdot C \cdot y_1'' + b \cdot C \cdot y_1' + c \cdot C \cdot y_1 = C \cdot \underbrace{\left(a \cdot y_1'' + b \cdot y_1' + c \cdot y_1\right)}_{=0}$$

$$= C \cdot 0 = \underline{\underline{0.}}$$

b)
Ableitungen von $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ bilden:

$$y'(x) = y_1'(x) + y_2'(x) \quad \text{und} \quad y''(x) = y_1''(x) + y_2''(x)$$

und in DGL einsetzen:

$$\underline{\underline{a\,y'' + b\,y' + c\,y}} = a \cdot \left(y_1'' + y_2''\right) + b \cdot \left(y_1' + y_2'\right) + c \cdot \left(y_1 + y_2\right)$$

$$= a \cdot y_1'' + a \cdot y_2'' + b \cdot y_1' + b \cdot y_2' + c \cdot y_1 + c \cdot y_2$$

$$= \underbrace{a\,y_1'' + b\,y_1' + c\,y_1}_{=0} + \underbrace{a\,y_2'' + b\,y_2' + c\,y_2}_{=0} = 0 + 0 = \underline{\underline{0.}}$$

c)
Ableitungen von $y(x) := C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ bilden:

$$y'(x) = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x) \quad \text{und} \quad y''(x) = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)$$

und in DGL einsetzen:

$$\underline{\underline{a\,y'' + b\,y' + c\,y}} = a \cdot \left(C_1 \cdot y_1'' + C_2 \cdot y_2''\right) + b \cdot \left(C_1 \cdot y_1' + C_2 \cdot y_2'\right) + c \cdot \left(C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2\right)$$

$$= a \cdot C_1 \cdot y_1'' + a \cdot C_2 \cdot y_2'' + b \cdot C_1 \cdot y_1' + b \cdot C_2 \cdot y_2' + c \cdot C_1 \cdot y_1 + c \cdot C_2 \cdot y_2$$

$$= C_1 \cdot \underbrace{\left(a\,y_1'' + b\,y_1' + c\,y_1\right)}_{=0} + C_2 \cdot \underbrace{\left(a\,y_2'' + b\,y_2' + c\,y_2\right)}_{=0} = 0 + 0 = \underline{\underline{0.}}$$

3. DGL 2. Ordnung mit verschwindender Diskriminante
Seien $a, b, c\ \epsilon \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Gegeben sei die folgende linear homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $ay^{''} + by^{'} + cy = 0$. Ausserdem gelte $D = b^2 - 4ac = 0$.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom genau eine Nullstelle bei $\lambda = -\frac{b}{2a}$ hat.
b) Drücken Sie den Koeffizienten c durch a und b aus.
c) Zeigen Sie, dass $y_1(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL ist.
d) Zeigen Sie, dass $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL ist.

a)
Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ mit Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0$. Als Nullstelle ergibt sich $\lambda = -\frac{b}{2a}$ durch Einsetzen in Mitternachtsformel.

b)

$$D = b^2 - 4\,ac = 0 \qquad \Big|\, + 4\,ac$$

$$\Leftrightarrow \qquad b^2 = 4\,ac \qquad \Big|\, : (4\,a).$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{c = \frac{b^2}{4\,a}}}\,.$$

c)
Ableitungen bilden:

$$y_1'(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \cdot y_1(x)$$

$$y_1''(x) = \lambda \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda^2 \cdot y_1(x).$$

- Einsetzen in DGL und mit Kenntnis, dass λ eine Nullstelle ist:

$$\underline{\underline{a\,y_1'' + b\,y_1' + c\,y_1}} = a \cdot \lambda^2 \cdot y_1 + b \cdot \lambda \cdot y_1 + c \cdot y_1 = \big(a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c\big) \cdot y_1$$

$$= p(\lambda) \cdot y_1 = 0 \cdot y_1 = \underline{\underline{0.}}$$

- Einsetzen in DGL:

$$\underline{\underline{a\,y_1'' + b\,y_1' + c\,y_1}} = a \cdot \lambda^2 \cdot y_1 + b \cdot \lambda \cdot y_1 + c \cdot y_1 = \big(a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c\big) \cdot y_1$$

$$= \left(a \cdot \left(-\frac{b}{2\,a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a}\right) \cdot y_1 = \left(\frac{b^2}{4\,a} - \frac{b^2}{2\,a} + \frac{b^2}{4\,a}\right) \cdot y_1$$

$$= \frac{b^2}{a} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot y_1 = \frac{b^2}{a} \cdot 0 \cdot y_1 = \underline{\underline{0.}}$$

d)
Ableitungen bilden:

$$y_2'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + x \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (1 + \lambda x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$y_2''(x) = (0 + \lambda \cdot 1) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + (1 + \lambda x) \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \big(\lambda + \lambda + \lambda^2 x\big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$= \big(2\lambda + \lambda^2 x\big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Einsetzen in DGL und mit Kenntnis, dass λ eine Nullstelle ist:

$$\underline{\underline{a\,y_2'' + b\,y_2' + c\,y_2}} = a \cdot \big(2\lambda + \lambda^2 x\big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + b \cdot (1 + \lambda x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + c \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$= \big(2\,a\,\lambda + a\,\lambda^2 x + b + b\,\lambda\,x + c\,x\big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$= \Big(2\,a\,\lambda + b + \big(a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c\big)\,x\Big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$= \left(2\,a \cdot \left(-\frac{b}{2\,a}\right) + b + p(\lambda) \cdot x\right) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \big(-b + b + p(\lambda) \cdot x\big) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$= (0 + 0 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \underline{\underline{0.}}$$

4. Allgemeine Lösung von DGL 2. Ordnung bestimmen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen DGL 2. Ordnung mit Hilfe des charakteristisschen Polynoms.

a) $y'' + 3y' - 4y = 0$ b) $y'' + 20y' + 100y = 0$ c) $y'' + 4y' + 20y = 0$

d) $2y'' + 20y' + 50y = 0$ e) $3y'' - 6y' + 30y = 0$ f) $2y'' + 7y' + 3y = 0$

a)
Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\,\lambda - 4$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25 > 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Es ergeben sich die reellen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-4x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{x}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x) = \underline{\underline{C_1\,\mathrm{e}^{-4x} + C_2\,\mathrm{e}^{x}.}}$$

b)
Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 20\,\lambda + 100$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 20^2 - 4\cdot 1\cdot 100 = 400 - 400 = 0.$$

Charakteristisches Polynom hat folglich eine Nullstelle:

$$\lambda = \lambda_{\mathrm{s}} = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{20}{2\cdot 1} = -10.$$

Es ergeben sich die reellen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{-10x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x\cdot\mathrm{e}^{\lambda x} = x\cdot\mathrm{e}^{-10x}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x) = C_1\cdot\mathrm{e}^{-10x} + C_2\cdot x\cdot\mathrm{e}^{-10x} = \underline{\underline{\left(C_1 + C_2\,x\right)\mathrm{e}^{-10x}.}}$$

c)
Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\,\lambda + 20$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 20 = 16 - 80 = -64 < 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm 8\mathrm{i}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-4-8\mathrm{i}}{2} = -2 - 4\mathrm{i} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-4+8\mathrm{i}}{2} = -2 + 4\mathrm{i}$$

Es ergeben sich die komplexen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-2x-4\mathrm{i}x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{-2x+4\mathrm{i}x}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2x-4\mathrm{i}x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x+4\mathrm{i}x}$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{e}^{-2x}\left(C_1\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + C_2\,\mathrm{e}^{+4\mathrm{i}x}\right)}} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{-2x}\left(C\,\cos(4x) + S\,\sin(4x)\right)}} = \underline{\underline{A\,\mathrm{e}^{-2x}\sin\left(4x+\varphi_0\right).}}$$

d)

Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 10\,\lambda + 25$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0.$$

Charakteristisches Polynom hat folglich eine Nullstelle:

$$\lambda = \lambda_s = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{10}{2 \cdot 1} = -5.$$

Es ergeben sich die reellen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{-5x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = x \cdot \mathrm{e}^{-5x}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-5x} + C_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-5x} = \underline{\underline{\left(C_1 + C_2\,x\right)\mathrm{e}^{-5x}.}}$$

e)

Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 10$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 < 0.$$

Charakteristisches Polynom hat 2 komplexe Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{+2 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6\,\mathrm{i}}{2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - 6\mathrm{i}}{2} = 1 - 3\mathrm{i} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{2 + 6\mathrm{i}}{2} = 1 + 3\mathrm{i}$$

Es ergeben sich die komplexen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{x-3\mathrm{i}x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{x+3\mathrm{i}x}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{x-3\mathrm{i}x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{x+3\mathrm{i}x}$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{e}^{x}\left(C_1\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + C_2\,\mathrm{e}^{+3\mathrm{i}x}\right)}} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x}\left(C\,\cos(3x) + S\,\sin(3x)\right)}} = \underline{\underline{A\,\mathrm{e}^{x}\sin\left(3x+\varphi_0\right).}}$$

f)

Das *charakteristische Polynom* ist die *quadratische Funktion*

$$p(\lambda) = 2\,\lambda^2 + 7\,\lambda + 3$$

mit *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 > 0.$$

Charakteristisches Polynom hat 2 reelle Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4}.$$

$$\lambda_1 = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Es ergeben sich die reellen Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{-0.5x}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = \underline{\underline{C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-0.5x}}}.$$

5. AWP mit linear inhomogener DGL

Gegeben sei das folgende AWP:

DGL: $y'' - 2y' + y = 0$

AB: $y(1) = 3$

$y'(1) = 0.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Lösung des AWP ist reell.	X	
b) Die Lösung des AWP oszilliert.		X
c) Die Lösung des AWP hat eine Nullstelle bei x = 1.		X
d) Für die Lösung des AWP gilt: $y''(1) < 0$.	X	
e) Für die Lösung des AWP gilt: $y(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.		X
f) Die Lösung des AWP ist nach oben beschränkt.	X	

6. AWP mit linear homogenen DGL 2. Ordnung

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen AWP mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und beurteilen Sie das Verhalten für grosse Werte der unabhängigen Variablen.

a) DGL: $y'' + 4y' + 5y = 0$

AB: $y(0) = \pi$

$y'(0) = 0.$

b) DGL: $y'' + 20y' + 64y = 0$

AB: $y(0) = 0$

$y'(0) = 2.$

c) DGL: $4y'' - 4y' + y = 0$

AB: $y(0) = 5$

$y'(0) = -1.$

d) DGL: $4y'' - 4y' + y = 0$

AB: $y(2) = 5$

$y'(2) = -1.$

a)

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$

Diskriminante: D = -4 < 0

Da die ABs beide reell sind, muss auch die Lösung des AWP reell sein. Wir bestimmen die gedämpfte Kreisfrequenz und die Dämpfungskonstante

$$\omega_{\mathrm{d}} = \frac{\sqrt{|D|}}{2 \cdot a} = \frac{\sqrt{|-4|}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\delta = \frac{b}{2 \cdot a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2.$$

A = C = y_0 = π

$B = S = \frac{v_0+\delta y_0}{\omega_d} = \frac{0+2\pi}{1} = 2\pi$

Lösung des AWP:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \mathrm{e}^{-\delta\cdot(x-x_0)}\left(C\cdot\cos\left(\omega_{\mathrm{d}}\left(x-x_0\right)\right)+S\cdot\sin\left(\omega_{\mathrm{d}}\left(x-x_0\right)\right)\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-2\cdot(x-0)}\left(\pi\cdot\cos\left(1\cdot(x-0)\right)+2\pi\cdot\sin\left(1\cdot(x-0)\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi\,\mathrm{e}^{-2x}\left(\cos(x)+2\,\sin(x)\right).}}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$

b)

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 64$

Diskriminante: D = 144 > 0

Es existieren 2 reelle Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-20\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1} = \frac{-20\pm 12}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-20-12}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-20+12}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Reelle Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1(x-x_0)} = \mathrm{e}^{-16\cdot(x-x_0)} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2(x-x_0)} = \mathrm{e}^{-4\cdot(x-x_0)}$$

Lösung des AWP:

$$C_1 = \frac{\lambda_2\cdot y_0 - v_0}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{-4\cdot 0-2}{-4-(-16)} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$C_2 = \frac{v_0-\lambda_1\cdot y_0}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{2-(-16)\cdot 0}{-4-(-16)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}\,.$$

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x) = -\frac{1}{6}\cdot\mathrm{e}^{-16\cdot(x-0)} + \frac{1}{6}\cdot\mathrm{e}^{-4\cdot(x-0)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-4x}-\mathrm{e}^{-16x}\right).}}$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-4x}-\mathrm{e}^{-16x}\right) = \frac{1}{6}\,(0-0) = \underline{\underline{0.}}$$

c)

Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1$

Diskriminante: D = 0

Es existiert 1 reelle Nullstelle: λ = ½.

Reelle Basislösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda\,(x-x_0)} = \mathrm{e}^{0.5\cdot(x-x_0)}$$

$$y_2(x) = \left(x-x_0\right)\cdot\mathrm{e}^{\lambda\,(x-x_0)} = \left(x-x_0\right)\cdot\mathrm{e}^{0.5\cdot(x-x_0)}$$

Lösung des AWP:

$C_1 = y_0 = 5$

$C_2 = v_0 - \lambda \cdot y_0 = -1 - \frac{1}{2} \cdot 5 = -1 - 2.5 = -3.5$

$$\underline{\underline{y(x)}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = 5 \cdot \mathrm{e}^{0.5\cdot(x-0)} - 3.5 \cdot (x-0) \cdot \mathrm{e}^{0.5\cdot(x-0)}$$

$$= \underline{\underline{(5 - 3.5\,x)\,\mathrm{e}^{0.5x}.}}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x) \to \infty$

d)
Unterschied zu c) ist die Wahl der Referenzstelle, also die Anfangsbedingung – es gilt hier $x_0 = 2$. Die Lösung des AWP lässt sich durch Verschiebung um $\Delta x = 2$ entlang der positiven x-Achse gewinnen.

$$\underline{\underline{y(x)}} = \big(5 - 3.5 \cdot (x-2)\big)\,\mathrm{e}^{0.5\cdot(x-2)} = \big(5 - 3.5 \cdot x + 3.5 \cdot 2)\big)\,\mathrm{e}^{0.5x-0.5\cdot 2}$$

$$= \underline{\underline{(12 - 3.5\,x)\,\mathrm{e}^{0.5x-1}.}}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x) \to -\infty$

7. DGL 2. Ordnung mit Python/Sympy lösen

a) Benutzen Sie Python/Sympy, um die Lösungen der DGL 2. Ordnung von Aufgabe 4 zu bestimmen.
b) Benutzen Sie Python/Sympy, um die Lösungen der AWP mit DGL 2. Ordnung von Aufgabe 6 zu bestimmen.

a)
Aufgabe 4a:
```
# Python initialisieren
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren
# sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
y=sp.Function('y');
# Parameter
a=1; b=3; c=-4;
# Berechnungen
l=a*y(x).diff(x,2)+b*y(x).diff(x)+c*y(x); r=0;
L=sp.dsolve(l-r,y(x));
# Ausgabe
dp.display(L);
```

➔ Aufgaben 4b – f analog, nur die Parameter a, b und c müssen verändert eingegeben werden

b)
Aufgabe 6a:

```
# Python initialisieren
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren
# sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
y=sp.Function('y');
# Parameter
a=1; b=4; c=5; x_0=0; y_0=sp.pi; v_0=0;
# Berechnungen
l=a*y(x).diff(x,2)+b*y(x).diff(x)+c*y(x);
#r=0;
L=sp.dsolve(l,y(x),ics={y(x_0):y_0,y(x).diff(x).subs(x,x_0):v_
0});
# Ausgabe
dp.display(L);
```

➔ Aufgaben 6b – d analog, die Parameter a, b, c, x_0, y_0 und v_0 müssen verändert eingegeben werden