

# Übungsblatt DGL 7

Computational and Data Science  
BSc HS2024

## Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe freie gedämpfte harmonische Schwingung, Dämpfungskonstante, schwache/kritische/starke Dämpfung sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können den qualitativen Verlauf einer freien gedämpften harmonischen Schwingung anhand der Parameter in der DGL beurteilen.
- Sie können das AWP der freien gedämpften harmonischen Schwingung für einen RLC Schaltkreis aufstellen und qualitativ beurteilen.

### 1. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung berücksichtigt.	X	
b) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung vernachlässigt.		X
c) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen berücksichtigt.		X
d) Bei freien gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen vernachlässigt.	X	
e) Die Frequenz einer freien gedämpften harmonischen Schwingung lässt sich direkt aus der DGL ablesen.	X	

### 2. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Sei  $\omega_0, \delta > 0$  und  $t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Gegeben sei das folgende AWP der freien gedämpften harmonischen Schwingung:

DGL:  $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

AB:  $x(t_0) = x_0$

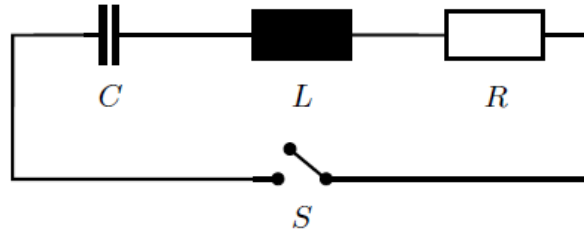
$\dot{x}(t_0) = v_0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Ist $x_1$ eine Lösung der DGL, dann auch die Funktion $x_2 = 7x_1$ .	X	
b) Sind $x_1$ und $x_2$ Lösungen des AWP, dann auch die Funktion $x_3 = x_2 + x_1$ .		X
c) Gilt $\delta > \omega_0$ , dann oszilliert die Lösung $x(t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega_d < \omega_0$ .		X
d) Gilt $\delta < \omega_0$ , dann oszilliert die Lösung $x(t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega_0$ .		X

### 3. RLC-Schaltkreis

Gegeben sei ein RLC-Schaltkreis, der aus einem Widerstand  $R = 1,2 \, \Omega$ , einer Induktivität  $L = 15 \, \text{mH}$  und einer Kapazität  $C = 168 \, \mu\text{F}$  bestehe. Der Kondensator werde durch eine externe Spannungsquelle auf eine Spannung von  $5 \, \text{V}$  aufgeladen. Anschliessend wird die Spannungsquelle entfernt und der Schalter  $S$  wird geschlossen.



- Stellen Sie das AWP für die Spannung  $U_C(t)$  auf, die am Kondensator anliegt.
- Bestimmen Sie die ungedämpfte Kreisfrequenz und die Dämpfungskonstante des Systems. Welcher Fall liegt vor?
- Mit welcher Frequenz schwingt das System?

a)

Mit der Maschenregel ergibt sich

$$U_R + U_L + U_C = 0$$

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = 0$$

Wir erhalten als DGL (2. Ordnung, homogen, konstante Koeffizienten, autonom)

$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{LC} \cdot U_C = 0$$

Wir wählen als Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  und es ergeben sich somit als ABs

$$U_C(0) = U_0 \approx 5.00 \, \text{V}$$

$$\dot{U}_C(0) = \frac{1}{C} \cdot \dot{Q}(0) = \frac{1}{C} \cdot I(0) = \frac{1}{C} \cdot 0 = 0.$$

Das AWP sieht folgendermassen aus

$$\text{DGL: } \ddot{U}_C + \frac{R}{L} \dot{U}_C + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

$$\text{AB: } U_C(0) = U_0$$

$$\dot{U}_C(0) = 0$$

b)

Vergleich der DGL aus a) mit der DGL für die freie gedämpfte harmonische Schwingung liefert

$$\ddot{U}_C + 2\delta \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0.$$

Die ungedämpfte Kreisfrequenz ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{1.50 \cdot 10^{-2} \, \text{H} \cdot 1.68 \cdot 10^{-4} \, \text{F}}} \approx 629 \frac{1}{\text{s}}}},$$

die Dämpfungskonstante zu

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{R}{2L} \approx \frac{1.20 \, \Omega}{2 \cdot 1.50 \cdot 10^{-2} \, \text{H}} \approx \underline{\underline{40.0 \frac{1}{\text{s}}}}$$

Da  $\delta < \omega_0$ , liegt schwache Dämpfung vor.

c)

Das System schwingt mit der Frequenz

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nu_d}} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{1.50 \cdot 10^{-2} \, \text{H} \cdot 1.68 \cdot 10^{-4} \, \text{F}} - \frac{(1.20 \, \Omega)^2}{4 \cdot (1.50 \cdot 10^{-2} \, \text{H})^2}} \approx \underline{\underline{100 \, \text{Hz}}} \end{aligned}$$

#### 4. Lösen von AWP von freien gedämpften harmonischen Schwingungen

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen AWP und bestimmen Sie die Lösung sowohl in Sinus-Cosinus-Form als auch in Sinus-Phasen-Form.

a) DGL:  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 0$

AB:  $x(0) = 1$

$\dot{x}(0) = -2.$

b) DGL:  $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

AB:  $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 3.$

a)

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm 5j; \quad x = e^{-2t} [C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)];$$

$$\dot{x} = e^{-2t} [-(2C_1 + 5C_2) \cdot \sin(5t) + (5C_1 - 2C_2) \cdot \cos(5t)]$$

Lösung:  $x(t) = e^{-2t} \cdot \cos(5t)$

b)

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7}j; \quad x = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ C_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t\right) \right];$$

$$\dot{x} = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ -\frac{1}{2} (C_1 + \sqrt{7} C_2) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t\right) + \frac{1}{2} (\sqrt{7} C_1 - C_2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t\right) \right]$$

Lösung:  $x(t) = \frac{6}{7} \sqrt{7} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7} t\right)$

#### 5. Aussagen über freie gedämpfte harmonische Schwingungen

Gegeben sei das folgende AWP der freien ungedämpften harmonischen

Schwingung:

DGL:  $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

AB:  $x(3) = 5$

$\dot{x}(3) = 0.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das AWP beschreibt ein schwach gedämpftes System.		X
b) Die Lösung des AWP verläuft durch den Punkt (5;-5).		X
c) Die Lösung des AWP hat ein lokales Maximum bei $t = 3$ .	X	
d) Die Lösung des AWP ist periodisch.		X
e) Für die Lösung des AWP gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .	X	
f) Für die Lösung des AWP gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$ .	X	

## 6. Aperiodischer Grenzfall

Die DGL einer freien gedämpften Schwingung laute

$$\ddot{x} + p\dot{x} + 2x = 0, p > 0.$$

a) Für welchen Wert des Parameters  $p$  ist der aperiodische Grenzfall vorhanden?

b) Wie lautet die spezielle Lösung für die ABs  $x(0) = 10, \dot{x}(0) = -1$ , wenn der unter

a) bestimmte aperiodische Grenzfall vorliegt? Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf dieser „Schwingung“.

a)

Aperiodischer Grenzfall: Die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + p\lambda + 2 = 0$  hat eine *doppelte* (reelle) Lösung.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - 2}}_0 = -\frac{p}{2} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

b)

Allgemeine Lösung ( $\lambda_{1/2} = -\sqrt{2}$ ):  $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

$$\dot{x} = (C_1 - \sqrt{2} C_2 - \sqrt{2} C_1 t) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

Spezielle Lösung:

$$x = [(10\sqrt{2} - 1)t + 10] \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

