Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 7

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Tschebycheffsche Ungleichung, das schwache und starke Gesetz der grossen Zahlen und den Zentralen Grenzwertsatz.
- Sie können die Tschebycheffsche Ungleichung sowie den Zentralen Grenzwertsatz auf konkrete Fragestellungen aus Wissenschaft und Technik anwenden.

---

1. Verschiedene Aussagen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	wahr	falsch
a) Kennt man die Verteilung von X und die Verteilung von Y, dann kann man daraus die Verteilung von X + Y berechnen.		X
b) Kennt man die gemeinsame Verteilung von (X,Y), dann kann man daraus die Verteilung von X berechnen.	X	
c) Haben X und Y dieselbe Verteilung, dann ist X + Y verteilt wie 2X.		X
d) Haben zwei standardisierte Variable X und Y dieselbe Verteilung, dann ist X = a + bY		X
e) Haben zwei standardisierte Variable X und Y dieselbe Verteilung, dann ist X verteilt wie a + bY.	X	
f) Die Zufallsvariablen X und -X haben die gleiche Varianz.	X	
g) Haben X und -X den gleichen Erwartungswert, dann ist E(X) = 0.	X	
h) Sind X und Y zwei zufällige Variable, so ist E(X+Y) = E(X)+E(Y).	X	
i) Ist die zufällige Variable Y = g(X) eine nichtlineare Funktion der zufälligen Variablen X, dann ist E(Y) = g(E(X)).		X
j) Sind X und Y unabhängig, dann sind auch 1/X und 1/Y unabhängig.	X	

2. Weinabfüllung

Die Weinmenge, die von einer automatischen Abfüllanlage in eine 0,75-l-Flasche abgefüllt wird, sei aus mancherlei Gründen als eine Zufallsvariable aufzufassen, deren Erwartungswert gleich 0,72 und deren Standardabweichung gleich 0,01 beträgt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mindestens, dass in eine Flasche zwischen 0,7 l und 0,9 l abgefüllt werden?

b) Wie gross ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass in eine Flasche weniger als 0,7 l abgefüllt werden, wenn die Verteilung der von der Abfüllanlage abgegebenen Menge symmetrisch ist?

1. Sei X die fragliche Weinmenge $E(X) = 0.72$, $\sigma_X = 0.01$. Dann ist

$$P(0.7 \leq X \leq 0.9) \geq P(0.7 \leq X \leq 0.74) = P(|X - 0.72| \leq 0.02)$$

Nach der Tschebyscheffschen Ungleichung gilt $P(|X - E(X)| \leq k\,\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$. Setzen wir $k\,\sigma_X = 0.02$, dann ist bei einem $\sigma_X = 0.01$ der Faktor $k = 2$. Also gilt

$$P(|X - 0.72| \leq 0.02) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2. Die Verteilung von X ist symmetrisch um $E(X) - 0.72$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} P(X < 0.7) &= P(X - 0.72 < -0.2) \\ &= P(X - 0.72 > 0.2) = \frac{1}{2} P(|X - 0.72| > 0.2) \end{aligned}$$

Für $E(X) = 0.72$ und $\sigma_X = 0.01$ sagt dieUngleichung von Tschebyscheff $P(|X - 0.72| > 0.2) \leq \frac{1}{4}$. Daher ist $P(X < 0.7) \leq \frac{1}{8}$.

3. Kundschaft im Laden

Die Zeit zwischen den Ankünften zweier aufeinanderfolgender Kunden in einem Telekommunikationsladen seien unabhängig und identisch verteilt mit den Parametern $\mu = 8$ Minuten und $\sigma = 2$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bis zur Ankunft des 55-ten Kunden mindestens 7,5 Stunden dauert?

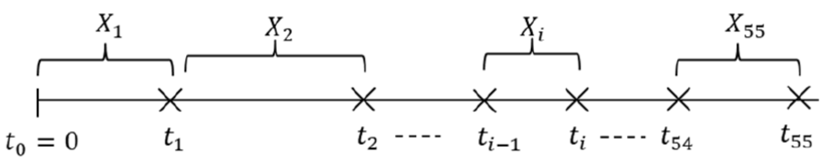
Seien

X_i: Zeitabstand (Zwischenankunftszeit) zwischen dem $(i-1)$-ten und i-ten Kunden

t_i: i-te Ankunftszeit

Wie in der Abbildung dargestellt, gilt für $i \geq 1$:

$t_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i$



Daraus folgt die Ankunftszeit des 55-ten Kunden als

$$t_{55} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{55}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt für $i \to \infty$

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_i - 8i}{2\sqrt{i}} \to Z \sim N(0{,}1)$$

Anmerkung:
N(0,1) ist die Standardnormalverteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass es bis zur Ankunft des 55-ten Kunden mindestens 7,5 Stunden = 450 Minuten dauert, ergibt sich aus

$$W(t_{55} \geq 450) = W(X_1 + X_2 + \cdots + X_{55} \geq 450)$$

$$= W\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{55} - 8(55)}{2\sqrt{55}} \geq \frac{450 - 8(55)}{2\sqrt{55}}\right)$$

Anmerkung:
W kann durch P ersetzt werden

$$= W\left(Z \geq \frac{450 - 8(55)}{2\sqrt{55}}\right) = W(Z \geq 0{,}6742) = 1 - W(Z < 0{,}6742)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}6742) \cong 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

4. Werkstück

Die Länge X eines Werkstücks habe den Erwartungswert 50 mm und die Standardabweichung 0,05 mm. Der Sollwert betrage ebenfalls 50 mm.

a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass die Länge des Werkstücks um 0,1 mm oder mehr vom Sollwert abweicht.

b) Man berechne die unter a) abgeschätzte Wahrscheinlichkeit unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass X als normalverteilt angesehen werden kann und vergleiche diese mit dem obigen Resultat.

a)
E(X) = 50 mm, σ = 0,05 mm
Anwendung der Tschebyscheff-Ungleichung liefert
$P(|X - 50mm| \geq 0{,}1mm) \leq 0{,}25$
b)
für eine normalverteilte Länge X ist
$P(|X - 50mm| \geq 0{,}1mm) = P(50mm + 0{,}1mm \leq X) + P(X \leq 50mm - 0{,}1mm) \approx 0{,}0455$, d. h. die Abschätzung unter a) ist sehr grob

5. Münzwurf

Eine ideale Münze wird n-mal geworfen. Es sei X_n die Anzahl der Zahlwürfe, die dabei auftreten.

a) Überzeugen Sie sich mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff davon, dass für eine beliebige positive Zahl ε die Folge der Wahrscheinlichkeiten $P(\left|\frac{1}{n} \cdot X_n - 0{,}5\right| \geq \varepsilon)$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage.

b) Bestimmen Sie die notwendige Zahl n der Münzwurfe, damit X_n mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,8 in den Grenzen $0{,}49 \cdot n < X_n < 0{,}51 \cdot n$ liegt
i) mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff,

ii) mit Hilfe des Grenzwertsatzes von De Moivre-Laplace (Annäherung Binomial- durch Normalverteilung).

a)

X_n ist binomialverteilt mit den Parametern p = 0,5 und n. Daher ist der Erwartungswert $E\left(\frac{1}{n}\cdot X_n\right) = 0{,}5$ und die Varianz $Var\left(\frac{1}{n}\cdot X_n\right) = \frac{0{,}25}{n}$.

Verwendung der Tschebyscheff Ungleichung ergibt:

$P\left(\left|\frac{1}{n}\cdot X_n - 0{,}5\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{0{,}25}{n\cdot\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

D. h. die relative Häufigkeit des Auftretens eines Zahlwurfs in einer Reihe von n Würfen konvergiert im angegebenen Sinne gegen die (klassische) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Zahlwurfes. Dies ist ein Spezialfall des (schwachen) Gesetzes der grossen Zahlen.

b)

(i) Tschebyscheff Ungleichung:

$P(0{,}49\cdot n < X_n < 0{,}51\cdot n) = 1 - P\left(\left|\frac{X_n}{n} - 0{,}5\right| \leq 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{0{,}25}{n\cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}8$ ergibt $n \geq 12500.$

(ii) Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace bzw. Annäherung Binomial- durch Normalverteilung

$P(0{,}49\cdot n < X_n < 0{,}51\cdot n) = P\left(-0{,}02\cdot\sqrt{n} < \frac{X_n - 0{,}5n}{\sqrt{0{,}25n}} < 0{,}02\cdot\sqrt{n}\right)$

$\approx 2\cdot\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{n}\right) - 1$

Aus $2\cdot\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{n}\right) - 1 \geq 0{,}8$ erhält man $n \geq 4109$.

6. Fahrradverleih

In einem Fahrradverleih stehen 100 Fahrräder zur Verfügung. Erfahrungsgemäss ist jedes Fahrrad wahrend 80 % der Öffnungszeit verliehen. Unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Fahrräder unabhängig voneinander entliehen werden, berechne man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt

a) höchstens 90%,
b) mehr als 90%,
c) zwischen 70 und 90%

der Räder verliehen sind.

Die diskrete und binomialverteilte Zufallsvariable X: *Anzahl der entliehenen Fahrräder* kann gemäss dem Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace als näherungsweise normalverteilt mit den Parametern $\mu = 100\cdot 0{,}8 = 80$ Fahrräder und $\sigma^2 = 100\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}8) = 16$ angenommen werden. Es ergibt sich:

a) $P(X \leq 90) = \Phi(2{,}5) = 0{,}9938$

b) $P(X > 90) = 1 - \Phi(2{,}5) = 0{,}0062$

c) $P(70 \leq X \leq 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}9876$