Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 3

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe (diskrete) Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Stabdiagramm, Erwartungswert, Mittelwert, Varianz und Standardabweichung und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie kennen die speziellen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen Gleichverteilung, Bernoulli-Verteilung, Binomialverteilung, hypergeometrische und Poisson-Verteilung und deren Eigenschaften.
- Sie können die Wahrscheinlichkeitsfunktion als auch die Verteilungsfunktion graphisch darstellen.
- Sie können den Erwartungswert, Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung für diskrete Zufallsvariablen bestimmen.
- Sie können für konkrete Beispiele bestimmen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt und können diese dann auch auf konkrete Situationen anwenden.

1. Vermischte Aussagen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: E(X) > Var(x).		X
b) Es gilt: Var(-X) < Var(X).		X
c) Es sei X eine diskrete Zufallsvariable, die nur die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen kann. F bezeichne die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gilt: F(2,5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=2,5).	X	
d) Für eine diskrete Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F gilt: P(X=x) = F(x).		X
e) Es seien eine beliebige Zufallsvariable X und reelle Zahlen a und b gegeben. Dann gilt: Var(-a-bX) $\leq$ 0.		X
f) Die Zufallsvariable X sei Bernoulli-verteilt mit p = 0,5. Dann gilt: Var(x) = 1.		X
g) Eine Bank vergibt 100 Kredite. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner ausfällt, beträgt 0,01, und das Ausfallen des einen Kredits ist unabhängig vom Ausfallen der anderen. Die Zufallsvariable X messe nun die Anzahl der insgesamt ausfallenden Kredite. Es gilt dann: X folgt einer Poisson-Verteilung mit Parameter μ = 0,01.		X

h)	Es seien X und Y zwei binomialverteilte Zufallsvariablen mit n = 10 und den Wahrscheinlichkeiten 0,4 bzw. 0,6. Dann gilt: $P(X \leq 4) = P(Y \geq 6)$.	X	

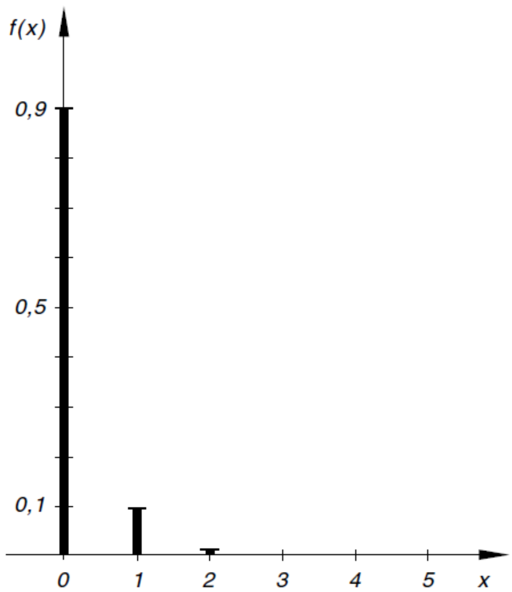
2. Schraubenfabrik
In einer Fabrik werden serienmässig Schrauben mit einem Ausschussanteil von 2% hergestellt, d. h. unter 100 hergestellten Schrauben befinden sich im Mittel genau 2 unbrauchbare. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten finden wir in einer Zufallsstichprobe von 5 Schrauben genau 0, 1, 2, 3, 4 bzw. 5 unbrauchbare Schrauben?

Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment, (brauchbare bzw. unbrauchbare Schraube mit p = 0,02), das 5-mal durchgeführt wird. Es liegt also eine Binomialverteilung mit n = 5 und p = 0,02 vor.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0{,}02^{x} \cdot 0{,}98^{5-x} \qquad (x = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Die zugehörige *Verteilungstabelle* liefert dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten. Sie hat das folgende Aussehen:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,9039	0,0922	0,0038	0,00008	0	0
$P(X = x)$ (in %)	90,4	9,2	0,4	0	0	0



3. Magnete
Unter 40 Packungen, die laut Aufschrift je 10 Magnete enthalten sollen, befinden sich 4 unvollständige Packungen (sie enthalten weniger Magnete als angegeben). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
a) beim Kauf von einer Packung eine vollständige Packung,
b) beim Kauf von 10 Packungen genau zwei unvollständige Packungen erhält?

Es liegt eine hypergeometrische Verteilung vor: N = 40, M = Anzahl der unvollständigen Packungen = 4

a)

$$N = 40, \quad M = 4, \quad n = 1; \quad P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{1-x}}{\binom{40}{1}}$$

$X = 0$ (nur *vollständige* Packungen): $P(X = 0) = f(0) = 0{,}9$

b)

$$N = 40, \quad M = 4, \quad n = 10; \quad P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{10-x}}{\binom{40}{10}}$$

$P(X = 2) = f(2) = 0{,}2142$

4. Kernreaktor

Bei einem Kernreaktor werden an die Brennelemente extrem hohe Qualitätsanforderungen gestellt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Brennelement diesen hohen Anforderungen nicht genügt, betrage $p = 10^{-4}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 1500 Brennelemente eines Reaktors die vorgeschriebenen Qualitätsbedingungen erfüllen?

Es liegt eine Binomialverteilung vor mit n = 1500 und $p = 10^{-4}$. Es darf durch eine Poisson-Verteilung angenähert werden, da n*p = 0,15 = μ < 5 und p ≤ 0,01.

$$P(X = x) = f(x) = \frac{0{,}15^x}{x!} \cdot e^{-0{,}15} \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$$

Exakte Verteilung (*Binomialverteilung* mit $n = 1500$, $p = 0{,}0001$ und $q = 1 - p = 0{,}9999$):

$$P(X = x) = f(x) = \binom{1500}{x} \cdot 0{,}0001^x \cdot 0{,}9999^{1500-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 1500)$$

$P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$ (in Übereinstimmung mit der Näherung)

5. Kulturreise

Ein Touristikunternehmer bietet in jedem Herbst eine exklusive Kulturreise zu den Schlössern der Loire an. Die Reise erfolgt mit einem Kleinbus, in dem neun Touristen Platz haben. Aus langjähriger Erfahrung weiss der Unternehmer, dass eine jede Buchung in den letzten beiden Tagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % kurzfristig storniert wird. Der Unternehmer hat wegen der kurzfristigen Stornierungen statt neun Buchungen zehn Buchungen entgegengenommen.

a) Welches Überbelegungsrisiko geht der Unternehmer ein?
b) Um in der Gewinnzone zu bleiben, müssen mindestens acht Personen mitfahren. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Unternehmer noch kurzfristig für Ersatzreisende sorgen muss, um nicht in die Verlustzone zu geraten?
c) Mit wie vielen Stornierungen hat er durchschnittlich zu rechnen?

a)
Zufallsvariable X: Anzahl der kurzfristigen Stornierungen
X ist binomimalverteilt mit Θ = 0,05 und n = 10.

$$f_B(x \mid n; \Theta) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot \Theta^x \cdot (1-\Theta)^{n-x} & \text{für} \quad x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Risiko tritt ein, wenn keiner der Teilnehmer storniert, d. h. X nimmt den Wert 0 an.

$$f_B(0 \mid 10; 0{,}05) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10}$$

$$= 0{,}5987 \quad \text{bzw.} \quad 59{,}87\,\%$$

Das Risiko, dass keine Buchung storniert wird, beträgt 59,87%.
b)
Der Unternehmer bleibt in der Gewinnzone, wenn höchstens 10 – 8 = 2 Buchungen storniert werden, d. h. $X \leq 2$.

$$F_B(2|10; 0{,}05) = \sum_{a=0}^{2} \binom{10}{a} \cdot 0{,}05^a \cdot (1 - 0{,}05)^{10-a} = 0{,}9885$$

Mit 100 – 98,85% = 1,15% wird der Unternehmer nach Ersatzreisenden suchen müssen, um keinen Verlust zu machen.
c)
Der Erwartungswert muss bestimmt werden. Für die Binomialverteilung gilt: E(X) = n*Θ = 10*0,05 = 0,5.

6. Elektronikbauteile
Ein Produzent von Elektronikbauteilen liefert einem Kunden jeden Montag 3.800 Bauteile. Der Kunde nimmt Lieferungen mit einer Ausschussquote von 4 % und höher nicht an. Die Qualitätskontrolle wird vom Lieferanten und Kunden gemeinsam durchgeführt. Der Prüfplan sieht die zufällige Entnahme ohne Zurücklegen von 180 Bauteilen vor. Sind davon höchstens 6 Bauteile Auschuss (3,33 %), dann wird die Lieferung angenommen, anderenfalls wird sie nicht angenommen. Wie gross ist das Risiko des Produzenten, dass eine Lieferung, in der nur 2 % der Bauteile Ausschuss sein mögen, nicht angenommen wird?

Das Produzentenrisiko besteht darin, dass die Lieferung wegen des Auffindens von mehr als 6 Ausschuss-Bauteilen in der Stichprobe von 180 Bauteilen nicht angenommen wird, obwohl die Lieferung mit 2 % bzw. 76 Ausschuss-Bauteilen deutlich unter 4 % Ausschuss bzw. 152 Ausschuss-Bauteilen liegt.
Zufallsvariable X = Anzahl der Bauteile, die Ausschuss sind
X ist hypergeometrisch verteilt.
N = 3800, M = 76 (entspricht 2% Ausschuss), n = 180

$$1 - F_H(6|\, 3.800; 76; 180) = 1 - \sum_{a=0}^{6} \frac{\binom{76}{a} \cdot \binom{3800-76}{180-a}}{\binom{3800}{180}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung fälschlicherweise nicht angenommen wird, beträgt 6,65%.

7. Produktion

Bei einem schwer beherrschbaren Produktionsprozess beträgt das Risiko, dass ein erzeugter Artikel den Qualitätserfordernissen nicht genügt, 2,6 %. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus 300 erzeugten Artikeln eine Lieferung von 290 Artikeln zusammengestellt werden kann, die den Qualitätserfordernissen genügt?

Zufallsvariable X = Anzahl der Artikel, die den Qualitätsanforderungen nicht genügen
X ist binomialverteilt mit n = 300 und p = 0,026

$$F_B(10|\,300;\,0{,}026) = \sum_{a=0}^{10} \binom{300}{a} \cdot 0{,}026^{a} \cdot 0{,}974^{300-a}$$

Mit 83,8 % genügt die zusammengestellte Lieferung den Qualitätsansprüchen.

8. Vorzeitiger Ruhestand

In der Berliner Morgenpost vom 19. Dezember 2002 wird berichtet, dass im Jahr 2001 im Durchschnitt jeder 71. verbeamtete Berliner Lehrer vorzeitig pensioniert wurde. Im Bekanntenkreis Ihrer Eltern befinden sich fünf verbeamtete Lehrer, die unabhängig voneinander an unterschiedlichen Berliner Schulen in unterschiedlichen Fächern unterrichten und zu unterschiedlichen Altersgruppen gehören. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei dieser Bekannten im Jahre 2001 vorzeitig in den Ruhestand versetzt wurden?

diskrete Zufallsgröße X: *Anzahl vorzeitig pensionierter Lehrer unter 5 zufällig ausgewählten verbeamteten Lehren,* Verteilungsmodell: Binomialverteilung mit n = 5 und p = 1 / 71 = 0,0141, wenn folgende Annahme gilt: die Auswahl der 5 verbeamteten Lehrer im Bekanntenkreis der Eltern kann als ein fünfmaliges unabhängig voneinander durchgeführtes BERNOULLI Experiment mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit für das Ereignis „zufällig ausgewählter verbeamteter Lehrer wird vorzeitig pensioniert" gedeutet werden, zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit:
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0{,}9315 + 0{,}0666) = 0{,}0019$

9. Skat

Beim Skat (3 Spieler, 32 Karten) erhält jeder Spieler 10 Karten, die restlichen 2 Karten bleiben verdeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält ein Spieler

a) alle 4 Asse,
b) kein Ass?

Zufallsvariable: X = Anzahl der „Asse" eines Spielers

X ist *hypergeometrisch* verteilt mit den folgenden Parametern: $N = 32$ (Anzahl der Karten); $M = 4$ (Anzahl der „Asse"); $n = 10$ (Anzahl der Karten eines Spielers). Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der *diskreten* Zufallsvariablen X lautet damit wie folgt:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{x} \cdot \binom{32-4}{10-x}}{\binom{32}{10}} \qquad (x = 0, 1, 2, 3, 4)$$

a)

$$P(X=4)=\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{32-4}{10-4}}{\binom{32}{10}}=\frac{1\cdot\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}=\frac{\dfrac{28!}{6!(28-6)!}}{\dfrac{32!}{10!(32-10)!}}=\frac{\dfrac{28!}{(6!)\,\boxed{(22!)}}}{\dfrac{32!}{(10!)\,\boxed{(22!)}}}=\frac{\dfrac{28!}{6!}}{\dfrac{32!}{10!}}=\frac{28!}{6!}\cdot\frac{10!}{32!}=$$

$$=\frac{(28!)\,(10!)}{(6!)\,(32!)}=\frac{\boxed{(28!)}\,\boxed{(6!)}\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{\boxed{(6!)}\,\boxed{(28!)}\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}=0{,}0058$$

Umformungen: $10!=(6!)\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;\quad 32!=(28!)\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32$

Fazit: Die Chance, dass ein Spieler *alle* 4 „Asse“ erhält, ist also *sehr gering* (die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 0,6 %).

b)

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{32-4}{10-0}}{\binom{32}{10}}=\frac{1\cdot\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}=\frac{\dfrac{28!}{\boxed{(10!)}\,(28-10)!}}{\dfrac{32!}{\boxed{(10!)}\,(32-10)!}}=\frac{\dfrac{28!}{18!}}{\dfrac{32!}{22!}}=\frac{28!}{18!}\cdot\frac{22!}{32!}=$$

$$=\frac{(28!)\,(22!)}{(18!)\,(32!)}=\frac{\boxed{(28!)}\,\boxed{(18!)}\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{\boxed{(18!)}\,\boxed{(28!)}\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}=\frac{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}=0{,}2034$$

Umformungen: $22!=(18!)\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22;\quad 32!=(28!)\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32$

Fazit: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler *kein* „Ass“ erhält, beträgt rund 20,3 %.

10. α-Teilchen

Bei der Emission von α-Teilchen einer bestimmten radioaktiven Substanz werden in einer Stunde genau 1620 α-Teilchen registriert. Welche Wahrscheinlichkeit besteht, dass in einem 10-Sekunden-Intervall

a) genau 2

b) Mehr als 2 α-Teilchen emittiert werden?

Zufallsvariable: X = Anzahl der in einem 10-Sekunden-Intervall emittierten α-Teilchen

X genügt einer *Poisson-Verteilung* mit dem noch *unbekannten* Parameter (Mittelwert) μ, den wir wie folgt bestimmen (1 h = 3600 s; h: Stunden; s: Sekunden):

Mittlere Anzahl emittierter α-Teilchen pro Sekunde: $\dfrac{1620}{3600}=0{,}45$

Im 10-Sekunden-Intervall werden somit *im Mittel* $\mu=10\cdot 0{,}45=4{,}5$ α-Teilchen emittiert. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Zufallsvariable X lautet damit wie folgt:

$$f(x)=P(X=x)=\frac{\mu^x}{x!}\cdot e^{-\mu}=\frac{4{,}5^x}{x!}\cdot e^{-4{,}5}\qquad(x=0,1,2,\ldots)$$

a)

$$P(X=2)=\frac{4{,}5^2}{2!}\cdot e^{-4{,}5}=0{,}1125\ \widehat{=}\ 11{,}25\,\%$$

b)

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-\frac{4{,}5^0}{0!}\cdot e^{-4{,}5}-\frac{4{,}5^1}{1!}\cdot e^{-4{,}5}-\frac{4{,}5^2}{2!}\cdot e^{-4{,}5}=1-\left(\frac{4{,}5^0}{0!}+\frac{4{,}5^1}{1!}+\frac{4{,}5^2}{2!}\right)\cdot e^{-4{,}5}=$$

$$=1-(1+4{,}5+10{,}125)\cdot e^{-4{,}5}=1-15{,}625\cdot e^{-4{,}5}=0{,}8264\ \widehat{=}\ 82{,}64\,\%$$