

# Übungsblatt DGL 6

Computational and Data Science  
BSc HS2024

## Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe freie ungedämpfte harmonische Schwingung, Frequenz, Kreisfrequenz, Amplitude und Phasenverschiebung sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie wissen, dass jede Linearkombination von zwei Lösungen der DGL einer freien ungedämpften harmonischen Schwingung wieder eine Lösung derselben ist.
- Sie können Frequenz bzw. Periode direkt aus der DGL der freien ungedämpften harmonischen Schwingung ablesen, ebenso Amplitude und Phasenverschiebung direkt aus den AB der freien ungedämpften harmonischen Schwingung.
- Sie können die Lösung des AWP der freien ungedämpften harmonischen Schwingung bestimmen.

### 1. Aussagen über linear homogene DGL 2. Ordnung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Bei freien ungedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung berücksichtigt.		X
b) Bei freien ungedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung vernachlässigt.	X	
c) Bei freien ungedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen berücksichtigt.		X
d) Bei freien ungedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen vernachlässigt.	X	
e) Die Frequenz einer freien ungedämpften harmonischen Schwingung lässt sich direkt aus der DGL ablesen.	X	

### 2. Linearität der freien ungedämpften harmonischen Schwingung

Sei  $\omega > 0$ . Gegeben sei die DGL der freien ungedämpften harmonischen Schwingung  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ .

- a) Es sei  $x_1(t)$  eine Lösung der DGL und es sei  $C \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $x(t) := C \cdot x_1(t)$  ebenfalls eine Lösung der DGL ist.
- b) Es seien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen der DGL. Zeigen Sie, dass die Summe  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  ebenfalls eine Lösung der DGL ist.
- c) Es seien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen der DGL und  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass die Linearkombination  $x(t) := C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t)$  ebenfalls eine Lösung der DGL ist.

a)

Es gilt:

$$\dot{x}(t) = C \cdot \dot{x}_1(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = C \cdot \ddot{x}_1(t).$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir

$$\underline{\underline{\ddot{x} + \omega^2 x}} = C \cdot \ddot{x}_1 + \omega^2 \cdot C \cdot x_1 = C \cdot \underbrace{(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1)}_{=0} = C \cdot 0 = \underline{\underline{0}}.$$

b)

Es gilt

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\ddot{x} + \omega^2 x}} &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot (x_1 + x_2) = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot x_1 + \omega^2 \cdot x_2 \\ &= \underbrace{\ddot{x}_1 + \omega^2 \cdot x_1}_{=0} + \underbrace{\ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot x_2}_{=0} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

c)

Es gilt

$$\dot{x}(t) = C_1 \cdot \dot{x}_1(t) + C_2 \cdot \dot{x}_2(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = C_1 \cdot \ddot{x}_1(t) + C_2 \cdot \ddot{x}_2(t)$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\ddot{x} + \omega^2 x}} &= C_1 \cdot \ddot{x}_1 + C_2 \cdot \ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot (C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2) \\ &= C_1 \cdot \ddot{x}_1 + C_2 \cdot \ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot C_1 \cdot x_1 + \omega^2 \cdot C_2 \cdot x_2 \\ &= C_1 \cdot \underbrace{(\ddot{x}_1 + \omega^2 \cdot x_1)}_{=0} + C_2 \cdot \underbrace{(\ddot{x}_2 + \omega^2 \cdot x_2)}_{=0} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

### 3. Aussagen über freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

Sei  $\omega > 0$  und  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Gegeben sei das folgende AWP der freien ungedämpften harmonischen Schwingung:

DGL:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

AB:  $x(t_0) = x_0$

$\dot{x}(t_0) = v_0$ .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Ist $x_1$ eine Lösung der DGL, dann auch die Funktion $x_2 = -5x_1$ .	X	
b) Sind $x_1$ und $x_2$ Lösungen des AWP, dann auch die Funktion $x_3 = x_2 - x_1$ .		X
c) Verdoppelt man $x_0$ und $v_0$ , dann verdoppelt sich auch die Amplitude der Lösung des AWP.	X	
d) Die Amplitude der Lösung des AWP hängt von $\omega$ .	X	
e) Die Frequenz der Lösung des AWP ist unabhängig von den Parametern der AB, also von $x_0$ und $v_0$ .	X	

#### 4. Anfangsbedingungen der freien ungedämpften harmonischen Schwingung

Sei  $\omega > 0$  und  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Gegeben sei das folgende AWP der freien ungedämpften harmonischen Schwingung

$$\text{DGL: } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\text{AB: } x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0.$$

a) Wie müssen  $C, S \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit

$x(t) := C \cdot \cos(\omega(t - t_0)) + S \cdot \sin(\omega(t - t_0))$  eine Lösung des AWP ist?

b) Wie müssen  $A, \varphi_0 \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit  $x(t) := A \cdot \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0)$  eine Lösung des AWP ist?

c) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Parameterpaaren  $(C, S)$  und  $(A, \varphi_0)$ ?

Hinweis: Verwenden Sie die Argumentfunktion, die von den komplexen Zahlen bekannt ist, um  $\varphi_0$  durch  $C$  und  $S$  auszudrücken.

a)

Ableiten des Ansatzes:

$$\dot{x}(t) = C \cdot (-\omega) \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0)) + S \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0))$$

$$= \omega S \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0)) - \omega C \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0)).$$

Einsetzen der ABs:

$$x_0 = x(t_0) = C \cdot \cos(\omega \cdot (t_0 - t_0)) + S \cdot \sin(\omega \cdot (t_0 - t_0)) = C \cdot \cos(0) + S \cdot \sin(0)$$

$$= C \cdot 1 + S \cdot 0 = C$$

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = \omega S \cdot \cos(\omega \cdot (t_0 - t_0)) - \omega C \cdot \sin(\omega \cdot (t_0 - t_0)) = \omega S \cdot \cos(0) - \omega C \cdot \sin(0)$$

$$= \omega S \cdot 1 - \omega C \cdot 0 = \omega S.$$

Es ergibt sich:  $C = x_0, S = \frac{v_0}{\omega}$ .

b)

Ableitung des Ansatzes

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) = \omega A \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0)$$

Einsetzen der ABs:

$$x_0 = x(t_0) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t_0 - t_0) + \varphi_0) = A \cdot \sin(0 + \varphi_0) = A \cdot \sin(\varphi_0)$$

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = \omega A \cdot \cos(\omega \cdot (t_0 - t_0) + \varphi_0) = \omega A \cdot \cos(0 + \varphi_0) = \omega A \cdot \cos(\varphi_0)$$

Wir erhalten somit das nicht-lineare Gleichungssystem

$$\text{I: } A \cdot \sin(\varphi_0) = x_0$$

$$\text{II: } A \cdot \cos(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega}$$

Zur Lösung verwenden wir die komplexe Zahl

$$z := A \cdot \text{cis}(\varphi_0) = A \cdot \cos(\varphi_0) + i \cdot A \cdot \sin(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega} + i \cdot x_0$$

Es ergibt sich

$$\underline{\underline{A}} = |z| = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} = \underline{\underline{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_0}} = \arg(z) = \arg\left(\frac{v_0}{\omega} + i \cdot x_0\right).$$

c)

Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot \sin(\varphi_0) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = A \cdot \cos(\varphi_0)$$

$$\underline{\underline{A}} = \sqrt{C^2 + S^2} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\varphi_0}} = \arg(S + i \cdot C).$$

### 5. Lösen von AWP von freien ungedämpften harmonischen Schwingungen

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen AWP und bestimmen Sie die Lösung sowohl in Sinus-Cosinus-Form als auch in Sinus-Phasen-Form.

a) DGL:  $\ddot{x} + x = 0$

AB:  $x(0) = 3$

$\dot{x}(0) = 0.$

b) DGL:  $\ddot{x} + 4x = 0$

AB:  $x(1) = 0$

$\dot{x}(1) = 8.$

c) DGL:  $\ddot{x} + 9x = 0$

AB:  $x(2) = 3$

$\dot{x}(2) = 12.$

d) DGL:  $\ddot{x} + 49x = 0$

AB:  $x(9) = 0$

$\dot{x}(9) = 0$

a)

Es ergeben sich die folgenden Werte

$$\omega = \sqrt{1} = 1, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 3 \quad \text{und} \quad v_0 = 0$$

Die Parameter für die Lösung ergeben sich folglich zu

$$C = x_0 = 3$$

$$S = \frac{v_0}{\omega} = \frac{0}{1} = 0$$

$$A = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\varphi_0 = \arg(S + i \cdot C) = \arg(0 + 3 \cdot i) = \arg(3 \cdot i) = \pi/2$$

Für die Lösung des AWP erhalten wir

$$\underline{\underline{x(t)}} = C \cdot \cos(\omega(t - t_0)) + S \cdot \sin(\omega(t - t_0)) = 3 \cdot \cos(1 \cdot (t - 0)) + 0 \cdot \sin(1 \cdot (t - 0))$$

$$= 3 \cdot \cos(t) + 0 = \underline{\underline{3 \cos(t)}}$$

$$\underline{\underline{x(t)}} = A \cdot \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0) = 3 \cdot \sin(1 \cdot (t - 0) + \pi/2) = \underline{\underline{3 \sin(t + \pi/2)}}.$$

b)

Es ergeben sich die folgenden Werte

$$\omega = \sqrt{4} = 2, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 0 \quad \text{und} \quad v_0 = 8$$

Die Parameter für die Lösung ergeben sich folglich zu

$$C = x_0 = 0$$

$$S = \frac{v_0}{\omega} = \frac{8}{2} = 4$$

$$A = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\varphi_0 = \arg(S + i \cdot C) = \arg(4 + 0 \cdot i) = \arg(4) = 0$$

Für die Lösung des AWP erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= C \cdot \cos(\omega(t - t_0)) + S \cdot \sin(\omega(t - t_0)) = 0 \cdot \cos(2 \cdot (t - 1)) + 4 \cdot \sin(2 \cdot (t - 1)) \\ &= 0 + 4 \cdot \sin(2(t - 1)) = \underline{\underline{4 \sin(2(t - 1))}} \end{aligned}$$

$$\underline{x(t)} = A \cdot \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0) = 4 \cdot \sin(2 \cdot (t - 1) + 0) = \underline{\underline{4 \sin(2(t - 1))}}.$$

c)

Es ergeben sich die folgenden Werte

$$\omega = \sqrt{9} = 3, \quad t_0 = 2, \quad x_0 = 3 \quad \text{und} \quad v_0 = 12$$

Die Parameter für die Lösung ergeben sich folglich zu

$$C = x_0 = 3$$

$$S = \frac{v_0}{\omega} = \frac{12}{3} = 4$$

$$A = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi_0 = \arg(S + i \cdot C) = \arg(4 + 3 \cdot i) = \arctan(3/4) \approx 0.644 \approx 0.205 \pi$$

Für die Lösung des AWP erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= C \cdot \cos(\omega(t - t_0)) + S \cdot \sin(\omega(t - t_0)) = 3 \cdot \cos(3 \cdot (t - 2)) + 4 \cdot \sin(3 \cdot (t - 2)) \\ &= \underline{\underline{3 \cos(3(t - 2)) + 4 \sin(3(t - 2))}} \end{aligned}$$

$$\underline{x(t)} = A \cdot \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0) \approx 5 \cdot \sin(3 \cdot (t - 2) + 0.205 \pi)$$

$$= \underline{\underline{5 \sin(3(t - 2) + 0.205 \pi)}}.$$

d)

Es ergeben sich die folgenden Werte

$$\omega = \sqrt{49} = 7, \quad t_0 = 9, \quad x_0 = 0 \quad \text{und} \quad v_0 = 0$$

Die Parameter für die Lösung ergeben sich folglich zu

$$C = x_0 = 0$$

$$S = \frac{v_0}{\omega} = \frac{0}{9} = 0$$

$$A = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$\varphi_0 = \arg(S + i \cdot C) = \arg(0 + 0 \cdot i) = \arg(0) = 0$$

Für die Lösung des AWP erhalten wir

$$\underline{x(t)} = C \cdot \cos(\omega(t - t_0)) + S \cdot \sin(\omega(t - t_0)) = 0 \cdot \cos(7 \cdot (t - 9)) + 0 \cdot \sin(7 \cdot (t - 9))$$

$$= 0 + 0 = \underline{0}$$

$$\underline{x(t)} = A \cdot \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0) = 0 \cdot \sin(7 \cdot (t - 9) + 0) = \underline{0}.$$

## 6. Aussagen über freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

Gegeben sei das folgende AWP der freien ungedämpften harmonischen Schwingung:

DGL:  $\ddot{x} + x = 0$

AB:  $x(-2) = -3$

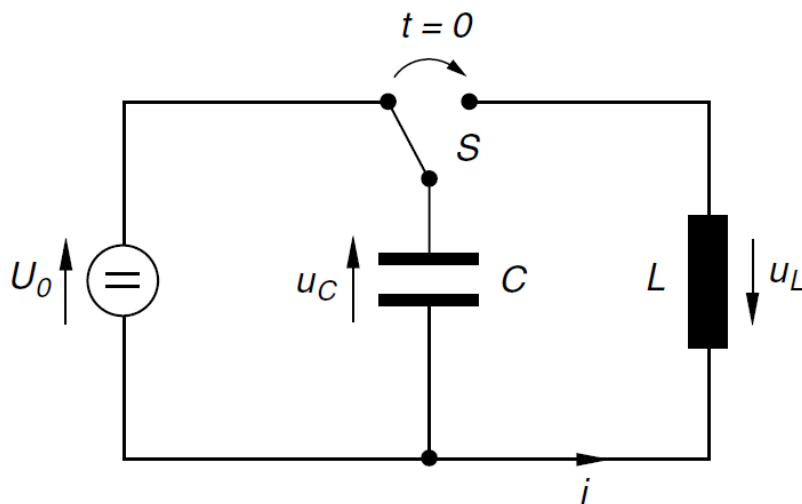
$\dot{x}(-2) = 4.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Lösung des AWP verläuft durch den Punkt $(-2;0)$ .		X
b) Die Frequenz beträgt $\nu = 1$ .		X
c) Die Lösung des AWP ist $2\pi$ periodisch, d. h. $x(t + 2\pi) = x(t)$ für alle $t \geq t_0$ .	X	
d) Die Amplitude der Lösung des AWP beträgt 5.	X	
e) Die Phasenverschiebung der Lösung des AWP beträgt $\pi/4$ .		X

## 7. Elektromagnetischer Schwingkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität  $C = 1 \mu\text{F}$  wird zunächst durch eine Spannungsquelle auf die Spannung  $U_0 = 100 \text{ V}$  aufgeladen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Kondensator durch Umlegen des Schalters  $S$  von der Spannungsquelle getrennt und einer Spule mit der Induktivität  $L = 1 \text{ H}$  zugeschaltet. Beschreiben Sie die im LC-Stromkreis entstehende elektromagnetische Schwingung durch den Verlauf der Stromstärke  $I = I(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .



Mit der Maschenregel gilt:  $U_L + U_C = 0$ .

Wir ersetzen:  $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$  und  $U_C = \frac{q}{C}$ .

Es ergibt sich:  $L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$  bzw.  $\frac{di}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$ .

Diese Gleichung differenzieren wir nach der Zeit und nutzen die Beziehung  $I = \frac{dq}{dt}$ .  
 Dies ergibt dann die DGL einer freien ungedämpften elektromagnetischen Schwingung:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot \frac{dq}{dt} = 0.$$

Mit  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ :  $\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega^2 \cdot I = 0$ .

Diese DGL besitzt die allgemeine Lösung

$$I(t) = K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t).$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen können  $K_1$  und  $K_2$  bestimmt werden:

1. Der Strom ist zu Beginn der Schwingung, also bei  $t = 0$ , gleich 0:  $I(0) = 0$ .
2. Die Spannung am Kondensator ist zu Beginn  $U_0$ :  $U_C(0) = U_0$ .

Verwenden dieser Anfangsbedingungen für die Maschenregel:

$$U_L(0) + U_C(0) = L \cdot \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} + U_0 = 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{U_0}{L}$$

Für die Integrationskonstanten ergibt sich:

$$I(0) = 0 \Rightarrow K_1 \cdot \sin(0) + K_2 \cdot \cos(0) = K_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} [K_1 \cdot \sin(\omega t) + K_2 \cdot \cos(\omega t)] = \omega K_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega K_2 \cdot \sin(\omega t) \\ &= \omega [K_1 \cdot \cos(\omega t) - K_2 \cdot \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{U_0}{L} \Rightarrow \omega [K_1 \cdot \cos(0) - K_2 \cdot \sin(0)] = \omega K_1 = -\frac{U_0}{L}$$

$$\Rightarrow K_1 = -\frac{U_0}{\omega L} = -\frac{U_0 \sqrt{LC}}{L} = -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Im Schwingkreis fließt somit der sinusförmige Wechselstrom

$$I(t) = -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega t) = -I_0 \cdot \sin(\omega t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \pi), t \geq 0$$

mit  $I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$  und  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Wenn wir die gegebenen Zahlenwerte einsetzen, erhalten wir:

$$I(t) = 0,1 \text{ A} \cdot \sin(1000/\text{s} + \pi).$$

Der zeitliche Verlauf ist im I-t-Diagramm dargestellt.

