FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

ā ` s l eq ` j_rr ? l_ 10

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über Ableitungen von trigonometrischen Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Ableitungen* der *trigonometrischen Funktionen* sind nur bezüglich des *Gradmass* definiert.	○	●
b) Die *Ableitungen* der *trigonometrischen Funktionen* sind nur bezüglich des *Bogenmass* definiert.	●	○
c) Die *Ableitungen* $\sin'(x)$ und $\cos'(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	●	○
d) Die *Ableitungen* $\tan'(x)$ und $\cot'(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	○	●
e) Die *Ableitungen* $\tan'(x)$ und $\cot'(x)$ sind genau für alle jene $x \in \mathbb{R}$ definiert, an welchen auch $\tan(x)$ bzw. $\cot(x)$ definiert sind.	●	○

2. Ableitung von trigonometrischen Funktionen

Wir verwenden die Beziehungen zwischen den *trigonometrischen Funktionen* und geeignete *Ableitungsregeln*, um aus der *Sinus-Ableitung*

$$\sin'(\varphi) = \cos(\varphi) \tag{1}$$

jeweils die *Ableitung* der folgenden *Funktionen* zu bestimmen.

a) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\varphi) = \sin(\pi/2 - \varphi). \tag{2}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und (1) erhalten wir

$$\underline{\underline{\cos'(\varphi)}} = \sin'(\pi/2 - \varphi) \cdot (\pi/2 - \varphi)' = \cos(\pi/2 - \varphi) \cdot (-1) = \underline{\underline{-\sin(\varphi)}}. \tag{3}$$

b) Für alle $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \big(\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\big)$ gilt

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}. \tag{4}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, wie die *Ableitung* von $\tan(\varphi)$ berechnet und dargestellt werden kann.

Variante 1: Mit Hilfe der *Quotienten-Regel*, (1) und (3) erhalten wir

$$\underline{\underline{\tan'(\varphi)}} = \frac{\sin'(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cdot\cos'(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{\cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cdot\big(-\sin(\varphi)\big)}{\cos^2(\varphi)}$$

$$= \frac{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \underline{\underline{1+\tan^2(\varphi).}} \tag{5}$$

Variante 2: Mit Hilfe der *Quotienten-Regel*, (1) und (3) erhalten wir

$$\underline{\underline{\tan'(\varphi)}} = \frac{\sin'(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cdot\cos'(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{\cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cdot\big(-\sin(\varphi)\big)}{\cos^2(\varphi)}$$

$$= \frac{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}}}\,. \tag{6}$$

c) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ gilt

$$\cot(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\,. \tag{7}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, wie die *Ableitung* von $\cot(\varphi)$ berechnet und dargestellt werden kann.

Variante 1: Mit Hilfe der *Quotienten-Regel*, (1) und (3) erhalten wir

$$\underline{\underline{\cot'(\varphi)}} = \frac{\cos'(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cdot\sin'(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$

$$= \frac{-\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = -\frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \underline{\underline{-1-\cot^2(\varphi).}} \tag{8}$$

Variante 2: Mit Hilfe der *Quotienten-Regel*, (1) und (3) erhalten wir

$$\underline{\underline{\cot'(\varphi)}} = \frac{\cos'(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cdot\sin'(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$

$$= \frac{-\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{-1}{\sin^2(\varphi)} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sin^2(\varphi)}}}\,. \tag{9}$$

3. Aussagen über Ableitungen von trigonometrischen Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\cos'(0) = 1$.	○	●
b) Die *Gerade* $y = x$ ist eine *Tangente* an die *Graphen* von $\sin(x)$ und $\tan(x)$.	●	○
c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin''(x) = -\sin(x)$ und $\cos''(x) = -\cos(x)$.	●	○
d) Die *Cotangens-Ableitung* kann aus der *Sinus-Ableitung* berechnet werden.	●	○
e) Für alle $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ gilt $\tan'(x) \geq 1$.	●	○
f) Für alle $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ gilt $\tan'(x) = \sin'(x)/\cos'(x)$.	○	●

4. Ableitungen mit trigonometrischen Funktionen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \sin(4x + 3). \tag{10}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \sin'(4x + 3) \cdot (4x + 3)' = \cos(4x + 3) \cdot (4 + 0) = \underline{\underline{4\cos(4x + 3).}} \tag{11}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \cos(2 - x). \tag{12}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cos'(2 - x) \cdot (2 - x)' = -\sin(2 - x) \cdot (0 - 1) = \underline{\underline{\sin(2 - x).}} \tag{13}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \cos\big(x^2 - 1\big). \tag{14}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cos'\big(x^2 - 1\big) \cdot \big(x^2 - 1\big)' = -\sin\big(x^2 - 1\big) \cdot (2x - 0) = \underline{\underline{-2x\sin\big(x^2 - 1\big).}} \tag{15}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = 2\cot\big(x^3\big). \tag{16}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot \cot'\big(x^3\big) \cdot \big(x^3\big)' = 2 \cdot \Big(-1 - \cot^2\big(x^3\big)\Big) \cdot 3x^2 = \underline{\underline{-6x^2 \cdot \Big(1 + \cot^2\big(x^3\big)\Big).}} \tag{17}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = x\tan^2(x). \tag{18}$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* und der *Quadrat-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = x' \cdot \tan^2(x) + x \cdot \big(\tan^2(x)\big)' = 1 \cdot \tan^2(x) + x \cdot 2 \cdot \tan(x) \cdot \tan'(x) \tag{19}$$

$$= \underline{\underline{\tan^2(x) + 2x\tan(x) \cdot \big(1 + \tan^2(x)\big).}} \tag{20}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{\tan(5 - 3x)} = \cot(5 - 3x). \tag{21}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cot'(5 - 3x) \cdot (5 - 3x)' = \big(-1 - \cot^2(5 - 3x)\big) \cdot (0 - 3) \tag{22}$$

$$= \underline{\underline{3 \cdot \big(1 + \cot^2(5 - 3x)\big).}} \tag{23}$$

5. Aussagen über Ableitungen von Arcus-Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Ableitungen* der *Arcus-Funktionen* sind nur bezüglich des *Bogenmass* definiert.	●	○
b) Die *Ableitungen* $\arcsin'(x)$ und $\arccos'(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	○	●
c) Die *Ableitungen* $\arcsin'(x)$ und $\arccos'(x)$ sind genau für alle jene $x \in \mathbb{R}$ definiert, an welchen auch $\arcsin(x)$ bzw. $\arccos(x)$ definiert sind.	○	●
d) Die *Ableitungen* $\arctan'(x)$ und $\operatorname{arccot}'(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	●	○
e) Die *Ableitungen* $\arctan'(x)$ und $\operatorname{arccot}'(x)$ sind genau für alle jene $x \in \mathbb{R}$ definiert, an welchen auch $\arctan(x)$ bzw. $\operatorname{arccot}(x)$ definiert sind.	●	○

6. Ableitung von Arcus-Funktionen

Wir verwenden die *Ketten-Regel*, um jeweils die *Ableitung* der folgenden *Funktionen* aus der *Ableitung* der *Umkehrfunktion* zu bestimmen.

a) Für alle $\varphi \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ gilt

$$\arcsin\big(\sin(\varphi)\big) = \varphi \tag{24}$$

und

$$\cos(\varphi) > 0 \;\Rightarrow\; \cos(\varphi) = \sqrt{1-\sin^2(\varphi)}\,. \tag{25}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (24) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\arcsin'\big(\sin(\varphi)\big) \cdot \sin'(\varphi) = \varphi' \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin'\big(\sin(\varphi)\big) \cdot \cos(\varphi) = 1 \qquad \big|\, : \cos(\varphi) \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin'\big(\sin(\varphi)\big) = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}\,. \tag{28}$$

Durch die Substitution $x := \sin(\varphi)$ erhalten wir für alle $x \in \left]-1, 1\right[$ die *Arcussinus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}\,. \tag{29}$$

b) Für alle $\varphi \in \left]0, \pi\right[$ gilt

$$\arccos\big(\cos(\varphi)\big) = \varphi \tag{30}$$

und

$$\sin(\varphi) > 0 \;\Rightarrow\; \sin(\varphi) = \sqrt{1-\cos^2(\varphi)}\,. \tag{31}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (30) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\arccos'\big(\cos(\varphi)\big) \cdot \cos'(\varphi) = \varphi' \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad \arccos'\big(\cos(\varphi)\big) \cdot \big(-\sin(\varphi)\big) = 1 \qquad \Big| : \big(-\sin(\varphi)\big) \tag{33}$$

$$\Rightarrow \quad \arccos'\big(\cos(\varphi)\big) = -\frac{1}{\sin(\varphi)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}\,. \tag{34}$$

Durch die Substitution $x := \cos(\varphi)$ erhalten wir für alle $x \in \left]-1,1\right[$ die *Arcuscosinus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.}} \tag{35}$$

c) Für alle $\varphi \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ gilt

$$\arctan\big(\tan(\varphi)\big) = \varphi. \tag{36}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (36) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\arctan'\big(\tan(\varphi)\big) \cdot \tan'(\varphi) = \varphi' \tag{37}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan'\big(\tan(\varphi)\big) \cdot \big(1+\tan^2(\varphi)\big) = 1 \qquad \Big| : \big(1+\tan^2(\varphi)\big) \tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan'\big(\tan(\varphi)\big) = \frac{1}{1+\tan^2(\varphi)}\,. \tag{39}$$

Durch die Substitution $x := \tan(\varphi)$ erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die *Arcustangens-Ableitung*

$$\underline{\underline{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.}} \tag{40}$$

d) Für alle $\varphi \in \left]0, \pi\right[$ gilt

$$\operatorname{arccot}\big(\cot(\varphi)\big) = \varphi. \tag{41}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (41) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\operatorname{arccot}'\big(\cot(\varphi)\big) \cdot \cot'(\varphi) = \varphi' \tag{42}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arccot}'\big(\cot(\varphi)\big) \cdot \big(-1-\cot^2(\varphi)\big) = 1 \qquad \Big| : \big(-1-\cot^2(\varphi)\big) \tag{43}$$

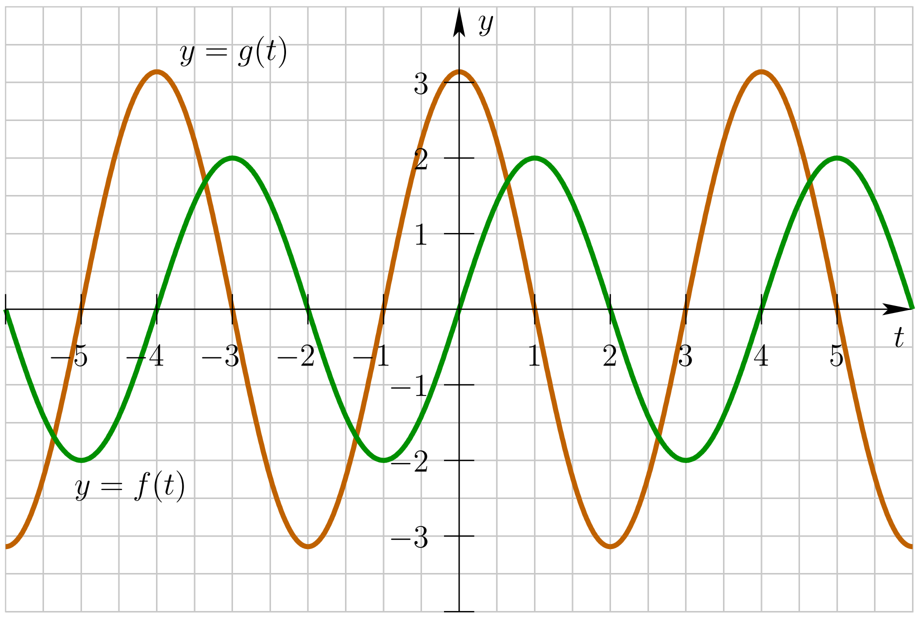
$$\Rightarrow \quad \operatorname{arccot}'\big(\cot(\varphi)\big) = -\frac{1}{1+\cot^2(\varphi)}\,. \tag{44}$$

Durch die Substitution $x := \cot(\varphi)$ erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die *Arcuscotangens-Ableitung*

$$\underline{\underline{\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,.}} \tag{45}$$

7. Aussagen über zwei Funktionsgraphen

Wir betrachten die *Graphen* der *Funktionen* f (grün) und g (orange).



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\dot{f}(0) < 0$.	○	●
b) Es gilt $\dot{g}(-4) = 0$.	●	○
c) Es gilt $\dot{f}(2) < \dot{g}(2)$.	●	○
d) Es gibt eine Stelle t, an der gilt $\dot{f}(t) = \dot{g}(t)$.	●	○
e) Gemäss *Graphen* wäre es denkbar, dass $\dot{f}(t) = g(t)$.	●	○
f) Gemäss *Graphen* wäre es denkbar, dass $\dot{g}(t) = f(t)$.	○	●

8. Ableitung von hyperbolischen Funktionen

Wir verwenden die Definitionen sowie geeignete *Ableitungsregeln*, um die *Ableitungen* der *hy-perbolischen Funktionen* zu berechnen.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,. \tag{46}$$

Aus der *Ableitung* der *natürlichen Exponentialfunktion* und mit Hilfe der *Ketten-Regel* finden wir

$$\underline{\underline{\sinh'(x)}} = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)' - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - (-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \underline{\underline{\cosh(x).}} \tag{47}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,. \tag{48}$$

Aus der *Ableitung* der *natürlichen Exponentialfunktion* und mit Hilfe der *Ketten-Regel* finden wir

$$\underline{\underline{\cosh'(x)}} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\left(\mathrm{e}^{x}\right)' + \left(\mathrm{e}^{-x}\right)'}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + (-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \underline{\underline{\sinh(x).}} \quad (49)$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,. \quad (50)$$

Wir zeigen mehrere Varianten, wie die *Ableitung* von $\tanh(x)$ berechnet und dargestellt werden kann.

Variante 1: Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b) und mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tanh'(x)}} &= \frac{\sinh'(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \underline{\underline{1 - \tanh^2(x).}} \end{aligned} \quad (51)$$

Variante 2: Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b) und mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tanh'(x)}} &= \frac{\sinh'(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cosh^2(x)}}}\,. \end{aligned} \quad (52)$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\,. \quad (53)$$

Wir zeigen mehrere Varianten, wie die *Ableitung* von $\coth(x)$ berechnet und dargestellt werden kann.

Variante 1: Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b) und mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\coth'(x)}} &= \frac{\cosh'(x)\cdot\sinh(x) - \cosh(x)\cdot\sinh'(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh(x)\cdot\sinh(x) - \cosh(x)\cdot\cosh(x)}{\sinh^2(x)} \\ &= \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\sinh^2(x)} - \frac{\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \underline{\underline{1 - \coth^2(x).}} \end{aligned} \quad (54)$$

Variante 2: Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b) und mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\coth'(x)}} &= \frac{\cosh'(x)\cdot\sinh(x) - \cosh(x)\cdot\sinh'(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh(x)\cdot\sinh(x) - \cosh(x)\cdot\cosh(x)}{\sinh^2(x)} \\ &= \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sinh^2(x)}}}\,. \end{aligned} \quad (55)$$

9. Ableitungen mit hyperbolischen Funktionen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \sinh(4x + 3). \tag{56}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \sinh'(4x + 3) \cdot (4x + 3)' = \cosh(4x + 3) \cdot (4 + 0) = \underline{\underline{4\cosh(4x + 3).}} \tag{57}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \cosh(2 - x). \tag{58}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cosh'(2 - x) \cdot (2 - x)' = \sinh(2 - x) \cdot (0 - 1) = \underline{\underline{-\sinh(2 - x).}} \tag{59}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \cosh\big(x^2 - 1\big). \tag{60}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cosh'\big(x^2 - 1\big) \cdot \big(x^2 - 1\big)' = \sinh\big(x^2 - 1\big) \cdot (2x - 0) = \underline{\underline{2x\sinh\big(x^2 - 1\big).}} \tag{61}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = 2\coth\big(x^3\big). \tag{62}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot \coth'\big(x^3\big) \cdot \big(x^3\big)' = 2 \cdot \Big(1 - \coth^2\big(x^3\big)\Big) \cdot 3x^2 = \underline{\underline{6x^2 \cdot \Big(1 - \coth^2\big(x^3\big)\Big).}} \tag{63}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = x\tanh^2(x). \tag{64}$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* und der *Quadrat-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = x' \cdot \tanh^2(x) + x \cdot \big(\tanh^2(x)\big)' = 1 \cdot \tanh^2(x) + x \cdot 2 \cdot \tanh(x) \cdot \tanh'(x) \tag{65}$$

$$= \underline{\underline{\tanh^2(x) + 2x\tanh(x) \cdot \big(1 - \tanh^2(x)\big).}} \tag{66}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{\tanh(5 - 3x)} = \coth(5 - 3x). \tag{67}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \coth'(5 - 3x) \cdot (5 - 3x)' = \big(1 - \coth^2(5 - 3x)\big) \cdot (0 - 3) \tag{68}$$

$$= \underline{\underline{3 \cdot \big(\coth^2(5 - 3x) - 1\big).}} \tag{69}$$

10. Ableitung von Area-Funktionen

Wir verwenden die *Ketten-Regel*, um jeweils die *Ableitung* der folgenden *Funktionen* aus der *Ableitung* der *Umkehrfunktion* zu bestimmen.

a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{arsinh}\big(\sinh(z)\big) = z \tag{70}$$

und

$$\cosh(z) = \sqrt{1 + \sinh^2(z)}\,. \tag{71}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (70) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\operatorname{arsinh}'\big(\sinh(z)\big) \cdot \sinh'(z) = z' \tag{72}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}'\big(\sinh(z)\big) \cdot \cosh(z) = 1 \qquad \Big| : \cosh(z) \tag{73}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}'\big(\sinh(z)\big) = \frac{1}{\cosh(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(z)}}\,. \tag{74}$$

Durch die Substitution $x := \sinh(z)$ erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die *Areasinus-Hyperbolicus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.}} \tag{75}$$

b) Für alle $z \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$\operatorname{arcosh}\big(\cosh(z)\big) = z \tag{76}$$

und

$$\sinh(z) > 0 \;\Rightarrow\; \sinh(z) = \sqrt{\cosh^2(z) - 1}\,. \tag{77}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (76) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\operatorname{arcosh}'\big(\cosh(z)\big) \cdot \cosh'(z) = z' \tag{78}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arcosh}'\big(\cosh(z)\big) \cdot \sinh(z) = 1 \qquad \Big| : \sinh(z) \tag{79}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arcosh}'\big(\cosh(z)\big) = \frac{1}{\sinh(z)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(z) - 1}}\,. \tag{80}$$

Durch die Substitution $x := \cosh(z)$ erhalten wir für alle $x \in [1, \infty[$ die *Areacosinus-Hyperbolicus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,.}} \tag{81}$$

c) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{artanh}\big(\tanh(z)\big) = z. \tag{82}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (82) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \operatorname{artanh}'\big(\tanh(z)\big) \cdot \tanh'(z) = z' && (83)\\
\Rightarrow \quad & \operatorname{artanh}'\big(\tanh(z)\big) \cdot \big(1 - \tanh^2(z)\big) = 1 && \Big| : \big(1-\tanh^2(z)\big) \quad (84)\\
\Rightarrow \quad & \operatorname{artanh}'\big(\tanh(z)\big) = \frac{1}{1-\tanh^2(z)}\,. && (85)
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $x := \tanh(z)$ erhalten wir für alle $x \in \,]-1,1[$ die *Areatangens-Hyperbolicus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.}} \tag{86}$$

d) Für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\operatorname{arcoth}\big(\coth(z)\big) = z. \tag{87}$$

Durch beidseitiges *Ableiten* von (87) mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \operatorname{arcoth}'\big(\coth(z)\big) \cdot \coth'(z) = z' && (88)\\
\Rightarrow \quad & \operatorname{arcoth}'\big(\coth(z)\big) \cdot \big(1 - \coth^2(z)\big) = 1 && \Big| : \big(1-\coth^2(z)\big) \quad (89)\\
\Rightarrow \quad & \operatorname{arcoth}'\big(\coth(z)\big) = \frac{1}{1-\coth^2(z)}\,. && (90)
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $x := \coth(z)$ erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[$ die *Areacotangens-Hyperbolicus-Ableitung*

$$\underline{\underline{\operatorname{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.}} \tag{91}$$

11. Diverse Ableitungen berechnen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion.*

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - \frac{x^{15}}{5} - \mathrm{e}^{14}. \tag{92}$$

Mit Hilfe der *Summen-Regel*, der *Faktor-Regel* und der *Monom-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{1}{3} \cdot 6x^{6-1} - \frac{1}{5} \cdot 15x^{15-1} - 0 = 2x^5 - 3x^{14} = \underline{\underline{x^5 \cdot \big(2 - 3x^9\big).}} \tag{93}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \cos^3(x). \tag{94}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel*, der *Monom-Ableitung* und der *Cosinus-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \cos'(x) \cdot 3 \cdot \cos^{3-1}(x) = \underline{\underline{-3\sin(x)\cos^2(x).}} \tag{95}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \sin\big(1 + x^5\big). \tag{96}$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel*, der *Sinus-Ableitung* und der *Monom-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(1 + x^5\big)' \cdot \sin'\big(1 + x^5\big) = \big(0 + 5x^{5-1}\big) \cdot \cos\big(1 + x^5\big) = \underline{\underline{5x^4 \cos\big(1 + x^5\big).}} \tag{97}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(t) = 3^z \sin(z). \tag{98}$$

Der *Funktionsterm* hängt nicht von der *Argumentvariable* t ab. Unter der Annahme, dass auch z von t unabhängig ist, muss gelten

$$\underline{\underline{\dot{f}(t) = 0.}} \tag{99}$$

Des weiteren betrachten wir die *Funktion*

$$\tilde{f}(z) = 3^z \sin(z). \tag{100}$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel*, der *Exponential-Ableitung* und der *Sinus-Ableitung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(z) &= \big(3^z\big)' \cdot \sin(z) + 3^z \cdot \sin'(z) = \ln(3) \cdot 3^z \cdot \sin(z) + 3^z \cdot \cos(z) \\ &= 3^z \cdot \big(\ln(3) \cdot \sin(z) + \cos(z)\big).\end{aligned} \tag{101}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(s) = \frac{1}{1 + s^2 + \mathrm{e}^s}. \tag{102}$$

Mit Hilfe der *Reziproken-Regel*, der *Monom-Ableitung* und der *Exponential-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(s)}} = -\frac{\big(1 + s^2 + \mathrm{e}^s\big)'}{\big(1 + s^2 + \mathrm{e}^s\big)^2} = -\frac{0 + 2s^{2-1} + \mathrm{e}^s}{\big(1 + s^2 + \mathrm{e}^s\big)^2} = \underline{\underline{-\frac{2s + \mathrm{e}^s}{\big(1 + s^2 + \mathrm{e}^s\big)^2}}}\,. \tag{103}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x}\,. \tag{104}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um die Ableitung von f zu berechnen.

Variante 1: Mit Hilfe der *Quotienten-Regel*, der *Sinus-Ableitung* und der *Exponential-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{\sin'(x) \cdot \mathrm{e}^x - \sin(x) \cdot \big(\mathrm{e}^x\big)'}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} = \frac{\cos(x) \cdot \mathrm{e}^x - \sin(x) \cdot \mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} = \underline{\underline{\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\mathrm{e}^x}}}\,. \tag{105}$$

Variante 2: Mit Hilfe der *Produkt-Regel*, der *Sinus-Ableitung* und der *Exponential-Ableitung* (mit Minuszeichen) erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \sin'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + \sin(x) \cdot \big(\mathrm{e}^{-x}\big)' = \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + \sin(x) \cdot \big(-\mathrm{e}^{-x}\big) \\ &= \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - \sin(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} = \underline{\underline{\big(\cos(x) - \sin(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}\,.}}\end{aligned} \tag{106}$$