Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 8

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe charakteristisches Polynom, charakteristische Gleichung, Eigenwert, Eigenvektor, Spektrum und Eigenraum und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix berechnen.
- Sie können die Eigenschaften einer Matrix bzw. linearen Abbildung anhand ihrer Eigenwerte/Eigenvektoren beurteilen und umgekehrt.

1. Aussagen über Eigenwerte und -vektoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede quadratische Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.		X
b) Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Eigenvektoren einer Matrix, dann gilt dies auch für $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.		X
c) Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Eigenvektoren einer Matrix zum selben Eigenwert λ, dann gilt dies auch für $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.	X	
d) Eine 3x3 Matrix hat maximal drei verschiedene Eigenwerte.	X	
e) Gilt spec(A) = {0}, dann gilt: tr(A) = 0.		X
f) Gilt 0 ∈ spec(A), dann gilt: det(A) = 0.	X	

2. Eigenwerte und -vektoren der Standardmatrizen in 2D

Betrachten Sie die Standardmatrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{1}$, P, Z_a, P_x, P_y, S_x und S_y.

a) Welche reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der Standardmatrizen können Sie ohne zu rechnen angeben?

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Standardmatrizen.

a)

Die *Matrix* $\mathbb{1}$ beschreibt die *Identität* auf $\mathbb{R}^2$, die jeden *Vektor* auf sich selber abbildet. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(\mathbb{1}) = \mathbb{R}^2}}.$$

Die *Matrix* $\hat{\mathbb{1}}$ beschreibt die *Drehung* um den *Ursprung* um den *Winkel* $\pi/2$. Diese Operation kann für keinen von Null verschiedenen *Vektor* als *Multiplikation* mit einer *reellen Zahl* aufgefasst werden. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(\hat{\mathbb{1}}) = \varnothing.}}$$

Die *Matrix* P beschreibt die *Punktspiegelung* am *Ursprung*. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(P) = \{-1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(P) = \mathbb{R}^2.}}$$

Die *Matrix* Z_a beschreibt die *Streckung* am *Ursprung* um den *Faktor* $a \in \mathbb{R}$. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* a. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(Z_a\big) = \{a\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(Z_a\big) = \mathbb{R}^2.}}$$

Die *Matrix* P_x beschreibt die *Projektion* auf die x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(P_x\big) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(P_x\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(P_x\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}}$$

Die *Matrix* P_y beschreibt die *Projektion* auf die y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(P_y\big) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(P_y\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(P_y\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}}$$

Die *Matrix* S_x beschreibt die *Spiegelung* an der x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(S_x\big) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(S_x\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(S_x\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}}$$

Die *Matrix* S_y beschreibt die *Spiegelung* an der y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(S_y\big) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(S_y\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(S_y\big) = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}}$$

b)

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von $\mathbb{E}$ ergeben sich zu

$$\mathrm{tr}(\mathbb{1}) = 1 + 1 = 2$$

$$\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\underline{\underline{p_{\mathbb{1}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbb{1}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{1}) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2\,\lambda + 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{1}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = 1.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von $\mathbb{1}$, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

E_1: $\boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}.$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$\underline{\underline{E_1(\mathbb{1})}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von $\mathbb{i}$ ergeben sich zu

$\mathrm{tr}(\mathbb{i}) = 0 + 0 = 0$

$\det(\mathbb{i}) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1$

$\underline{\underline{p_{\mathbb{i}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbb{i}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{i}) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + 1 = \underline{\underline{\lambda^2 + 1.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{i}}(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

und hat offensichtlich keine *reellen Lösungen*. Es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(\mathbb{i}) = \varnothing.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P ergeben sich zu

$\mathrm{tr}(P) = -1 - 1 = -2$

$\det(P) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$

$\underline{\underline{p_P(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(P) \cdot \lambda + \det(P) = \underline{\underline{\lambda^2 + 2\,\lambda + 1.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_P(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = -1.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von P, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(P) = \{-1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

E_1: $\boxed{\begin{array}{cc} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}$.

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(P)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von Z_a ergeben sich zu

$\operatorname{tr}(Z_a) = a + a = 2a$

$\det(Z_a) = a \cdot a - 0 \cdot 0 = a^2 - 0 = a^2$

$\underline{\underline{p_{Z_a}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(Z_a) \cdot \lambda + \det(Z_a) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{Z_a}(\lambda) = \lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = a.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von Z_a, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(Z_a) = \{a\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

E_1: $\boxed{\begin{array}{cc} a-a & 0-0 \\ 0-0 & a-a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}$.

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(Z_a)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P_x ergeben sich zu

$\operatorname{tr}(P_x) = 1 + 0 = 1$

$\det(P_x) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

$\underline{\underline{p_{P_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P_x) \cdot \lambda + \det(P_x) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_x}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_x, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_x) = \{0, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1: \boxed{\begin{matrix} 0-1 & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}$$

$$E_2: \boxed{\begin{matrix} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(P_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(P_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}.$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P_y ergeben sich zu

$$\operatorname{tr}(P_y) = 0 + 1 = 1$$

$$\det(P_y) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 - 0 = 0$$

$$\underline{\underline{p_{P_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P_y) \cdot \lambda + \det(P_y) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda}}.$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_y}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_y, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_y) = \{0, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1: \boxed{\begin{matrix} 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 0-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}$$

$$E_2: \boxed{\begin{matrix} 1-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}.$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von S_x ergeben sich zu

$$\mathrm{tr}(S_x) = 1 - 1 = 0$$

$$\det(S_x) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

$$\underline{\underline{p_{S_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(S_x) \cdot \lambda + \det(S_x) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_x}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_x, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(S_x) = \{-1, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{matrix} -1-1 & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [-2] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-(-1) \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [2] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(S_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(S_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von S_y ergeben sich zu

$$\mathrm{tr}(S_y) = -1 + 1 = 0$$

$$\det(S_y) = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

$$\underline{\underline{p_{S_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(S_y) \cdot \lambda + \det(S_y) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_y}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_y, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(S_y) = \{-1, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{matrix} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [-2] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [2] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(S_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(S_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}.$$

3. Eigenwerte und -vektoren bestimmen

Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom, die reellen Eigenwerte und die reellen Eigenvektoren der Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Da die Matrix diagonal ist, entsprechen die Eigenwerte den Einträgen in der Hauptdiagonale.

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow spec(A) = \{2, 3\}$

$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 6 - 5\lambda + \lambda^2 = p_A(\lambda)$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 2$: $\vec{E}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_2$ zu $\lambda_2 = 3$: $\vec{E}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2$

$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$

$\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 0$:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x + y = 0 \iff x = -y$ setze $y = t$

$\vec{E_1} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E_2}$ zu $\lambda_2 = 3$:

$$\left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$-2x + y = 0 \iff x = \frac{1}{2}y$ setze $y = t$

$\vec{E_2} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 6 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lambda^2 - 12 = 0$

$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$\vec{E_1}$ zu $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$:

$$\left.\begin{matrix} -2\sqrt{3} & 6 \\ 2 & -2\sqrt{3} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} -2\sqrt{3} & 6 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$-2\sqrt{3}x + 6y = 0 \iff x = \sqrt{3}y$ setze $y = t$

$\vec{E_1} = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E_2}$ zu $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$:

$$\left.\begin{matrix} 2\sqrt{3} & 6 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} 2\sqrt{3} & 6 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$2\sqrt{3}x + 6y = 0 \iff x = -\sqrt{3}y$ setze $y = t$

$\vec{E_2} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -6 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 12 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda^2 + 12 \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda^2 = -12$

$\rightarrow$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ keine reellen Eigenwerte / -vektoren

e) $\det\left[\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \\ 0 & -3 \end{matrix}\right] =$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)\cdot(-\lambda) - (-3)\cdot(-1)\cdot(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(-\lambda) - 3] = (1-\lambda)\cdot[\lambda^2 - 2\lambda - 3]$

$= p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \qquad (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3] \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_{2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$

$\lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -1$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 1$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-3y - z = 0 \iff y = -\frac{1}{3}z$ setze $z = t$

$2x + y - z = 0 \iff x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{6}z + \frac{1}{2}z$

$= \frac{2}{3}z$

$\vec{E}_1 = t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_2$ zu $\lambda_2 = 3$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +\\ |:(-3) \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) + \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-y - z = 0 \iff y = -z$ setze $z = t$

$2x - y - z = 0 \iff x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z = 0$

$\vec{E}_2 = t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_3$ zu $\lambda_3 = -1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$-3y + z = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}z$ setze $z = t$

$2x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z = 0$

$\vec{E}_3 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $\det \left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{matrix} \right] = -\lambda^3 + 1 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lambda^3 = 1$

$\lambda = 1$

dreifacher Eigenwert

$\vec{E}_1$ zu $\lambda = 1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right. \; \begin{array}{l} \\ |+ \\ \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$ setze $z = t$

$-x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

$\vec{E}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte und -vektoren mit Python/Numpy bestimmmen
Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

a)
```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[2,0],[0,3]]);
# Berechnungen:
EW,EV=np.linalg.eig(A); # EW=Eigenwert, EV=Eigenvektor
# Ausgabe:
print('Eigenwerte =',EW);
print('Eigenvektoren =',EV);
```

b) – f) analog

5. Eigenwerte und -vektoren mit Python/Sympy bestimmmen
Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing(),
# Parameter:
A=sp.Matrix([[2,0],[0,3]]);
# Berechnungen:
[EV,EW]=A.diagonalize(); # EV=Eigenvektoren in Matrixform; EW
(Eigenwerte)=Einträge in Hauptdiagonale
ew=A.eigenvals(); # Eigenwert und dessen Multiplizität
ev=A.eigenvects(); #Eigenwert, Multiplizität und zugehöriger
Eigenvektor
# Ausgabe:
dp.display(EV);
dp.display(EW);
dp.display(ew);
dp.display(ev);
```

b) – f) analog

6. Eigenwerte/-vektoren zu quadrierter/invertierter Matrix
Gegeben sei ein Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert λ einer Matrix A.
a) Ist $\vec{v}$ auch Eigenvektor von A^2? Und falls ja, zu welchem Eigenwert?
b) Wenn A zudem invertierbar sei, ist dann $\vec{v}$ auch ein Eigenvektor zu A^{-1}? Und falls ja, zu welchem Eigenwert?

a)

Aus $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ folgt

$$\mathbf{A}^2\,\boldsymbol{v} = \mathbf{A}(\lambda\,\boldsymbol{v}) = \lambda^2\,\boldsymbol{v}\,,$$

sodass also $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^2 von $\mathbf{A}^2$ ist.

b)

Aus $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ folgt

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}) = \mathbf{A}^{-1}\,(\lambda\,\boldsymbol{v}) = \lambda\,(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{v})\,,$$

sodass also $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von $\mathbf{A}^{-1}$ ist.

7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

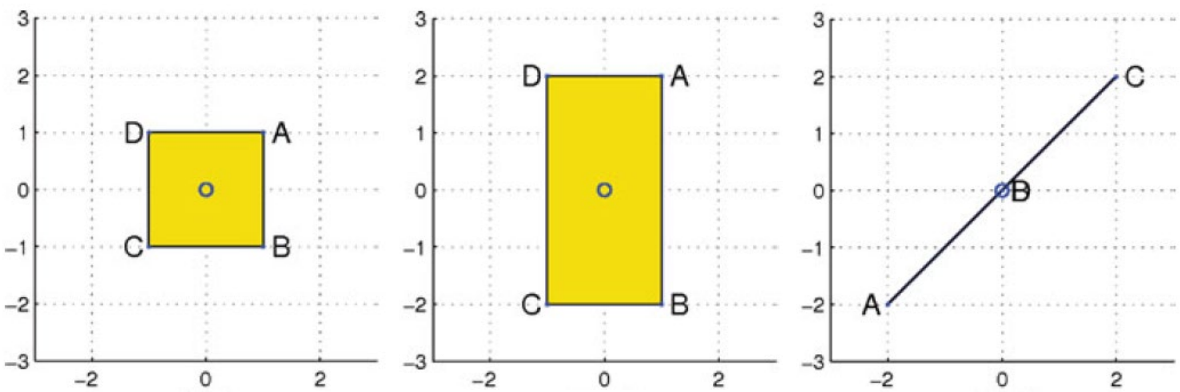
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das charakteristische Polynom von A hat den Grad 1.		X
b) A ist orthogonal.	X	
c) Es gilt: spec(A) = spec(B).		X
d) B hat genau 2 verschiedene Eigenwerte.		X
e) $\sqrt{2} \cdot \hat{e}_x$ ist ein Eigenvektor von B.	X	
f) Es gilt: $A^{12} \cdot \hat{e}_y = -B \cdot \hat{e}_z$.	X	

8. Eigenwerte- und vektoren bestimmen

In der folgenden Abbildung zeigt das erste Bild ein aus den Punkten A, B, C, D gebildetes Quadrat um den Ursprung. Die folgenden Abbildungen zeigen Bilder des Quadrats unter zwei verschiedenen linearen Abbildungen $\phi_{1,2}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Abbildungen.



1. Das zweite Bild zeigt das Bild des Quadrats unter der Abbildung Φ_1. Wir sehen, dass das Quadrat in Richtung $(0,1)^\top$ um Faktor 2 gestreckt wird, in Richtung $(1,0)^\top$ keine Änderung vorliegt. Das heisst, dass $\Phi_1((0,1)^\top) = 2(0,1)^\top$ und $\Phi_1((1,0)^\top) = (1,0)^\top$. Damit haben wir schon die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ von Φ_1 bestimmt und kennen auch Eigenvektoren $(0,1)^\top$ und $(1,0)^\top$.

2. Im dritten Bild sehen wir das Bild des Quadrats unter Φ_2, wo offenbar die Punkte D und B auf den Ursprung abgebildet wurden. Das bedeutet, dass $\Phi_2((-1,1)^\top) = (0,0)^\top$, und wir erhalten den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit einem Eigenvektor $(-1,1)^\top$. Die Punkte A und C wurden nicht nur um Faktor 2 gestreckt, sondern auch am Ursprung gespiegelt, also ist $\Phi_2((1,1)^\top) = -2(1,1)^\top$, und wir erhalten den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -2$ mit Eigenvektor $(1,1)^\top$. Diese Abbildung ist aber weder eine Projektion, noch eine Spiegelung oder Streckung im klassischen Sinne, doch bezogen auf den Eigenwert 0 hat sie zumindest einen Charakter einer Projektion auf die Gerade $G: x_1 - x_2 = 0$.

9. Unternehmen

Ein Unternehmen produziert in der Periode t drei Güter in den Quantitäten x_t, y_t und z_t, die in der Folgeperiode t + 1 teilweise als Rohstoffe wieder verwendet werden. Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/2 & 0 \\ b & 1 & c \\ 0 & c & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Die Matrix A besitzt den Eigenwert $\lambda = 3/2$ und den zugehörigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u > 0$.

a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c, der Matrix A.

b) Interpretieren Sie den Eigenwert λ und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ bezogen auf die Aufgabenstellung, wenn ein gleichmässiger Wachstumsprozess unterstellt wird.

c) Die Gesamtoutput für die 3 Güter im Zeitpunkt t beträgt 200 Einheiten. Wie verteilen sich diese Einheiten bei Unterstellung eines gleichförmigen Wachstumsprozesses auf x_t, y_t und z_t? Geben Sie die Anzahl der zu produzierenden Güter für die Perioden t +1 und t + 2 an, wenn ein gleichmässiger Wachstumsprozess unterstellt wird.

a)
Einsetzen des Eigenwerts und -vektors:

$$\begin{pmatrix} a-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ b & 1-\frac{3}{2} & c \\ 0 & c & \frac{3}{4}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(a-\tfrac{3}{2}\right)u + \tfrac{1}{2}u + 0 = 0 &\Rightarrow a - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = 1 \\ bu + \left(1-\tfrac{3}{2}\right)u + c\cdot 0 = 0 &\Rightarrow b - \tfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow b = \tfrac{1}{2} \\ 0\cdot u + cu - \tfrac{3}{4}\cdot 0 = 0 &\Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

b)
$\lambda = \frac{3}{2} = 1.5$ bedeutet gleichmäßiges Wachstum der Produktion der 3 Güter in einer Zeitperiode um 50 %.
$\boldsymbol{x}^T = (u, u, 0)$: Das gleichmäßige Wachstum um 50 % wird erreicht, falls die Produktionsmengen der Güter 1,2 identisch sind und Gut 3 nicht produziert wird.

c)
Gesamtproduktion $= 200 = u + u \Rightarrow u = 100$

$$\Rightarrow \text{Produktion in } t\text{: } \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ in } t+1\text{: } \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ in } t+2\text{: } \begin{pmatrix} 225 \\ 225 \\ 0 \end{pmatrix}$$