Übungsblatt DGL 4

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe linear homogen, linear inhomogen, Inhomogenität und Variation der Konstanten sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die allgemeine Lösung von linear homogenen DGL 1. Ordnung und AWP mit linear homogenen DGL 1. Ordnung bestimmen und können diese anwenden.
- Sie können die allgemeine Lösung einer linear inhomogenen DGL 1. Ordnung sowie die Lösung eines AWP mit linear inhomogener DGL 1. Ordnung mit der Methode der Variation der Konstanten bestimmen.

1. Aussagen über lineare DGL 1. Ordnung

Gegeben ist die allgemeine lineare DGL 1. Ordnung: $y' = m(x) \cdot y + q(x)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die DGL ist genau dann separierbar, wenn gilt: $q(x) = 0$.		X
b) Ist y_1 eine Lösung, dann gilt dies auch für die Funktion $y_2 = -5y_1$.		X
c) Sind y_1 und y_2 Lösungen, dann gilt dies auch für die Funktion $y_3 = y_2 - y_1$.		X
d) Die Methode der Variation der Konstanten basiert auf der Produktregel der Differentialrechnung.	X	
e) Um die Methode der Variation der Konstanten auf obige DGL anwenden zu können, braucht es eine Stammfunktion von $q(x)$.		X

2. Homogene DGL 1. Ordnung

Gegeben sei das AWP
DGL: $y' = m(x) \cdot y$,
AB: $y(x_0) = y_0$.

a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der DGL gegeben ist durch: $y(x) = C \cdot e^{M(x)}$ mit $C \epsilon \mathbb{R}$ und $M(x)$ sei eine beliebige Stammfunktion von $m(x)$.
b) Zeigen Sie, dass die Lösung des AWP gegeben ist durch: $y(x) = y_0 \cdot e^{M(x)-M(x_0)}$ mit $C \epsilon \mathbb{R}$ und $M(x)$ sei eine beliebige Stammfunktion von $m(x)$.
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $y' = \cos(x) \cdot y$.

d) Bestimmen Sie die Lösung des AWP
DGL: $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$
AB: $y(4) = 3$.

a)
- Zuerst statische Lösungen bestimmen: es gibt genau eine, nämlich $y_s(x) = 0$.
- Dann nicht statische Lösungen bestimmen mittels der Methode der Trennung der Variablen. Für $y \neq y_s$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& & y' = m(x) \cdot y & \qquad \Big| : y \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{y} \cdot y' = m(x) & \qquad \Big| \int \ldots \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow & \int \frac{1}{y} \cdot y' \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \int m(x) \,\mathrm{d}x & \\
&\Leftrightarrow & \ln(|y|) = M(x) + c & \qquad \Big| \mathrm{e}^{\cdots} \\
&\Leftrightarrow & |y| = \mathrm{e}^{M(x)+c} = \mathrm{e}^{M(x)} \cdot \mathrm{e}^{c} = C_1 \cdot \mathrm{e}^{M(x)} & \\
&\Leftrightarrow & y(x) = \pm C_1 \cdot \mathrm{e}^{M(x)} = C_2 \cdot \mathrm{e}^{M(x)} &
\end{aligned}
$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathbb{R}^+$ und $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen mit der nicht statischen Lösung: $y(x) = C \cdot e^{M(x)}$ mit $C \epsilon \mathbb{R}$ und $M(x)$ sei eine Stammfunktion von $m(x)$.
b)
- Spezielle statische Lösung: $y_s(x) = 0$.
- Spezielle nicht statische Lösung mittels Trennung der Variablen. Für $y \neq y_s$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& & y' = m(x) \cdot y & \qquad \Big| : y \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{y} \cdot y' = m(x) & \qquad \Big| \int_{x_0}^{x} \ldots \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow & \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y} \cdot y' \,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} m(x) \,\mathrm{d}x & \\
&\Leftrightarrow & \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = M(x) - M(x_0) & \qquad \Big| \mathrm{e}^{\cdots} \\
&\Leftrightarrow & \frac{y}{y_0} = \mathrm{e}^{M(x)-M(x_0)} & \qquad \Big| \cdot y_0 \\
&\Leftrightarrow & y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{M(x)-M(x_0)}. &
\end{aligned}
$$

- Lösung des AWP durch Kombination der speziellen statischen mit der speziellen nicht statischen Lösung zu $y(x) = y_0 \cdot e^{M(x)-M(x_0)}$, wobei $M(x)$ eine Stammfunktion von $m(x)$ sei.
c)
Für die DGL $y' = \cos(x) \cdot y$ gilt: $m(x) = \cos x$. Somit ist die allgemeine Stammfunktion von $m(x)$: $M(x) = \int m(x)dx = \int \cos x \, dx = \sin x + c$. Durch Einsetzen in die allgemeine Lösung aus a) und der Wahl c = 0 erhalten wir die allgemeine Lösung $y(x) = C \cdot e^{M(x)} = C \cdot e^{\sin x}$.

d)
Aus dem AWP lesen wir ab: $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $m(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Die allgemeine Stammfunktion von m ist $M(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$. Durch Nutzen der Information aus b) erhalten wir die Lösung des AWP. Für $x \geq x_0 = 4$ gilt $y(x) = y_0 \cdot e^{M(x)-M(x_0)} = 3 \cdot e^{\sqrt{x}-\sqrt{4}} = 3 \cdot e^{\sqrt{x}-2}$.

3. Linear inhomogene DGL

a) $y' = 2y + 1$
b) $y' = 3y + x \cdot e^x$
c) $y' = y + x$
d) $y' = 2xy + e^{x^2}$
e) $y' - \frac{y}{x} = x^2$
f) $xy' - y = x^2 + 4$

a)
Linear inhomogene DGL mit m(x) = 2 und q(x) = 1. Es ergibt sich

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$$C(x) = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \cdot \mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = (C + C(x)) \cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \left(C - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right) \cdot \mathrm{e}^{2x} = \underline{\underline{C\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}}}.$$

b)
Linear inhomogene DGL mit m(x) = 3 und q(x) = x•e^x. Es ergibt sich

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int 3\,\mathrm{d}x = 3x$$

$$C(x) = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int x \cdot \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{-2}\,\mathrm{e}^{-2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{-2}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = (C + C(x)) \cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \left(C - \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\right) \cdot \mathrm{e}^{3x} = C\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x}$$

$$= \underline{\underline{C\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x}}}.$$

c)
Linear inhomogene DGL mit m(x) = 1 und q(x) = x. Es ergibt sich

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x$$

$$C(x) = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot (-1)\,\mathrm{e}^{-x} - \int 1 \cdot (-1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\,\mathrm{e}^{-x} + (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \big(C + C(x)\big)\cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \big(C - x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\big)\cdot \mathrm{e}^{x} = \underline{\underline{C\,\mathrm{e}^{x} - x - 1.}}$$

d)

Linear inhomogene DGL mit m(x) = 2x und $q(x) = e^{x^2}$. Es ergibt sich

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2$$

$$C(x) = \int q(x)\cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^2}\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \big(C + C(x)\big)\cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \underline{\underline{(C + x)\,\mathrm{e}^{x^2}.}}$$

e)

Die DGL ergibt sich zu $y' = \frac{y}{x} + x^2$. D. h. m(x) = 1/x und q(x) = x^2.

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|)$$

$$C(x) = \int q(x)\cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\cdot \mathrm{e}^{-\ln(|x|)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\cdot \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \int |x|\,\mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\int x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn}(x)\cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\,x^2.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \big(C + C(x)\big)\cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \left(C + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\,x^2\right)\cdot \mathrm{e}^{\ln(|x|)} = \left(C + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\,x^2\right)|x|$$

$$= C\,|x| + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\,x^2\cdot |x| = C\,|x| + \frac{1}{2}x^2\cdot x = \underline{\underline{C\,|x| + \frac{1}{2}x^3.}}$$

f)

Die DGL ergibt sich zu $y' = \frac{y}{x} + x + \frac{4}{x}$. D. h. m(x) = 1/x und q(x) = x + 4/x.

$$M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|)$$

$$C(x) = \int q(x)\cdot \mathrm{e}^{-M(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{4}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\ln(|x|)}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{4}{x}\right)\cdot \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{x}{|x|} + \frac{4}{x\cdot |x|}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\operatorname{sgn}(x) + \frac{4\,\operatorname{sgn}(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \operatorname{sgn}(x)\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\left(x - \frac{4}{x}\right) = |x| - \frac{4}{|x|}\,.$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \big(C + C(x)\big)\cdot \mathrm{e}^{M(x)} = \left(C + |x| - \frac{4}{|x|}\right)\cdot \mathrm{e}^{\ln(|x|)} = \left(C + |x| - \frac{4}{|x|}\right)|x|$$

$$= C\,|x| + |x|^2 - 4 = \underline{\underline{C\,|x| + x^2 - 4.}}$$

4. Linear inhomogene DGL mit Python
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der DGL aus Aufgabe 3 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
y=sp.Function('y');
# Parameter
l=y(x).diff(x); r=2*y(x)+1;  # linke und rechte Seite der DGL
# Berechnungen
L=sp.dsolve(l-r,y(x));
# Ausgabe
dp.display(L);
```

Für b) – f) ist der Code analog zu a), nur die Funktionen für die linke und rechte Seite entsprechend ändern.

5. AWP mit linear inhomogener DGL
Lösen Sie die gegebenen AWP.

a) DGL: $y' - 3y - x = 5$
AB: $y(0) = -\frac{7}{9}$

b) DGL: $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 + x$
AB: $y(2) = 12$

c) Lösen Sie Aufgabe a) mit Python/Sympy.

a)
Analytisch isolierte Form der DGL: $y' = 3y + x + 5$ mit m(x) = 3 und q(x) = x+5.
Für die Stammfunktion von m(x) und die Konstante C(x) ergibt sich
$M(x) = \int m(x)dx = \int 3\,x\,dx = 3x$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} q(s) \cdot \mathrm{e}^{-M(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^x \overset{\downarrow}{(s+5)} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-3s}}\,\mathrm{d}s = \left[(s+5) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{-3} \right]\Bigg|_0^x - \int_0^x 1 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{-3}\,\mathrm{d}s$$

$$= (x+5) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} - (0+5) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-3 \cdot 0}}{-3} + \frac{1}{3} \int_0^x \mathrm{e}^{-3s}\,\mathrm{d}s = -\frac{x+5}{3} \cdot \mathrm{e}^{-3x} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{-3s}}{-3} \right]\Bigg|_0^x$$

$$= -\frac{x+5}{3} \cdot \mathrm{e}^{-3x} + \frac{5}{3} - \frac{1}{9} \cdot \mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{9} \cdot \mathrm{e}^{-3 \cdot 0} = -\frac{3x+15+1}{9} \cdot \mathrm{e}^{-3x} + \frac{15+1}{9}$$

$$= \frac{16}{9} - \frac{3x+16}{9} \cdot \mathrm{e}^{-3x}.$$

Somit ergibt sich für die Lösung des AWP für $x \geq x_0$:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \left(y_0 + C(x)\cdot \mathrm{e}^{M(x_0)}\right)\cdot \mathrm{e}^{M(x)-M(x_0)} = \left(-\frac{7}{9} + \left(\frac{16}{9} - \frac{3x+16}{9}\cdot \mathrm{e}^{-3x}\right)\cdot \mathrm{e}^{3\cdot 0}\right)\cdot \mathrm{e}^{3x-3\cdot 0}$$

$$= \left(-\frac{7}{9} + \frac{16}{9} - \frac{3x+16}{9}\cdot \mathrm{e}^{-3x}\right)\cdot \mathrm{e}^{3x} = \frac{9}{9}\cdot \mathrm{e}^{3x} - \frac{3x+16}{9}\cdot \mathrm{e}^{-3x+3x}$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{e}^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{16}{9}}}.$$

b)

Analytisch isolierte Form der DGL: $y' = \frac{1}{x}y + 2x^2 + x$ mit m(x) = 1/x und q(x) = $2x^2$+x.
Für die Stammfunktion von m(x) und die Konstante C(x) ergibt sich

$M(x) = \int m(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)\cdot \mathrm{e}^{-M(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{2}^{x} (2s^2+s)\cdot \mathrm{e}^{-\ln(|s|)}\,\mathrm{d}s = \int_{2}^{x} (2s^2+s)\cdot \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{2}^{x} (2s+1)\,\mathrm{d}s = \left[s^2+s\right]\Big|_2^x = x^2+x-4-2 = x^2+x-6.$$

Somit ergibt sich für die Lösung des AWP für $x \geq x_0 = 2$:

$$\underline{\underline{y(x)}} = \left(y_0 + C(x)\cdot \mathrm{e}^{M(x_0)}\right)\cdot \mathrm{e}^{M(x)-M(x_0)} = \left(12 + (x^2+x-6)\cdot \mathrm{e}^{\ln(|2|)}\right)\cdot \mathrm{e}^{\ln(|x|)-\ln(|2|)}$$

$$= \left(12 + (x^2+x-6)\cdot 2\right)\cdot \frac{x}{2} = 6x + x^3 + x^2 - 6x = \underline{\underline{x^3+x^2}}.$$

c)

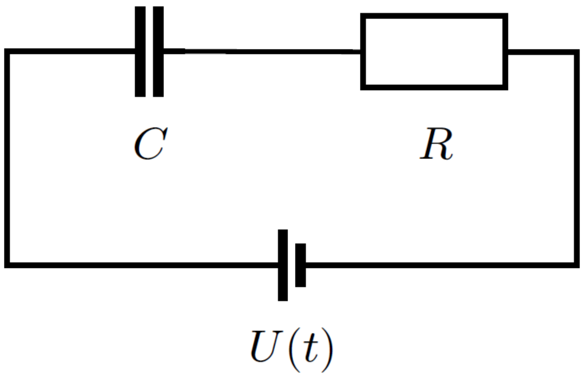
AWP a):

```
# Python initialisieren
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
y=sp.Function('y');
# Parameter
l=y(x).diff(x); r=3*y(x)+x+5;
# Berechnungen
L=sp.dsolve(l-r,y(x),ics={y(0):-7/9});
# Ausgabe
dp.display(L);
```

AWP b) analog nur mit veränderter DGL und AB.

6. RC-Schaltkreis mit Spannungsquelle

Ein RC-Schaltkreis bestehe aus einem Widerstand R = 4 Ω, einer Kapazität C = 15 mF, die zu Beginn vollständig entladen sei, und einer Spannungsquelle, die ab dem Einschaltzeitpunkt t_0 eine zeitabhängige Spannung U(t) = a(t – t_0) mit a = 12 V/S liefert.



a) Ermitteln Sie das AWP für die Spannung $U_C(t)$ über der Kapazität ab Einschalten der Spannungsquelle.
b) Klassifizieren Sie die DGL, bestimmen Sie ihre statischen Lösungen, plotten Sie das Richtungsvektorfeld (z. B. mit Python/Numpy) und beurteilen Sie die Stabilität der statischen Lösungen.
c) Bestimmen Sie die Lösung das AWP. Wie gross kann der Strom maximal werden?

a)
Für die Spannung $U_C(t)$ über der Kapazität, die Ladung Q(t) der Kapazität und den Strom I(t) im Schaltkreis gilt zu jeder Zeit
$I(t) = \dot{Q}(t) = C \cdot \dot{U_c}(t)$.
Ab dem Einschaltzeitpunkt t_0 der Spannungsquelle gilt (Maschenregel anwenden):

$$U_R + U_C = U(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad R \cdot I + U_C = U(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad R \cdot C \cdot \dot{U}_C + U_C = U(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad R \cdot C \cdot \dot{U}_C = U(t) - U_C$$

Es ergibt sich daraus die DGL

$$\dot{U}_C = \frac{U(t) - U_C}{R \cdot C} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot U_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot U(t)$$

Zu Beginn, also bei t_0, ist die Kapazität nicht geladen, d. h. es gilt: $U_c(t_0) = 0$.
Es ergibt sich für U_C das folgende AWP:
DGL: $\dot{U}_C = -\frac{1}{RC} U_C + \frac{1}{RC} U(t)$
AB: $U_C(t_0) = 0$

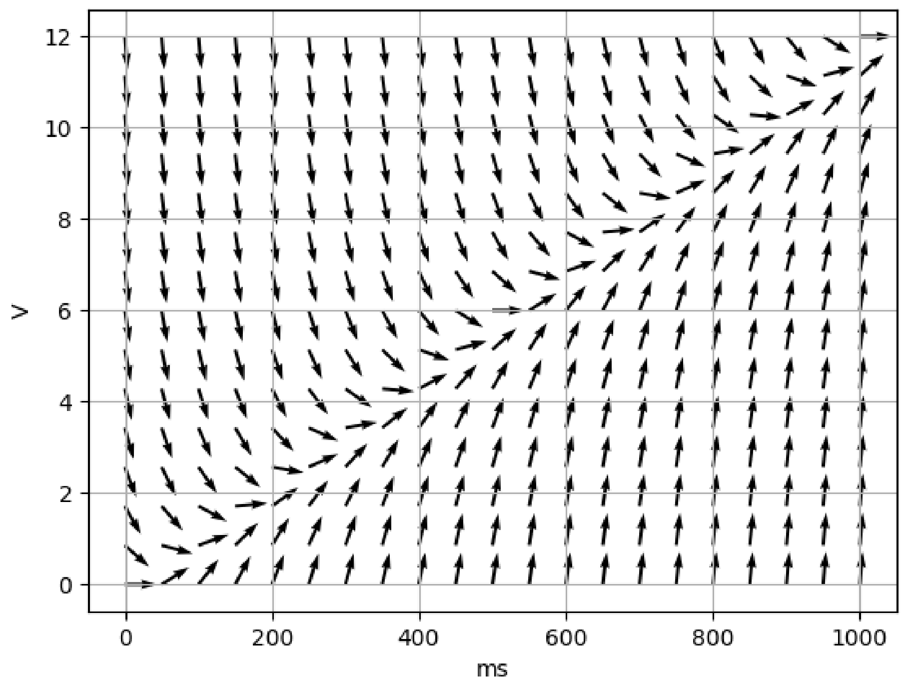
b)
Die DGL ist 1. Ordnung, analytisch isolierbar und linear inhomogen mit konstanten Koeffizienten. Für die statischen Lösungen muss gelten:

$$0 = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot U_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot U(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \big(U_C - U(t)\big).$$

Da die Spannung jedoch nicht konstant ist, sondern zeitabhängig, gibt es keine statischen Lösungen.

Python Code:

```
# Initialisieren
import numpy as np;
import matplotlib.pyplot as pl;
# Parameter
R=4; C=15*10**(-3);
t_0=0; t_E=1; N_t=21;  # Anfangs- und Endzeitpunkt; Anzahl
Punkte auf t-Achse
U_0=0; U_E=12; N_U=15; fig=1;  # Anfangs- und
Endspannungswert, Anzahl Punkte
# Funktionen
def U(t): u=12*(t-t_0); return u;
def f(t,U_C): u=(1/(R*C))*(U(t)-U_C); return u;
def v(t,U_C): v_t=0*t+1; v_U_C=f(t,U_C); return v_t, v_U_C;
# Daten
t_data=np.linspace(t_0,t_E,N_t);
U_C_data=np.linspace(U_0,U_E,N_U);
[t_grid,U_C_grid]=np.meshgrid(t_data,U_C_data);  # Pärchen
(t,U)
[v_t_grid,v_U_C_grid]=v(t_grid,U_C_grid);
# Plot
pl.figure(fig);
pl.quiver(t_grid*1000,U_C_grid,v_t_grid*1000,v_U_C_grid,
angles='xy', scale=25000,
          width=0.004);
pl.xlabel('ms'); pl.ylabel('V'); pl.grid('on');
```



c)

Die DGL hat den Koeffizient $m(t) = -\frac{1}{RC}$ und die Inhomogenität $q(t) = \frac{1}{RC}U(t) = \frac{1}{RC}a(t-t_0)$.

Für die Stammfunktion von m(t) und die Konstante D(t) ergibt sich

$$M(t) = \int m(t)\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{R\cdot C}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{R\cdot C}\int 1\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{R\cdot C}\cdot(t-t_0)$$

$$D(t) = \int_{t_0}^{t} q(s)\cdot \mathrm{e}^{-M(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{R\cdot C}\cdot a\cdot(s-t_0)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{R\cdot C}\cdot(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = a\int_{t_0}^{t}\frac{s-t_0}{R\cdot C}\cdot \mathrm{e}^{\frac{s-t_0}{R\cdot C}}\,\mathrm{d}s$$

$$= a\cdot R\cdot C\cdot\left[\left(\frac{s-t_0}{R\cdot C}-1\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{s-t_0}{R\cdot C}}\right]\Bigg|_{t_0}^{t} = a\cdot R\cdot C\cdot\left(\left(\frac{t-t_0}{R\cdot C}-1\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{t-t_0}{R\cdot C}}-(0-1)\cdot 1\right)$$

$$= a\cdot R\cdot C\cdot\left(\left(\frac{t-t_0}{R\cdot C}-1\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{t-t_0}{R\cdot C}}+1\right).$$

Die Lösung des AWP für $t \geq t_0$ ergibt sich zu

$$\underline{\underline{U_C(t)}} = \left(U_0 + D(t)\cdot \mathrm{e}^{M(t_0)}\right)\cdot \mathrm{e}^{M(t)-M(t_0)} = \left(0 + D(t)\cdot 1\right)\cdot \mathrm{e}^{M(t)-0} = D(t)\cdot \mathrm{e}^{M(t)}$$

$$= a\cdot R\cdot C\cdot\left(\left(\frac{t-t_0}{R\cdot C}-1\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{t-t_0}{R\cdot C}}+1\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}} = a\cdot R\cdot C\cdot\left(\frac{t-t_0}{R\cdot C}-1+\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}}\right)$$

$$= \underline{\underline{a\cdot(t-t_0) + a\cdot R\cdot C\cdot\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}}-1\right).}}$$

Für den Strom erhalten wir

$$I(t) = C\cdot \dot{U}_C(t) = C\cdot a\cdot(1-0) + C\cdot a\cdot R\cdot C\cdot\left(-\frac{1}{R\cdot C}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}}-0\right)$$

$$= a\cdot C - a\cdot C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}} = a\cdot C\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}}\right).$$

$$\underline{\underline{I_{\max}}} = \lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} a\cdot C\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{R\cdot C}}\right) = a\cdot C\cdot(1-0) = a\cdot C \approx 12.0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\cdot 1.50\cdot 10^{-2}\,\mathrm{F}$$

$$= 0.180\,\mathrm{A} = \underline{\underline{180\,\mathrm{mA}.}}$$