Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt DGL 1

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe gewöhnliche Differentialgleichung, Ordnung, analytisch isolierbar, elementar integrierbar, autonom, linear, linear homogen und separierbar und können diese erklären und auf konkrete Beispiele anwenden.
- Sie kennen die Abkürzungen DGL, ODE, AWP, IVP und IC und ihre Bedeutung.
- Sie können bestimmen, ob eine DGL 1. Ordnung analytisch isolierbar, elementar integrierbar, autonom, linear, linear homogen, linear mit konstanten Koeffizienten oder separierbar ist.
- Sie können überprüfen, ob eine gegebene Funktion eine gegebene DGL oder ein AWP 1. Ordnung löst.

1. Aussagen über Differentialgleichungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Lösung einer Differentialgleichung – angenommen es existiert eine Lösung – ist in jedem Fall eine reelle Zahl.		X
b) Jede Differentialgleichung hat entweder keine oder genaue eine Lösung.		X
c) Ein Anfangswertproblem hat meistens unendlich viele Lösungen.		X
d) Eine Differentialgleichung kann sowohl linear inhomogen als auch autonom sein.	X	

2. Klassifikation von DGL 1. Ordnung

a) $y' = 0$ b) $y' = 2$ c) $y' = 3x$
d) $y' = y$ e) $y' + 2y = 0$ f) $y'y = -3$
g) $y' - 3y + x = 0$ h) $4y' = 3x + 5x^2y$ i) $4xy' = 3x^2y + 20xy$
j) $4xy' = 3x^2y^2 + 20xy^2$ k) $\sin(y) + y' + \sin(x) = \sqrt{y}$ l) $\sin(y') + y + \sin(x) = \sqrt{y'}$

Klassifizieren Sie die obigen DGL gemäss den folgenden Kriterien:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
Analytisch isolierbar	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Elementar integrierbar	X	X	X									
Autonom	X	X		X	X	X						
Linear	X	X	X	X	X		X	X	X			
Linear homogen	X			X	X				X			
Linear mit konst. Koeffizienten	X	X	X	X	X		X					
separierbar	X	X	X	X	X	X			X	X		

3. Lösung von DGL 1. Ordnung
Überprüfen Sie, ob die gegebenen Funktionen jeweils eine Lösung der gegebenen DGL 1. Ordnung sind.

a) DGL: $y' = 0$
$y_1(x) = 0;\ y_2(x) = -7$

b) DGL: $y' = y$
$y_1(x) = e^x;\ y_2(x) = 3e^x$

c) DGL: $y' = 2y$
$y_1(x) = e^{2x};\ y_2(x) = 4e^{2x}$

d) DGL: $y' = 1 + y^2$
$y_1(x) = \tan x\,;\ y_2(x) = \tan(x+1)$

e) DGL: $y'y = 1$
$y_1(x) = \sqrt{2x};\ y_2(x) = \sqrt{2x-3}$

f) DGL: $(1+y^2) + (1+x^2) \cdot y' = 0$
$y(x) = \frac{k-x}{1+kx}$

a) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 0; \quad y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = -7.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = 0}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 0.}}$$

b) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = y; \quad y_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad y_2(x) = 3\,\mathrm{e}^x.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = \mathrm{e}^x = \underline{\underline{y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 3\,\mathrm{e}^x = \underline{\underline{y_2(x).}}$$

c) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 2y; \quad y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y_2(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = \underline{\underline{2 \cdot y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 4 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = \underline{\underline{2 \cdot y_2(x).}}$$

d) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 1 + y^2; \quad y_1(x) = \tan(x), \quad y_2(x) = \tan(x+1).$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x)}} = 1 + \tan^2(x) = \underline{\underline{1 + y_1^2(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x)}} = 1 + \tan^2(x+1) = \underline{\underline{1 + y_2^2(x).}}$$

e) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y'y = 1; \quad y_1(x) = \sqrt{2x}, \quad y_2(x) = \sqrt{2x-3}.$$

Es gilt

$$y_1'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{und} \quad y_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

und somit

$$\underline{\underline{y_1'(x) \cdot y_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x} = \underline{\underline{1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) \cdot y_2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \cdot \sqrt{2x-3} = \underline{\underline{1.}}$$

f) Wir betrachten eine ODE und eine *Funktion*, nämlich

$$\left(1+y^2\right) + \left(1+x^2\right) \cdot y' = 0; \quad y(x) = \frac{k-x}{1+kx}.$$

Durch *Ableiten* mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$y'(x) = \frac{(0-1) \cdot (1+kx) - (k-x) \cdot (0+k)}{(1+kx)^2} = \frac{-1-kx-k^2+xk}{(1+kx)^2} = -\frac{1+k^2}{(1+kx)^2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
D = \underline{\underline{\left(1+y^2(x)\right) + \left(1+x^2\right) \cdot y'(x)}} &= 1 + \left(\frac{k-x}{1+kx}\right)^2 + \left(1+x^2\right) \cdot \left(-\frac{1+k^2}{(1+kx)^2}\right) \\
&= \frac{(1+kx)^2}{(1+kx)^2} + \frac{(k-x)^2}{(1+kx)^2} - \frac{\left(1+x^2\right) \cdot \left(1+k^2\right)}{(1+kx)^2} \\
&= \frac{(1+kx)^2 + (k-x)^2 - \left(1+x^2\right) \cdot \left(1+k^2\right)}{(1+kx)^2} \\
&= \frac{1+2kx+k^2x^2+k^2-2kx+x^2-\left(1+x^2+k^2+x^2k^2\right)}{(1+kx)^2} \\
&= \frac{1+k^2x^2+k^2+x^2-1-x^2-k^2-x^2k^2}{(1+kx)^2} = \frac{0}{(1+kx)^2} = \underline{\underline{0.}}
\end{aligned}$$

4. Aussagen über DGL
Gegeben sei die folgende DGL:
$1-(y-x-1)^{187}=2-y'.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die DGL hat die Ordnung 1.	X	
b) Die DGL ist nicht linear, aber separierbar.		X
c) Die Funktion $y(x)=x+1$ ist eine Lösung der DGL.	X	
d) Ist $y_1(x)$ eine Lösung, dann ist auch $y_2(x) \coloneqq 2 \cdot y_1$ eine Lösung.		X
e) Jede Lösung der DGL ist monoton fallend.		X
f) Die DGL hat statische Lösungen.		X