Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 7

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Spur, Determinante, Leibnizsche Formel, Regel von Sarrus, Gramsche Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die Formel zur Berechnung von Massen (Länge, Fläche, Volumen …) und können sie anwenden.
- Sie können die Eigenschaften einer Matrix anhand ihrer Spur und Determinante beurteilen.
- Sie können die Determinante quadratischer Matrizen in 2D und 3D berechnen.
- Sie können die Determinanten einer quadratischen Matrix mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens berechnen.

---

1. Aussagen über die Spur
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Spur ist für jede Matrix definiert.		X
b) Ob eine Matrix regulär oder singulär ist, lässt sich nicht alleine anhand der Spur beurteilen.	X	
c) Für alle orthogonalen Matrizen gilt: $tr(A^T \bullet A) = n$.	X	
d) Für alle quadratischen nxn Matrizen gilt: $tr(A \bullet B - B \bullet A) = 0$.	X	
e) Für alle quadratischen nxn Matrizen gilt: $tr(A \bullet B) = tr(A) \bullet tr(B)$.		X
f) Die Matrix A ist schiefsymmetrisch, wenn gilt: $tr(A) = 0$.		X

2. Spur und Determinante der Standardmatrizen in 2D
Bestimmen Sie für die Standardmatrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{i}$, P, Z_λ, P_x, P_y, S_x und S_y jeweils die Spur und die Determinante.

Die Matrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{i}$, P beschreiben Drehungen, die Matrizen sind somit orthogonal. Es gilt folglich: $\det(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{i}) = \det(P) = 1$.
Die Matrizen P_x, P_y beschreiben Projektionen. Sind sind deshalb singulär und somit gilt: $\det(P_x) = \det(P_y) = 0$.
Die Matrizen S_x und S_y beschreiben Spiegelungen. Da Spiegelungen nicht orientierungstreu sind, gilt: $\det(S_x) = \det(S_y) = -1$.
Die Matrix Z_λ beschreibt eine Streckung um den Faktor λ. Dabei vergrössern sich die Flächen um den Faktor λ^2 und es folgt: $\det(Z_\lambda) = \lambda^2$.

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{1})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{1})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{i})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{i})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1 + (-1) = \underline{\underline{-2}}$$

$$\underline{\underline{\det(P)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(Z_\lambda)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda + \lambda = \underline{\underline{2\lambda}}$$

$$\underline{\underline{\det(Z_\lambda)}} = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \lambda - 0 \cdot 0 = \lambda^2 - 0 = \underline{\underline{\lambda^2}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_y)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(S_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 + (-1) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{tr}(S_y)}} = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)\cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1.}}$$

3. Spur und Determinante berechnen

Berechnen Sie jeweils die Spur und die Determinante.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\mathrm{tr}(A)}} = 2 + 5 = \underline{\underline{7.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = \underline{\underline{-2.}}$$

b)

tr(A) = 2 + 6 = 8

Da bei der Matrix A die 2. Spalte ein Vielfaches der Ersten ist, verschwindet die Determinante: det(A) = 0

c)

$$\underline{\underline{\mathrm{tr}(A)}} = (-1) + 2 + (-1) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = (-1)\cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 0$$

$$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{2.}}$$

d)

tr(A) = -2-2+12=8

Die zweite Zeile von A ist ein Vielfaches der ersten Zeile. Deswegen verschwindet die Determinante: det(A) = 0

e)

$$\underline{\underline{\mathrm{tr}(A)}} = 1 + (-2) + 3 + (-2) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & [6] & 7 \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 1 + 3 + 0 + 0 = \underline{\underline{4.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 1 & \sqrt{3} & 8 \\ 0 & -13 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{17} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3$$

$$= \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & [\sqrt{2}] & -13 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & [\sqrt{2}] & 3 & -13 \\ 0 & 0 & [-1] & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2+1}$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^6 = \underline{\underline{4.}}$$

g)

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{array} \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \\ 2 \end{array} \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ -2 \\ -3 \end{array} \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -11 & 15 \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-6] \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}$$

h)

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2$$

$$= -1 \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\sqrt{2}] \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{-4\sqrt{2}.}}$$

4. Spur und Determinante mit Python/Numpy bestimmmen
Berechnen Sie jeweils Spur und Determinante der Matrizen aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

a)
```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
A=np.array([[2,3],[4,5]]);
# Berechnungen
spur=np.trace(A);
determinante=np.linalg.det(A);
# Ausgabe
print('Spur =',spur);
print('Determinante =',round(determinante,3));
```
b) – h) analog

5. Aussagen über die Determinante
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.	X	
b) Ob eine quadratische Matrix regulär oder singulär ist, lässt sich nicht nur anhand der Determinante beurteilen.		X
c) Für eine quadratische nxn Matrix A und eine orthogonale nxn Matrix Q gilt: det(QA) = det(A).	X	
d) Für quadratische nxn Matrizen A und B gilt: det(A+B) = det(A) + det(B).		X
e) Gilt $A = A^{-1}$, dann folgt: $\det(A) \in \{-1;1\}$.	X	
f) A sei eine schiefsymmetrische nxn Matrix. Für ungerade n gilt: det(A) = 0.	X	

6. Aussagen über 2 Matrizen in 2D
Gegeben sind die beiden Matrizen
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix A ist orthogonal.	X	
b) Die Matrix B beschreibt eine Spiegelung an einer Geraden.		X
c) Es gilt: det(B) = tr(A) + tr(B).	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $B^n = 0$.	X	
e) Die Matrizen A und B kommutieren nicht, d. h. es gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	X	
f) Es gilt $B = B^{-1}$.		X

7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D
Gegeben sind die beiden Matrizen
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix A ist singulär.	X	
b) Die Matrix A^{102} ist symmetrisch.	X	
c) Es gilt: det(B) = det(A).		X
d) Es det(A) = tr(A).	X	
e) Es gilt: $B^{56} = \mathbb{E}$.	X	
f) Es gilt: $A \cdot B = B \cdot A$		X

8. Determinante mit Parameter
Für welche reellen Parameter λ verschwinden die Determinanten?

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

a)
Determinante bestimmen:
$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0$
Mitternachtsformel verwenden, dies ergibt: $\lambda_1 = 1{,}562$ und $\lambda_2 = -2{,}562$
b)
Determinante bestimmen (da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, braucht man nur die Elemente der Hauptdiagonalen multiplizieren):
$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$
Dies ergibt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$