Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 4

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe stetige Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeitsverteilung und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie kennen den Unterschied zwischen einer diskreten und stetigen Zufallsvariable und können ihn auf konkrete Beispiele anwenden.
- Sie kennen die speziellen stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen Normalverteilung und Standardnormalverteilung und ihre Eigenschaften.
- Sie können anhand einer gegebenen Dichtefunktion die Verteilungsfunktion bestimmen und umgekehrt.
- Sie können die (Standard)Normalverteilung auf konkrete Situationen anwenden.
- Sie können die Normalverteilung in die Standardnormalverteilung transformieren.

---

1. Vermischte Aussagen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt: $Var\left(\frac{X}{10}\right) = \frac{1}{100}$.		X
b) X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt: $E\left(\frac{X^2}{100}\right) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{100}$.	X	
c) X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt: $P(X \leq \mu) = 0{,}5$.	X	

2. Parameter einer Dichtefunktion
Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^2(2-x) & \text{für} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter a.
b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 1 annimmt.

a) Normierung: $a \cdot \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = a\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{4}{3}a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3/4$

b) $F(x) = \frac{3}{4} \cdot \int_0^x (2u^2 - u^3)\,du = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4\right]_0^x = \frac{1}{16}(8x^3 - 3x^4)$

$(0 \leq x \leq 2)$

c) $P(X \leq 1) = F(1) = 5/16$

3. Parameter einer Dichtefunktion II

Gegeben sei die Verteilungsfunktion $F(x) = a \cdot \tan^{-1}(x) + b, -\infty < x < \infty$ einer stetigen Zufallsvariable.
Bestimmen Sie die beiden Parameter a und b.
Wie lautet die Dichtefunktion f(x) dieser Verteilung?

a) Aus den Grenzwerten $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ lassen sich die unbekannten Parameter a und b wie folgt bestimmen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & \lim_{x \to -\infty} (a \cdot \arctan x + b) = a\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = 0 \\ \text{(II)} & \lim_{x \to \infty} (a \cdot \arctan x + b) = a\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 1 \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow$$

$$2b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}; \qquad \text{(II)} \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}$$

b) $F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$

4. Exponentialverteilung

Die Lebensdauer T eines bestimmten elektronischen Bauteils genüge einer Exponentialverteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & & t \geq 0 \\ & \text{für} & \\ 0 & & t < 0 \end{array}\right\} \lambda > 0.$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauelement mindestens bis zum Zeitpunkt $t = \frac{2}{\lambda}$ funktionstüchtig bleibt?

$$P(0 \leq T \leq 2\lambda^{-1}) = \lambda \cdot \int_0^{2\lambda^{-1}} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{2\lambda^{-1}} = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0{,}8647$$

5. Masszahlen einer stetigen Verteilung

a) Wie gross ist der Erwartungswert der stetigen Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion $f(x) = 0{,}5 \cdot (1 + x)$ für $-1 \leq x \leq 1$ und 0 sonst.

b) Welchen Mittelwert und welche Varianz besitzt eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f(x) = ax^2 \cdot (1 - x), 0 \leq x \leq 1, a \in \mathbb{R}$ (für alle übrigen x verschwindet f(x))?

c) Eine stetige Zufallsvariable X genüge einer sogenannten Gamma-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung.

a)

$$E(X) = 0{,}5 \cdot \int_{-1}^{1} x(1+x)\,dx = 0{,}5 \cdot \int_{-1}^{1} (x + x^2)\,dx = 0{,}5 \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

b)

$$\textit{Normierung:}\ a \cdot \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = a\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

$$\mu = 12 \cdot \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx = 12\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$$

$$E(X^2) = 12 \cdot \int_0^1 x^2(x^2 - x^3)\,dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^4 - x^5)\,dx = 12\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 =$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{5}; \qquad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}; \qquad \sigma = \frac{1}{5}$$

c)

$$\mu = \lambda^2 \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2\left[\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \lambda^2\left(0 + \frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \lambda^2 \cdot \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2\left[\frac{x^3 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty + \lambda^2 \cdot \frac{3}{\lambda}\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \lambda^2(0 + 0) + 3\lambda\left[\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 3\lambda\left(0 + \frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{6}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}; \qquad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

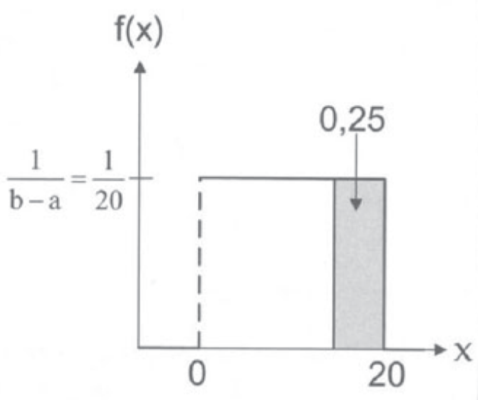
6. Bahnhof

An einem Bahnhof fahrt die Schnellbahn exakt alle 20 Minuten ab. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig eintreffender Fahrgast mehr als 15 Minuten warten muss? Gehen Sie von einer Gleichverteilung aus.

Die Wartezeit ist gleichverteilt mit

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{für } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich

Funktionsvorschrift	Grafische Darstellung
$P(X \geq 15) = \int_{15}^{20} \frac{1}{20} dx = \left| \frac{1}{20} x \right|_{15}^{20}$ $= \frac{20}{20} - \frac{15}{20} = 1 - 0{,}75$ $= 0{,}25$	

Die durchschnittliche Wartezeit ist

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+20}{2} = 10 \ ,$$

die Varianz der Wartezeit beträgt

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{100}{3} = 33{,}333 \,.$$

7. Standardnormalverteilung

U sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion ϕ (Tabelle) die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(U \geq 0{,}95)$ b) $P(U \geq -2{,}13)$ c) $P(-1 \leq U \leq 1)$

d) $P(X \leq 1{,}72)$ e) $P(X \leq -0{,}35)$

a)

$$P(U \geq 0{,}95) = 1 - P(U \leq 0{,}95) = 1 - \phi(0{,}95) = 1 - 0{,}8289 = 0{,}1711$$

b)

$$P(U \geq -2{,}13) = 1 - P(U \leq -2{,}13) = 1 - \phi(-2{,}13) =$$
$$= 1 - 1 + \phi(2{,}13) = \phi(2{,}13) = 0{,}9834$$

c)

$$P(-1 \leq U \leq 1) = P(|U| \leq 1) = 2 \cdot \phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$$

d)

$$P(X \leq 1{,}72) = \Phi(1{,}72) = 0{,}9573$$

e)

$$P(X \leq -0{,}35) = P(X > 0{,}35) = 1 - P(X \leq 0{,}35) = 1 - \Phi(0{,}35)$$
$$= 1 - 0{,}6368 = 0{,}3632,$$

8. Standardnormalverteilung II → Papula S. 464 A14b,d,g

Bestimmen Sie anhand der Tabelle für die Standardnormalverteilung die jeweils unbekannte Intervallgrenze (U: standardnormalverteilte Zufallsvariable):

a) $P(U \leq a) = 0{,}321$ b) $P(-0{,}22 \leq U \leq b) = 0{,}413$ c) $P(U \geq a) = 0{,}8002$

a)
$\phi(a) = 0{,}3210 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad$ (Wir setzen $a = -k$ mit $k > 0$) $\Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}3210 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}6790 \quad \Rightarrow$
$k = 0{,}465 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}465$

b)
$$\phi(b) - \phi(-0{,}22) = \phi(b) - 1 + \phi(0{,}22) = \phi(b) - 1 + 0{,}5871 =$$
$$= \phi(b) - 0{,}4129 = 0{,}413 \quad \Rightarrow \quad \phi(b) = 0{,}8259 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}938$$

c)
$P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$
$\phi(a) = 0{,}1998 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad$ (Wir setzen $a = -k$ mit $k > 0$) $\Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}1998 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$
$k = 0{,}842 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}842$

9. Standardnormalverteilung III
Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Mittelwert μ = 40 und Varianz $\sigma^2 = 100$.
Bestimmen Sie die folgenden Werte:
a) $P(X \leq 55)$ b) $P(X \leq 28)$ c) $P(28 \leq X \leq 55)$
d) Bestimmen Sie das 95% und das 5% Quantil.

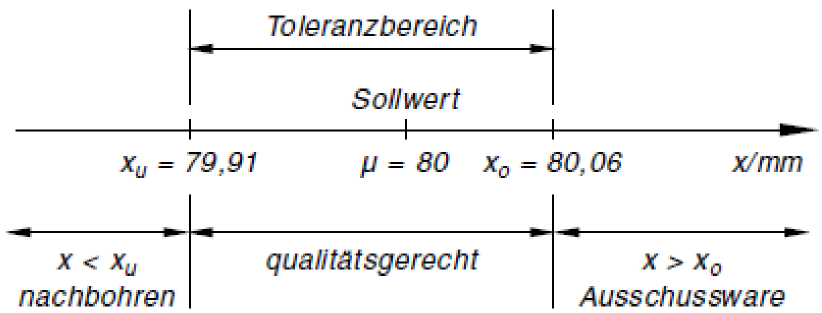
a)
$$P(X \leq 55) = P\left(\tfrac{X-40}{10} \leq \tfrac{55-40}{10}\right) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$
b)
$$P(X \leq 28) = P\left(\tfrac{X-40}{10} \leq \tfrac{28-40}{10}\right) = \Phi(-1{,}2)$$
$$= 1 - \Phi(1{,}2) = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151$$
c)
$$P(28 < X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 28)$$
$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}2) = 0{,}9332 - 0{,}1151 = 0{,}8181$$
d)
Der Wert 0,95 befindet sich in der Tabelle zwischen 1,64 und 1,65, sodasss das 95%-Quantil der **Standardnormalverteilung** mit 1,645 angegeben werden kann. Der Wert für das 5%-Quantil der **Standardnormalverteilung** ist wegen $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0{,}05 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0{,}95$ bei $z = -1{,}645$.
Da die transformierte Zufallsvariable $Z = \frac{X-40}{10}$ standardnormalverteilt ist, muss $\frac{x-40}{10} = 1{,}645$ nach x aufgelöst werden, um das 95%-Quantil von X zu bestimmen. Das 95%-Quantil ist somit $x = 10 \cdot 1{,}645 + 40 = 56{,}45$. Analog ergibt sich das 5%-Quantil von X aus $x = 10 \cdot (-1{,}645) + 40 = 23{,}55$.
Dieses Ergebnis kann folgendermaßen interpretiert werden:
Bei einer $N(40, 100)$-normalverteilten Zufallsvariablen X ist das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% höchstens 23,55 und mit der Wahrscheinlichkeit von 95% höchstens 56,45. Das bedeutet auch, dass das Ergbnis mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $[23{,}55; 56{,}45]$ um den Erwartungswert 40 liegt.

10. Verkauf von Hühnereiern
Zwei Studentinnen der Betriebswirtschaftslehre analysierten im vergangenen Sommersemester das Gewicht G (Angaben in Gramm) von 960 Hühnereiern, gelegt von Hühnern der Rasse Loheimer Braun. Die statistische Analyse bestätigte die Annahme, dass das Gewicht G eines „braunen" Hühnereis als eine normalverteilte Zufallsgrösse G aufgefasst werden darf, wobei $G \sim N(63\text{ g}, 5\text{ g})$ gilt.
Welchen Erlös würde eine Bauerin auf einem Wochenmarkt erwartungsgemäss erzielen, wenn sie insgesamt 1000 Eier der Rasse Loheimer Braun verkauft und ein Ei der Gewichtskategorie S: $G < 55$ g für 0,15 €, der Gewichtskategorie M: $55\text{ g} \leq G < 65$ g für 0,20 €, der Gewichtskategorie L: $65\text{ g} \leq G < 75$ g für 0,25 € und der Gewichtskategorie XL: $G \geq 75$ g für 0,30 € anbietet?

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Hühnerei zur Gewichtskategorie S gehört, ist $P(G < 55\text{ g}) = \Phi((55\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) = \Phi(-1{,}6) = 1 - \Phi(1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$, demnach gehören von 1000 Hühnereier wegen $0{,}0548\ 1000 \cdot \approx 55$ Eier der Gewichtskategorie S an, wegen $P(55\text{ g} \leq G < 65\text{ g}) = \Phi((65\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) - \Phi((55\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-1{,}6) = \Phi(0{,}4) - (1 - \Phi(1{,}6)) = 0{,}6554 + 0{,}9452 - 1 = 0{,}6006$ würden $0{,}6006\ 1000 \cdot \approx 601$ Hühnereier zur Gewichtskategorie M gehören, wegen $P(65\text{ g} \leq G < 75\text{ g}) = \Phi((75\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) - \Phi((65\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) = \Phi(2{,}4) - \Phi(0{,}4) = 0{,}9918 - 0{,}6554 = 0{,}3364$ würden $0{,}3364\ 1000 \cdot \approx 336$ Hühnereier zur Gewichtskategorie L gehören, wegen $P(G > 75\text{g}) = 1 - \Phi((75\text{ g} - 63\text{ g})/5\text{ g}) = 1 - \Phi(2{,}4) = 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$ würden $0{,}0082\ 1000 \cdot \approx 8$ Hühnereier zur Gewichtskategorie XL gehören, Erlöshochrechnung: die Bäuerin hätte letztlich wegen 0,15 €/Stück·55 Stück + 0,20 €/Stück·601 Stück + 0,25 €/Stück·336 Stück + 0,30 €/Stück·8 Stück = 214,85 € einen Erlös von ca. 215 € aus dem Verkauf der 1000 Hühnereier zu erwarten ♣

11. Bohrung in einem Werkstück
Ein Werkstück aus Edelstahl soll eine zylindrische Bohrung mit einem Solldurchmesser von $\mu = 80$ mm erhalten. Die Toleranzgrenzen liegen dabei zwischen $x_u = 79{,}91$ mm und $x_o = 80{,}06$ mm. Der Bohrautomat wird so eingestellt, dass der Durchmesser X der Bohrungen eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert (= Sollwert) $\mu = 80$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03$ mm ist. Ein Werkstück gilt dann als Ausschuss, wenn der Durchmesser grösser als x_o ausfällt. Eine Nachbesserung (Nachbohrung) soll erfolgen, wenn der Durchmesser kleiner als x_u ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Bohrung

a) qualitätsgerecht ausfällt, der Durchmesser also innerhalb des Toleranzbereiches liegt,
b) nachgebessert werden muss?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Ausschussware produziert?



Übergang von der Zufallsvariablen X zur *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen $U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{0{,}03}$

a) $x_u \leq X \leq x_o$ Der Durchmesser liegt im Toleranzbereich (Bild K-9):

$$P(x_u \leq X \leq x_o) = P(79{,}91 \leq X \leq 80{,}06) = P\left(\frac{79{,}91 - 80}{0{,}03} \leq U \leq \frac{80{,}06 - 80}{0{,}03}\right) = P(-3 \leq U \leq 2) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) - [1 - \Phi(3)] = \Phi(2) - 1 + \Phi(3) = \Phi(2) + \Phi(3) - 1 =$$

$$= 0{,}9772 + 0{,}9987 - 1 = 0{,}9759 \approx 97{,}6\,\%$$

Folgerung: Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit von rund 97,6 % sind die Bohrungen *qualitätsgerecht*, liegen also im vorgegebenen Toleranzbereich.

b) $X < x_u$ Der Durchmesser fällt zu *klein* aus (Nachbohrung):

$$P(X < x_u) = P(X < 79{,}91) = P\left(U < \frac{79{,}91 - 80}{0{,}03}\right) = P(U < -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) =$$

$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013 \mathrel{\widehat{=}} 0{,}13\,\%$$

Folgerung: Eine Nachbohrung wird *äußerst selten* nötig sein!

c) $X > x_o$ Der Durchmesser fällt zu *groß* aus (Ausschussware):

$$P(X > x_o) = P(X > 80{,}06) = P\left(U > \frac{80{,}06 - 80}{0{,}03}\right) = P(U > 2) = 1 - P(U \leq 2) = 1 - \Phi(2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 \approx 2{,}3\,\%$$

Bei einer Serienproduktion beträgt der *Ausschussanteil* rund 2,3 %.

12. Weinabfüllung

In einem Weingut wird auf einer automatischen Abfüllanlage Wein in 0,75-Liter-Flaschen gefüllt. Das Abfüllvolumen X kann dabei nach den Angaben des Herstellers als eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert m = 0,75 l = 750 cm^3 und der Standardabweichung σ = 20 cm^3 angenommen werden:

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine abgefüllte Weinflasche weniger als 730 cm^3 Wein enthält?
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das abgefüllte Weinvolumen vom Sollwert (Mittelwert) um maximal 2% (nach oben bzw. unten) abweicht.

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 750}{20}$$

a) $P(X < 730) = P(U < -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587 \approx 15{,}9\,\%$

b) Abweichung: $2\,\%$ von $750\text{ cm}^3 = 15\text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 735 \leq X \leq 765$

$$P(735 \leq X \leq 765) = P(-0{,}75 \leq U \leq 0{,}75) = 2 \cdot \phi(0{,}75) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}7734 - 1 = 0{,}5468 \approx 54{,}7\,\%$$