Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 6

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

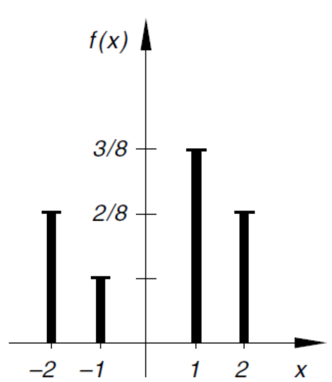
- Sie kennen die Begriffe (diskrete) Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Stabdiagramm und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie können die Wahrscheinlichkeitsfunktion als auch die Verteilungsfunktion graphisch darstellen.

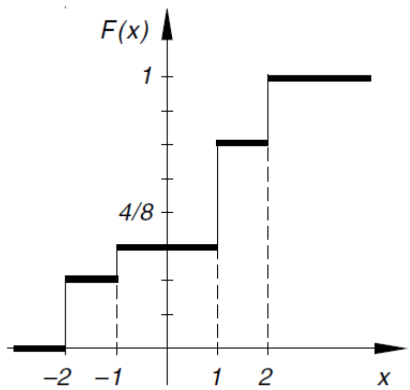
1. Verteilungen graphisch darstellen

Stellen Sie die gegebenen Verteilungen einer diskreten Zufallsvariablen X graphisch durch ein Stabdiagramm und eine Verteilungskurve dar.

a)

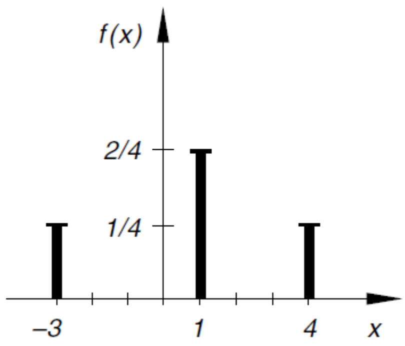
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	1/4	1/8	3/8	1/4

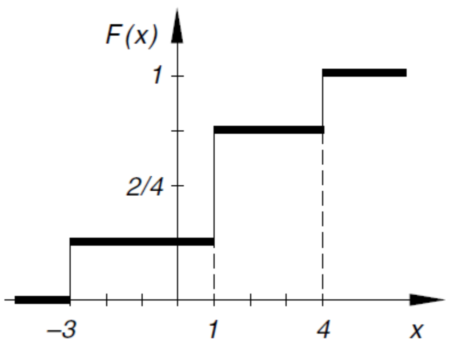




b)

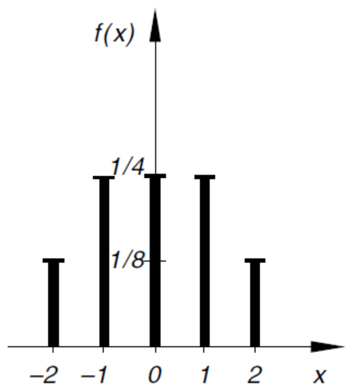
x_i	-3	1	4
$f(x_i)$	1/4	1/2	1/4

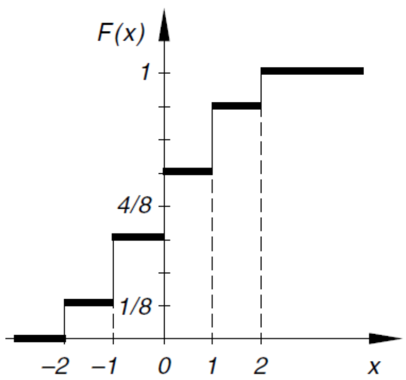




c)

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8





2. Wahrscheinlichkeitsverteilung diskrete Zufallsvariable

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X ist durch die folgende Verteilungstabelle gegeben:

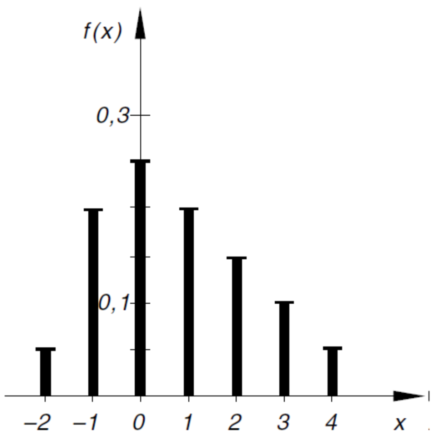
x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0,05	0,2	0,25	0,2	0,15	0,1	p(4)

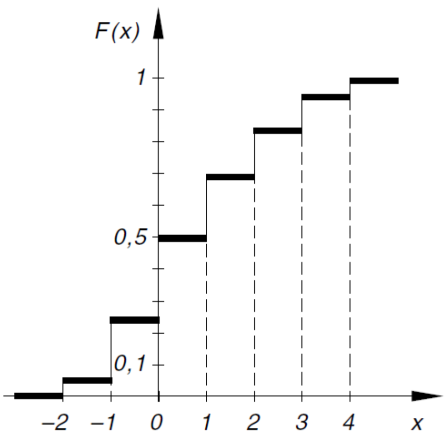
a) Bestimmen Sie f(4) = p(4).

b) Zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x) sowie den Verlauf der Verteilungsfunktion F(x).

a) $\sum f(x_i) = 0{,}95 + p(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(4) = 0{,}05$

b) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-28





3. Qualitätskontrolle

In einer Lieferung von 10 Glühbirnen vom gleichen Typ befinden sich 2 defekte. Zu Kontrollzwecken werden 3 Glühbirnen zufällig entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der dabei erhaltenen defekten Glühbirnen.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer solchen Stichprobe genau eine defekte Glühbirne befindet?

a) Anzahl der möglichen Stichproben (Kombinationen 3. Ordnung *ohne* Wiederholung):

$$C(10;3) = \binom{10}{3} = 120$$

$\boxed{X = 0}$ Nur einwandfreie Glühbirnen (3 aus 8): $C(8;3) = \binom{8}{3} = 56$

Somit: $P(X = 0) = f(0) = 56/120 = 7/15$

$\boxed{X = 1}$ 1 defekte (aus 2) und 2 einwandfreie Glühbirnen (aus 8):

$$C(2;1) \cdot C(8;2) = \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{2} = 2 \cdot 28 = 56$$

Somit: $P(X = 1) = f(1) = 56/120 = 7/15$

$\boxed{X = 2}$ 2 defekte (aus 2) und 1 einwandfreie Glühbirne (aus 8):

$$C(2;2) \cdot C(8;1) = \binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1} = 1 \cdot 8 = 8$$

Somit: $P(X = 2) = f(2) = 8/120 = 1/15$

Verteilungstabelle:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	7/15	7/15	1/15

b) $P(X = 1) = f(1) = 7/15$

4. Würfel

Ein Würfel werde so oft geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Die Zufallsgrösse X sei die Anzahl der benötigten Würfe. Welche Werte kann X annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten ist das der Fall? Man skizziere die Verteilungsfunktion von X und gebe sie in mathematischer Schreibweise an.

Da wenigstens einmal gewürfelt wird, ist der kleinste Wert, den die Zufallsgrösse X annehmen kann, $x_1 = 1$. Wenn viermal nacheinander keine 6 erscheint, ist das Spiel beendet. Demzufolge ist der grösste Wert, den die Zufallsgrösse realisieren kann, $x_4 = 4$:

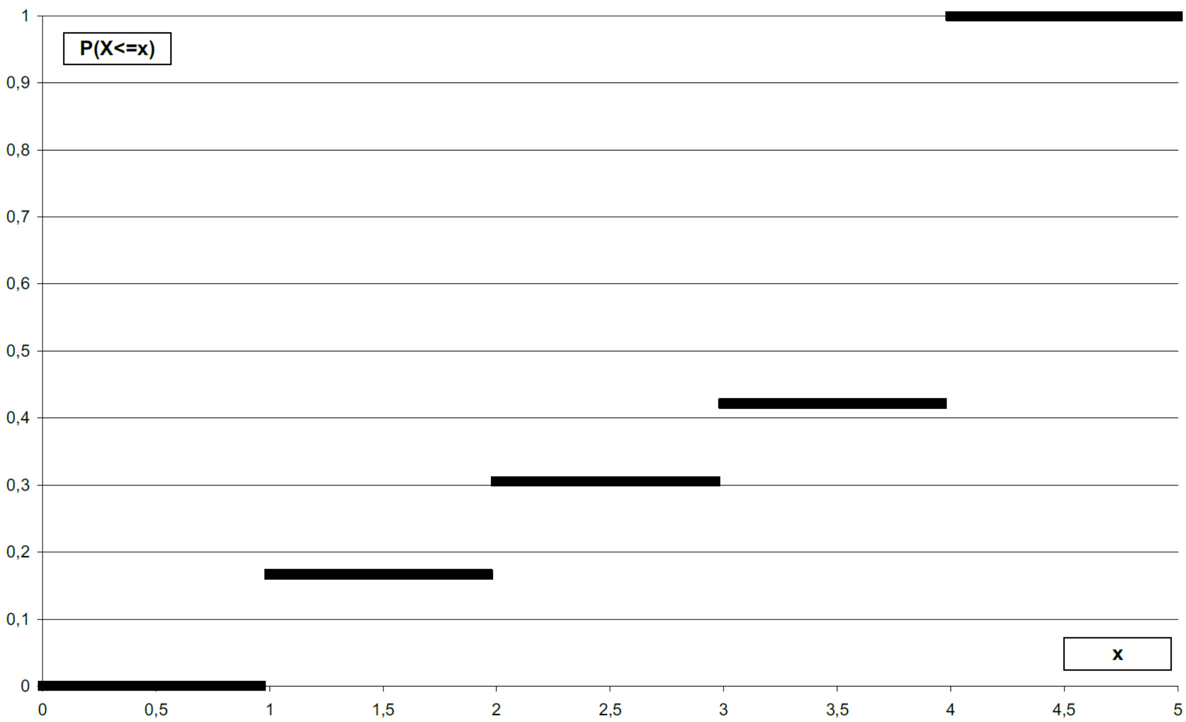
Die Zufallsgrösse X kann also nur die Werte $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 4$ annehmen. Andere Werte sind nicht möglich, X ist eine diskrete Zufallsgrösse. Kommen wir nun zu den Wahrscheinlichkeiten (die dann als Sprunghöhen im Bild der Verteilungsfunktion einzutragen sind). Wird beim ersten Wurf eine 6 geworfen, dann realisiert die Zufallsgrösse den Wert $x_1 = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit

P(X=1) = 1/6.
Wird zweimal gewürfelt, dann ist beim ersten Wurf keine 6 gefallen, wohl aber beim zweiten Wurf:
$P(X=2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.
Muss dreimal gewürfelt werden, wurden bei den ersten beiden Würfen keine Sechsen geworfen, die 6 erscheint erst beim dritten Wurf:
$P(X=3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.
Wenn vier Würfe nötig sind, dann konnte bei den ersten drei Würfen keine 6 geworfen werden. Das Ergebnis des vierten Wurfes spielt für die Suche nach der Wahrscheinlichkeit P(X=4) keine Rolle mehr. Gleichgültig, ob im 4. Wurf eine 6 erscheint oder nicht, das Spiel ist mit den drei vorherigen Negativ-Würfen beendet:
$P(X=4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.
Zur Kontrolle sollten wir nachprüfen, ob tatsächlich die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins wird:
$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{216}{216} = 1.$

Werte und zugehörige Wahrscheinlichkeiten:

$x_1=1$	$P(X=x_1)=$	1/6=	0,16666667
$x_2=2$	$P(X=x_2)=$	5/36=	0,13888889
$x_3=3$	$P(X=x_3)=$	25/216=	0,11574074
$x_4=4$	$P(X=x_4)=$	125/216=	0,5787037

Verteilungsfunktion:



Formal mathematische Beschreibung der Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{36} & 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

5. Sportschütze

Ein Bogenschütze trifft die Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,8.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariablen X = Anzahl der abgegebenen Schüsse bis zum 1. Treffer.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die Scheibe bei insgesamt 3 abgegebenen Schüssen zu treffen?

a) Der Schütze trifft *erstmals* beim x-ten Schuss (vorher $x - 1$ Fehlschüsse, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0{,}2$). Der *Multiplikationssatz* liefert dann:

$$p(x) = f(x) = \underbrace{(0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot \ldots \cdot 0{,}2)}_{(x-1)\text{-mal}} \cdot 0{,}8 = 0{,}8 \cdot 0{,}2^{x-1} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

b) Der Schütze trifft *spätestens* beim 3. Schuss:

$$P = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}8\,(1 + 0{,}2 + 0{,}2^2) = 0{,}992$$