Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

# Übungsblatt LA 12

Computational and Data Science
BSc HS2023

## Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Beschreibung einer Ebene in Parameter-, Normalen- und Hesse Normalform.
- Sie können den Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmen.
- Sie können die Lage von Geraden und Ebene zueinander bestimmen.

### 1. Aussagen über Ebenen in 3D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Um eine Ebene in 3D in Parameterform darzustellen, benötigt man genau zwei reelle Parameter. | X | |
| b) Durch Angabe des Einheitsnormalenvektors ist eine Ebene in 3D eindeutig bestimmt. | | X |
| c) Die Gleichung x + y = 1 beschreibt eine Ebene in 3D. | X | |
| d) Die Gleichung $x^2$ + y -z + 5 = 0 beschreibt eine Ebene in 3D. | | X |
| e) Der Abstand eines Punktes von einer Ebene in 3D lässt sich mit Hilfe der Hesse Normalform berechnen. | X | |
| f) Der konstante Term in der Hesse Normalform für eine Ebene in 3D entspricht der Länge des Normalenvektors. | | X |

### 2. Ebenen

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte $P_1$ = (3;1;0), $P_2$ = (-4;1;1) und $P_3$ = (5;9;3).

b) Bestimmen Sie für die Ebene E: -4x + y - 2z – 3 = 0 eine Parameterform.

c) Bestimmen Sie eine Parameterform, eine Normalengleichung und die Hesse Normalform für die Ebene, die durch die Punkte (2;1;3), (1;0;2) und (-3;4;-1) verläuft.

a)

$$\vec{r}(P) = \vec{r}(\lambda;\mu) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4-3 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5-3 \\ 9-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 7\lambda + 2\mu \\ 1 \qquad\quad + 8\mu \\ \lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$

b)
Die Ebenengleichung kann als LGS aufgefasst werden (mit zwei Nullzeilen, d. h. zwei Parameter dürfen frei gewählt werden). Setze x = λ und y = μ mit $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$.

$$-2z = 3 + 4x - y = 3 + 4\lambda - \mu$$

$z = -3/2 - 2\lambda + \mu/2$, woraus eine Paramaterformulierung für $E$ folgt:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c)
Wir wählen

$$\mathbf{s}_0 := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} := \mathbf{C} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich dann die folgende Parameterform

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau;\sigma)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} + \sigma \cdot \mathbf{w} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}}}$$

Für den Normalen- und Normaleneinheitsvektor ergibt sich

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}}}$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 1 + 64} = \sqrt{114}$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{114}} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}}}.$$

Bestimmung der Normalform

$$c = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{s}_0 \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{A} \rangle = -\left\langle \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = -\big((-7)\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 8 \cdot 3\big)$$

$$= -(-14 - 1 + 24) = -9.$$

$$0 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + c$$

$$0 = \langle \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle - 9.$$

$$\underline{\underline{-7x - y + 8z - 9 = 0.}}$$

Hesse Normalform durch Verwendung des Einheitsnormalenvektors, im vorliegenden Fall also Durchführung der Normierung

$$\underline{\underline{-\frac{7}{\sqrt{114}}x - \frac{1}{\sqrt{114}}y + \frac{8}{\sqrt{114}}z - \frac{9}{\sqrt{114}} = 0.}}$$

**3. Aussagen über eine Ebene in 3D**

Gegeben ist eine Ebene mit der Normalengleichung

$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3} = 0.$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Die Ebene verläuft durch den Punkt (-1;1;-1). | X | |
| b) Die angegebene Normalengleichung entspricht der Hesse Normalform. | | X |
| c) Der Vektor $\vec{w} = 2 \cdot \hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z$ steht senkrecht auf der Ebene. | | X |
| d) Die Gerade mit der Parameterdarstellung $\vec{r} = \hat{e}_z + \lambda \cdot (4 \cdot \hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z)$ schneidet die Ebene nicht. | X | |
| e) Der Abstand der Ebene vom Ursprung beträgt $-\frac{5}{3}$. | | X |
| f) Die Ebene schneidet die x-Achse bei x = -5. | X | |

**4. Lage von Gerade und Ebene zueinander**
Welche Lage haben Gerade g und Ebene E zueinander? Bestimmen Sie gegebenenfalls Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) g durch den Punkt $P_1 = (5;1;2)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E durch den Punkt $P_0 = (2;1;8)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $g: \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$

$E: \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0.$

a)

$$g: \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}; \quad E: \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 3 + 2 = 2 \neq 0$$

Gerade und Ebene schneiden sich somit in einem Punkt $S$ (Ortsvektor $\vec{r}_S$, Parameter $\lambda_S$), der *beide* Gleichungen (Gerade und Ebene) erfüllen muss:

$$\vec{r}_S = \vec{r}(\lambda_S) = \vec{r}_1 + \lambda_S\vec{a} \qquad \text{und} \qquad \vec{n} \cdot (\vec{r}_S - \vec{r}_0) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 + \lambda_S\vec{a} - \vec{r}_0) = \vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + \lambda_S(\vec{n} \cdot \vec{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_S = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-5 \\ 1-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 + 0 + 6 = 9$$

$$\lambda_S = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \lambda_S\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4{,}5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}5 \\ 5{,}5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = (18{,}5;\, 5{,}5;\, 11)$$

$$\textit{Schnittwinkel:} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}}\right) = 9{,}27°$$

b)

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 5 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ und } E \text{ sind } \textit{parallel}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-1 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 12 - 2 - 5 = 5$$

$$\textit{Abstand:} \; d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{11}} = 1{,}51$$

**5. Parallele Ebenen**

Eine Ebene $E_1$ verläuft durch den Punkt $P_1 = (1;2;3)$, ihr Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den noch unbekannten Parameter a so, dass der Abstand des Punktes Q = (0;2;5) von dieser Ebene d = 2 beträgt. Wie lautet die Gleichung der Parallelebene $E_2$ durch den Punkt A = (5;1;-2)?

$$\textit{Abstandsformel:} \; d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} \quad \Rightarrow \quad d\,|\vec{n}| = |\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2a = 2(a-1); \qquad |\vec{n}| = \sqrt{5 + a^2}$$

$$d\,|\vec{n}| = |\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)| \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{5 + a^2} = |2(a-1)| \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{5 + a^2} = |a - 1| \quad \Big| \text{quadrieren} \quad \Rightarrow \quad 5 + a^2 = (a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \quad \Rightarrow$$

$$2a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

Die Gleichung der *Parallelebene* $E_2$ durch den Punkt $A = (5;1;-2)$ lautet:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} = 2(x-5) + 1(y-1) - 2(z+2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x + y - 2z = 15$$