Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 11 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Kurve, Spur, Geschwindigkeits-/Tangentenvektor, Beschleunigungsvektor, Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor, Binormalenvektor, Parametrisierung, Bogenlänge, Vektorfeld, Kurven-/Linienintegral und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Spur einer parametrisierten Kurve in 2D skizzieren.
- Sie können ein Vektorfeld in 2D skizzieren.
- Sie können die Bogenlänge einer Kurve berechnen.
- Sie können Linienintegrale berechnen.

1. Aussagen über parametrisierte Kurven

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Eine parametrisierte Kurve kann durch $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dargestellt werden.	X	
b) Eine parametrisierte Kurve ist stets injektiv.		X
c) Eine parametrisierte Kurve ist für $n \geq 2$ niemals surjektiv.	X	
d) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann haben sie auch dieselbe Geschwindigkeit.		X
e) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann sie auch denselben Tangenteneinheitsvektor.		X

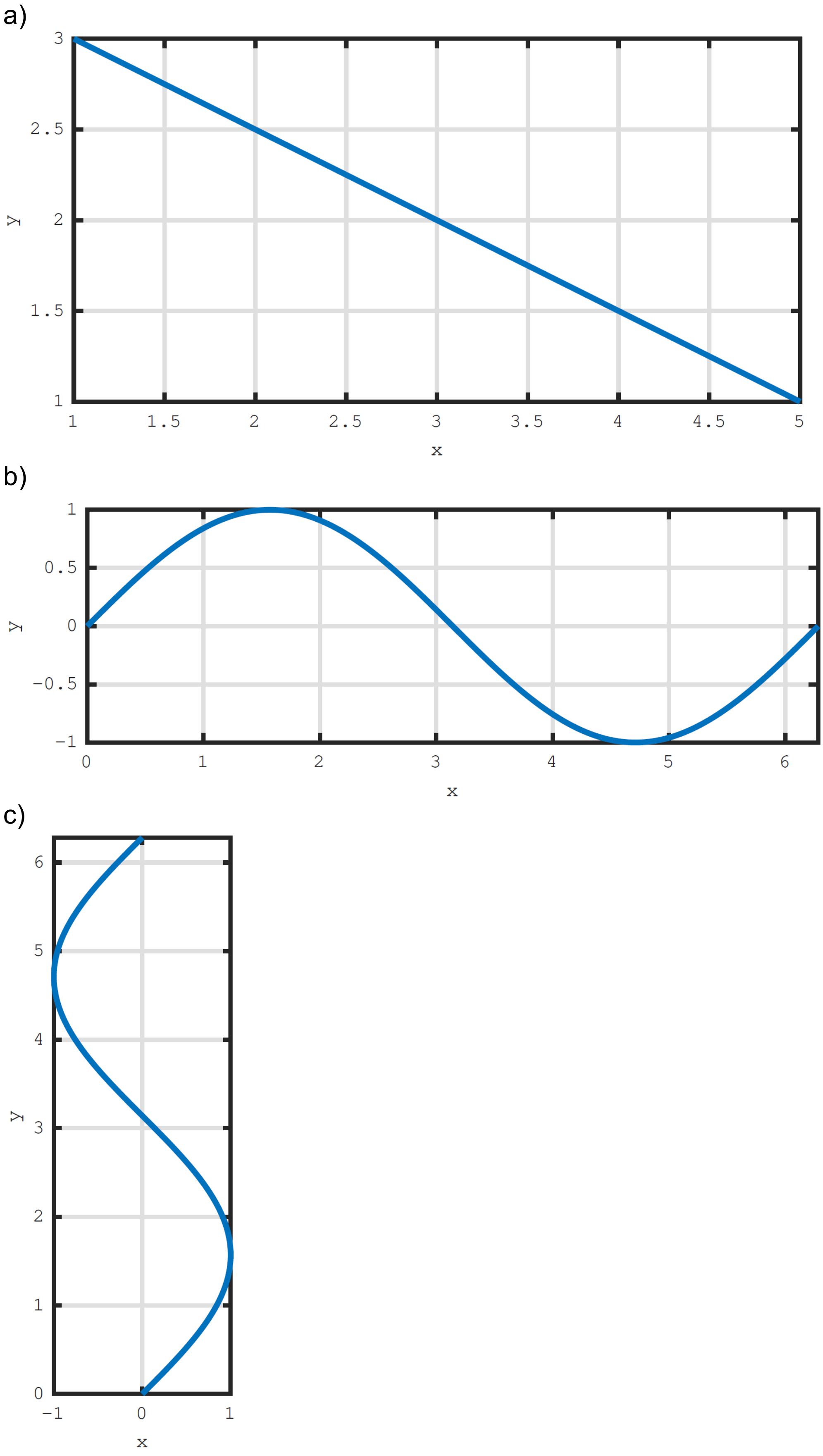
2. Spur von parametrisierten Kurven

Skizzieren Sie jeweils die Spur der Kurve für einen geeigneten Bereich von $t \in \mathbb{R}$.

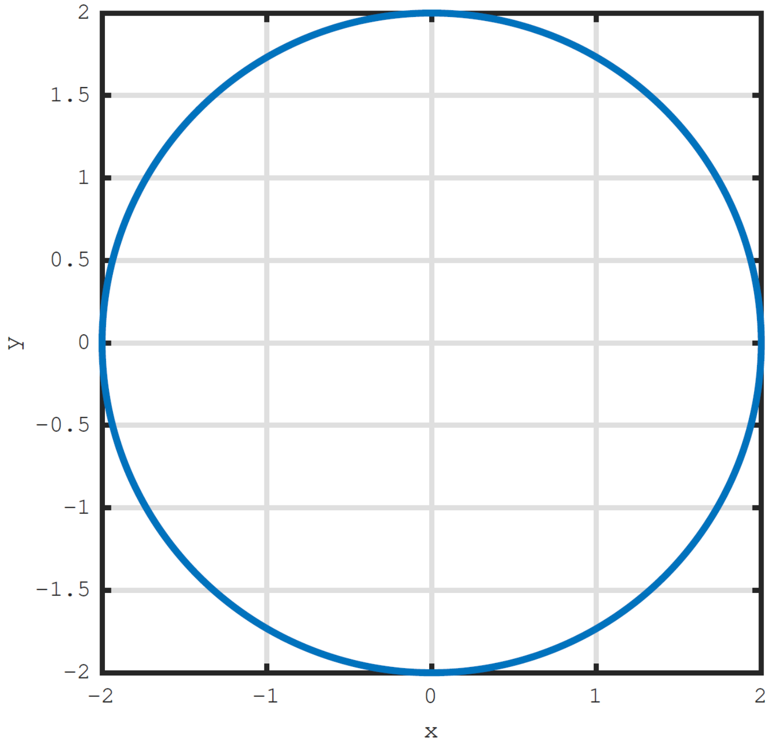
a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ t \end{pmatrix}$

d) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ e) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ f) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{t}{2\pi}} \cos t \\ 2^{-\frac{t}{2\pi}} \sin t \end{pmatrix}$

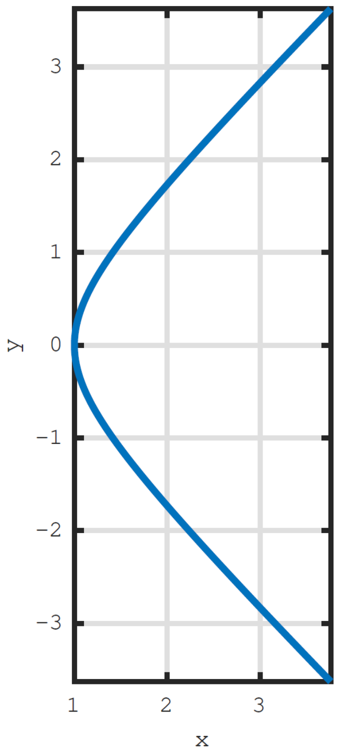
g) Plotten Sie die Spur der Kurven aus a) – f) mit Python/Numpy.


a)
3
2.5
2
1.5
1
y
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x
b)
1
0.5
0
−0.5
−1
y
0
1
2
3
4
5
6
x
c)
6
5
4
3
2
1
0
y
−1
0
1
x

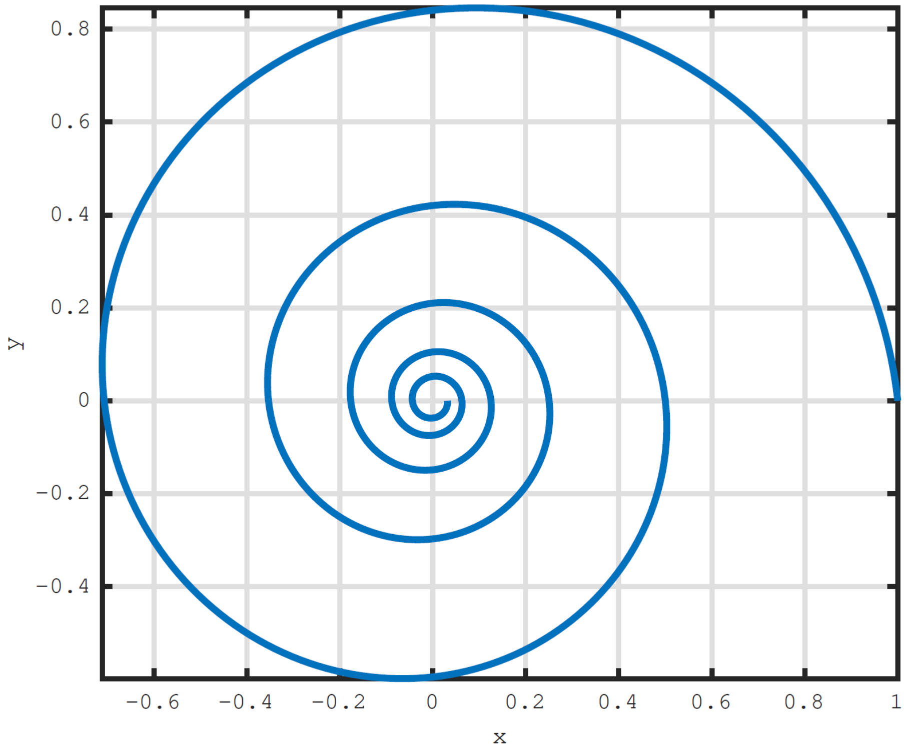
d)



e)



f)



g)
Für a):

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
t_0=0; t_E=2*np.pi; N=41; lw=3; fig=1;
# Funktionen:
def gamma(t):  # Definition der parametrisierten Kurve
    x=1+2*t;
    y=3-t;
    return x,y;
# Daten:
t_data=np.linspace(t_0,t_E,N);
[x_data,y_data]=gamma(t_data);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.plot(x_data,y_data,linewidth=lw);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

➔ analog für b) – f)

3. Geschwindigkeits- und Tangenteneinheitsvektor
Berechnen Sie jeweils den Tangenteneinheitsvektor und skizzieren Sie diesen entlang der Spur.

a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t - 3 \\ 3\sin t + 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t + 2 \\ 2\sin t + 1 \end{pmatrix}$

a)

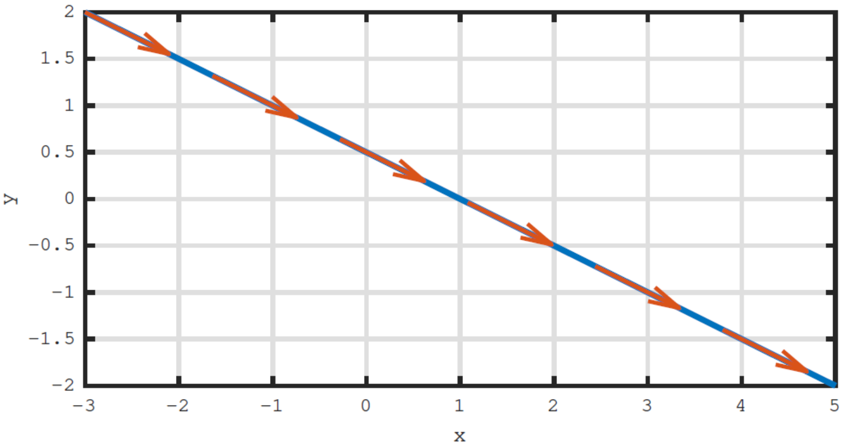
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{5}$

$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2}{-1}$



b)

Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) + 0 \\ 3\,\cos(\tau) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix}$$

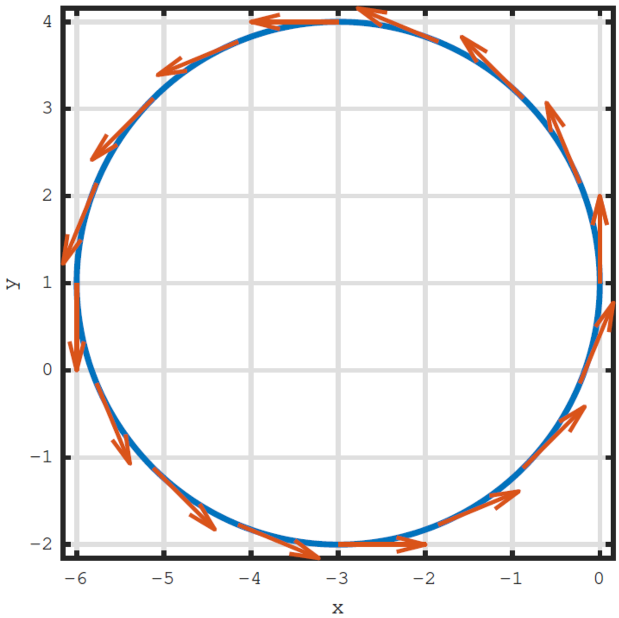
$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

$$\sqrt{(-3)^2 \sin^2(\tau) + 3^2 \cos^2(\tau)} = \sqrt{9\,\sin^2(\tau) + 9\,\cos^2(\tau)}$$

$$= \sqrt{9 \cdot \left(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)\right)} = \sqrt{9} = 3.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin(\tau) \\ \cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



c)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu
$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

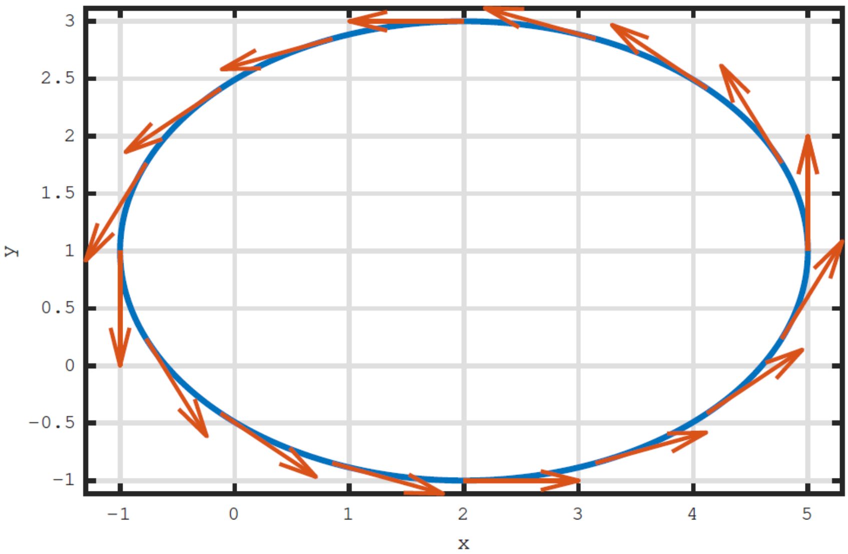
$$\begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau)+0 \\ 2\ \cos(\tau)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau) \\ 2\ \cos(\tau) \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

$$\sqrt{(-3)^2 \sin^2(\tau)+2^2\cos^2(\tau)} = \sqrt{9\ \sin^2(\tau)+4\ \cos^2(\tau)}$$
$$= \sqrt{5\ \sin^2(\tau)+4\ \sin^2(\tau)+4\ \cos^2(\tau)} = \sqrt{5\ \sin^2(\tau)+4\cdot\left(\sin^2(\tau)+\cos^2(\tau)\right)}$$
$$= \sqrt{5\ \sin^2(\tau)+4}\,.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5\ \sin^2(\tau)+4}}\begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau) \\ 2\ \cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



4. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor

Differenzieren Sie die gegebenen Kurven zweimal nach t, um den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zu bestimmen.

a) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ t \end{pmatrix}$

a)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2t) \\ e^t \\ -2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(2t) \\ e^t \\ -4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$$

b)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot e^{-t} \\ -e^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Ableitungen von Skalar- und Vektorprodukten

Gegeben seien die folgenden parameterabhängigen Vektoren:

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der folgenden Skalar- und Vektorprodukte mit Hilfe der entsprechenden Produktregel:

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ b) $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ c) $\vec{a} \times \vec{b}$ d) $\vec{a} \times \vec{c}$

a)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \cos t + 4t \cdot \sin t + 3t^4 - 2t \cdot \sin t + 2t^2 \cdot \cos t + 2t^4 =$$

$$= 5t^4 + 2t \cdot \sin t + 2(1 + t^2) \cdot \cos t$$

b)

$$\frac{d}{dt}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{c}} = 3t^2 - 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$$

c)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\cdot\cos t\\2\cdot\sin t\\t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\cdot\sin t\\2\cdot\cos t\\2t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2t^3-6t^2\cdot\sin t\\6t^2\cdot\cos t-t^2\\2\cdot\sin t-4t\cdot\cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t^3-2t^3\cdot\cos t\\-2t^3\cdot\sin t-2t^2\\2t\cdot\cos t+2t^2\cdot\sin t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}4t^3-6t^2\cdot\sin t-2t^3\cdot\cos t\\-3t^2-2t^3\cdot\sin t+6t^2\cdot\cos t\\2(1+t^2)\cdot\sin t-2t\cdot\cos t\end{pmatrix}$$

d)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{c}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{c}+\vec{a}\times\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix}3t^2+(t^3-3t^2)\cdot e^{-t}\\-2t-(t^3-3t^2)\cdot e^{-t}\\(1-3t+t^2)\cdot e^{-t}\end{pmatrix}$$

6. Bogenlänge

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen.

a) $\gamma: [0,a]\to\mathbb{R}^3, \gamma(t) = t\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$. b) $\gamma: [0,4\pi]\to\mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix}-t\cos t+\sin t\\\cos t+\text{t}\sin t\\\frac{t^2}{4}\end{pmatrix}$

a)

Für die Ableitung erhält man mit Hilfe der Produktregel

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\\1\end{pmatrix}.$$

Die Kurve hat damit die Länge

$$\begin{aligned}L &= \int_0^a \|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^a \|(\cos t-t\sin t, \sin t+t\cos t, 1)^\top\|\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^a \sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^a \sqrt{(1+t^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{2}\int_0^a \sqrt{1+(t/\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\text{Substitution: } t = \sqrt{2}\,x,\ \ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x\right]_0^{a/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(a/\sqrt{2})^2} + \operatorname{arsinh}(a/\sqrt{2}).$$

b)
Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) - t(-\sin(t)) + \cos(t) \\ -\sin(t) + \sin(t) + t\cos(t) \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Der Betrag ergibt sich zu

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t) + \frac{t^2}{4}} == \sqrt{t^2(\sin^2(t)+\cos^2(t)) + \frac{1}{4}} = t\sqrt{1+\frac{1}{4}} = t\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dieses Ergebnis wiederum eingesetzt in die Bogenlängenfunktion ergibt

$$L(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}\tau = \left[\tau^2\frac{\sqrt{5}}{4}\right]_0^t = t^2\frac{\sqrt{5}}{4}$$

7. Vektorfelder
Skizzieren Sie jeweils die gegebenen Vektorfelder.

a) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

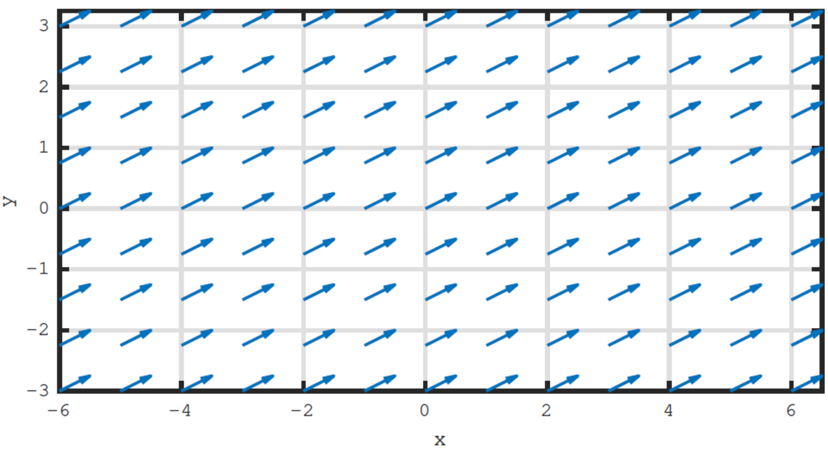
c) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

e) Plotten Sie das Vektorfeld aus a) – d) mit Python/Numpy.

a)
Dies ist ein homogenes Vektorfeld das sich die Länge und Richtung des Vektors nicht ändern und somit unabhängig von x und y sind.

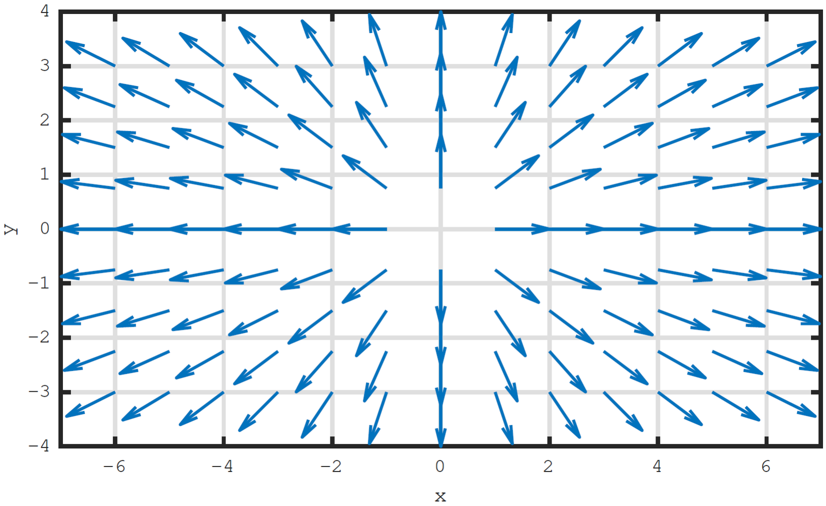
$$v(x;y) = \sqrt{0.5^2 + 0.25^2} \approx 0.6$$

$$m(x;y) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5\,.$$



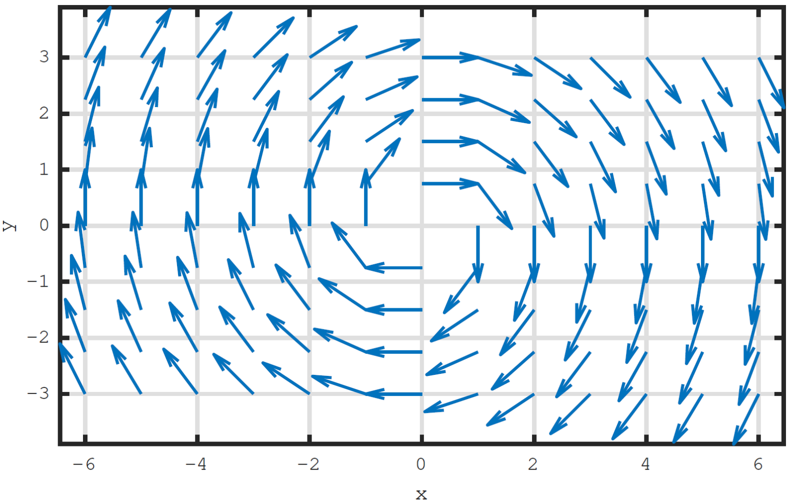
b)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 1$$



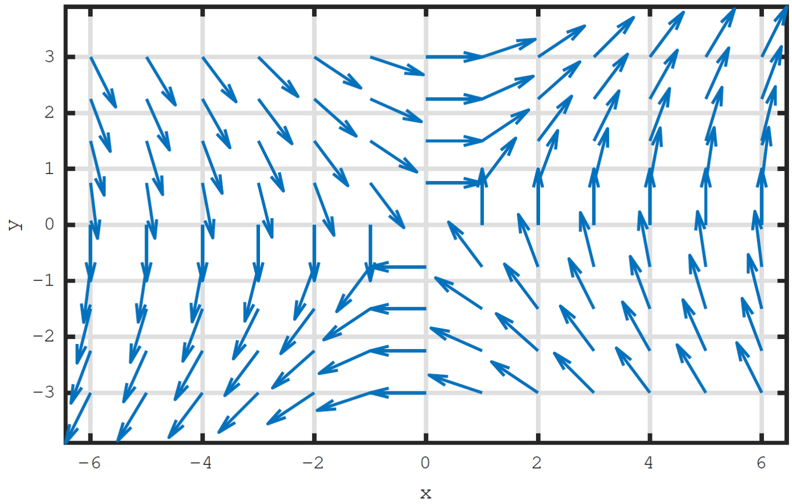
c)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+(-x)^2} = 1$$



d)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+x^2} = 1$$



e)

Code für b) (a), c), d) analog):

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3; #Intervalle auf x- und y-Achse
festlegen
N_x=13; N_y=9; #Anzahl Intervalle auf x- und y-Achse
sc=16; # für Skalierung beim Quiverplot (findet umgekehrt
statt 1/sc)
lw=0.005; # Linienstärke
fig=1;
# Funktionen:
def v(x,y):                          # Vektorfeld definieren
        v_x=x/((x**2+y**2)**0.5);
        v_y=y/((x**2+y**2)**0.5);
        return v_x,v_y;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x); # Generieren von Punkten auf
x-Achse
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y); # Generieren von Punkten auf
y-Achse
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data); # Generieren von
Punktepaaren (x,y)
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid); # Vektoren für die
jeweiligen (x,y) bestimmen
# Plot:
pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
# Plot eines Vektorfeldes
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y'); # x- und y-Achsenbeschriftung
pl.grid('on'); # Gitter wird angezeigt
pl.axis('image'); # Achse wird entsprechend dem Datenlimit
skaliert
```

8. Kurvenintegrale

Bestimmen Sie die folgenden skalaren bzw. vektoriellen Kurvenintegrale:

a) $\vec{\gamma}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, f(x,y,z) = x^2 + yz.$

b) $\vec{\gamma}$ ist die Verbindungsstrecke von (0;0) nach (1;1) und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ e^x \end{pmatrix}$.

a)

Für diese Kurve erhalten wir

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^\top, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

und damit für das Integral

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t + t\sin t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\pi - t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t\right) = -\sqrt{2}\pi.$$

b)

Die direkte Verbindungsstrecke ist gegeben durch $\gamma(t) = (t,t)^\top$, $t \in [0,1]$.
Das Kurvenintegral berechnet sich dann zu

$$\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}s = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (2t + \mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}.$$

9. Kurvenintegrale II

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\vec{w}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch
$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sowohl für $\vec{v}$ als auch für $\vec{w}$ jeweils das Kurvenintegral von A=(0;1) nach B=(1;2)

a) längs der Verbindungsgeraden
b) längs des Streckenzugs bestehend aus den Strecken von A nach (1;1) und von (1;1) nach B,
c) längs der Parabel $y = x^2 + 1$.

Wir bezeichnen mit γ_1 die direkte Verbindungsstrecke von A und B, mit γ_2 den Streckenzug, bestehend aus $\gamma_{2,1}$ von A nach $(1,1)^\top$, gefolgt von $\gamma_{2,2}$ von $(1,1)^\top$ nach B und mit γ_3 die Verbindungskurve von A nach B entlang der Parabel $y = x^2 + 1$. Wir wählen die folgenden Parametrisierungen:

(a) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 1+t)^\top$
(b) $\gamma_{2,1} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,1}(t) = (t,1)^\top$ und $\gamma_{2,2} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,2}(t) = (1, 1+t)^\top$
(c) $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (t, t^2+1)^\top$

Für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_a^b \boldsymbol{v}(\gamma(t))^\top \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$$

erhält man folglich:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2]\,\mathrm{d}t = 2$.

Entsprechend ergibt sich im Vektorfeld $\boldsymbol{w}$:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2]\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.

In der Tat hängt der Wert des Integrals $\int_\gamma \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}s$ für eine beliebige Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und vom Endpunkt $\gamma(b)$ der Kurve ab, d. h. das Integral ist *wegunabhängig* im $\mathbb{R}^2$.