Übungsblatt Sto 7

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Erwartungswert, Mittelwert, Varianz und Standardabweichung und können diese anwenden und erklären.
- Sie können den Erwartungswert, Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung für diskrete Zufallsvariablen bestimmen.

1. Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen

Welchen Erwartungswert besitzen die folgenden diskreten Verteilungen:

a)

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

b)

x_i	-2	-1	0	1	4	5	10
$f(x_i)$	1/12	2/12	2/12	3/12	2/12	1/12	1/12

c)

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	1/8	3/8	1/4	1/4

d) Bestimmen Sie für c) ausserdem den Erwartungswert der von X abhängigen Funktionen $Z_1 = g_1(X) = 5X + 2$, $Z_2 = g_2(X) = X^2$.

a) $E(X) = -0{,}1 + 0 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}75$

b) $E(X) = -\frac{2}{12} - \frac{2}{12} + 0 + \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12} + \frac{10}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

c)

$$E(X) = -\frac{2}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$$

d)

Linearitätssatz: $E(Z_1) = E(5X + 2) = 5 \cdot E(X) + 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} + 2 = \frac{21}{8}$

$$E(Z_2) = E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot f(x_i) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{17}{8}$$

2. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung diskreter Verteilungen
Bestimmen Sie den Mittelwert μ, die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ der folgenden diskreten Verteilungen:

a)

x_i	-2	2	4	6	8
$f(x_i)$	1/4	1/6	1/4	1/4	1/12

b)

x_i	-2	1	2	3	4
$f(x_i)$	1/8	1/4	1/2	1/16	1/16

c)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05	0,15

d) Bestimmen Sie für c) ausserdem die entsprechenden Kennwerte der von X abhängigen Funktion Z = $(X-\mu)^2$.

a) $$\mu = E(X) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{4}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{12} = 3$$

$$E(X^2) = \frac{4}{4} + \frac{4}{6} + \frac{16}{4} + \frac{36}{4} + \frac{64}{12} = 20$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 20 - 3^2 = 11; \qquad \sigma = \sqrt{11} = 3{,}3166$$

b) $$\mu = \frac{23}{16} = 1{,}4375; \qquad \sigma^2 = \frac{575}{256} = 2{,}2461; \qquad \sigma = 1{,}4987$$

c)

$$\mu = E(X) = -0{,}4 - 0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}45 = -0{,}05$$

$$E(X^2) = 0{,}8 + 0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 1{,}35 = 2{,}75$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = 2{,}75 - (-0{,}05)^2 = 2{,}7475; \qquad \sigma = 1{,}6576$$

d)

$$\mu_Z = E(Z) = \underbrace{E[(X-\mu)^2]}_{\sigma^2} = E[(X+0{,}05)^2] = \sigma^2 = 2{,}7475$$

$$E(Z^2) = E[(X-\mu)^4] = E[(X+0{,}05)^4] = \sum_i (x_i + 0{,}05)^4 \cdot f(x_i) =$$

$$= (-2+0{,}05)^4 \cdot 0{,}2 + (-1+0{,}05)^4 \cdot 0{,}3 + (0+0{,}05)^4 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (1+0{,}05)^4 \cdot 0{,}1 + (2+0{,}05)^4 \cdot 0{,}05 + (3+0{,}05)^4 \cdot 0{,}15 = 17{,}1212$$

$$\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2 = 17{,}1212 - 2{,}7475^2 = 9{,}5724; \qquad \sigma_Z = 3{,}0939$$

3. Lineare Transformation
Die Zufallsvariable X besitze den Mittelwert E(X) = μ_X = 2 und die Varianz Var(X) = σ_X^2 = 0,5. Berechnen Sie die entsprechenden Kennwerte der folgenden linearen Funktionen von X:

a) Z = 2X-3,
b) Z = -0,5X+2,
c) Z = -X.

$$E(Z = aX + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu_X + b$$

$$\operatorname{Var}(Z = aX + b) = a^2 \cdot \operatorname{Var}(X) = a^2 \cdot \sigma_X^2$$

a) $E(Z) = 1$; $\operatorname{Var}(Z) = 2$ b) $E(Z) = 1$; $\operatorname{Var}(Z) = 0{,}125$

c) E(Z) = -2, Var(Z) = 0,5

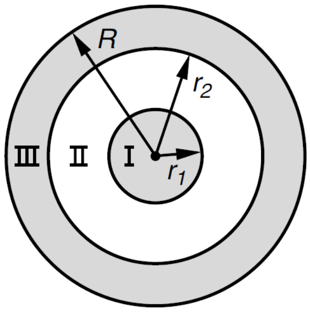
4. Sportschütze

Ein Sportschütze trifft eine kreisförmige Zielscheibe vom Radius R = 6 cm mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%. Die Scheibe wurde durch zwei konzentrische Kreise mit Radien r_1 = 2 cm und r_2 = 4 cm in drei kreisringförmige Bereiche unterteilt.

Bereich (I): $0 \le r \le r_1$

Bereich (II): $r_1 \le r \le r_2$

Bereich (III): $r_2 \le r \le R$



Trifft der Schütze die Scheibe, so erhält er in Abhängigkeit vom getroffenen Bereich die folgenden Punkte:

Getroffener Bereich	(I)	(II)	(III)	ausserhalb
Punkte	10	6	2	0

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x).

b) Welche Punktzahl kann man bei einem abgegebenen Schuss im Mittel erwarten?

Zufallsvariable: X = erreichte Punktzahl ($X = 0, 2, 6, 10$)

Der Schütze trifft die Scheibe mit der Wahrscheinlichkeit $P(\text{Scheibe}) = 0{,}6 = 3/5$. Für die Vergabe der Punkte ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Treffwahrscheinlichkeit von Bereich zu Bereich *verschieden* ist. Ein sinnvoller Multiplikator, der die Lage des Bereiches auf der Scheibe angemessen berücksichtigt, ist das *Verhältnis* der Fläche des Bereiches zur Gesamtfläche der Scheibe. Somit erhalten wir die folgenden *Treffwahrscheinlichkeiten* für die einzelnen Bereiche:

$X = 10$ **Treffer im Bereich (I)**

$$P(X = 10) = f(10) = \frac{\text{Ringfläche (I)}}{\text{Scheibenfläche}} \cdot P(\text{Scheibe}) = \frac{\pi r_1^2}{\pi R^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{(2\text{ cm})^2}{(6\text{ cm})^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\text{ cm}^2}{36\text{ cm}^2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{36 \cdot 5} = \frac{12}{3 \cdot 12 \cdot 5} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$$

$X = 6$ **Treffer im Bereich (II)**

$$P(X = 6) = f(6) = \frac{\text{Ringfläche (II)}}{\text{Scheibenfläche}} \cdot P(\text{Scheibe}) = \frac{\pi (r_2^2 - r_1^2)}{\pi R^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{(4\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2}{(6\text{ cm})^2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{(16 - 4)\text{ cm}^2}{36\text{ cm}^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12 \cdot 3}{36 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$X = 2$ **Treffer im Bereich (III)**

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{\text{Ringfläche (III)}}{\text{Scheibenfläche}} \cdot P(\text{Scheibe}) = \frac{\pi (R^2 - r_2^2)}{\pi R^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{(6\text{ cm})^2 - (4\text{ cm})^2}{(6\text{ cm})^2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{(36 - 16)\text{ cm}^2}{36\text{ cm}^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{20 \cdot 3}{36 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{3}$$

$X = 0$ **Scheibe verfehlt (Fehlschuss)**

$$P(X = 0) = f(0) = 1 - P(\text{Scheibe}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Verteilungstabelle $\left(\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}\right)$

x_i	0	2	6	10
$f(x_i) =$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$	$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$	$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

Der *Erwartungswert* (Mittelwert) der Zufallsvariablen X, d. h. die *mittlere* Punktzahl beträgt damit:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{6}{15} + 2 \cdot \frac{5}{15} + 6 \cdot \frac{3}{15} + 10 \cdot \frac{1}{15} = \frac{0 + 10 + 18 + 10}{15} = \frac{38}{15} = 2{,}53$$

5. Münzwurf

Eine Münze wird solange geworfen, bis Zahl (Z) oder insgesamt dreimal Wappen (W) erscheint. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der ausgeführten Würfe bis zum Eintritt dieses Ereignisses.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X.

b) Wie viele Würfe sind im Mittel auszuführen, bis das beschriebene Ereignis eintritt?

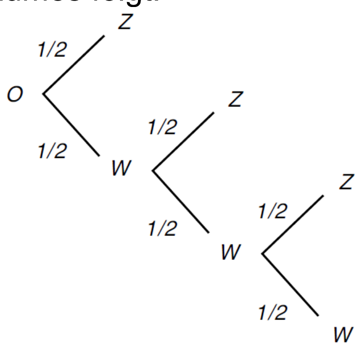
a) Mit Hilfe des unvollständingen Ereignisbaumes folgt:

$$f(1) = P(OZ) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(OWZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = P(OWWZ) + P(OWWW) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$



Verteilungstabelle:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

b) $E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$