FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 6

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Sinus-, Cosinus-, Tangens-, Cotangensfunktion, Steigung, Additionstheorem, Multiplikationstheorem und trigonometrische Gleichung und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Additions- und Multiplikationstheoreme für trigonometrische Funktionen anwenden.
- Sie können trigonometrische Gleichungen lösen.
- Sie können trigonometrische Gleichungen mit Python/Sympy lösen.

1. Aussagen über trigonometrische Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.	X	
b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.		X
c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\tan(x-y) = \tan x \cdot \cot y - \cot x \cdot \tan y$.		X
d) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi$.		X

2. Multiplikationstheoreme

Leiten Sie die folgenden Multiplikationsformeln mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus- und Cosinusfunktionen her.

a) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

c) $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

d) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Wir leiten mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus- und Cosinusfunktionen die Multiplikationstheoreme her.

a)

Mit Hilfe des Additionstheorems für die Sinusfunktion erhalten wir

$$\underline{\underline{\sin(2\cdot\alpha)}} = \sin(\alpha+\alpha) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = \underline{\underline{2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha).}}$$

b)

Mit Hilfe des Additionstheorems für die Cosinusfunktion erhalten wir

$$\underline{\underline{\cos(2\cdot\alpha)}} = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = \underline{\underline{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).}}$$

Mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ erhalten wir

$$\underline{\underline{\cos(2\cdot\alpha)}} = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \underline{\underline{1 - 2\cdot\sin^2(\alpha)}}$$

$$\underline{\underline{\cos(2\cdot\alpha)}} = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = \underline{\underline{2\cdot\cos^2(\alpha) - 1}}$$

c)
Mit Hilfe des Additionstheorems für die Sinusfunktion und mit den Ergebnissen von a) und b) ergibt sich

$$\underline{\underline{\sin(3\cdot\alpha)}} = \sin(2\cdot\alpha+\alpha) = \sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

$$= 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \left(1-2\sin^2(\alpha)\right)\cdot\sin(\alpha)$$

$$= 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 2\cdot\sin^3(\alpha)$$

$$= 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\left(1-\sin^2(\alpha)\right) + \sin(\alpha) - 2\cdot\sin^3(\alpha)$$

$$= 2\cdot\sin(\alpha) - 2\cdot\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha) - 2\cdot\sin^3(\alpha) = \underline{\underline{3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha).}}$$

d)
Mit Hilfe des Additionstheorems für die Cosinusfunktion und mit den Ergebnissen von a) und b) ergibt sich

$$\underline{\underline{\cos(3\cdot\alpha)}} = \cos(2\cdot\alpha+\alpha) = \cos(2\cdot\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(2\cdot\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

$$= \left(2\cdot\cos^2(\alpha)-1\right)\cdot\cos(\alpha) - 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

$$= 2\cdot\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin^2(\alpha)$$

$$= 2\cdot\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\left(1-\cos^2(\alpha)\right)$$

$$= 2\cdot\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cdot\cos(\alpha) + 2\cdot\cos^3(\alpha) = \underline{\underline{4\cdot\cos^3(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha).}}$$

3. Aussagen über trigonometrische Funktionen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.		X
b) Die Gleichung $2\cos x \sin x = 2$ hat keine Lösung.	X	
c) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$.	X	
d) Die Gleichung $\cos x = \cos(-x)$ hat nur die Lösung $x = 0$.		X
e) Für alle $x \in]0, \pi/2[$ gilt $\cot x \cdot \tan x > x$.		X
f) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\tan x \geq \sin x$.		X

4. Spezielle Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen
Berechnen Sie die Funktionswerte der folgenden trigonometrischen Funktionen exakt.

a) $\sin\pi/12$ b) $\cos\pi/12$ c) $\tan\pi/12$
d) $\cot\pi/12$ e) $\sin(\frac{5\pi}{12})$ f) $\cos(\frac{5\pi}{12})$
g) $\tan(\frac{5\pi}{12})$ h) $\cot(\frac{5\pi}{12})$

a)
Mit Hilfe des Additionstheorems für die Sinusfunktion ergibt sich

$$\underline{\underline{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}} = \sin\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right).}}$$

b)
Mit Hilfe des Additionstheorems für die Cosinusfunktion ergibt sich

$$\underline{\underline{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}} = \cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}.$$

c)
Wir verwenden die Ergebnisse aus a) und b)

$$\underline{\underline{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{3-2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}.$$

d)
Wir verwenden das Ergebnis aus c)

$$\underline{\underline{\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$$

$$= \underline{\underline{2+\sqrt{3}}}.$$

e)
Es gilt

$$\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}.$$

Dies bedeutet, dass π/12 und 5π/12 Komplementärwinkel sind. Daraus und durch Verwenden von b) ergibt sich

$$\underline{\underline{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}.$$

f)
Da π/12 und 5π/12 Komplementärwinkel sind und mit Verwenden von a) ergibt sich

$$\underline{\underline{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}.$$

g)
Da π/12 und 5π/12 Komplementärwinkel sind und mit Verwenden von d) ergibt sich

$$\underline{\underline{\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)}} = \cot\left(\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\underline{2+\sqrt{3}}}.$$

h)
Da π/12 und 5π/12 Komplementärwinkel sind und mit Verwenden von c) ergibt sich

$$\underline{\underline{\cot\left(\frac{5\pi}{12}\right)}} = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}.$$

5. Trigonometrische Gleichungen

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in [0,2\pi[$, welche die trigonometrische Gleichung erfüllen.

a) $\sin(2x) = 0$ b) $\sin x = \cos x$ c) $3\cot^2 x = 9$

d) $4\cos(3x) - 2 = 0$ e) $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2}$ f) $\cos x = \frac{3}{2}\cdot\tan x$

a)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$\sin(2 \cdot x) = 0.$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} & 2 \cdot x \in \{\, k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} \wedge x \in [0, 2\pi[\\ \Leftrightarrow \quad & x \in \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\,. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}.}}$$

b)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$\sin(x) = \cos(x).$$

Wir betrachten die Fälle $\cos(x) = 0$ und $\cos(x) \neq 0$ getrennt.

Fall 1: $\cos(x) = 0$. Für $x \in [0, 2\pi[$ folgt in diesem Fall

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \Rightarrow \sin(x) \in \{-1, 1\} \not\ni 0 = \cos(x).$$

Die *Gleichung* hat demnach keine Lösungen in diesem Fall.

Fall 2: $\cos(x) \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} & \sin(x) = \cos(x) && \Big| : \cos(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \tan(x) = 1. \end{aligned}$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} & x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\\ \Leftrightarrow \quad & x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 0, \frac{\pi}{4} + \pi \right\}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}.}}$$

c)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot \cot^2(x) = 9 && \Big| :3 \\
\Leftrightarrow\quad & \cot^2(x) = 3 && \Big| \sqrt{\cdots} \\
\Leftrightarrow\quad & \big|\cot(x)\big| = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\quad & \cot(x) = \pm\sqrt{3}\,.
\end{aligned}
$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$
\begin{aligned}
& x \in \left\{ k \cdot \pi \pm \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left\{ 0 + \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6} \right\}.
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}}}.
$$

d)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$
\begin{aligned}
& 4 \cdot \cos(3 \cdot x) - 2 = 0 && \Big| +2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4 \cdot \cos(3 \cdot x) = 2 && \Big| :4 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(3 \cdot x) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind demnach genau dann erfüllt, wenn gilt

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \wedge x \in [0, 2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left\{ k \cdot \frac{6\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left\{ 0 + \frac{\pi}{9}, \frac{6\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9}, \frac{12\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9}, \frac{18\pi}{9} - \frac{\pi}{9} \right\}.
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9} \right\}}}.
$$

e)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$\begin{aligned} && \sin(x)\cdot\cos(x) &= -\frac{1}{2} && \Big|\cdot 2 \\ \Leftrightarrow && 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) &= -1 && \\ \Leftrightarrow && \sin(2\cdot x) &= -1. && \end{aligned}$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind demnach genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} && 2\cdot x &\in \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\} \wedge x \in [0, 2\pi[\\ \Leftrightarrow && x &\in \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\cdot \pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\pi[\\ \Leftrightarrow && x &\in \left\{ \frac{3\pi}{4} + 0, \frac{3\pi}{4} + \pi \right\}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.}}$$

f)
Wir betrachten die *trigonometrische Gleichung*

$$\begin{aligned} && \cos(x) &= \frac{3}{2}\cdot\tan(x) && \\ \Leftrightarrow && \cos(x) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \Big|\cdot\cos(x) \\ \Leftrightarrow && \cos^2(x) &= \frac{3}{2}\cdot\sin(x) && \\ \Leftrightarrow && 1-\sin^2(x) &= \frac{3}{2}\cdot\sin(x). && \end{aligned}$$

Mit Hilfe der *Substitution* $s := \sin(x)$ finden wir

$$\begin{aligned} && 1-s^2 &= \frac{3}{2}\cdot s && \Big| + s^2 - 1 \\ \Leftrightarrow && 0 &= s^2 + \frac{3}{2}\cdot s - 1 && \Big|\cdot 2 \\ \Leftrightarrow && 0 &= 2\cdot s^2 + 3\cdot s - 2 && \Big|\text{MF.} \end{aligned}$$

Dies ist eine *quadratische Gleichung* für s mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 2,\ b = 3 \quad \text{und} \quad c = -2\,.$$

Die *Diskriminante* ist

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0.$

Mit Hilfe der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir

$s_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}.$

Die *quadratische Gleichung* hat somit die zwei reellen Lösungen

$$s_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Wir betrachten die Fälle $s = -2$ und $s = 1/2$ getrennt.

Fall 1: $s = -2$: In diesem Fall betrachten wir die *Gleichung*

$$\sin(x) = s = -2.$$

Weil für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x) \in [-1, 1]$, finden wir in diesem Fall keine *Lösung* für x.

Fall 2: $s = 1/2$: In diesem Fall betrachten wir die *Gleichung*

$$\sin(x) = s = \frac{1}{2}.$$

Die *Gleichung* und *Nebenbedingung* sind demnach genau dann erfüllt, wenn gilt

$$x \in \left(\left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \right) \cap [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 0 \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 0 \right\}.$$

Daraus erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}}}.$$

6. Trigonometrische Gleichungen mit Python/Sympy lösen

Lösen Sie die trigonometrischen Gleichungen aus Aufgabe 5 mit Python/Sympy.

a)

```
# Python initialisieren
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Python konfigurieren
x= sp.symbols('x');
# Berechnung
L=sp.solve(sp.sin(2*x),x);
# Ausgabe
dp.display(L);
```

b) – f)

analog zu a) – sehr wichtig: die Gleichung muss so umgestellt sein, dass auf der rechten Seite 0 steht

7. Laderampe auf Bergstrasse

Eine mobile Laderampe habe gegenüber der Strasse eine Steigung von 30%, wenn sie wie im Bild unten an einen Lieferwagen angelehnt wird. Wie gross ist die gesamte Steigung dieser Rampe, wenn sie auf einer Bergstrasse mit Steigung 15% aufgestellt wird, so dass die Front des Lieferwagens bergwärts gerichtet ist?

Die Winkel müssen zusammengezählt werden und dann wird das Additionstheorem für den Tangens angewandt. Da die Steigungen gegeben sind, können diese direkt für den Tangens eingesetzt werden:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{0{,}15 + 0{,}3}{1 - 0{,}15 \cdot 0{,}3} = 0{,}47 \equiv 47\%$$