Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 4

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Stufenform, reduzierte Stufenform, Dimensionszahl, Rang, Defekt, Pivot-Variable, freier Parameter und Verträglichkeit sowie deren wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können Rang, Defekt, Pivot-Variablen und freie Parameter für jedes LGS anhand einer Stufenform bestimmen und die Verträglichkeit auf jeder Zeile prüfen.
- Sie können anhand der Dimensionszahlen Rang und Defekt sowie den Verträglichkeiten auf jeder Zeile einer Stufenform die Lösungsmenge eines LGS beurteilen.
- Sie können die Lösungsmenge eines beliebigen LGS bzw. eines LGS mit Paramtern mit Hilfe des Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahrens bestimmen.

1. Aussagen über lineare Gleichungssystem

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jedes LGS hat genau eine Stufenform.		X
b) Jedes LGS hat genau eine reduzierte Stufenform.	X	
c) Ist ein LGS eindeutig lösbar, dann gilt: $n_R = n_V$.	X	
d) Gilt für ein LGS $n_R = n_V$, dann ist es eindeutig lösbar.		X
e) Die Lösungsmenge besteht niemals aus genau 2 Elementen.	X	
f) Für den Defekt eines LGS gilt: $n_D \leq n_G$.		X

2. Stufenformen

Bestimmen Sie jeweils die Pivot-Elemente, Pivot-Variablen, freien Parameter, Rang, Defekt und Lösungsmenge.

a) $\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

b) $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

c) $\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

d) $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

e) $\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

f) $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

g) $\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

h) $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

i) $\left|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 4\end{matrix}$

j) $\left|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 4\end{matrix}$

k) $\left|\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 4\end{matrix}$

l) $\left|\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 4\end{matrix}$

m) $\left|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 9\end{matrix}$

n) $\left|\begin{matrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\ 9\end{matrix}$

o) $\left|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}8\\ 9\end{matrix}$

p) $\left|\begin{matrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}8\\ 9\end{matrix}$

a)

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 0 = 2.$$

Demzufolge gibt es keine *Pivot-Variablen*, während x und y beides *freie Parameter* sind. Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L}}} = \left\{\left(x\,;y\right) \in \mathbb{R}^2\right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

b)

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(0\,;y\right) \in \mathbb{R}^2\right\}.}}$$

c)

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 0 & [2] & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist y *Pivot-Variable* und x ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(x\,;0\right) \in \mathbb{R}^2\right\}.}}$$

d)

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline [2] & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2x + 5y = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5y}{2}.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{5}{2}\,y\,;\,y \right) \in \mathbb{R}^2 \right\}}}.$$

e)

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; n_{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 0 = 2.$$

Demzufolge gibt es keine *Pivot-Variablen*, während x und y beides *freie Parameter* sind. Da auf der ersten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

f)

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2x = 6 \;\Rightarrow\; x = \frac{6}{2} = 3.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(3\,;\,y \right) \in \mathbb{R}^2 \right\}}}.$$

g)

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 0 & [2] & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist y *Pivot-Variable* und x ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2y = 6 \;\Rightarrow\; y = \frac{6}{2} = 3.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(x\,;\,3 \right) \in \mathbb{R}^2 \right\}}}.$$

h)

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \;\Rightarrow\; n_{\mathrm{R}} = 1 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$2x + 2y = 6 \;\Rightarrow\; x = \frac{6-2y}{2} = 3 - y.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(3-y; y\right) \in \mathbb{R}^2\right\}.}}$$

i)

$$\begin{array}{|cc|c|} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \;\Rightarrow\; n_\mathrm{R} = 0 \quad \text{und} \quad n_\mathrm{D} = n_\mathrm{V} - n_\mathrm{R} = 2 - 0 = 2.$$

Demzufolge gibt es keine *Pivot-Variablen*, während x und y beides *freie Parameter* sind. Da auf der zweiten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

j)

$$\begin{array}{|cc|c|} [2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \;\Rightarrow\; n_\mathrm{R} = 1 \quad \text{und} \quad n_\mathrm{D} = n_\mathrm{V} - n_\mathrm{R} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Da auf der zweiten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

k)

$$\begin{array}{|cc|c|} 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \;\Rightarrow\; n_\mathrm{R} = 1 \quad \text{und} \quad n_\mathrm{D} = n_\mathrm{V} - n_\mathrm{R} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist y *Pivot-Variable* und x ein *freier Parameter*. Da auf der zweiten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

l)

$$\begin{array}{|cc|c|} [2] & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \;\Rightarrow\; n_\mathrm{R} = 1 \quad \text{und} \quad n_\mathrm{D} = n_\mathrm{V} - n_\mathrm{R} = 2 - 1 = 1.$$

Demzufolge ist x *Pivot-Variable* und y ein *freier Parameter*. Da auf der zweiten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

m)

$$\begin{array}{|cc|c|} [2] & 0 & 0 \\ 0 & [3] & 9 \end{array} \;\Rightarrow\; n_\mathrm{R} = 2 \quad \text{und} \quad n_\mathrm{D} = n_\mathrm{V} - n_\mathrm{R} = 2 - 2 = 0.$$

Demzufolge sind x und y beides *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da es keine nicht erfüllten *Verträglichkeiten* gibt, ist das LGLS eindeutig lösbar. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$
\begin{aligned}
3y = 9 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{9}{3} = 3 \\
2x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}
$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(0;3)\}.}}
$$

n)

$$
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
[2] & 5 & 0 \\
0 & [3] & 9 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow n_R = 2 \quad \text{und} \quad n_D = n_V - n_R = 2 - 2 = 0.
$$

Demzufolge sind x und y beides *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da es keine nicht erfüllten *Verträglichkeiten* gibt, ist das LGLS eindeutig lösbar. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$
\begin{aligned}
3y = 9 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{9}{3} = 3 \\
2x + 5y = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{-5y}{2} = -\frac{5 \cdot 3}{2} = -\frac{15}{2} = -7.5\,.
\end{aligned}
$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-7.5;3)\}.}}
$$

o)

$$
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
[2] & 0 & 8 \\
0 & [3] & 9 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow n_R = 2 \quad \text{und} \quad n_D = n_V - n_R = 2 - 2 = 0.
$$

Demzufolge sind x und y beides *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da es keine nicht erfüllten *Verträglichkeiten* gibt, ist das LGLS eindeutig lösbar. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$
\begin{aligned}
3y = 9 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{9}{3} = 3 \\
2x = 8 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4.
\end{aligned}
$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(4;3)\}.}}
$$

p)

$$
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
[2] & 5 & 8 \\
0 & [3] & 9 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow n_R = 2 \quad \text{und} \quad n_D = n_V - n_R = 2 - 2 = 0.
$$

Demzufolge sind x und y beides *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da es keine nicht erfüllten *Verträglichkeiten* gibt, ist das LGLS eindeutig lösbar. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$3y = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{3} = 3$$

$$2x + 5y = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8-5y}{2} = \frac{8-5\cdot 3}{2} = \frac{-7}{2} = -3.5.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-3.5;3)\}}}.$$

3. Aussagen über ein LGS
Gegeben sei das folgende LGS:
x + y = 0
x - y = 0.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt $n_G = n_V$.	X	
b) Um das LGS in die Stufenform zu bringen, braucht es 2 Gauß-Schritte.		X
c) Der Rang des LGS beträgt 2.	X	
d) Das LGS hat unendlich viele Lösungen.		X
e) Die Variable y ist eine Pivot-Variable.	X	

4. Restaurant
In einem Restaurant sollen an 36 Tischen 104 Sitzplätze zur Verfügung stehen.
a) Mit wie vielen Zweier- und Vierertischen wäre dies möglich?
b) Wäre es auch möglich, das Restaurant nur mit Vierer- und Fünfertischen einzurichten?
c) Wie viele und welche Varianten gibt es, das Restaurant mit Zweier-, Vierer und Fünfertischen einzurichten?

a)
Wenn das Restaurant aus m Zweier- und n Vierertischen eingerichtet werden soll, dann muss gelten:
m + n = 36
2m + 4n = 104
Mit Hilfe des Gauß-Jordan Verfahrens erhalten wir

$$\begin{array}{|cc|c|} 1 & 1 & 36 \\ 2 & 4 & 104 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \end{array}\begin{array}{|cc|c|} [1] & 1 & 36 \\ 1 & 2 & 52 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array}\begin{array}{|cc|c|} [1] & 1 & 36 \\ 0 & [1] & 16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|} [1] & 0 & 20 \\ 0 & [1] & 16 \end{array}.$$

Rang und Defekt:
n_R =2, $n_D = n_V – n_R = 2 – 2 = 0$.
Pivot-Variablen: m und n und somit gibt es keine freien Parameter. Wir erhalten als Lösungsmenge: L = {(20;16)}. Somit lässt sich das Restaurant mit 20 Zweier- und 16 Vierertischen einrichten.
b)
Wenn das Restaurant aus m Vierer- und n Fünfertischen eingerichtet werden soll, dann muss gelten:
m + n = 36
4m + 5n = 104
Mit Hilfe des Gauß-Jordan Verfahrens erhalten wir

$$\begin{array}{c} \\ 4 \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} [1] & 1 & 36 \\ 4 & 5 & 104 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} [1] & 1 & 36 \\ 0 & [1] & -40 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} [1] & 0 & 76 \\ 0 & [1] & -40 \end{array}\right].$$

Rang und Defekt:
$n_R = 2$, $n_D = n_V - n_R = 2 - 2 = 0$.
Pivot-Variablen: m und n und somit gibt es keine freien Parameter. Wir erhalten als Lösungsmenge: L = {(76;-40)}. Da n = -40 gibt es keine Möglichkeit das Restaurant mit Vierertischen und Fünfertischen einzurichten.

c)
Wenn das Restaurant aus l Zweier-, m Vierer- und n Fünfertischen eingerichtet werden soll, dann muss gelten:
$l + m + n = 36$
$2l + 4m + 5n = 104$
Mit Hilfe des Gauß-Jordan Verfahrens erhalten wir

$$\begin{array}{c} \\ 2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} [1] & 1 & 1 & 36 \\ 2 & 4 & 5 & 104 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} [1] & 1 & 1 & 36 \\ 0 & [2] & 3 & 32 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} [1] & 1 & 1 & 36 \\ 0 & [1] & 1.5 & 16 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} [1] & 0 & -0.5 & 20 \\ 0 & [1] & 1.5 & 16 \end{array}\right].$$

Rang und Defekt:
$n_R = 2$, $n_D = n_V - n_R = 3 - 2 = 1$.
Pivot-Variablen: l und m und somit ist n ein freier Parameter.
Durch Ablesen der 2. und 1. Zeile der reduzierten Stufenform ergibt sich
$m + 1{,}5n = 16$, $\rightarrow$ $m = 16 - 1{,}5n$
$l - 0{,}5n = 20 \rightarrow l = 20 + 0{,}5n$

Wir erhalten als Lösungsmenge: L = {(20+0,5n;16-1,5n;n)}.
Wir können nun alle möglichen Varianten bestimmen, indem wir beachten, dass jeder der 3 Werte für l, m und n grösser 0 sein muss und dass die Werte für l, m und n ganzzahlig sein müssen. D. h. wir beginnen mit n = 1 und erhöhen dann den Wert von n um jeweils 1 und notieren jede sinnvolle Lösung.

l	m	n
21	13	2
22	10	4
23	7	6
24	4	8
25	1	10

5. Diskussion von LGS in Stufenform

a) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right.$

b) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right.$

c) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right.$

d) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

e) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

f) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

g) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$

h) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$

i) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.$

j) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right.$

k) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

l) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

m) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$

n) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right.$

o) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right.$

a)

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & [3] & 6 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 2,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und z *Pivot-Variablen*, während y ein *freier Parameter* ist. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$3z = 6 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{6}{3} = 2$$

$$x + 2y + 3z = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4 - 2y - 3z = 4 - 2y - 3 \cdot 2 = -2 - 2y.$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{\big(-2 - 2y\,;\, y\,;\, 2\big) \in \mathbb{R}^3\big\}}}.$$

b)

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 2,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 3y = 6 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{6}{3} = 2 \\ x + 2y + 3z = 4 \quad &\Rightarrow \quad x = 4 - 2y - 3z = 4 - 2 \cdot 2 - 3z = -3z. \end{aligned}$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-3z\,;\,2\,;\,z) \in \mathbb{R}^3\}.}}$$

c)

$$\begin{array}{|ccc|c|} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 1 & 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 2,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 3y + z = 6 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{6-z}{3} = 2 - \frac{z}{3} \\ x + 2y + 3z = 4 \quad &\Rightarrow \quad x = 4 - 2y - 3z = 4 - 2\left(2 - \frac{z}{3}\right) - 3z \\ &\qquad\quad = 4 - 2 \cdot 2 + \frac{2z}{3} - 3z = \frac{2}{3}\,z - \frac{9}{3}\,z = -\frac{7}{3}\,z. \end{aligned}$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{7}{3}\,z\,;\,2 - \frac{z}{3}\,;\,z\right) \in \mathbb{R}^3\right\}.}}$$

d)

$$\begin{array}{|ccc|c|} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & [3] & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und z *Pivot-Variablen*, während y ein *freier Parameter* ist. Da sich die *Stufenform* von der *Stufenform* in Teilaufgabe a) nur durch eine zusätzliche absolute Nullzeile unterscheidet, sind die *Lösungsmengen* identisch.

e)

$$\begin{array}{|ccc|c|} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Da sich die *Stufenform* von der *Stufenform* in Teilaufgabe b) nur durch eine zusätzliche absolute Nullzeile unterscheidet, sind die *Lösungsmengen* identisch.

f)

$$\begin{array}{|ccc|c|} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Da sich die *Stufenform* von der *Stufenform* in Teilaufgabe c) nur durch eine zusätzliche absolute Nullzeile unterscheidet, sind die *Lösungsmengen* identisch.

g)

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & [3] & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und z *Pivot-Variablen*, während y ein *freier Parameter* ist. Da auf der dritten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

h)

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Da auf der dritten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

i)

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 3,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 3 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 0.$$

Demzufolge sind x, y sowie z *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da es keine nicht erfüllten *Verträglichkeiten* gibt, ist das LGLS eindeutig lösbar. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} & & z &= 1 \\ 3y &= 6 & \Rightarrow \quad y &= \frac{6}{3} = 2 \\ x + 2y + 3z &= 4 & \Rightarrow \quad x &= 4 - 2y - 3z = 4 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -3. \end{aligned}$$

Die *Lösungsmenge* ist

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{\big(-3; 2; 1\big)\big\}}}.$$

j)

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & [3] & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 4,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und z *Pivot-Variablen*, während y ein *freier Parameter* ist. Da auf der vierten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

k)

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 4,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Da sich die *Stufenform* von der *Stufenform* in Teilaufgabe b) nur durch zwei zusätzliche absolute Nullzeilen unterscheidet, sind die *Lösungsmengen* identisch.

l)

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 4,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 3 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 0.$$

Demzufolge sind x, y sowie z *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da sich die *Stufenform* von der *Stufenform* in Teilaufgabe i) nur durch eine zusätzliche absolute Nullzeile unterscheidet, sind die *Lösungsmengen* identisch.

m)

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & [3] & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 5,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und z *Pivot-Variablen*, während y ein *freier Parameter* ist. Da auf der vierten Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

n)

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 5,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 1.$$

Demzufolge sind x und y *Pivot-Variablen*, während z ein *freier Parameter* ist. Da auf der fünften Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

o)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & 3 & 4 \\ 0 & [3] & 0 & 6 \\ 0 & 0 & [1] & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow n_{\mathrm{G}} = 5,\ n_{\mathrm{V}} = 3,\ n_{\mathrm{R}} = 3 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = 0.$$

Demzufolge sind x, y sowie z *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Da auf der fünften Zeile die *Verträglichkeit* nicht erfüllt ist, gibt es keine Lösung. Die *Lösungsmenge* ist leer, d.h. $\underline{\underline{\mathbb{L} = \varnothing}}$.

6. Lösen verschiedener LGS

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS, bei b) in Abhängigkeit von p und bei c) in Abhängigkeit von p und q.

a) $2x_1 + x_2 + 2x_4 = 6$
$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 16$
$-2x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2$
$-8x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -12$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2$

b) $2x + 3y - z = -3$
$-2x + y + 5z = 7$
$2y + 2z = p$ mit $p \epsilon \mathbb{R}$

c) $x + 2y = p$
$2x + qy = 4$ mit $p, q \epsilon \mathbb{R}$

d) $2x_1 - x_2 = 5$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
$x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$
$x_3 + 2x_4 - x_5 = -5$
$x_4 + 2x_5 = 3$

a)

Variante 1: Gauß-Verfahren

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 16 \\ -2 & -1 & 6 & -4 & 2 \\ -8 & -4 & 9 & -11 & -12 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Rang und Defekt:
$n_R = 2$, $n_D = n_V - n_R = 4 - 2 = 2$.
Pivot-Variablen: x_1 und x_3, freie Parameter: x_2 und x_4.
Es ergibt sich durch Einsetzen in die 2. und 1. Zeile der Stufenform:

$$3x_3 - x_4 = 4 \quad\Rightarrow\quad x_3 = \frac{4 + x_4}{3}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_4 = 6 \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{6 - x_2 - 2x_4}{2} = 3 - \frac{x_2}{2} - x_4$$

2. Variante: Gauß-Jordan-Verfahren

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{array} \left|\begin{array}{rrrr|r} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 16 \\ -2 & -1 & 6 & -4 & 2 \\ -8 & -4 & 9 & -11 & -12 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{array} \left|\begin{array}{rrrr|r} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrrr|r} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrrr|r} [2] & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & [3] & -1 & 4 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrrr|r} [1] & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & [1] & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right|. \qquad (8$$

Rang und Defekt:
$n_R = 2$, $n_D = n_V - n_R = 4 - 2 = 2$.
Pivot-Variablen: x_1 und x_3, freie Parameter: x_2 und x_4.
Es ergibt sich durch Einsetzen in die 2. und 1. Zeile der Stufenform:

$$x_3 - \frac{1}{3} \cdot x_4 = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad x_3 = \frac{4}{3} + \frac{x_4}{3} = \frac{4 + x_4}{3}$$

$$x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + x_4 = 3 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 3 - \frac{x_2}{2} - x_4.$$

b)
Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens

$$\begin{array}{r} \\ -1 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrr|r} [2] & 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & p \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} [2] & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & p \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2 \end{array} \left|\begin{array}{rrr|r} [2] & 3 & -1 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & p \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} 3 \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrr|r} [2] & 3 & -1 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} [2] & 0 & -4 & -6 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} [1] & 0 & -2 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 \end{array}\right|$$

Rang und Defekt:
$n_R = 2$, $n_D = n_V - n_R = 3 - 2 = 1$.
Pivot-Variablen: x und y, freier Parameter: z.

1. Fall: $p \neq 2$
Die Verträglichkeit in der dritten Zeile ist nicht erfüllt und somit gibt es keine Lösungen, d. h. $L = \varnothing$.

2. Fall: $p = 2$
Die reduzierte Stufenform ergibt sich zu

$$\left|\begin{array}{rrr|r} [1] & 0 & -2 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} [1] & 0 & -2 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rrr|r} [1] & 0 & -2 & -3 \\ 0 & [1] & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Aus der 2. und 1. Zeile ergibt sich
y + z = 1 → y = 1 – z
x – 2z = -3 → x = 2z – 3
Die Lösungsmenge ergibt sich zu L = {(2z-3; 1-z; z)}.
c)
Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens ergibt sich

$$\begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 2 & p \\ 2 & q & 4 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} [1] & 2 & p \\ 0 & q-4 & 4-2p \end{array}\right|$$

Zweite Zeile: für q ≠ 4 gibt es ein Pivot-Element.
1. Fall: q ≠ 4

$$\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 2 & p \\ 0 & [q-4] & 4-2p \end{array}\right|$$

Rang und Defekt:
n_R =2, n_D = n_V – n_R = 2 – 2 = 0.
Pivot-Variablen: x und y, es gibt keine freien Parameter. Das LGS ist also eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} (q-4)\,y = 4-2p \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{4-2p}{q-4} \\ x + 2y = p \quad &\Rightarrow \quad x = p - 2y = p - 2\,\frac{4-2p}{q-4} = \frac{p\,(q-4)}{q-4} - \frac{8-4p}{q-4} \\ &= \frac{pq-4p-8+4p}{q-4} = \frac{pq-8}{q-4}\,. \end{aligned}$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{pq-8}{q-4}\,;\,\frac{4-2p}{q-4}\right)\right\}}}\,.$$

2. Fall: q = 4

$$\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 2 & p \\ 0 & 0 & 4-2p \end{array}\right|$$

Rang und Defekt:
n_R =2, n_D = n_V – n_R = 2 – 1 = 1.
Pivot-Variable: x, es gibt einen freien Parameter: y. Verträglichkeit in der zweiten Zeile: für 4 – 2p = 0, also p = 2 ist die Verträglichkeit gegeben.
→ p = 2:

$$\left|\begin{array}{cc|c} [1] & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Es ergibt sich x + 2y = 2 → x = 2 – 2y. Die Lösungsmenge ist L = {(2-2y; y)}.
→ p ≠ 2:
Verträglichkeit in der zweiten Zeile ist nicht gegeben und somit lässt sich das LGS nicht lösen, d. h. L = ∅.
d)
Anwenden des Gauß-Verfahrens

$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{r|ccccc|c|}
\cline{2-7}
 & [1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
[1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{r|ccccc|c|}
\cline{2-7}
 & [1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
-5 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
[1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 12 & -5 & 0 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{r|ccccc|c|}
\cline{2-7}
 & [1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
 & 0 & 0 & [1] & 2 & -1 & -5 \\
12 & 0 & 0 & 12 & -5 & 0 & -7 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
[1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & [1] & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -29 & 12 & 53 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{r|ccccc|c|}
\cline{2-7}
 & [1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
 & 0 & 0 & [1] & 2 & -1 & -5 \\
 & 0 & 0 & 0 & [1] & 2 & 3 \\
-29 & 0 & 0 & 0 & -29 & 12 & 53 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
[1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & [1] & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & [1] & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 140 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
[1] & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & [1] & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & [1] & 2 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & [1] & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & [1] & 2 \\
\hline
\end{array} .
$$

Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& & x_5 &= 2 \\
x_4 + 2x_5 &= 3 &\Rightarrow\quad x_4 &= 3 - 2x_5 = 3 - 4 = -1 \\
x_3 + 2x_4 - x_5 &= -5 &\Rightarrow\quad x_3 &= -5 - 2x_4 + x_5 = -5 + 2 + 2 = -1 \\
x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 &\Rightarrow\quad x_2 &= -2 - 2x_3 + x_4 = -2 + 2 - 1 = -1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 &\Rightarrow\quad x_1 &= 1 - 2x_2 + x_3 = 1 + 2 - 1 = 2.
\end{aligned}
$$

Die *Lösungsmenge* des LGLS ist demnach

$$
\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{\big(2;-1;-1;-1;2\big)\big\}.}}
$$

7. Aussagen über ein Gauß-Schema

Gegeben sei das folgende Gauss-Schema mit den Parametern $p, q \in \mathbb{R}$.

0	0	2	p	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1-p
0	0	0	0	0	0	0	p	3	0	0	p	0	0	q	0	0	0	0	0	2-q
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q	0	0	q	0	0	0	3-p
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4-q

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Für $q \neq 4$ hat das LGS keine Lösung.	X	
b) Die Variable x_1 ist ein freier Parameter.	X	
c) Der Rang des LGS hängt vom Wert des Parameters p ab.		X
d) Für $p \neq 0$ und $q \neq 0$ hat das LGS neun Pivot-Variablen.		X
e) Der Defekt des LGS hängt vom Wert von q ab.	X	
f) Für $q = 4$ hat das LGS unendlich viele Lösungen.	X	