Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt DGL 11

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Fourier-Transformation und -Rücktransformation sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Fourier-Transformation einer einfachen Funktion bestimmen.
- Sie können mit Hilfe einer Transformationstabelle die Fourier-Rücktransformation durchführen.
- Sie können mit Hilfe der Fourier-Transformation einfache lineare DGL 1. Ordnung lösen.

---

1. Aussagen über Fourier-Entwicklungen und -Transformationen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ kann aus physikalischer Sicht als Spektrum interpretiert werden.	X	
b) Jede Funktion der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Fourier-Transformierte.		X
c) Nur periodische Funktionen der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben eine Fourier-Transformierte.		X
d) Die Bildfunktion einer konstanten Funktion ist konstant.		X
e) Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$, dann folgt $2f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2F(\omega)$.	X	
f) Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(\omega)$, dann folgt $F(\omega) + G(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) + g(t)$.	X	
g) Mit Hilfe der Fourier-Transformation lässt sich jede lineare DGL einfach lösen.		X

2. Fourier-Transformationen

Berechnen Sie für die angegeben Funktionen die Fourier-Transformierten.

a)
$$f(t) = \begin{cases} A \mid t \in [-T, T] \\ 0 \mid \text{sonst} \end{cases}$$

b)
$$f(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \mid t \in [-T, T] \\ 0 \mid \text{sonst} \end{cases}$$

c)

$$f(t) = \begin{cases} a^2 - t^2 \mid |t| \le a \\ 0 \mid |t| > a \end{cases}$$

a)

$$\underline{\underline{F(\omega)}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} A\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\Big|_{-T}^{T} = -\frac{A}{\mathrm{i}\omega}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T}\right)$$

$$= \frac{2A}{\omega}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}}{2\mathrm{i}} = \underline{\underline{\frac{2A}{\omega}\cdot\sin(\omega T).}}$$

b)

Mit Hilfe von partieller Integration ergibt sich

$$\underline{\underline{F(\omega)}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} A\cdot\left(1 - \overset{\downarrow}{\frac{|t|}{T}}\right)\cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[A\cdot\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\cdot\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\Big|_{-T}^{T} - \int_{-T}^{T} A\cdot\left(0 - \frac{\operatorname{sgn}(t)}{T}\right)\cdot\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 0 - \frac{A}{\mathrm{i}\omega T}\int_{-T}^{T}\operatorname{sgn}(t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{\mathrm{i}\omega T}\cdot\left(\int_{-T}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{A}{\mathrm{i}\omega T}\cdot\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\Big|_{-T}^{0} - \frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\Big|_{0}^{T}\right) = \frac{A}{\omega^2 T}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T} + 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right)$$

$$= \frac{2A}{\omega^2 T}\cdot\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{2A}{\omega^2 T}\cdot\big(1-\cos(\omega T)\big).}}$$

c)

$$F(\omega) = \int_{-a}^{a}(a^2 - t^2)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,dt = a^2\cdot\underbrace{\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,dt}_{I_1} - \underbrace{\int_{-a}^{a}t^2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,dt}_{I_2} = a^2 I_1 - I_2$$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2:

$$I_1 = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}}{\mathrm{j}\omega} = \frac{2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} \qquad (\text{Integral: } 312 \text{ mit } a = -\mathrm{j}\omega)$$

$$I_2 = \left[\frac{(-\omega^2 t^2 + \mathrm{j}2\omega t + 2)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{(-\mathrm{j}\omega)^3}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{\omega^2 a^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}) + \mathrm{j}2\omega a(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}) - 2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a})}{\mathrm{j}\omega^3} =$$

$$= \frac{2a^2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} + \frac{4a\cdot\cos(\omega a)}{\omega^2} - \frac{4\cdot\sin(\omega a)}{\omega^3} \qquad (\text{Integral: } 314 \text{ mit } a = -\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\omega) = a^2 I_1 - I_2 = \frac{2a^2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} - \frac{2a^2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} - \frac{4a \cdot \cos(\omega a)}{\omega^2} + \frac{4 \cdot \sin(\omega a)}{\omega^3} =$$

$$= \frac{4[\sin(\omega a) - a\omega \cdot \cos(\omega a)]}{\omega^3}$$

Integrale:

$$(312) \quad \int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$$

$$(314) \quad \int x^2 \cdot e^{ax}\, dx = \left(\frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3}\right) \cdot e^{ax}$$

3. Fourier-Transformation einer DGL

Gegeben sei die Differentialgleichung
$\dot{x} = 2x + \sigma(t) \cdot e^{-3t}$.
Berechnen Sie die Lösung der DGL mit Hilfe der Fourier-Transformation.

Mit Hilfe einer FOURIER-*Transformationstabelle* finden wir

$$x \circ\!\!-\!\!\bullet\, X$$

$$\dot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \mathrm{i}\omega X$$

$$\sigma(t) \cdot \mathrm{e}^{-3t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\mathrm{i}\omega + 3}\,.$$

Einsetzen ergibt:

$$\mathrm{i}\omega X = 2X + \frac{1}{3 + \mathrm{i}\omega} \qquad \Big|\, -2X$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{i}\omega X - 2X = (\mathrm{i}\omega - 2) \cdot X = \frac{1}{\mathrm{i}\omega + 3} \qquad \Big|\, : (\mathrm{i}\omega - 2)$$

Daraus erhalten wir

$$X(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega - 2} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}\omega + 3} = \frac{1}{(\mathrm{i}\omega - 2) \cdot (\mathrm{i}\omega + 3)}\,.$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{(\mathrm{i}\omega - 2) \cdot (\mathrm{i}\omega + 3)}\, \mathrm{d}\omega}}$$

4. Fourier-Rücktransformation

Bestimmen Sie zu den angegebenen Bildunktionen durch Rücktransformation die Originalfunktion.

a) $F(\omega) = \frac{5}{(2+i\omega)^2}$ b) $F(\omega) = \cos(5\omega)$

c) $F(\omega) = \frac{2}{5+i\omega} - \frac{3}{2+i\omega}$

a)

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}\right\} = 5\cdot\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}\right\} = 5t\cdot\mathrm{e}^{-2t}\cdot\sigma(t)$$

b)

$$\mathcal{F}^{-1}\{\cos(5\omega)\} = \frac{1}{2}\cdot\mathcal{F}^{-1}\{2\cdot\cos(5\omega)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]$$

c)

$$F(\omega) = 2\cdot\frac{1}{5+\mathrm{j}\omega} - 3\cdot\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega} \quad\Rightarrow\quad f(t) = (2\cdot\mathrm{e}^{-5t} - 3\cdot\mathrm{e}^{-2t})\cdot\sigma(t)$$