

Übungsblatt DGL 13

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen den Begriff des Separationsansatzes und können diesen zur Lösung von PDGLs einsetzen.
- Sie kennen die Methode von d'Alembert zur Lösung von bestimmten PDGLs und können diese für die Wellengleichung anwenden.
- Sie kennen die Methode der Charakteristiken zur Lösung von PDGLs 1. Ordnung und können diese anwenden.

1. Lösen der Laplace-Gleichung

Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u_y(x, 0) = 0, u(x, 1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x) \text{ für } x \in [0, 1] \text{ sowie}$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \text{ für } y \in [0, 1]$$

mithilfe eines Separationsansatzes.

Der Separationsansatz der Form $u(x, y) = V(x)W(y)$ führt auf

$$V''(x)W(y) + V(x)W''(y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{V''(x)}{V(x)} = -\frac{W''(y)}{W(y)},$$

wenn $V(x) \not\equiv 0$ und $W(y) \not\equiv 0$ sind. Es folgt, dass diese Identität nur erfüllt werden kann, wenn beide Seiten konstant sind. Damit ergeben sich die gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$V''(x) = k V(x) \quad \text{und} \quad W''(y) = -k W(y)$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$V(x) = a_1 \exp(\sqrt{k}x) + a_2 \exp(-\sqrt{k}x),$$

$$W(y) = a_3 \exp(\sqrt{-k}y) + a_4 \exp(-\sqrt{-k}y).$$

Aus den Randbedingungen $u(0, y) = u(1, y) = 0$ folgt $V(0) = V(1) = 0$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} V(0) &= (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \\ V(1) &= a_1 \exp(\sqrt{k}) - a_1 \exp(-\sqrt{k}) = 0 \\ &\Rightarrow \exp(\sqrt{k}) = \exp(-\sqrt{k}) \Rightarrow \exp(2\sqrt{k}) = 1 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{k} = 2\pi i n \Rightarrow k = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

So sind mit

$$W_n(y) = \tilde{d}_n (\exp(\pi n y) + \exp(-\pi n y)) = 2\tilde{d}_n \cosh(\pi n y)$$

und

$$V_n(x) = \tilde{c}_n (\exp(i\pi n x) - \exp(-i\pi n x)) = 2\tilde{c}_n \sin(\pi n x)$$

die zugehörigen Lösungen durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x) \cosh(\pi n y)$$

gegeben.

Die Koeffizienten c_n sind noch aus der Bedingung $u(x, 1) = x$ zu bestimmen, d. h.

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x) \cosh(\pi n) \\ &= \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $c_1 = -2 \cosh(\pi)$, $c_3 = 1$ und $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$. Damit ergibt sich insgesamt die Lösung

$$u(x, t) = -\frac{2}{\cosh \pi} \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + \sin(3\pi x) \cosh(3\pi y).$$

A1

$$\Delta U(x,y) = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ODE}$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = 0$$

IC

$$U(x,1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x)$$

$$x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow U(0,y) = U(1,y) = 0 \quad y \in [0,1]$$

Separationsansatz: $U(x,y) = v(x) \cdot w(y)$

Einsetzen in Laplace gl.:

$$w(y) \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + v(x) \cdot \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow w(y) \cdot v''(x) + v(x) \cdot w''(y) = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = - \frac{w''(y)}{w(y)} = \text{konst.} \rightarrow v(x) \neq 0 \wedge w(y) \neq 0$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \text{konst.} \Leftrightarrow v''(x) = k \cdot v(x)$$

$$v'(x) = \int k \cdot v(x) dx$$

$$= k \cdot \int v(x) dx$$

$$\text{wähle: } v(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$$

$$v'(x) = c_1 \sqrt{k} e^{\sqrt{k}x} - c_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}x}$$

$$v''(x) = c_1 k e^{\sqrt{k}x} + c_2 k e^{-\sqrt{k}x}$$

$$\text{wähle: } w(y) = c_3 e^{\sqrt{k}y} + c_4 e^{-\sqrt{k}y}$$

$$IC: v(0,y) = v(1) \cdot w(y) = v(1) \cdot w(y) = 0$$

$$v(0) = v(1) = 0$$

$$v(0) = c_1 + c_2 = c_1 \cdot e^{\sqrt{k}} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{k}} = 0$$

$$\rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\rightarrow c_1 \cdot e^{\sqrt{k}} - c_1 \cdot e^{-\sqrt{k}} = 0$$

$$c_1 \cdot (e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}}) = 0$$

$$e^{\sqrt{k}} = e^{-\sqrt{k}}$$

$$e^{2\sqrt{k}} = 1$$

$$2\sqrt{k} = 2\pi i \cdot n$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$k = -\pi^2 n^2$$

es ergibt sich für $w(y)$:

$$w(y) = c_3 e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y} + c_4 e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial y} = v(x) \cdot w'(0) = 0 \Leftrightarrow w'(0) = 0$$

$$w'(y) = c_3 \sqrt{-\pi^2 n^2} e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y} - c_4 \sqrt{-\pi^2 n^2} e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}$$

$$w'(0) = 0$$

$$c_3 e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} \cdot 0} = c_4 e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} \cdot 0}$$

$$c_3 = c_4$$

$$\Rightarrow w(y) = c_3 [e^{\sqrt{-\pi^2 n^2} y} + e^{-\sqrt{-\pi^2 n^2} y}]$$

$$= c_3 \cdot 2 \cosh(\pi n y)$$

$$\Rightarrow \text{wähle Ansatz } w(y) = c_3 e^{\sqrt{-k} y} + c_4 e^{-\sqrt{k} y}$$

$$\rightarrow w_n(y) = 2c_3 \cosh(\pi n y)$$

$$\rightarrow v_n(x) = c_1 [e^{i\pi n x} - e^{-i\pi n x}]$$

$$= c_1 [\cos(\pi n x) + i \sin(\pi n x) - \cos(-\pi n x) - i \sin(-\pi n x)]$$

$$= c_1 [2i \sin(\pi n x)]$$

$$\Rightarrow u(x, y) = v(x) \cdot w(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n} \sin(\pi n x) \cdot \tilde{c}_{3,n} \cosh(\pi n y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\pi n x) \cdot \cosh(\pi n y)$$

C mittels IC bestimmen:

$$u(x, 1) = \sin(3\pi x) \cosh(3\pi) - 2 \sin(\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\pi n x) \cosh(\pi n)$$

Koeffizientenvergleich:

$$C_3 = 1$$

$$C_1 \sin(\tilde{\pi} x) \cosh(\tilde{\pi}) = -2 \sin(\tilde{\pi} x)$$

$$C_1 \cdot \cosh(\tilde{\pi}) = -2$$

$$C_1 = -\frac{2}{\cosh(\tilde{\pi})}, \text{ alle anderen } C_n = 0$$

$$\rightarrow U(x, y) = -\frac{2}{\cosh(\tilde{\pi})} \cdot \sin(\tilde{\pi} x) \cdot \cosh(\tilde{\pi} y) \\ + \sin(3\tilde{\pi} x) \cdot \cosh(3\tilde{\pi} y)$$

2. Helmholtz-Gleichung

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ mit $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ mithilfe des Separationsansatzes $u(x, t) = e^{ikt} U(x)$ auf die Helmholtz-Gleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k^2 u = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(x_1, 0) = u(x_1, b) = u(0, x_2) = u(a, x_2) = 0$$

für $0 < a, b \in \mathbb{R}$, indem Sie $k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2$ setzen und einen Separationsansatz benutzen.

(a) Der Ansatz

$$u(x, t) = e^{ikt} U(x)$$

liefert

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (ik)^2 \exp(ikt) U(x) = -k^2 \exp(ikt) U(x), \\ u_{x_j x_j} &= \exp(ikt) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_j^2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Somit folgt aus $u_{tt} = \Delta u$ die Identität

$$-k^2 \exp(ikt) U(x) = \exp(ikt) (U_{x_1 x_1} + U_{x_2 x_2}),$$

d. h., es gilt die Helmholtz-Gleichung $-k^2 U(x) = \Delta U(x)$.

(b) Ein Separationsansatz der Form

$$u(x_1, x_2) = U(x_1)V(x_2)$$

führt auf

$$U''(x_1)V(x_2) + U(x_1)V''(x_2) + k^2U(x_1)V(x_2) = 0$$

bzw.

$$\frac{U''(x_1)}{U(x_1)} + \frac{V''(x_2)}{V(x_2)} + k^2 = 0,$$

wenn $U(x_1) \neq 0$ und $V(x_2) \neq 0$ sind. Diese Identität kann nur erfüllt werden, wenn

$$U''(x_1)/U(x_1) = -k_{x_1}^2 \text{ und } V(x_2)''/V(x_2) = -k_{x_2}^2$$

mit $k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = k^2$ gilt. Die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differenzialgleichungen lauten

$$U(x_1) = a_1 \exp(\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1) + a_2 \exp(-\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1)$$
$$V(x_2) = a_3 \exp(\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2) + a_4 \exp(-\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2).$$

Aus den Randbedingungen $u(x_1, 0) = u(x_1, b) = 0$ folgt $V(0) = V(b) = 0$. Wir erhalten:

$$V(0) = a_3 + a_4 \Rightarrow a_3 = -a_4$$

$$V(b) = a_3 (\exp(\sqrt{-k_{x_2}^2} b) - \exp(-\sqrt{-k_{x_2}^2} b)) = 0$$

Also folgt

$$\exp(\sqrt{-k_{x_2}^2} b) = \exp(-\sqrt{-k_{x_2}^2} b) \text{ bzw. } \exp(2\sqrt{-k_{x_2}^2} b) = 1.$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $2\sqrt{-k_{x_2}^2} b = 2\pi i n$ bzw. $\sqrt{k_{x_2}^2} = \frac{\pi n}{b}$. Also ist $k_{x_2}^2 = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Analog erhalten wir aus $u(0, x_2) = u(a, x_2) = 0$ die Bedingungen $U(0) = U(a) = 0$ und damit

$$a_1 = -a_2 \quad \text{und} \quad k_{x_1}^2 = \frac{\pi^2 m^2}{a}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Damit ergeben sich die zugehörigen Lösungen

$$V_n(x_2) = \tilde{c}_n \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right),$$

$$U_m(x_1) = \tilde{d}_m \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right).$$

Jegliche Linearkombinationen dieser Funktionen sind weitere Lösungen. Insgesamt können wir die Klasse der Lösungen beschreiben durch Entwicklungen der Form

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_m(x_1) V_n(x_2) \\ &= \sum_{n,m} c_{nm} \sin\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right) \end{aligned}$$

mit

$$k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

und bei entsprechender Konvergenz der Reihe.

A2

Wellengl.: $U_{tt} = \Delta U$ $U(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial^2 U(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U(\vec{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{x}, t)}{\partial x_2^2}$$

a) Separationsansatz: $U(\vec{x}, t) = e^{ikt} U(\vec{x})$

Einsetzen: $-k^2 e^{ikt} U(\vec{x}) = e^{ikt} \left[\frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_2^2} \right]$

$$-k^2 U(\vec{x}) = \Delta U(\vec{x})$$

b) $\frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_2^2} + k^2 \cdot U(\vec{x}) = 0$ PDE

$U(x_1, 0) = U(x_1, b) = U(0, x_2) = U(a, x_2) = 0$ IC

nutze: $k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2$

c) Ansatz: $U(\vec{x}) = v(x_1) \cdot w(x_2)$

Einsetzen in PDE:

$$w(x_2) \cdot v''(x_1) + v(x_1) \cdot w''(x_2) + k^2 v(x_1) \cdot w(x_2) = 0$$

$$\frac{v''(x_1)}{v(x_1)} + \frac{w''(x_2)}{w(x_2)} + k^2 = 0 \quad v(x_1) \neq 0 \neq w(x_2)$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{= k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2}$$

$$\rightarrow \frac{v''(x_1)}{v(x_1)} = -k_{x_1}^2 \quad \wedge \quad \frac{w''(x_2)}{w(x_2)} = -k_{x_2}^2$$

$$\rightarrow V(x_1) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} x_1}$$

$$W(x_2) = c_3 e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2} + c_4 e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} x_2}$$

Betrachte IC: $U(x_1, 0) = U(x_1, b) = 0$

$$c_3 + c_4 = 0 \Leftrightarrow c_3 = -c_4$$

$$W(b) = c_3 [e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} b} - e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} b}] = 0$$

$$e^{\sqrt{-k_{x_2}^2} b} = e^{-\sqrt{-k_{x_2}^2} b}$$

$$e^{2\sqrt{-k_{x_2}^2} b} = 1$$

$$2\sqrt{-k_{x_2}^2} b = 2\pi i \cdot n$$

$$b = \frac{2\pi i n}{2\sqrt{-k_{x_2}^2}} = \frac{\pi i n}{k_{x_2} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\pi n}{k_{x_2}}$$

$$k_{x_2} = \frac{\pi n}{b}$$

Betrachte IC: $U(0, x_2) = U(a, x_2) = 0$

$$c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -c_2$$

$$V(a) = c_1 [e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} a} - e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} a}] = 0$$

$$e^{\sqrt{-k_{x_1}^2} a} = e^{-\sqrt{-k_{x_1}^2} a}$$

$$e^{2\sqrt{-k_{x_1}^2} a} = 1 \quad (\text{Exponent} = 0)$$

$$2\sqrt{-k_{x_1}^2} a = 2\pi i \cdot m$$

$$+ k_{x_1}^2 = \frac{+\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}$$

$$\rightarrow V_m(x_1) = C_m \left[e^{\sqrt{\frac{\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}} x_1} - e^{-\sqrt{\frac{\tilde{\pi}^2 m^2}{a^2}} x_1} \right]$$

$$= C_m \left[\cos\left(\frac{\tilde{\pi} m}{a} x_1\right) + i \sin\left(\frac{\tilde{\pi} m}{a} x_1\right) - \cos\left(-\frac{\tilde{\pi} m}{a} x_1\right) - i \sin\left(-\frac{\tilde{\pi} m}{a} x_1\right) \right]$$

$$= \underbrace{C_m \cdot i \cdot 2}_{=\tilde{C}_m} \sin\left(\frac{\tilde{\pi} m}{a} \cdot x_1\right)$$

$$W_n(x_2) = C_n \left[e^{\sqrt{\frac{\tilde{\pi}^2 n^2}{b^2}} x_2} - e^{-\sqrt{\frac{\tilde{\pi}^2 n^2}{b^2}} x_2} \right]$$

$$= C_n \left[\cos\left(\frac{\tilde{\pi} n}{b} x_2\right) + i \sin\left(\frac{\tilde{\pi} n}{b} x_2\right) - \cos\left(-\frac{\tilde{\pi} n}{b} x_2\right) - i \sin\left(-\frac{\tilde{\pi} n}{b} x_2\right) \right]$$

$$= \underbrace{C_n \cdot 2i}_{=\tilde{C}_n} \sin\left(\frac{\tilde{\pi} n}{b} \cdot x_2\right)$$

$$\text{ally. Lsg: } U(\vec{x}) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{C}_m \tilde{C}_n \sin\left(\frac{\tilde{\pi} m}{a} \cdot x_1\right) \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\pi} n}{b} \cdot x_2\right)$$

$$k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_2}^2 = \left(\frac{\tilde{\pi} m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\pi} n}{b}\right)^2$$

3. Lösen einer PDGL 1. Ordnung mit dem Charakteristikenverfahren

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u = 0, \quad x, y > 0,$$

$$u(x, -x^2) = e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Finden Sie die Lösung $u = u(x, y)$ mit dem Charakteristikenverfahren.

a) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$tu_t + u_x = 2u, \quad u(x, 1) = x \quad (u, t > 0).$$

Benutzen Sie das Charakteristikenverfahren zur Bestimmung der Lösung u .

a)

Das System der charakteristischen Differenzialgleichungen ist mit $w(s) := u(k_1(s), k_2(s))$:

$$k_1'(s) = k_1(s),$$

$$k_2'(s) = k_2(s),$$

$$w'(s) = -(k_1(s)^2 + k_2(s)^2) w(s).$$

Es folgt $k_1(s) = c_1 e^s$, $k_2(s) = c_2 e^s$ und somit

$$w'(s) = -(c_1^2 + c_2^2) e^{2s} w(s).$$

Dies liefert die Lösung

$$w(s) = c_3 \exp\left(-\frac{1}{2}(k_1(s)^2 + k_2(s)^2)\right).$$

Als nächstes wird die Anfangskurve parametrisiert:

$$(x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = \left(t, -t^2, \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\right).$$

Für $s = 0$ soll $(k(s), w(s))$ auf dieser Anfangskurve liegen.

Damit folgt $c_1 = t$, $c_2 = -t^2$ und $c_3 = \exp(\frac{1}{2}t^4)$ und

$$x(s, t) = t e^s, \quad y(s, t) = -t^2 e^s.$$

Dies liefert

$$t = -\frac{y}{x}.$$

Setzt man jetzt alles ein, erhält man

$$u(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{y^4}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right).$$

b)

https://www.youtube.com/watch?v=Gy_nl5BHkYg

A3

$$a) \quad x u_x + y u_y + (x^2 + y^2) u = 0 \quad \text{PDE}$$

$$u(x, -x^2) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{IC}$$

$$x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + (x^2 + y^2) u(x, y) = 0 \quad \text{PDE}$$

Charakteristiken: $\langle \vec{a}(\vec{x}), u(\vec{x}) \rangle, \nabla u(\vec{x}) \rangle$
 $+ b(\vec{x}, u(\vec{x})) = 0$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{k}'(s) \quad w(s) = u(\vec{k}(s))$$

$$w'(s) = \langle \nabla u, \vec{k}'(s) \rangle$$

$$= -(x^2 + y^2) w(s)$$

$$\rightarrow \vec{a} = \vec{k}'(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$w'(s) = -(k_1^2 + k_2^2) w(s) \quad (3)$$

aus (1) und (2): $k_1(s) = c_1 \cdot e^s$
 $k_2(s) = c_2 \cdot e^s$

aus (3): $w'(s) = -e^{2s} (c_1^2 + c_2^2) w(s)$

$$\frac{1}{w(s)} \frac{dw}{ds} = -e^{2s} (c_1^2 + c_2^2)$$

$$\ln |w| = -\frac{1}{2} e^{2s} (c_1^2 + c_2^2) + c_3$$

$$w(s) = e^{-\frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2)} \cdot e^{c_3}$$

$$w(s) = \tilde{c}_3 e^{-\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)}$$

Anfangskurve: $(x_0, y_0, v(x_0, y_0)) \rightarrow (x_0(t), y_0(t), v_0(t))$
 $\rightarrow (t, -t^2, e^{-\frac{t^2}{2}})$ aus IC

$\begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$ soll auf dieser Anfangskurve liegen für $s=0$

$$\Rightarrow c_1 \cdot e^s = t \xrightarrow{s=0} c_1 = t$$

$$c_2 \cdot e^s = -t^2 \xrightarrow{s=0} c_2 = -c_1^2 = -t^2$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(t^2 + t^4)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\tilde{c}_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^4} = 1$$

$$\tilde{c}_3 = e^{\frac{1}{2}t^4}$$

$$\rightarrow x = k_1(s) = c_1 \cdot e^s = t \cdot e^s \Leftrightarrow e^s = \frac{x}{t}$$

$$y = k_2(s) = c_2 \cdot e^s = -t^2 \cdot e^s$$

$$= -t^2 \cdot \frac{x}{t} = -x \cdot t \Leftrightarrow t = -\frac{y}{x}$$

$$\rightarrow v(x, y) = e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{x}\right)^4} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

$$b) \quad t u_t + u_x = 2u \quad u(x, t)$$

$$t \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - 2u = 0 \quad \text{PDE}$$

$$u(x, 1) = x \quad \text{IC}$$

$$\text{Charakteristiken: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}'(s)$$

$$w(s) = u(\vec{k}(s))$$

$$w'(s) = 2 \cdot w(s)$$

$$\rightarrow k_1'(s) = 1$$

$$k_1(s) = s + c_1 \quad (1)$$

$$k_2'(s) = t = k_2(s)$$

$$k_2(s) = c_2 \cdot e^s \quad (2)$$

$$w'(s) = 2 \cdot w(s) \Leftrightarrow \frac{dw}{w} = 2 ds$$

$$\ln |w| = 2s + c_3 \quad (3)$$

$$w = e^{2s} \cdot e^{c_3} = c_3 \cdot e^{2s}$$

$$\text{Lösungskurve: } (x_0, t_0, u(x_0, t_0)) = (x_0(y), t_0(y), u_0(y))$$

$$\rightarrow (y, 1, y)$$

$$\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \\ w(0) \end{pmatrix} \text{ auf dieser Kurve: } c_1 = y$$

$$c_2 = 1$$

$$\tilde{c}_3 = y = c_1$$

$$x = k_1(s) = s + c_1 = s + y \Leftrightarrow s = x - y$$

$$\hookrightarrow t = k_2(s) = c_2 \cdot e^s = e^s = e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y = \frac{e^x}{t} \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{t} = y$$

$$\ln e^x - \ln t = y$$

$$y = x - \ln t$$

$$u(x, t) = y \cdot \frac{e^x}{e^y} \cdot \frac{e^x}{e^y} = (x - \ln t) \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2(x - \ln t)}}$$

$$= (x - \ln t) \frac{e^{2x}}{e^{2x} \cdot e^{-2 \ln t}} = (x - \ln t) \cdot e^{2 \ln t}$$

$$= (x - \ln t) \cdot t^2$$