Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Grundlagen

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Übersetzung von Deutsch nach Algebra

Wir übersetzen die folgenden Zahlenrätsel in eine algebraische Formel, wobei wir die gesuchten Zahlen jeweils mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen.

a) Addiert man zur gesuchten Zahl Fünf und multipliziert das Ergebnis mit Neun, dann erhält man Neunzig. Diese Bedingung kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{(x+5)\cdot 9 = 90.}} \tag{1}$$

b) Die gesuchte Zahl ist um Dreihundert grösser als die Summe von Dreihundertsiebzig und Fünfzig. Diese Bedingung kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{x = 300 + 370 + 50.}} \tag{2}$$

c) Das Doppelte der gesuchten Zahl ist um Vier kleiner als der dritte Teil von Hundertachtzig. Diese Bedingung kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{2x = \frac{180}{3} - 4\,.}} \tag{3}$$

d) Teilt man die gesuchte Zahl durch Vier und **subtrahiert** vom Resultat Fünfunddreissig, dann erhält man das Fünffache der gesuchten Zahl. Diese Bedingung kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{\frac{x}{4} - 35 = 5x.}} \tag{4}$$

e) Der Betrag der gesuchten Zahl ist dreimal so gross wie die Summe aus der gesuchten Zahl und ihrem Vorzeichen. Diese Bedingung kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{|x| = 3\cdot\big(x + \operatorname{sgn}(x)\big).}} \tag{5}$$

f) Die Summe der zwei gesuchten Zahlen ist halb so gross wie die Summe aus ihrem Produkt und Zwei. Das Vierfache der Summe der Quadrate der beiden gesuchten Zahlen ist das Quadrat von Zehn. Die erste der beiden Bedingungen kann algebraisch geschrieben werden als

$$\underline{\underline{x + y = \frac{1}{2}\cdot(xy+2).}} \tag{6}$$

Die zweite der beiden Bedingungen lautet algebraisch

$$\underline{\underline{4 \cdot \left(x^2 + y^2\right) = 10^2}}. \tag{7}$$

2. Aussagen über Brüche

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jeder *Bruch* aus *reellen Zahlen* ist *rational.*	○	●
b) Gilt $x = 1/y$, dann gilt auch $y = 1/x$.	●	○
c) Verdoppelt man *Zähler* und *Nenner*, dann verdoppelt man den Wert des *Bruchs.*	○	●
d) Haben zwei *Brüche* den gleichen Wert, dann müssen jeweils auch ihre *Zähler* und *Nenner* übereinstimmen.	○	●
e) Verdreifacht man den *Zähler*, dann verdreifacht man den Wert des *Bruchs.*	●	○
f) Drittelt man den *Nenner*, dann drittelt man den Wert des *Bruchs.*	○	●

3. Kürzen von einfachen Brüchen

Wir kürzen jeweils den angegebenen *Bruch* soweit als möglich.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{17}{51}}} = \frac{17}{3 \cdot 17} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}. \tag{8}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{42}{120}}} = \frac{6 \cdot 7}{6 \cdot 20} = \frac{1 \cdot 7}{1 \cdot 20} = \underline{\underline{\frac{7}{20}}}. \tag{9}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{72}{45}}} = \frac{8 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{8 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}}. \tag{10}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{14a^2}{2a}}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot a^2}{2 \cdot a} = \frac{1 \cdot 7 \cdot a}{1 \cdot 1} = \underline{\underline{7a.}} \tag{11}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{7a^3b}{49ab^2}}} = \frac{7 \cdot a^3 \cdot b}{7 \cdot 7 \cdot a \cdot b^2} = \frac{1 \cdot a^2 \cdot 1}{1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot b} = \underline{\underline{\frac{a^2}{7b}}}. \tag{12}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\frac{15ab^{20}c^2}{3a^{20}b^2c^3}}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot a \cdot b^{20} \cdot c^2}{3 \cdot a^{20} \cdot b^2 \cdot c^3} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot b^{18} \cdot 1}{1 \cdot a^{19} \cdot 1 \cdot c} = \underline{\underline{\frac{5b^{18}}{a^{19}c}}}. \tag{13}$$

4. Aussagen über Rechenregeln für Brüche

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\frac{a+b\cdot c}{c} = a+b$.	○	●
b) Es gilt $\frac{a\cdot c + c\cdot b}{c} = a+b$.	●	○
c) Es gilt $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$.	●	○
d) Es gilt $\frac{a}{a+b} = 1 + \frac{a}{b}$.	○	●
e) Es gilt $a\cdot c + b = c\cdot \left(a + \frac{b}{c}\right)$.	●	○
f) Es gilt $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$.	○	●

5. Abmessungen eines Zimmers

Wir betrachten ein Zimmer mit *rechteckigem* Grundriss und *Bodenfläche* von $A \approx 48.00\,\mathrm{m}^2$. *Länge* und *Breite* des Zimmers stehen im *Verhältnis* $4 : 3$. Es sei $x \in \mathbb{R}[\mathrm{m}]$, so dass *Länge* und *Breite* des Zimmers geschrieben werden können als

$$a = 4x \quad \text{und} \quad b = 3x. \tag{14}$$

Es gilt

$$A = a \cdot b = 4x \cdot 3x = 12x^2 \qquad \Big| :12 \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{A}{12} = x^2 \qquad \Big| \sqrt{\ldots}\,. \tag{16}$$

Daraus erhalten wir

$$x = \sqrt{\frac{A}{12}}\,. \tag{17}$$

Länge und Breite des Zimmers sind demnach

$$\underline{\underline{a}} = 4x = 4 \cdot \sqrt{\frac{A}{12}} \approx 4 \cdot \sqrt{\frac{48.00\,\mathrm{m}^2}{12}} = \underline{\underline{8.00\,\mathrm{m}}} \tag{18}$$

$$\underline{\underline{b}} = 3x = 3 \cdot \sqrt{\frac{A}{12}} \approx 3 \cdot \sqrt{\frac{48.00\,\mathrm{m}^2}{12}} = \underline{\underline{6.00\,\mathrm{m}.}} \tag{19}$$

6. Rechenregeln für Brüche

Wir verwenden die fundamentalen Rechengesetze für *Zahlenkörper*, um die folgenden Rechenregeln für *Brüche* von *reellen Zahlen* zu beweisen. Zum Beweis von hinteren Teilaufgaben ziehen wir gelegentlich auch vorangegangene Teilaufgaben heran.

a) Es gilt (mit i_M = multiplikatives Inverses = Kehrbruch)

$$\underline{\underline{\frac{a}{b}}} \cdot c = a \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot c = a \cdot c \cdot i_{\mathrm{M}}(b) = (a \cdot c) \cdot i_{\mathrm{M}}(b) = \underline{\underline{\frac{a \cdot c}{b}}}\,. \tag{20}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\frac{a}{b}}{c}}} = \frac{a}{b} \cdot i_{\mathrm{M}}(c) = a \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot i_{\mathrm{M}}(c) = a \cdot i_{\mathrm{M}}(c \cdot b) = \frac{a}{c \cdot b} = \underline{\underline{\frac{a}{b \cdot c}}}\,. \tag{21}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}} = a \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot c \cdot i_{\mathrm{M}}(d) = a \cdot c \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot i_{\mathrm{M}}(d) = (a \cdot c) \cdot i_{\mathrm{M}}(b \cdot d) = \underline{\underline{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}}}\,. \tag{22}$$

d) Zunächst zeigen wir, dass das *multiplikative Inverse* eines *Bruchs* gerade sein *Kehrbruch* ist. Es gilt nämlich

$$i_{\mathrm{M}}\left(\frac{c}{d}\right) = i_{\mathrm{M}}\big(c \cdot i_{\mathrm{M}}(d)\big) = i_{\mathrm{M}}(c) \cdot i_{\mathrm{M}}\big(i_{\mathrm{M}}(d)\big) = i_{\mathrm{M}}(c) \cdot d = d \cdot i_{\mathrm{M}}(c) = \frac{d}{c}\,. \tag{23}$$

Daraus und mit Hilfe der Regel (22) aus Teilaufgabe c) erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}}} = \frac{a}{b} \cdot i_{\mathrm{M}}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \underline{\underline{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}}\,. \tag{24}$$

e) Wir zeigen zwei Varianten.

Variante 1: Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \underline{\underline{\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}}}\,. \tag{25}$$

Variante 2: Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}} &= a \cdot i_{\mathrm{M}}(b) + c \cdot i_{\mathrm{M}}(d) = a \cdot d \cdot i_{\mathrm{M}}(d) \cdot i_{\mathrm{M}}(b) + c \cdot b \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot i_{\mathrm{M}}(d) \\ &= \big(a \cdot d + c \cdot b\big) \cdot i_{\mathrm{M}}(b) \cdot i_{\mathrm{M}}(d) = \big(a \cdot d + c \cdot b\big) \cdot i_{\mathrm{M}}(b \cdot d) \\ &= \underline{\underline{\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}}}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} = \underline{\underline{\frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}}}\,. \tag{27}$$

7. Verhältnisterme

Es sei $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$x := \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad y := \frac{b}{a}\,. \tag{28}$$

Wir drücken die folgenden Terme nur durch x und y aus.

a) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch Aufteilen des *Bruchs* in zwei *Brüche* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a \pm b}{a}}} = \frac{a}{a} \pm \frac{b}{a} = \underline{\underline{1 \pm y.}} \tag{29}$$

Variante 2: Durch *Ausklammern* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a \pm b}{a}}} = \frac{a \cdot \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)}{a} = 1 \pm \frac{b}{a} = \underline{\underline{1 \pm y.}} \tag{30}$$

b) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch Aufteilen des *Bruchs* in zwei *Brüche* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a \pm b}{b}}} = \frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \underline{\underline{x \pm 1.}} \tag{31}$$

Variante 2: Durch *Ausklammern* und Kürzen erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a \pm b}{b}}} = \frac{b \cdot \left(\frac{a}{b} \pm 1\right)}{b} = \frac{a}{b} \pm 1 = \underline{\underline{x \pm 1.}} \tag{32}$$

c) Mit Hilfe der ersten bzw. zweiten *binomischen Formel* für Quadrate und durch Aufteilen des *Bruchs* in drei *Brüche* erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{(a \pm b)^2}{ab}}} = \frac{a^2 \pm 2ab + b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} \pm \frac{2ab}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} \pm 2 + \frac{b}{a} = \underline{\underline{x \pm 2 + y.}} \tag{33}$$

d) Mit Hilfe der dritten *binomischen Formel* für Quadrate und durch Aufteilen des *Bruchs* in zwei *Brüche* erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{(a+b) \cdot (a-b)}{ab}}} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \underline{\underline{x - y.}} \tag{34}$$

e) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch Umkehren des *Bruchs* und Einsetzen des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a}{a \pm b}}} = \frac{1}{\frac{a \pm b}{a}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 \pm y}}}\,. \tag{35}$$

Variante 2: Durch Umkehren des *Bruchs* und Aufteilen des *Teilbruches* im *Nenner* in zwei *Teilbrüche* erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{a}{a \pm b}}} = \frac{1}{\frac{a \pm b}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{a} \pm \frac{b}{a}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 \pm y}}}\,. \tag{36}$$

f) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Durch Umkehren des *Bruchs* und Einsetzen des Ergebnisses aus Teilaufgabe b) erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{b}{a \pm b}}} = \frac{1}{\frac{a \pm b}{b}} = \underline{\underline{\frac{1}{x \pm 1}}}\,. \tag{37}$$

Variante 2: Durch Umkehren des *Bruchs* und Aufteilen des Teilbruches im *Nenner* in zwei *Teilbrüche* erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{b}{a \pm b}}} = \frac{1}{\frac{a \pm b}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b}} = \underline{\underline{\frac{1}{x \pm 1}}}\,. \tag{38}$$

8. Lohnsumme

Wir betrachten ein Unternehmen mit drei Mitarbeitenden, deren Jahreslöhne im *Verhältnis* $4 : 5 : 7$ stehen. Insgesamt steht dafür eine *Lohnsumme* von $L = 480'000\,\text{CHF}$ zur Verfügung. Es sei $x \in \mathbb{R}[\text{CHF}]$, so dass die Jahreslöhne der Mitarbeitenden geschrieben werden können als

$$L_1 = 4x, \quad L_2 = 5x \quad \text{und} \quad L_3 = 7x. \tag{39}$$

Es gilt

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 4x + 5x + 7x = 16x \qquad \Big| : 16. \tag{40}$$

Daraus erhalten wir

$$x = \frac{L}{16} = \frac{480'000\,\text{CHF}}{16} = 30'000\,\text{CHF}\,. \tag{41}$$

Die Jahreslöhne der Mitarbeitenden sind demnach

$$\underline{\underline{L_1}} = 4x = 4 \cdot 30'000\,\text{CHF} = \underline{\underline{120'000\,\text{CHF}}} \tag{42}$$

$$\underline{\underline{L_2}} = 5x = 5 \cdot 30'000\,\text{CHF} = \underline{\underline{150'000\,\text{CHF}}} \tag{43}$$

$$\underline{\underline{L_3}} = 7x = 7 \cdot 30'000\,\text{CHF} = \underline{\underline{210'000\,\text{CHF.}}} \tag{44}$$

9. Aussagen über Potenzen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Ist $x > 0$, dann lässt sich jede *Potenz* der Form x^y mit $y \in \mathbb{R}$ bilden.	●	○
b) Falls $p, q \in \mathbb{Q}^+$, dann ist auch $p^q \in \mathbb{Q}^+$.	○	●
c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0^n = 0$.	○	●
d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $1^x = x^0$.	○	●
e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $10^x = 0.1^{-x}$	●	○
f) Falls $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $x^y = y^x$, dann folgt $x = y$.	○	●

10. Spezielle Potenzen

Wir berechnen jeweils die angegebenen *Potenzen* und lernen die Ergebnisse nach Möglichkeit auswendig. Dabei geben wir *rationale* Resultate, welche nicht *ganzzahlig* sind, in klassischer *Bruchschreibweise* und in *Dezimalbruchschreibweise* an.

11. Rechenregeln für natürliche Potenzen

Wir berechnen die Potenzen der Form 2^n für n 2 $\{-3, \ldots, 10\}$ und fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1′024
2^n	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1′024

(45)

b) Wir berechnen die Potenzen der Form 3^n für $n \in \{-2, \ldots, 5\}$ und fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
3^n	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243
3^n	$0.\bar{1}$	$0.\bar{3}$	1	3	9	27	81	243

(46)

c) Wir berechnen die Potenzen der Form 5^n für $n \in \{-2, \ldots, 5\}$ und fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5^n	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625	3′125
5^n	0.04	0.2	1	5	25	125	625	3′125

(47)

d) Wir berechnen die Potenzen der Form $(-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und fassen die Ergebnisse für $n \in \{-3, \ldots, 3\}$ in einer Tabelle zusammen.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(-1)^n$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

(48)

Es gilt offensichtlich

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{49}$$

11. Rechenregeln für natürliche Potenzen

Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die folgenden Rechenregeln.

12. Gemäss Definition der *Potenzen* gilt

$$\underline{\underline{x^{m+n}}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ Faktoren}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = \underline{\underline{x^m \cdot x^n}}. \tag{50}$$

b) Wir betrachten die Fälle

$$m \geq n \quad \text{und} \quad m < n \tag{51}$$

getrennt.

Fall 1: $m \geq n$. Gemäss Definition der *Potenzen* gilt

$$\underline{\underline{x^{m-n}}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m-n \text{ Faktoren}} = \frac{\overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{m-n \text{ Faktoren}} \cdot \overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{\overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}} = \underline{\underline{\frac{x^m}{x^n}}}\,. \tag{52}$$

Fall 2: $m < n$. In diesem Fall ist $m - n < 0$ bzw. $n - m > 0$ und gemäss Definition der *Potenzen* mit negativen Exponenten und wegen (52) mit den Rollen von m und n vertauscht, muss gelten

$$\underline{\underline{x^{m-n}}} = \frac{1}{x^{-(m-n)}} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{\frac{x^n}{x^m}} = \underline{\underline{\frac{x^m}{x^n}}}\,. \tag{53}$$

c) Gemäss Definition der *Potenzen* muss gelten

$$\underline{\underline{x^{m \cdot n}}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \cdot n \text{ Faktoren}} = \underbrace{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}}}_{n \text{ mal } m \text{ Faktoren}} = \underbrace{x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n \text{ Faktoren}} = \underline{\underline{\left(x^m\right)^n}} \tag{54}$$

$$\underline{\underline{x^{m \cdot n}}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \cdot n \text{ Faktoren}} = \underbrace{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}}_{m \text{ mal } n \text{ Faktoren}} = \underbrace{x^n \cdot \ldots \cdot x^n}_{m \text{ Faktoren}} = \underline{\underline{\left(x^n\right)^m.}} \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

12. Potenzen mit irrationalen Exponenten

Wir vereinfachen die folgenden Terme mit Hilfe der Rechenregeln für *Potenzen* und *Wurzeln* und ohne Taschenrechner.

13. Wir erhalten

$$\underline{\underline{A}} := 3^{\sqrt{5}} \cdot 9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 3^{\sqrt{5}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = 3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{5}} = (3 \cdot 3)^{\sqrt{5}} = \underline{\underline{9^{\sqrt{5}}.}} \tag{57}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{B}} := \left(\sqrt{2}^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{2^4}} = \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2^{4/2}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{4/2}} = 2^{\frac{2^2}{2 \cdot 2}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = \underline{\underline{2.}} \tag{58}$$

c) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &:= \sqrt{2}^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}\right)^{\sqrt{3}} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{36}\right)^{\sqrt{3}} \\ &= \underline{\underline{6^{\sqrt{3}}.}} \end{aligned} \tag{59}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{D}} := \left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}} = 3^{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)} = 3^{1^2-\sqrt{3}^2} = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}\,. \tag{60}$$

13. Rechnen mit Potenzen

Wir vereinfachen die folgenden Terme mit Hilfe der Rechenregeln für *Potenzen* und *Wurzeln* und ohne Taschenrechner.

14. Wir erhalten

$$\underline{\underline{A}} := \left((0.01)^{-2} \cdot (0.001)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\left(10^{-2}\right)^{-2} \cdot \left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(10^{(-2)\cdot(-2)} \cdot 10^{-\frac{1}{3}\cdot(-3)}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$= \left(10^{4} \cdot 10^{1}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(10^{4+1}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(10^{5}\right)^{-\frac{1}{5}} = 10^{-\frac{1}{5}\cdot 5} = 10^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}\,. \tag{61}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{B}} := \sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}} : a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[3]{a^{3}} = \underline{\underline{a\,.}} \tag{62}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} := \left(243^{-\frac{2}{5}} \cdot 81^{-\frac{2}{4}} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(\left(3^{5}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(3^{4}\right)^{-\frac{2}{4}} \cdot \left(3^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}} \tag{63}$$

$$= \left(3^{-\frac{2}{5}\cdot 5} \cdot 3^{-\frac{2}{4}\cdot 4} \cdot 3^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(3^{-6}\right)^{-\frac{1}{6}} = 3^{-\frac{1}{6}\cdot(-6)} = 3^{1} = \underline{\underline{3.}}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{E}} := \sqrt[15]{\frac{\left(\sqrt{4-z^{2}}\,\right)^{30}}{\left(\sqrt[4]{2+z}\,\right)^{60}}} = \left(\frac{\left(\sqrt{4-z^{2}}\,\right)^{30}}{\left(\sqrt[4]{2+z}\,\right)^{60}}\right)^{\frac{1}{15}} = \frac{\left(\left(\sqrt{4-z^{2}}\,\right)^{30}\right)^{\frac{1}{15}}}{\left(\left(\sqrt[4]{2+z}\,\right)^{60}\right)^{\frac{1}{15}}} = \frac{\left(\sqrt{4-z^{2}}\,\right)^{\frac{30}{15}}}{\left(\sqrt[4]{2+z}\,\right)^{\frac{60}{15}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4-z^{2}}\,\right)^{2}}{\left(\sqrt[4]{2+z}\,\right)^{4}} = \frac{4-z^{2}}{2+z} = \frac{(2+z)\cdot(2-z)}{2+z} = \underline{\underline{2-z.}} \tag{64}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F}} := \sqrt{17^{\frac{4}{5}} \cdot 17^{\frac{8}{5}} : 17^{\frac{2}{5}}} = \sqrt{17^{\frac{4}{5}+\frac{8}{5}-\frac{2}{5}}} = \sqrt{17^{\frac{4+8-2}{5}}} = \sqrt{17^{\frac{10}{5}}} = \sqrt{17^{2}} = \underline{\underline{17.}} \tag{65}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{G}} := \sqrt[3]{\left(0.01 \cdot 1'000 \cdot 0.01\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\left(10^{-2} \cdot 10^{3} \cdot 10^{-2}\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{10}$$

$$= \sqrt[3]{\left(10^{-2+3-2}\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\left(10^{-1}\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10^{(-1)(-2)}} \cdot \sqrt[3]{10}$$

$$= \sqrt[3]{10^{2}} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10^{2} \cdot 10} = \sqrt[3]{10^{2+1}} = \sqrt[3]{10^{3}} = \underline{\underline{10.}} \tag{66}$$

g) Wir erhalten

$$\underline{\underline{H}} := \sqrt[3]{\sqrt[4/3]{162}} = \sqrt[3\cdot 4/3]{162} = \sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 81} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^{4}} = \sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{3^{4}} = \underline{\underline{3\,\sqrt[4]{2}\,.}} \tag{67}$$

h) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} := \sqrt{\big(\sqrt{10}\,x - x\big)\big(\sqrt{10}\,x + x\big)} = \sqrt{\big(\sqrt{10}\,x\big)^2 - x^2} = \sqrt{\big(\sqrt{10}\,\big)^2 x^2 - x^2}$$
$$= \sqrt{10x^2 - x^2} = \sqrt{(10-1)\,x^2} = \sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\,\sqrt{x^2} = \underline{\underline{3\,|x|.}} \tag{68}$$

i) Wir erhalten

$$\underline{\underline{J}} := \left(\frac{\sqrt{64\cdot 36\cdot 100}}{30}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\sqrt{64}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{100}}{30}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{8\cdot 6\cdot 10}{30}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^3\cdot 2\cdot 3\cdot 10}{3\cdot 10}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$= \big(2^3\cdot 2\big)^{\frac{1}{4}} = \big(2^4\big)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = \underline{\underline{2.}} \tag{69}$$

j) Wir erhalten

$$\underline{\underline{K}} := \sqrt{\sqrt[3/5]{\sqrt[2/3]{\sqrt[5/2]{32}}}} = \sqrt[2\cdot 3/5\cdot 2/3\cdot 5/2]{32} = \sqrt[2]{32} = \sqrt{2^5} = \big(2^5\big)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{4+1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$= 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4\sqrt{2}\,.}} \tag{70}$$

k) Wir erhalten

$$\underline{\underline{L}} := \sqrt[3]{125^{\frac{2}{3}}x^2 + 32^{\frac{1}{5}}x^2}\;\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\big(5^3\big)^{\frac{2}{3}}x^2 + \big(2^5\big)^{\frac{1}{5}}x^2}\;\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5^{3\cdot\frac{2}{3}}x^2 + 2^{5\cdot\frac{1}{5}}x^2}\;\sqrt[3]{x}$$
$$= \sqrt[3]{5^2x^2 + 2x^2}\;\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{25x^2 + 2x^2}\;\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27x^2}\;\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27x^3} = \sqrt[3]{3^3x^3} = \sqrt[3]{(3x)^3}$$
$$= \underline{\underline{3x\,.}} \tag{71}$$

l) Wir erhalten

$$\underline{\underline{M}} := \sqrt[3]{0.01\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{0.1}\cdot 10}\cdot\sqrt[3]{1'000\cdot\frac{1}{0.001}} = \sqrt[3]{10^{-2}\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\frac{1}{10^{-1}}\cdot 10\cdot 10^3\cdot\frac{1}{10^{-3}}}$$
$$= \sqrt[3]{10^{-2}\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot 10\cdot 10^3\cdot 10^3} = \sqrt[3]{10^{-2-2+1+1+3+3}} = \sqrt[3]{10^4} = 10^{\frac{4}{3}} = 10^{\frac{3+1}{3}}$$
$$= 10^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}} = 10^1\cdot 10^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{10\sqrt[3]{10}\,.}} \tag{72}$$

14. Aussagen über Logarithmen

Wir betrachten $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) $\log_a(1/a) = -1$	●	○
b) $\log_{10}(12'854'764'738'092'448'376'794'124'986'324) < 32$	●	○
c) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ mit $n \neq 1$ gilt $\log_{\sqrt{n}}(n) \in \mathbb{Q}$.	●	○
d) $\log_a\big(\log_a(a)\big) = 1$	○	●

15. Elementare Logarithmen

Wir berechnen die folgenden *Logarithmen*

a) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_2(128)}} = \log_2\left(2^7\right) = \underline{\underline{7.}} \tag{73}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_3(243)}} = \log_3\left(3^5\right) = \underline{\underline{5.}} \tag{74}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)}} = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = \underline{\underline{-2.}} \tag{75}$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_3\left(\sqrt{3}\right)}} = \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\,. \tag{76}$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_3\left(\sqrt[5]{9}\right)}} = \log_3\left(\sqrt[5]{3^2}\right) = \log_3\left(\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}\right) = \log_3\left(3^{2\cdot\frac{1}{5}}\right) = \log_3\left(3^{\frac{2}{5}}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}\,. \tag{77}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}} = \log_2\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}\,. \tag{78}$$

g) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_{128}(2)}} = \log_{128}\left(\sqrt[7]{128}\right) = \log_{128}\left(128^{\frac{1}{7}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}\,. \tag{79}$$

h) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_{243}(3)}} = \log_{243}\left(\sqrt[5]{243}\right) = \log_{243}\left(243^{\frac{1}{5}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}. \tag{80}$$

i) Es gilt

$$\underline{\underline{\log_{1'783}(1)}} = \log_{1'783}\left(1'783^{0}\right) = \underline{\underline{0.}} \tag{81}$$

j) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right)}} &= \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3^4}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^4}\right) = \log_{\sqrt{3}} \left. \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{2\cdot 4}}\right) \\ &= \log_{\sqrt{3}} \left. \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{8}}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{3}\right)^{-8}\right) = \underline{\underline{-8.}}\end{aligned} \tag{82}$$

k) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\log_{0.1}(1'000)}} &= \log_{0.1}\left(10^3\right) = \log_{0.1}\left(\left(\frac{1}{0.1}\right)^3\right) = \log_{0.1}\left(\left(0.1^{-1}\right)^3\right) = \log_{0.1}\left(0.1^{-1\cdot 3}\right) \\ &= \log_{0.1}\left(0.1^{-3}\right) = \underline{\underline{-3.}}\end{aligned} \tag{83}$$

l) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\log_{1+|x|}\left(1 + 2\,|x| + |x|^2\right)}} &= \log_{1+|x|}\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot |x| + |x|^2\right) = \log_{1+|x|}\left(\left(1+|x|\right)^2\right) \\ &= \underline{\underline{2.}}\end{aligned} \tag{84}$$

16. Rechnen mit Logarithmen

Wir vereinfachen jeweils den gegebenen Term soweit als möglich mit Hilfe der Rechenregeln für *Logarithmen*.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}} := \log_5\left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}\right) &= \log_5\left(\sqrt{125}\right) - \log_5\left(\sqrt[3]{25}\right) = \frac{1}{2}\log_5(125) - \frac{1}{3}\log_5(25) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}.\end{aligned} \tag{85}$$

b) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.

Variante 1: Es gilt

$$\underline{\underline{B}} := \log_7\left(\frac{7}{3}\right) + \log_7(21) = \log_7\left(\frac{7}{3}\cdot 21\right) = \log_7(7\cdot 7) = \underline{\underline{2.}} \tag{86}$$

Variante 2: Es gilt

$$\underline{\underline{B}} := \log_7\left(\frac{7}{3}\right) + \log_7(21) = \log_7(7) - \log_7(3) + \log_7(7\cdot 3)$$
$$= \log_7(7) - \log_7(3) + \log_7(7) + \log_7(3) = 1 + 1 = \underline{\underline{2.}} \tag{87}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{C}} := \log_{\frac{49}{36}}\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{1}{\log_{\frac{6}{7}}\left(\frac{49}{36}\right)} = \frac{1}{-\log_{\frac{6}{7}}\left(\frac{36}{49}\right)} = \frac{1}{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}. \tag{88}$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{D}} := \log_{\sqrt[3]{243}}\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}\right) = \frac{\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}\right)}{\log_3\left(\sqrt[3]{243}\right)} = \frac{\log_3\left(\sqrt[4]{27}\right) - \log_3\left(\sqrt[3]{81}\right)}{\log_3\left(\sqrt[3]{243}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}\log_3(27) - \frac{1}{3}\log_3(81)}{\frac{1}{3}\log_3(243)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4}{\frac{1}{3}\cdot 5} = \frac{\frac{9}{12} - \frac{16}{12}}{\frac{20}{12}} = \frac{9-16}{20} = \underline{\underline{-\frac{7}{20}}}. \tag{89}$$

e) Es sei $x > 0$ mit $x \neq 1/6$. Dann gilt

$$\underline{\underline{E}} := \log_{6x}\left(\sqrt{\left(\sqrt{40}\,x - 2x\right)\left(\sqrt{40}\,x + 2x\right)}\right) = \log_{6x}\left(\sqrt{\left(\sqrt{40}\,x\right)^2 - (2x)^2}\right)$$
$$= \log_{6x}\left(\sqrt{40x^2 - 4x^2}\right) = \log_{6x}\left(\sqrt{36x^2}\right) = \log_{6x}(6x) = \underline{\underline{1.}} \tag{90}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{F}} := \sqrt{125}\,\log_{125}\left(25^{\frac{1}{\sqrt{125}}}\right) = \sqrt{125}\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}\,\log_{125}(25) = \log_{125}(25)$$
$$= \frac{\log_5(25)}{\log_5(125)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \tag{91}$$

g) Es gilt

$$\underline{\underline{G}} := \log_2\left(\log_{\frac{49}{9}}\left(\log_8(128)\right)\right) = \log_2\left(\log_{\frac{49}{9}}\left(\frac{\log_2(128)}{\log_2(8)}\right)\right) = \log_2\left(\log_{\frac{49}{9}}\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$
$$= \log_2\left(\frac{1}{\log_{\frac{7}{3}}\left(\frac{49}{9}\right)}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-1.}} \tag{92}$$

h) Wir zeigen mehrere Varianten, um diese Teilaufgabe zu lösen.
Variante 1: Es gilt

$$\underline{\underline{H}} := \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot 0.001^{-1'000}}\right) = \frac{\log_{10}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot 0.001^{-1'000}}\right)}{\log_{10}\left(10^{1'100}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{3}\cdot\log_{10}\bigl(10^{300}\cdot 0.001^{-1'000}\bigr)}{1'100} = \frac{\log_{10}\bigl(10^{300}\bigr)+\log_{10}\bigl(0.001^{-1'000}\bigr)}{3\cdot 1'100} \\
&= \frac{300-1'000\cdot\log_{10}(0.001)}{3'300} = \frac{300-1'000\cdot(-3)}{3'300} = \frac{3'300}{3'300} = \underline{\underline{1.}}
\end{aligned} \tag{93}
$$

Variante 2: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{H}} &:= \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot 0.001^{-1'000}}\right) = \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot\bigl(10^{-3}\bigr)^{-1'000}}\right) \\
&= \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot 10^{(-3)\cdot(-1'000)}}\right) = \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{300}\cdot 10^{3'000}}\right) \\
&= \log_{10^{1'100}}\left(\sqrt[3]{10^{3'300}}\right) = \log_{10^{1'100}}\left(10^{\frac{3'300}{3}}\right) = \log_{10^{1'100}}\bigl(10^{1'100}\bigr) = \underline{\underline{1.}}
\end{aligned} \tag{94}
$$