Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 6

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration den Schwerpunkt homogener Flächen und von Rotationskörpern berechnen.
- Sie können kartesische in Polarkoordinaten umwandeln und umgekehrt.

---

1. Schwerpunkt Rotationskörper
Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Funktion $f(x) = \ln x, 1 \le x \le e$ um die x-Achse entsteht.

Zuerst Berechnung des Volumens des Rotationskörpers (Integral durch 2malige partielle Integration lösen – Integrand ist $1 \cdot (\ln x)^2$):

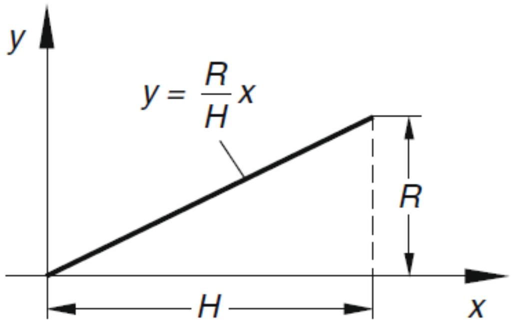
$$V_x = \pi \cdot \int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \pi \left[x \left((\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 2 \right) \right]_1^e = \pi (e - 2) = 2{,}257$$

Der Schwerpunkt liegt auf der x-Achse, d. h. $y_s = 0$. Integral durch 2malige partielle Integration lösen.

$$x_s = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_1^e x (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{e - 2} \left[\frac{1}{2} x^2 \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4(e - 2)} = 2{,}224$$

2. Kreiskegel
Gegeben sei ein homogener gerader Kreiskegel mit Radius R, Höhe H und Dichte ρ. Bestimmen Sie das Volumen des Kreiskegels und seinen Schwerpunkt.

Wir legen den Kegel so ins xy-Koordinatensystem, dass die x-Achse der Symmetrieachse des Kreiskegels entspricht, seine Spitze im Ursprung des Koordinatensystems ist und der Kegel durch Rotation der Geraden $y = \frac{R}{H} x$ um die x-Achse entsteht.



Volumen:

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} [\tfrac{1}{3}x^3]_0^H = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H$$

Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf der x-Achse (y_s=0):

$$x_s = \frac{\pi}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \int_0^H x \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \int_0^H x \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx$$

$$= \frac{3}{H^3} [\tfrac{1}{4}x^4]_0^H = \frac{3}{H^3} \frac{1}{4} H^4 = \frac{3}{4} H$$

3. Kartesische in Polarkoordinaten

Wie lauten die Polarkoordinaten der Punkte $P_1(4;-12)$, $P_2(-3;-3)$ und $P_3(5;-4)$?
Hinweis: Fertigen Sie eine Lageskizze an.

$P_1: \; r = \sqrt{160} = 12{,}649; \quad \varphi = 288{,}43°; \qquad P_2: \; r = \sqrt{18} = 4{,}243; \quad \varphi = 225°;$

$P_3: \; r = \sqrt{41} = 6{,}403; \quad \varphi = 321{,}34°$

4. Polar- in kartesische Koordinaten

Von einem Punkt P sind die Polarkoordinaten r und φ bekannt. Wie lauten seine kartesischen Koordinaten?

a) r = 10, φ = 35° b) r = 3,56, φ = 256,5° c) r = 9, φ = 120°

a) P(8,192;5,736) b) P(-0,831;-3,462) c) P(-4,5;7,794)

5. Funktionen in Polarkoordinaten umwandeln

a) Geben Sie die Gleichung für einen Kreis mit Radius 5 um den Ursprung in 2D in kartesischen und Polarkoordinaten an.
b) Gegeben ist die in Polarkoordinaten dargestellte Funktion der impliziten Funktionsgleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$.
(i) Wie lautet die Funktionsgleichung in Polarkoordinaten?
(ii) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

a)
Kreisgleichung um den Ursprung in kartesischen Koordinaten, allgemein:
$x^2 + y^2 = r^2$ mit r: Radius des Kreises
Hier: r = 5 → $x^2 + y^2 = 25$

Umwandlung in Polarkoordinaten:
mit $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$ ergibt sich:

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 25$$
$$r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = 25$$

$$r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = 25$$
$$r^2 = 25$$
$r = 5$ – dies stellt die Kreisgleichung in Polarkoordinaten dar.

b), (i)

$x = r \cdot \cos\varphi;\quad y = r \cdot \sin\varphi;\quad x^2 + y^2 = r^2 \quad\Rightarrow$

$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = r^4 - 2r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = r^2(r^2 - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi) = 0 \quad\Rightarrow$

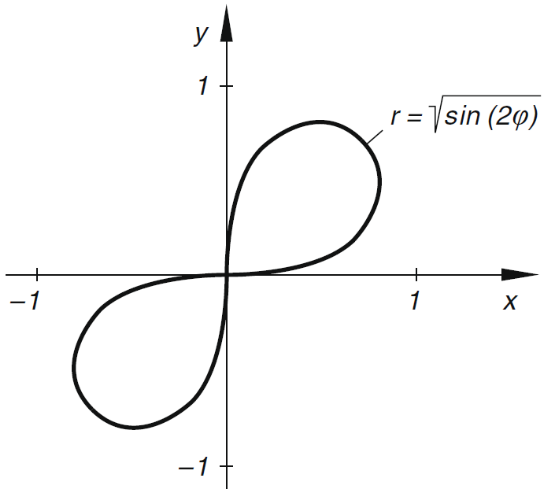
$r^2 - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt{\underbrace{2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{\sin(2\varphi)}} = \sqrt{\sin(2\varphi)}$

(ii)

$r \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi \cdot \cos\varphi \geq 0$ (beide Faktoren müssen daher *gleiches* Vorzeichen haben)

Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

Somit gibt es nur Punkte im 1. und 3. Quadrant



6. Funktionen in kartesische Koordinaten umwandeln

Wandeln Sie die folgenden Funktionsgleichungen in kartesische Koordinaten um.

a) $r = \frac{a}{b\cos\varphi + c\sin\varphi}, a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $r^2 = 2e^2\cos(2\varphi)$

a)

mit $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{b \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + c \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{a}{\frac{bx+cy}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\
&= \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{bx+cy}
\end{aligned}
$$

Nun auf beiden Seiten mit (bx + cy) multiplizieren und durch $\sqrt{x^2+y^2}$ teilen ergibt: bx + cy -a = 0.

b)

Additionstheorem nutzen:

$$
\begin{aligned}
\cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\
r^2 &= 2e^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\
\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 &= 2e^2\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\right) \\
x^2+y^2 &= 2e^2 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.
\end{aligned}
$$

Mit $x^2 + y^2$ multiplizieren und auf eine Seite bringen:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right) = 0$$