Übungsblatt DGL 12

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Definitionen von Operatoren der Vektoranalysis (Nabla- und Laplace-Operator, Divergenz, Rotation) und können diese anwenden.
- Sie kennen die Begriffe Ordnung, Linearität, Homogenität und Typ in Bezug auf eine PDGL und können diese für konkrete PDGLs anwenden.
- Sie können bestimmen, ob eine vorgegebene Funktion eine mögliche Lösung einer gegebenen PDGL darstellt.
- Sie kennen die Methode der Modellierung, um einen physikalischen/technischen Sachverhalt in ein mathematisches Problem zu übersetzen, was oftmals auf das Lösen partieller Differentialgleichungen hinausläuft.

1. Rechnen mit Operatoren

Verifizieren Sie, dass

a) $\langle \vec{u}, \nabla_x \rangle \vec{u}$ durch $\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{j=1\ldots3}$ und

b) $\triangle_x \vec{u}$ durch $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_i}^2} \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial {x_i}^2} \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial {x_i}^2} \end{pmatrix}$

dargestellt werden können, wobei gilt: $\vec{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Hinweis für b): da $\vec{u}$ ein Vektorfeld ist, gilt: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{u}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) - \triangle \vec{u}$.

A1

a) $$\langle \vec{v}, \nabla_x \rangle \vec{v} = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{j=1\dots3}$$

b) $\Delta_x \vec{v}$: da $\vec{v}$ ein Vektorfeld ist, gilt nicht:

$$\Delta v = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, v)$$

$\rightarrow$ nur für Skalarfelder gültig

<u>hier</u>: $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \Delta \vec{v}$

$$\Delta \vec{v} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{v})$$

$\mathrm{div}(\vec{v}) = \langle \nabla, \vec{v} \rangle$

$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$

$\Rightarrow \Delta \vec{v} = \nabla \langle \nabla, \vec{v} \rangle - \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$

zuerst: $$\nabla \langle \nabla, \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 x_2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

jede Zeile lässt sich schreiben als:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \qquad j = 1 \ldots 3$$

2. Lösung einer PDGL

Überprüfen Sie, ob $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\vec{x}) = \sin x_1 \cos x_2$ eine Lösung der PDGL $\frac{\partial^3 u}{\partial {x_1}^2 \partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\vec{x}) = 0$ ist.

Ist auch die Funktion $v(\vec{x}) = e^{x_1}$ eine Lösung der PDGL?

PDE: $\dfrac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2}(\vec{x}) + \dfrac{\partial v}{\partial x_2}(\vec{x}) = 0$

$v(\vec{x}) = \sin x_1 \cdot \cos x_2$

partielle Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = -\sin x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = -\cos x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

in PDE einsetzen:

$\sin x_1 \cdot \sin x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2 = 0$ ✓

$v(\vec{x}) = e^{x_1}$

Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0$$

$\rightarrow v(\vec{x}) = e^{x_1}$ ist ein Lösung der PDE

3. Klassifizierung von PDGLs

Geben Sie für die folgenden PDGLs die Ordnung und (falls möglich) den Typ an und ob die PDGL linear ist oder nicht:

a) $\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} + \langle \vec{a}, \nabla_x (u(\vec{x},t)) \rangle = 0$ (Transportgleichung)

b) $\triangle\, u = 0$ (Laplace-Gleichung)

c) $\triangle\, u + k^2 u = 0,\ k \epsilon \mathbb{C}$ (Helmholtz- oder Schwingungsgleichung)

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle_x\, u = 0$ (Wellengleichung)

e) $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle_x\, u = 0$ (Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung)

f) $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ (Korteweg-de-Vries-Gleichung)

g) $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \langle \vec{u}, \nabla_x \rangle \vec{u} - \Delta_x \vec{u} = -\nabla_x p$

$\operatorname{div} \vec{u} = 0$ (Navier-Stokes-Gleichungen).

a) Ordnung: 1 $\rightarrow$ keine Typeinteilung möglich
PDE ist linear

b) Ordnung: 2
PDE ist linear
für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte bestimmen:

$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow$ PDE ist elliptisch

c) Ordnung: 2
PDE ist linear
Matrix A ist dieselbe wie bei b), somit ist PDE elliptisch

d) Ordnung: 2

PDE ist linear

für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

u hängt von t und $\vec{x}$ ab

$$A(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte bestimmen

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ PDE ist hyperbolisch

e) Ordnung: 2

PDE ist linear

u hängt von $\vec{x}$ und t ab

für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich $A(t, \vec{x})$ zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte bestimmen:

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda(-1-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ PDE ist parabolisch

f) Ordnung: 3 → somit nicht Typ-einteilbar
PDE ist nicht linear

g) Ordnung: 2 bzw. 1
PDE ist nicht linear (1. Gleichung)
PDE ist linear (2. Gleichung, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$)

Blatt 12

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \langle \vec{v}, \nabla_x \rangle \vec{v} - \Delta_x \vec{v} = -\nabla_x p \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

- für Typbestimmung sind nur Ableitungen 2. Ordnung relevant, also $\Delta_x \vec{v}$ → siehe A1b)
- obige PDE ist ein System von 3 PDEs, es reicht eine davon anzuschauen (aus Symmetriegründen)

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ → parabolisch

$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \text{kein Typ}$$

4.
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Ob eine Funktion Lösung einer partiellen Differenzialgleichung ist, kann wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen durch Einsetzen der Funktion in die Gleichung geprüft werden.
b) Eine lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist vollständig gelöst, wenn zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung bekannt sind.

a) Richtig. Eine Lösung muss die partielle Differenzialgleichung erfüllen. Um das zu prüfen, sind die in der Gleichung auftretenden partiellen Ableitungen zu bilden und auf diese Weise die Funktion „ganz normal“ in die Gleichung einzusetzen.
b) Falsch. Die Lösung einer partiellen Differenzialgleichung hängt von mindestens zwei Variablen ab. Aufgrund dieses weiteren Freiheitsgrads können die Aussagen, die für gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen von Funktionen einer Veränderlichen gelten, nicht auf partielle Gleichungen übertragen werden.