

YTg` YeT'Sff 3` S7

5a_ bgfSf[a` S^S` V6SfS EUWU4EU
: E\$" \$%

>ôeg` YW

? SfZW Sf[] 1

1. Aussagen über Ableitungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Der Funktionswert $f'(x)$ der Ableitung ist gerade die Steigung der Funktion f an der Stelle x .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, dann ist die zugehörige Ableitung konstant.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Es sei $f(x) := x^2$, dann ist der Graph der Ableitung $f'(x)$ eine Parabel.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
d) Es sei $f(x) := x^3$, dann hat der Graph von f an der Stelle $x = 5$ die Steigung $m = 75$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Ist eine Funktion f das Doppelte einer Funktion g , dann ist nach der Faktor-Regel auch die Ableitung von f das Doppelte der Ableitung von g .	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. Ableitung von Monomen

Wir berechnen jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion mit Hilfe der Faktor-Regel und der Monom-Ableitung.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3.}} \quad (1)$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 12x^3.}} \quad (2)$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 2 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 10x^4.}} \quad (3)$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{10} \cdot 5 \cdot x^{5-1} = \frac{1}{2} \cdot x^4.}} \quad (4)$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{20} \cdot 80 \cdot x^{80-1} = \underline{\underline{4x^{79}}}}}}. \quad (5)$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 4 \cdot 10'000 \cdot x^{10'000-1} = \underline{\underline{40'000x^{9'999}}}}}}. \quad (6)$$

3. Erinnerung an lineare Funktionen

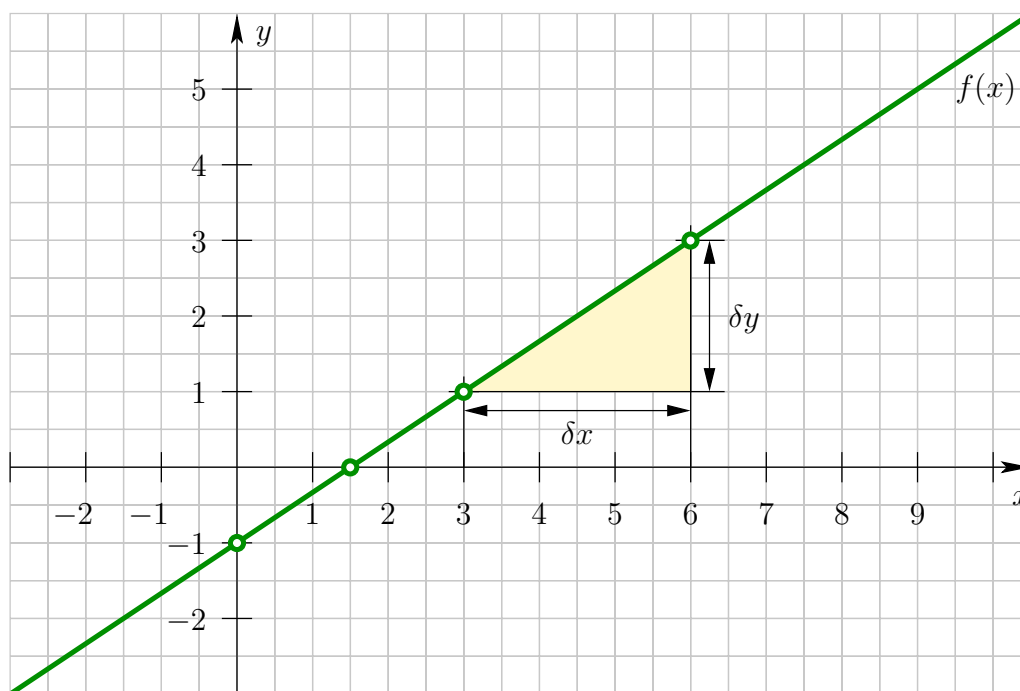
Lineare Funktionen werden beschrieben durch einen Funktionsterm der Form

$$f(x) = m \cdot x + q, \quad (7)$$

mit den Parametern $m, q \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie als Beispiel die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 1. \quad (8)$$

a) Wir skizzieren den Funktionsgraphen von f aus (8) in einem x - y -Diagramm.



b) Durch Vergleich von (7) und (8) lesen wir im Beispiel aus (8) die Werte

$$\underline{\underline{m = \frac{2}{3}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{q = -1}} \quad (9)$$

ab.

c) Im Beispiel aus (8) gilt offensichtlich

$$\underline{\underline{f(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1 = \underline{\underline{q}}}}. \quad (10)$$

d) Für alle linearen Funktionen der Form (7) gilt

$$\underline{\underline{f(0)}} = m \cdot 0 + q = 0 + q = \underline{\underline{q}}. \quad (11)$$

e) Wir bestimmen die *Steigung* des *Funktionsgraphen* aus Teilaufgabe a) mit Hilfe eines *Steigungsdreiecks* (gelb). Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\delta y}{\delta x}}} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{3 - 1}{6 - 3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} = m. \quad (12)$$

Da es sich beim *Graphen* von f um eine Gerade handelt, spielt die Wahl des *Steigungsdreiecks* keine Rolle. Das heisst, jedes andere *Steigungsdreieck* hätte uns auf den gleichen Wert für die *Steigung* geführt.

f) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\delta x > 0$. Für das Beispiel aus (8) gilt in jedem Fall

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}}} &= \frac{\frac{2}{3} \cdot (x + \delta x) - 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot x - 1\right)}{\delta x} = \frac{\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot \delta x - 1 - \frac{2}{3} \cdot x + 1}{\delta x} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \delta x}{\delta x} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} = m. \end{aligned} \quad (13)$$

g) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\delta x > 0$. Für alle *linearen Funktionen* der Form (7) gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}}} &= \frac{m \cdot (x + \delta x) + q - (m \cdot x + q)}{\delta x} = \frac{m \cdot x + m \cdot \delta x + q - m \cdot x - q}{\delta x} \\ &= \frac{m \cdot \delta x}{\delta x} = \underline{\underline{m}}. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Ableitung von Monomen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* mit Hilfe der *Faktor-Regel* und der *Monom-Ableitung*.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{\dot{a}(t)}} = 7 \cdot 7 \cdot t^{7-1} = \underline{\underline{49t^6}}. \quad (15)$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{b'(x)}} = 0. \quad (16)$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{c'(r)}} = -(-2) \cdot r^{-2-1} = \underline{\underline{2r^{-3}}}. \quad (17)$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{d'(s)}} = 0. \quad (18)$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{e'(z)}} = \frac{1}{3} \cdot z^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot z^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot z^{-\frac{2}{3}}}}. \quad (19)$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(k)}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot k^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot k^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \underline{\underline{\frac{4}{3} \cdot k^{-\frac{1}{3}}}}. \quad (20)$$

g) Es gilt

$$\underline{\underline{g'(w)}} = -p \cdot w^{p-1}. \quad (21)$$

h) Es gilt

$$\underline{\underline{h'(v)}} = u^2 \cdot 2 \cdot v^{2-1} \cdot w^2 = \underline{\underline{2u^2vw^2}}. \quad (22)$$

i) Es gilt

$$\underline{\underline{i'(q)}} = \frac{p^2 \cdot 1}{rs} = \underline{\underline{\frac{p^2}{rs}}}. \quad (23)$$

5. Ableitung der kubischen Standardfunktion

Wir betrachten die *kubische Standard-Funktion* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := x^3. \quad (24)$$

a) Mit Hilfe der *Monom-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 3 \cdot x^{3-1} = \underline{\underline{3x^2}}. \quad (25)$$

b) Mit Hilfe des *Differenzquotienten* und der *binomischen Formel* für dritte Potenzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f'(x)}} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \delta x)^3 - x^3}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \delta x + 3 \cdot x \cdot \delta x^2 + \delta x^3 - x^3}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x^2 \cdot \delta x + 3 \cdot x \cdot \delta x^2 + \delta x^3}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x \cdot (3 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot \delta x + \delta x^2)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} (3 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot \delta x + \delta x^2) \\ &= 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot 0 + 0^2 = 3 \cdot x^2 + 0 + 0 = \underline{\underline{3x^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

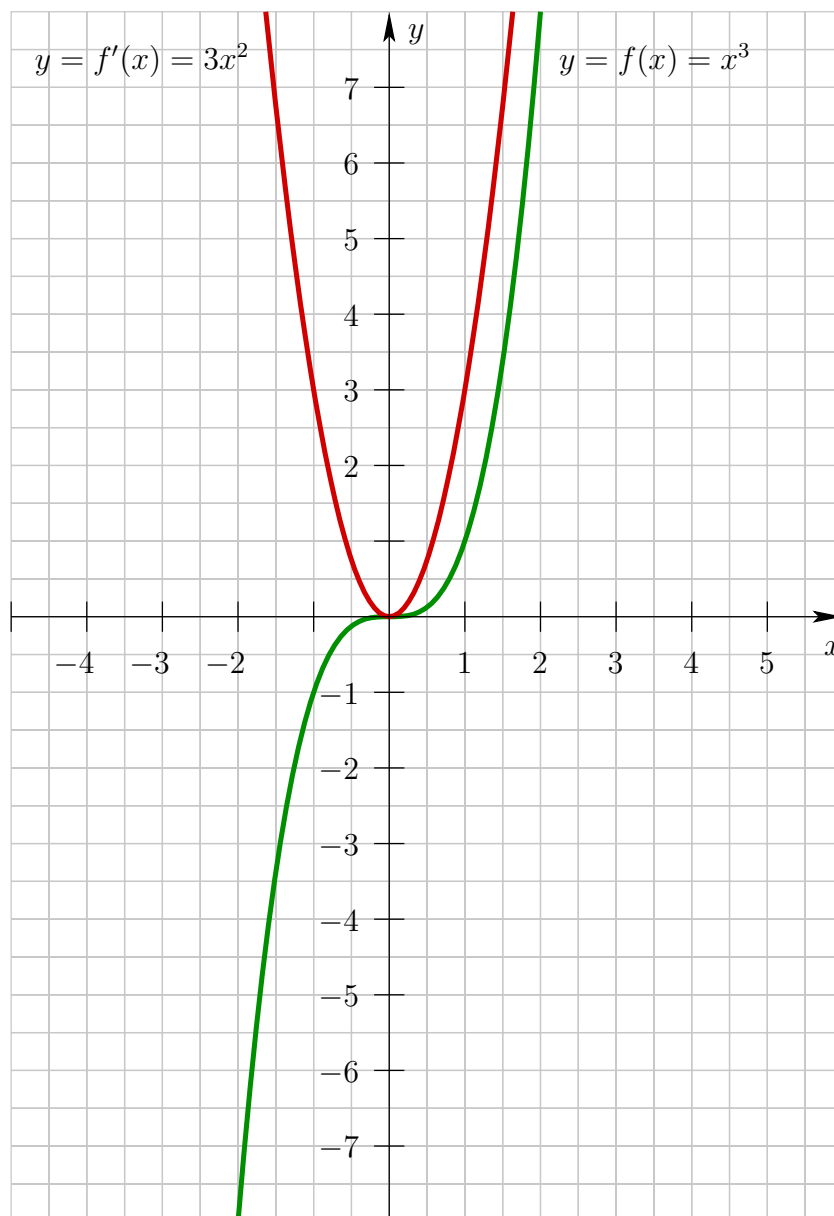
c) Mit Hilfe der *Monom-Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{f''(x)}} = 2 \cdot 3 \cdot x^{2-1} = \underline{\underline{6x}} \quad (27)$$

$$\underline{\underline{f'''(x)}} = \underline{\underline{6}}$$

$$\underline{\underline{f''''(x)}} = \underline{\underline{0}}.$$

d) Wir zeichnen die *Graphen* von f und f' .



6. Ableitung von Polynomen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der gegebenen *Funktion* mit Hilfe der *Summen-Regel*, der *Faktor-Regel* und der *Monom-Ableitung*.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 3 + 0 = 3.}} \quad (28)$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 5 + 0 = 6x + 5.}} \quad (29)$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 7 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 0 = 12x^2 + 14x.}} \quad (30)$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot 16 \cdot x^{16-1} - 7 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 10 \cdot x^{10-1} = \underline{\underline{32x^{15} - 14x + 30x^9}}. \quad (31)$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot y + 0 = \underline{\underline{2x + y}}. \quad (32)$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(t) = \frac{1}{t} + t^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{s} = t^{-1} + t^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{s}. \quad (33)$$

Es gilt

$$\underline{\underline{\dot{f}(t)}} = (-1) \cdot t^{-1-1} + \frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} \cdot s^{-\frac{1}{2}} - 0 = \underline{\underline{-t^{-2} + \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}}}. \quad (34)$$

g) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(s) = \frac{1}{t} + t^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}} - s^{-1}. \quad (35)$$

Es gilt

$$\underline{\underline{f'(s)}} = 0 + t^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot s^{-\frac{1}{2}-1} - (-1) \cdot s^{-1-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{3}{2}} + s^{-2}}}. \quad (36)$$

h) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1). \quad (37)$$

Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 2 \cdot (2 \cdot x^{2-1} - 2 + 0) = 2 \cdot (2x - 2) = \underline{\underline{4x - 4}}. \quad (38)$$

i) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(y) = (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \quad (39)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f'(y)}} &= 0 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 2 \cdot y^{2-1} - 3 \cdot y^{3-1} = -3x^2 + 6xy - 3y^2 = -3 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \underline{\underline{-3 \cdot (x - y)^2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

7. Ableitung der Wurzelfunktion

Wir betrachten die *Wurzel-Funktion* $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sqrt{x}. \quad (41)$$

a) Wir berechnen die *Ableitung* $f'(x)$ mit Hilfe der *Monom-Ableitung*. Es gilt

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}. \quad (42)$$

b) Wir berechnen die *Ableitung* $f'(x)$ mit Hilfe des *Differenzquotienten*, wobei wir den Bruch mit $(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})$ erweitern und dann im Zähler ausmultiplizieren. Es gilt

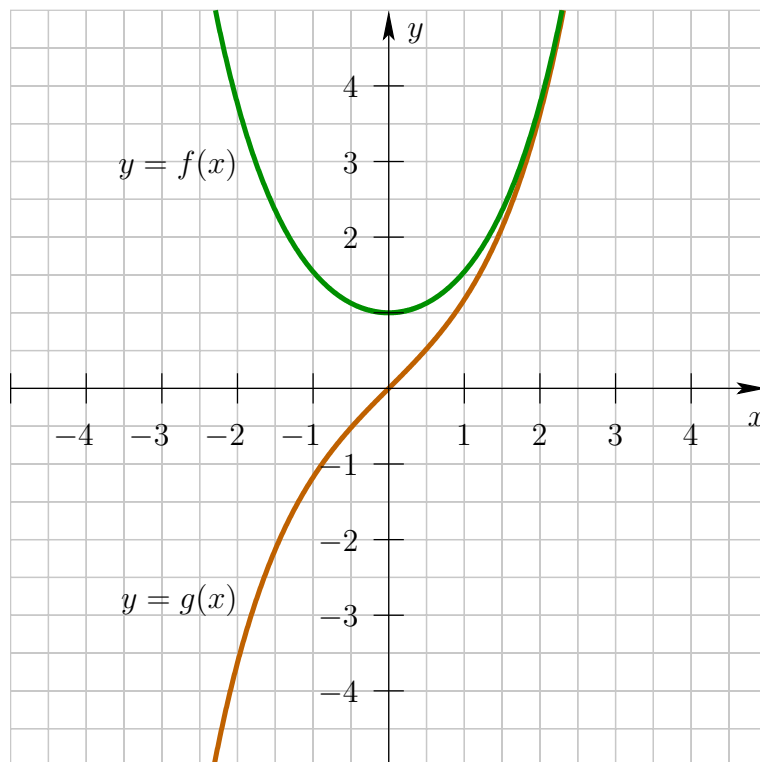
$$\begin{aligned} \underline{\underline{f'(x)}} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})}{\delta x \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\delta x \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{x + \delta x - x}{\delta x \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta x \cdot (\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}. \end{aligned} \quad (43)$$

c) Wir berechnen die zweite *Ableitung* von f mit Hilfe der *Monom-Ableitung*. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f''(x)}} &= (f'(x))' = \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}}}. \end{aligned} \quad (44)$$

8. Aussagen über zwei Funktionsgraphen [M,II]

Wir betrachten die *Graphen* der *Funktionen* f (grün) und g (orange).



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Es gilt $f'(0) = 0$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Es gilt $g'(-2) < 0$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
c) Gemäss <i>Graphen</i> kann ausgeschlossen werden, dass $f'(x) = x^2$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Die <i>Funktion</i> f ist eine <i>Potenz-Funktion</i> vom Typ $f(x) = x^p$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
e) Es gilt $g'(0) = 0$.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
f) Gemäss <i>Graphen</i> wäre es denkbar, dass $f'(x) = g(x)$ und $g'(x) = f(x)$.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

9. Ableitung und Aufleitung

Wir berechnen jeweils sowohl die *Ableitung* als auch die *Aufleitung* der gegebenen *Funktions-terme*.

a) Wir erhalten

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ F(x) = c, \end{cases} \quad (45)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

b) Wir erhalten

$$f(x) = 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ F(x) = 5x + c, \end{cases} \quad (46)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

c) Wir erhalten

$$f(x) = 2x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2 \\ \underline{\underline{F(x) = x^2 + c,}} \end{array} \right. \quad (47)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

d) Wir erhalten

$$f(x) = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 1 \\ \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c,}} \end{array} \right. \quad (48)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

e) Wir erhalten

$$f(x) = 3x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 3 \\ \underline{\underline{F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c,}} \end{array} \right. \quad (49)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

f) Wir erhalten

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2x^{2-1} = 2x \\ \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c,}} \end{array} \right. \quad (50)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

g) Für die *Funktion*

$$f(x) = 3x^2 + 2 \quad (51)$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 6x}} \quad (52)$$

$$\underline{\underline{F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 2x + c = \frac{3}{3}x^3 + 2x + c = \underline{\underline{x^3 + 2x + c,}}}} \quad (53)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

h) Für die *Funktion*

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 1 \quad (54)$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x) = 6x^3 - 4x + 1 = 6 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 4 + 0 = \underline{\underline{18x^2 - 4}}}} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= 6 \cdot \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 4 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + x + c = \frac{6}{4} x^4 - \frac{4}{2} x^2 + x + c, \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} x^4 - 2x^2 + x + c}},\end{aligned}\tag{56}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

i) Für die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}\tag{57}$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}\tag{58}$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = \frac{1}{-1} x^{-1} + c = -x^{-1} + c = -\underline{\underline{\frac{1}{x}}} + c,\tag{59}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

j) Für die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}\tag{60}$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\underline{\underline{\frac{1}{x^2}}}.\tag{61}$$

Die *Aufleitung* von f kann leider nicht mit der üblichen Technik zur *Aufleitung* von Monomen berechnet werden. Wenn wir dies versuchen, dann erhalten wir formal eine Division durch Null:

$$F(x) = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} + c = \frac{1}{0} x^0 + c = ?\tag{62}$$

Wie wir später sehen werden, gilt für $x > 0$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.\tag{63}$$

Daraus folgern wir

$$\underline{\underline{F(x) = \ln(x) + c \quad \text{für } x > 0}},\tag{64}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

k) Für die *Funktion*

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\tag{65}$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} \quad (66)$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = \underline{\underline{\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c}}, \quad (67)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

l) Für die *Funktion*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 = \sqrt{x^{-1}} - 1 = (x^{-1})^{\frac{1}{2}} - 1 = x^{-1 \cdot \frac{1}{2}} - 1 = x^{-\frac{1}{2}} - 1 \quad (68)$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} - 0 = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}} \quad (69)$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} - x + c = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - x + c = \underline{\underline{2\sqrt{x} - x + c}}, \quad (70)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.