Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 8

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:

- Sie kennen den Begriff Skalarprodukt, dessen wichtigste Eigenschaften und auch die Rechenregeln hierfür.
- Sie können Längen und Winkel in n-dimensionalen Räumen mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen.
- Sie können mit Hilfe des Skalarprodukts einfache Aufgaben aus Alltag, Naturwissenschaft und Technik lösen.

---

1. Aussagen über das Skalarprodukt

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das Skalarprodukt von 2 Vektoren ist wieder ein Vektor.		X
b) Das Skalarprodukt ist nur in 2- und 3-dimensionalen Räumen definiert.		X
c) Für das Skalarprodukt gelten binomische Formeln.	X	
d) Es gilt: $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle \geq 0$.		X
e) Es gilt: $\langle 2\cdot\vec{v}, 2\cdot\vec{w}\rangle = 2\cdot\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$.		X
f) Gilt $\langle\vec{v}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w}\rangle = 0$, dann folgt $\vec{v} = -\vec{w}$.	X	
g) Längen und Winkel lassen sich in n-dimensionalen Räumen mit Hilfe des Skalarprodukts definieren.	X	
h) Gilt $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$, dann ist entweder $\vec{v} = 0$ oder $\vec{w} = 0$.		X
i) Es gilt: $\sqrt{\langle 2\cdot\vec{v}, 2\cdot\vec{v}\rangle} = 2\cdot\lvert\vec{v}\rvert$.	X	
j) Es gilt: $\langle\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{v}\rangle \leq 0$.	X	

2. Skalarprodukt

Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

a) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle$

b) $\left\langle \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right\rangle$

d) $\left\langle \begin{pmatrix}-3\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{8}\end{pmatrix} \right\rangle$

e) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-3\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

f) $\left\langle \begin{pmatrix}0{,}2\\-\sqrt{3}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\\-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix} \right\rangle$

g) $\left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

h) $\left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

i) $\left\langle \begin{pmatrix} 2^x \\ 3^x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{-x} \\ 3^x \\ -9^x \end{pmatrix} \right\rangle$

a)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle}} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = \underline{\underline{11}}$$

b)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}} = 2 \cdot (-6) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = \underline{\underline{0}}$$

c)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle}} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = \underline{\underline{32}}$$

d)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{8} \end{bmatrix} \right\rangle}} = (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 3 + 0 - \sqrt{2 \cdot 8} = 3 - \sqrt{16}$$

$$= 3 - 4 = \underline{\underline{-1.}}$$

e)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 2 + 3 - 3 - 2$$

$$= \underline{\underline{0.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 0.2 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{7} \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle}} = 0.2 \cdot (-3) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \left(-\sqrt{7}\right) - \frac{1}{2} \cdot (-3)$$

$$= -0.6 - 3 + 0 + \frac{3}{2} = -0.6 - 3 + 1.5 = \underline{\underline{-2.1\,.}}$$

g)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}} = \cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+1\cdot(-1)$$

$$= \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)-1 = 1-1 = \underline{\underline{0.}}$$

h)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}} = \cos(\varphi)\cdot\big(-\sin(\varphi)\big)+\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)+1\cdot 1$$

$$= -\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+1 = 0+1 = \underline{\underline{1.}}$$

i)

$$\underline{\underline{\left\langle \begin{bmatrix} 2^x \\ 3^x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^{-x} \\ 3^x \\ -9^x \end{bmatrix} \right\rangle}} = 2^x\cdot 2^{-x}+3^x\cdot 3^x-1\cdot 9^x = 2^{x-x}+3^{x+x}-9^x = 2^0+3^{2x}-\left(3^2\right)^x$$

$$= 1+3^{2x}-3^{2x} = 1+0 = \underline{\underline{1.}}$$

3. Skalarprodukt mit Python/Numpy berechnen
Berechnen Sie die Skalarprodukte aus Aufgabe 2a) – f) mit Python/Numpy.

a)
```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
v=np.array([1,2]);
w=np.array([3,4]);
# Berechnungen:
sp=np.dot(v,w);
# Ausgabe:
print('Skalarprodukt = ',sp);
```

b) – f) analog zu Aufgabe a).

4. Skalarprodukt mit Python/Sympy berechnen
Berechnen Sie die Skalarprodukte aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren:
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter:
sp.init_printing();
v=sp.Matrix([1,2]);
w=sp.Matrix([3,4]);
# Berechnungen:
```

```
sp=v.dot(w);
# Ausgabe:
dp.display(sp);
```

b) – f) analog zu Aufgabe a).

g)
```
# Python initialisieren:
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter:
sp.init_printing();
phi = sp.symbols('phi');
v=sp.Matrix([sp.cos(phi),sp.sin(phi),1]);
w=sp.Matrix([sp.cos(phi),sp.sin(phi),-1]);
# Berechnungen:
Skalar=sp.trigsimp(v.dot(w)); # Vereinfachung
trigonometrischer Ausdrücke
# Ausgabe:
dp.display(Skalar);
```

h)
analog zu g)

i)
```
# Python initialisieren:
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
# Parameter:
sp.init_printing();
x = sp.symbols('x');
v=sp.Matrix([2**x,3**x,1]);
w=sp.Matrix([2**(-x),3**x,-(9**x)]);
# Berechnungen:
Skalar=sp.simplify(v.dot(w));
# Ausgabe:
dp.display(Skalar);
```

5. Eigenschaften des Skalarprodukts
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Skalarprodukts für $a \in \mathbb{R}$ und beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

a) $\langle a \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle = a \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
b) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
c) $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
d) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$
e) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = 0$
f) $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
g) $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
h) $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2$

a)
Das Skalarprodukt ist linear bzgl. der Multiplikation mit einem Skalar.

$$\underline{\underline{\langle a\cdot\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}} = \left\langle a\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} av_1 \\ \vdots \\ av_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= av_1w_1 + \ldots + av_nw_n = a\cdot(v_1w_1+\ldots+v_nw_n) = \underline{\underline{a\cdot\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\,.}}$$

b)
Das Skalarprodukt ist linear bzgl. der Addition von Vektoren.

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}} = \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= (u_1+v_1)\cdot w_1 + \ldots + (u_n+v_n)\cdot w_n = u_1w_1 + v_1w_1 + \ldots + u_nw_n + v_nw_n$$

$$= u_1w_1 + \ldots + u_nw_n + v_1w_1 + \ldots + v_nw_n = \underline{\underline{\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\,.}}$$

(

c)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle}} = w_1v_1 + \ldots + w_nv_n = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n = \underline{\underline{\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}}$$

d)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}} = v_1v_1 + \ldots + v_nv_n = \underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{v_n^2}_{\geq 0} \geq \underline{\underline{0}}$$

e)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0}} \;\Leftrightarrow\; v_1^2 + \ldots + v_n^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; v_1^2 = \ldots = v_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; v_1 = \ldots = v_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{\mathbf{v} = 0.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle}} = \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$$

$$= \underline{\underline{|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 + 2\cdot\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\,.}}$$

g)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle}} = \langle\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$$

$$= \underline{\underline{|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2\cdot\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\,.}}$$

h)

$$\underline{\underline{\langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle}} = \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle - \langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$$

$$= \underline{\underline{|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2.}}$$

6. Schreibweise mit Spitzklammern verglichen mit Punktschreibweise

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = \binom{2}{-1}, \vec{v} = \binom{1}{3}, \vec{w} = \binom{-1}{1}$.

a) Berechnen Sie die Komponenten von $\vec{a} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\cdot\vec{w}$.

b) Berechnen Sie die Komponenten von $\vec{b} = \vec{u}\cdot\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$.

c) Schreiben Sie die Terme aus Aufgabe a) und b) mit Punktschreibweise.

d) Welches Problem ergibt sich beim Berechnen des Dreifachproduktes $\vec{c} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$, wenn dieses in Punktschreibweise gegeben ist? Welchen Schluss ziehen Sie für die Punktschreibweise des Skalarprodukts?

a)

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{w} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \big(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3\big) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}} = \mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \big(1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1\big)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{w} = \underline{\underline{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}} = \mathbf{u} \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}}.$$

d)

Das Dreifachprodukt ist nicht definiert, da nicht klar ist, ob

$\vec{c} = \overrightarrow{(u \cdot v)} \cdot \vec{w}$ oder $\vec{c} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$

gemeint ist. Dies ist verschieden zur Multiplikation von reellen Zahlen, da diese assoziativ ist und somit ein Dreifach- bzw. Mehrfachprodukt definiert ist. Für das Skalarprodukt heisst dies, dass es nicht assoziativ ist und somit muss bei Drei- und Mehrfachprodukten eindeutig über Klammern festgelegt werden, was gemeint ist, wenn die Punktschreibweise verwendet wird. Somit hat die Spitzklammernschreibweise einen Vorteil und ist daher vorteilhafter.

7. Aussagen über Längen und Winkel von Vektoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Längen und Winkel von Vektoren können mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet werden.	X	
b) Es gilt: $\lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert = \lvert\vec{v}\rvert + \lvert\vec{w}\rvert$		X
c) Es gilt: $\lvert 3 \cdot \vec{v}\rvert = 3 \cdot \lvert\vec{v}\rvert$	X	
d) Gilt $\vec{v} \perp \vec{w}$, dann folgt: $\lvert\vec{v}\rvert^2 + \lvert\vec{w}\rvert^2 = \lvert\vec{v} + \vec{w}\rvert^2$.	X	
e) Es gilt: $\measuredangle(2 \cdot \vec{v}, \vec{w}) = 2 \cdot \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$.		X
f) Gilt $\measuredangle(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = \pi/2$, dann folgt: $\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\vec{w}\rvert$.	X	

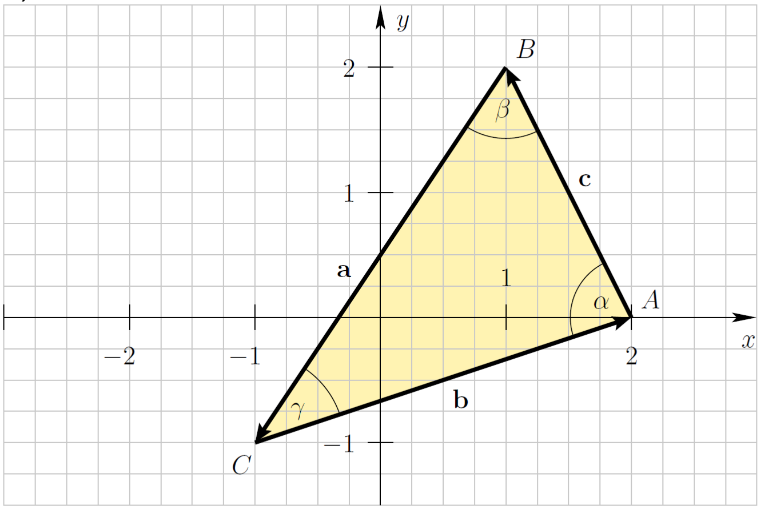
8. Seiten und Winkel im Dreieck in 2D

Berechnen Sie die Seiten und Innenwinkel der Dreiecke mit den gegebenen Eckpunkten.

a) A = (2;0), B = (1;2), C = (-1;-1)

b) A = (-1;-2), B = (4;1), C = (1;1)

a)



Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} := \mathbf{C} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{A} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} := \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die Längen der Seiten erhalten wir mittels des Betrags:

$$\underline{\underline{a}} = |\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$$

$$\underline{\underline{b}} = |\mathbf{b}| = \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}}$$

$$\underline{\underline{c}} = |\mathbf{c}| = \sqrt{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}\,.}}$$

Die Innenwinkel sind die jeweiligen Winkel zwischen zwei Seiten. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Vektoren beide vom Eckpunkt wegzeigen, d. h. es muss jeweils einer der Vektoren umgekehrt werden.

$$\underline{\underline{\alpha}} = \measuredangle(-\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 5}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 5}\right) \approx 1.428'9 \approx \underline{\underline{0.455\,\pi}}$$

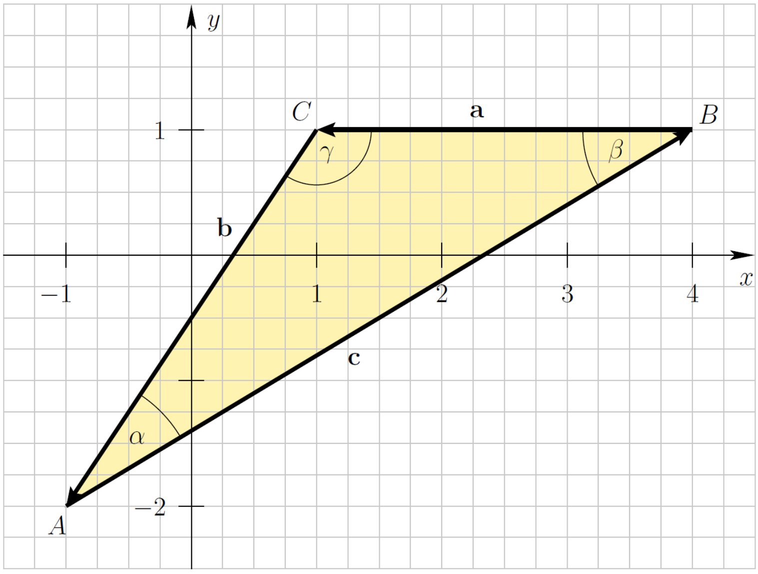
$$\underline{\underline{\beta}} = \measuredangle(-\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle}{|\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{-(-1) \cdot (-2) - 2 \cdot (-3)}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right) \approx 1.051'7 \approx \underline{\underline{0.335\,\pi}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \measuredangle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-(-2) \cdot 3 - (-3) \cdot 1}{\sqrt{13}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{13}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5}}\right) \approx 0.661'04 \approx \underline{\underline{0.210\,\pi.}}$$

b)



Seitenvektoren:

$$\mathbf{a} := \mathbf{C} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{A} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} := \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(-1) \\ 1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Seitenlängen:

$$\underline{\underline{a}} = |\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}\,, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$$

$$\underline{\underline{b}} = |\mathbf{b}| = \sqrt{\langle \mathbf{b}\,, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$$

$$\underline{\underline{c}} = |\mathbf{c}| = \sqrt{\langle \mathbf{c}\,, \mathbf{c} \rangle} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,\sqrt{17}\;.}}$$

Innenwinkel:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \measuredangle(-\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{b}\,, \mathbf{c} \rangle}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-(-2)\cdot 5 - (-3)\cdot 3}{\sqrt{13}\,\sqrt{2}\,\sqrt{17}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{13}\,\sqrt{2}\,\sqrt{17}}\right) \approx 0.442'37 \approx \underline{\underline{0.141\,\pi}}$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \measuredangle(-\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{c}\,, \mathbf{a} \rangle}{|\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{-5\cdot(-3) - 3\cdot 0}{\sqrt{2}\,\sqrt{17}\cdot 3}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{15}{3\,\sqrt{2}\,\sqrt{17}}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{2}\,\sqrt{17}}\right) \approx 0.540'42 \approx \underline{\underline{0.172\,\pi}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \measuredangle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{a}\,, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-(-3)\cdot(-2) - 0\cdot(-3)}{3\,\sqrt{13}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-6}{3\,\sqrt{13}}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) \approx 2.158'8 \approx \underline{\underline{0.687\,\pi.}}$$

9. Würfel in 4D

Die folgenden Eckpunkte eines Würfels in 4D seien gegeben: (0;0;0;0), (a;0;0;0), (0;a;0;0), (0;0;a;0), (0;0;0;a) mit a > 0.

a) Bestimmen Sie die restlichen der insgesamt 16 Eckpunkte des Würfels.

b) Wie lang sind die 4 Raumdiagonalen des Würfels?

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen und einer Kante des Würfels.

a)

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{10} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{14} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{16} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

b)

Eine Raumdiagonale in 4D verläuft z. B. vom Endpunkt E_1 zum Endpunkt E_{16}. Somit ergibt sich für den Verbindungsvektor

$$\mathbf{d} := \mathbf{E}_{16} - \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

und somit für die Länge der Raumdiagonalen

$$\underline{\underline{d}} = |\mathbf{d}| = \sqrt{\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = \underline{\underline{2a.}}$$

c)
Wir bestimmen eine Kante des Würfels, die am Eckpunkt E_1 beginnt und nehmen die Kante zwischen den Eckpunkten E_1 und E_2:

$$\mathbf{k} := \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt können wir den Winkel zwischen der Raumdiagonalen d und der Kante k bestimmen:

$$\underline{\underline{\eta}} = \measuredangle(\mathbf{d}, \mathbf{k}) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{d}, \mathbf{k} \rangle}{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{k}|}\right) = \arccos\left(\frac{a \cdot a + a \cdot 0 + a \cdot 0 + a \cdot 0}{2a \cdot a}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{a^2}{2a^2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}\,.$$