Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über Folgen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *Folge* ist eine *Funktion* mit ganzzahligen *Argumenten*.	●	○
b) Eine *Funktion* des Typs $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschreibt eine *Folge* von *natürlichen Zahlen*.	●	○
c) Jede *Folge* hat unendlich viele, voneinander verschiedene *Funktionswerte*.	○	●
d) Jede *reelle Zahlenfolge* ist entweder eine *arithmetische* oder *geometrische Folge*.	○	●

2. Untersuchung einer einfachen Folge

Betrachten Sie die *Folge*, welche definiert ist durch

$$a_n := \frac{2n}{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

a) Wir berechnen einige *Folgeglieder* der *Folge* a_n und stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{15}{8}$

(2)

b) Aufgrund unserer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) vermuten wir, dass die *Folge* a_n *nach unten beschränkt* ist durch die *untere Schranke* $a_{\mathrm{U}} := 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlich

$$2n \geq n \geq 0 \quad \text{und} \quad n+1 > n \geq 0. \tag{3}$$

Da gemäss (3) sowohl Zähler als auch Nenner in (1) positiv sind, muss gelten

$$\underline{\underline{a_n}} = \frac{2n}{n+1} \geq \underline{\underline{0 = a_{\mathrm{U}}.}} \tag{4}$$

c) Aufgrund unserer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) vermuten wir, dass die *Folge a_n nach oben beschränkt* ist durch die *obere Schranke* $a_O := 2$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlich

$$\underline{\underline{a_n}} = \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2\,(n+1)}{n+1} = \underline{\underline{2 = a_O.}} \tag{5}$$

d) Durch gleichnamig machen und Subtrahieren der Brüche erhalten wir die *Abschätzung*

$$\begin{aligned}\underline{\underline{a_{n+1} - a_n}} &= \frac{2\,(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n\,(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \geq \underline{\underline{0.}}\end{aligned} \tag{6}$$

e) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen in (1) finden wir den *Grenzwert*

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{n \cdot 2}{n \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1+0} = 2. \tag{7}$$

Die *Folge a_n konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 2}}$.

f) Wir berechnen die *Folge D_n* der Abweichungen (Betrag der Differenz) der *Folge a_n* zum *Grenzwert* $a = 2$ aus Teilaufgabe e). Durch gleichnamig machen und Subtrahieren der Brüche erhalten wir die *Abschätzung*

$$\begin{aligned}\underline{\underline{D_n}} &= \left|a - a_n\right| = \left|2 - \frac{2n}{n+1}\right| = \left|\frac{2\,(n+1) - 2n}{n+1}\right| = \left|\frac{2n+2-2n}{n+1}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{n+1}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Die *Folge D_n konvergiert* erwartungsgemäss gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{D = 0}}$.

g) Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ das *Folgeglied a_n* nicht weiter vom *Grenzwert* $a = 2$ aus Teilaufgabe e) entfernt ist als die Vorgabe $\varepsilon = 1/1'000'000$. Dazu betrachten wir den Ausdruck für die Abweichung aus Teilaufgabe f). Gemäss (8) muss gelten

$$D_N = \left|a - a_N\right| \leq \varepsilon \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{N+1} \leq \frac{1}{1'000'000} \qquad \Big|\,\frac{1}{(\ldots)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{N+1}{2} \geq 1'000'000 \qquad \Big|\cdot 2 \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad N+1 \geq 2'000'000 \qquad \Big| - 1. \tag{12}$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$N \geq 2'000'000 - 1 = 1'999'999. \tag{13}$$

Das kleinste $N \in \mathbb{N}$, welches diese Bedingung erfüllt ist offensichtlich $\underline{\underline{N = 1'999'999}}$.

3. Aussagen über Monotonie und Beschränktheit von Folgen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *reelle Zahlenfolge* ist entweder *monoton steigend* oder *monoton fallend.*	○	●
b) Konstante, *reelle Zahlenfolgen* sind *monoton steigend.*	●	○
c) Eine *streng monoton steigende*, *reelle Zahlenfolge* ist niemals *beschränkt.*	○	●
d) Jede *monoton fallende*, *reelle Zahlenfolge* ist *nach oben beschränkt.*	●	○
e) Eine *reelle Zahlenfolge* kann niemals gleichzeitig *monoton steigend* und *monoton fallend* sein.	○	●
f) Ist eine *reelle Zahlenfolge* a_n *monoton steigend* und *beschränkt*, dann ist die *Folge* $b_n := n \cdot a_n$ *monoton steigend* und *unbeschränkt.*	○	●

4. Eigenschaften von Folgen

Wir untersuchen, für welche der folgenden Kombinationen von Eigenschaften es eine *reelle Zahlenfolge* gibt, welche alle Anforderungen erfüllt. Falls möglich, geben wir ein Beispiel an.

a) Die *Folge*

$$\underline{\underline{a_n := \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}^+}} \tag{14}$$

ist *streng monoton fallend* und *nach unten beschränkt* durch die *Schranke* 0.

b) Die *Folge*

$$\underline{\underline{a_n := (-1)^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}}} \tag{15}$$

springt ständig zwischen den Werten -1 und 1 hin und her. Sie ist damit *nach unten beschränkt* durch die *Schranke* -1, *nach oben beschränkt* durch die *Schranke* 1 und *divergent.*

c) Ist eine *Folge streng monoton steigend*, dann gilt $a_n \geq a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $a_n \geq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Die *Folge* ist somit *nach unten beschränkt* durch das nullte bzw. erste *Folgeglied* als *untere Schranke.* Es kann daher keine *Folge* geben, welche sowohl *monoton steigend* als auch *nach unten unbeschränkt* ist.

d) Die *Folge*

$$\underline{\underline{a_n := -\frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}^+.}} \tag{16}$$

ist *monoton steigend*, *nach oben beschränkt* durch die *Schranke* 0, *konvergent* gegen den *Grenzwert* 0 und *injektiv.*

e) Die *Folge*

$$\underline{\underline{a_n := 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}}} \tag{17}$$

bleibt *konstant* beim Wert 0. Sie ist somit *monoton fallend* und *konvergent* mit *Grenzwert* 0.

f) Jede *monotone* und *beschränkte Folge* ist gemäss Theorie *konvergent*. Es kann daher keine *Folge* geben, welche sowohl *monoton steigend* und *beschränkt* als auch *divergent* ist.

5. Aussagen über die Konvergenz von Folgen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *konvergente, reelle Zahlenfolge* ist *nach unten beschränkt*.	●	○
b) Jede *konvergente, monotone, reelle Zahlenfolge* ist *streng monoton*.	○	●
c) Die *Folge* $a_n := n - n^3$ *konvergiert* gegen $-\infty$.	○	●
d) Ist eine *reelle Zahlenfolge streng monoton* und *beschränkt*, dann ist sie *konvergent*.	●	○
e) Gilt für alle *Folgeglieder* a_n einer *reellen Zahlenfolge* dass $0 < a_n < \frac{1}{n}$, dann *konvergiert* a_n gegen Null.	●	○

6. Konvergenzverhalten und Grenzwerte

Wir bestimmen in jeder Teilaufgabe, ob die gegebene *Folge divergiert* oder *konvergiert* und berechnen in letzterem Fall den *Grenzwert*.

a) Wir betrachten die *Folge*

$$a_n := \frac{3}{n+2}\,. \tag{18}$$

Wir zeigen zwei Varianten, um das Verhalten der *Folge* zu untersuchen.

Variante 1: Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen erhalten wir

$$a_n = \frac{3}{n+2} = \frac{n \cdot \frac{3}{n}}{n \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1+0} = 0\,. \tag{19}$$

Variante 2: Offensichtlich gilt

$$0 \le a_n \tag{20}$$

und durch *Abschätzen nach oben* erhalten wir für alle $n \ge 1$, dass

$$a_n = \frac{3}{n+2} \le \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 3 \cdot 0 = 0\,. \tag{21}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 0}}$.

b) Durch *Abschätzen nach unten* erhalten wir

$$a_n := \frac{n+2}{3} \ge \frac{n}{3} = \frac{1}{3} \cdot n \xrightarrow{n\to\infty} \infty\,. \tag{22}$$

Die *Folge* ist offenbar *nach oben unbeschränkt* und somit *divergent*.

c) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{n+2}{3n} = \frac{n \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right)}{n \cdot 3} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{3} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}\,. \tag{23}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 1/3}}$.

d) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{3n}{n+2} = \frac{n \cdot 3}{n \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{1+0} = \frac{3}{1} = 3. \tag{24}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 3}}$.

e) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{3n}{6n+2} = \frac{n \cdot 3}{n \cdot \left(\frac{6n}{n} + \frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{6 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{6+0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,. \tag{25}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 1/2}}$.

f) Durch Faktorisieren und Kürzen sowie anschliessendem Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n und Kürzen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{4-n^2}{(2+n)^2} = \frac{(2-n)\cdot(2+n)}{(2+n)\cdot(2+n)} = \frac{2-n}{2+n} = \frac{n \cdot \left(\frac{2}{n} - \frac{n}{n}\right)}{n \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{n}{n}\right)} = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{2}{n} + 1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{0-1}{0+1} \\ &= \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \tag{26}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -1}}$.

g) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n^2 und Kürzen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{2n-5-4n^2}{3-8n^2-10n} = \frac{n^2 \cdot \left(\frac{2n}{n^2} - \frac{5}{n^2} - \frac{4n^2}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(\frac{3}{n^2} - \frac{8n^2}{n^2} - \frac{10n}{n^2}\right)} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} - 4}{\frac{3}{n^2} - 8 - \frac{10}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{0-0-4}{0-8-0} \\ &= \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 1/2}}$.

h) Durch Ausmultiplizieren des Nenners sowie anschliessendem Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n^2 und Kürzen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{3n^2+5n+1}{(n-1)^2} = \frac{3n^2+5n+1}{n^2-2n+1} = \frac{n^2 \cdot \left(\frac{3n^2}{n^2} + \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &\xrightarrow{n \to \infty} \frac{3+0+0}{1-0+0} = \frac{3}{1} = 3. \end{aligned} \tag{28}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 3}}$.

i) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n^4 und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{10^{12} - 5n^2 + 6n^3 + 10^{10}n}{5 - 7n^4 - 5n^2} = \frac{n^4 \cdot \left(\frac{10^{12}}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4} + \frac{6n^3}{n^4} + \frac{10^{10}n}{n^4}\right)}{n^4 \cdot \left(\frac{5}{n^4} - \frac{7n^4}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4}\right)}$$
$$= \frac{\frac{10^{12}}{n^4} - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n} + \frac{10^{10}}{n^3}}{\frac{5}{n^4} - 7 - \frac{5}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0 - 0 + 0 + 0}{0 - 7 - 0} = 0. \tag{29}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 0}}$.

j) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors 3^n und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{2^n + 3}{3^n + 2} - 1 = \frac{3^n \cdot \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{3}{3^n}\right)}{3^n \cdot \left(\frac{3^n}{3^n} + \frac{2}{3^n}\right)} - 1 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0}{1+0} - 1$$
$$= 0 - 1 = -1. \tag{30}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -1}}$.

k) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors 3^n und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{3 + n^{100} + 2^n}{n^2 - 3^n - 2} + 4 = \frac{3^n \cdot \left(\frac{3}{3^n} + \frac{n^{100}}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n \cdot \left(\frac{n^2}{3^n} - \frac{3^n}{3^n} - \frac{2}{3^n}\right)} + 4 = \frac{\frac{3}{3^n} + \frac{n^{100}}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{n^2}{3^n} - 1 - \frac{2}{3^n}} + 4$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0+0}{0-1-0} + 4 = 0 + 4 = 4. \tag{31}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 4}}$.

l) Durch Ausklammern in Zähler und Nenner eines Faktors n^3 und Kürzen erhalten wir

$$a_n := \frac{2 + \frac{6n^6}{2+3n^3} - 7n^3}{n + \left(1+n\right)^3} = \frac{2 + \frac{n^3 \cdot \frac{6n^6}{n^3}}{n^3 \cdot \left(\frac{2}{n^3} + \frac{3n^3}{n^3}\right)} - 7n^3}{n + 1 + 3n + 3n^2 + n^3} = \frac{2 + \frac{6n^3}{\frac{2}{n^3}+3} - 7n^3}{1 + 4n + 3n^2 + n^3}$$
$$= \frac{n^3 \cdot \left(\frac{2}{n^3} + \frac{6n^3}{n^3\left(\frac{2}{n^3}+3\right)} - \frac{7n^3}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4n}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} + \frac{n^3}{n^3}\right)} = \frac{\frac{2}{n^3} + \frac{6}{\frac{2}{n^3}+3} - 7}{\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0 + \frac{6}{0+3} - 7}{0+0+0+1}$$
$$= \frac{2-7}{1} = -5. \tag{32}$$

Die *Folge konvergiert* demnach gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -5}}$.

7. Grenzwerte berechnen mit Python/Sympy

Wir berechnen die *Grenzwerte* aus Aufgabe 6 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
a,n=sp.symbols('a,n');
# Parameter:
a_n=...;
# Berechnungen:
a=sp.limit_seq(a_n,n);
# Ausgabe:
dp.display(a_n);
dp.display(a);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=3/(n+2);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a=0}}$.

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(n+2)/3;
```

Gemäss Ausgabe *divergiert* die *Folge*.

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(n+2)/(3*n);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a=\frac{1}{3}}}$.

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=3*n/(n+2);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a=3}}$.

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=3*n/(6*n+2);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$.

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(4-n**2)/(2+n)**2;
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -1}}$.

g) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(2*n-5-4*n**2)/(3-8*n**2-10*n);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$.

h) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(3*n**2+5*n+1)/(n-1)**2;
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 3}}$.

i) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(10**12-5*n**2+6*n**3+10**10*n)/(5-7*n**4-5*n**2);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 0}}$.

j) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(2**n+3)/(3**n+2)-1;
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -1}}$.

k) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(3+n**100+2**n)/(n**2-3**n-2)+4;
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = 4}}$.

l) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
a_n=(2+6*n**6/(2+3*n**3)-7*n**3)/(n+(1+n)**3);
```

Gemäss Ausgabe *konvergiert* die *Folge* gegen den *Grenzwert* $\underline{\underline{a = -5}}$.

8. Aussagen über eine explizit definierte Folge

Wir betrachten die *Folge*, welche definiert ist durch

$$a_n := \frac{7n^{123} + 123n^7 + 18n^{73} + 73n^{18} + 789\sqrt{n} + 45}{\sqrt[3]{n} + 9n^{23} + 23n^9 + 18n^{73} + 73n^{18} + 7n^{123} + 123n^7 + 54} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $a_0 = 0$.	○	●
b) Die *Folge* a_n ist eine *arithmetische Folge*.	○	●
c) Die *Folge* a_n ist eine *geometrische Folge*.	○	●
d) Die *Folge* a_n *divergiert* gegen ∞.	○	●
e) Die *Folge* a_n ist *beschränkt*.	●	○
f) Die *Folge* a_n *konvergiert* gegen 1.	●	○

9. Aussagen über die Konvergenz von Folgen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Folge* $a_n := n^3$ *konvergiert* gegen ∞.	○	●
b) Jede *beschränkte*, *reelle Zahlenfolge* ist *konvergent.*	○	●
c) Jede *konvergente*, *reelle Zahlenfolge* ist *monoton.*	○	●
d) Ist eine *reelle Zahlenfolge monoton* und *beschränkt*, dann ist sie *konvergent.*	●	○
e) Eine *streng monoton steigende*, *konvergente*, *reelle Zahlenfolge* nähert sich ihrem *Grenzwert* an, ohne ihn jemals anzunehmen.	●	○