Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

# Übungsblatt DGL 8

Computational and Data Science
BSc HS2024

## Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe erzwungene gedämpfte harmonische Schwingung, harmonische Anregung, stationäre Lösung, Resonanzfrequenz und -amplitude sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die Bedingungen für schwache/starke Dämpfung und den aperiodischen Grenzfall.
- Sie können für gegebene harmonische Anregungen die stationäre Lösung, Resonanzfrequenz und -amplitude bestimmen.
- Sie können für einfache mechanische und elektrische Systeme die Parameter der DGL für erzwungene gedämpfte Schwingungen aufstellen und anwenden.

### 1. Aussagen über erzwungen gedämpfte harmonische Schwingungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Bei erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung berücksichtigt. | X | |
| b) Bei erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingungen wird die innere Dämpfung vernachlässigt. | | X |
| c) Bei erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen berücksichtigt. | X | |
| d) Bei erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingungen werden äussere Anregungen vernachlässigt. | | X |
| e) Die Frequenz einer erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingung wird allein durch die äussere Anregung vorgegeben. | X | |

### 2. Aussagen über eine erzwungene gedämpfte harmonische Schwingung

Gegeben ist das folgende AWP:

DGL: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 25x = 7\sin(5t + \frac{\pi}{3})$

AB: $x(-2) = 0$
$\dot{x}(-2) = 0.$

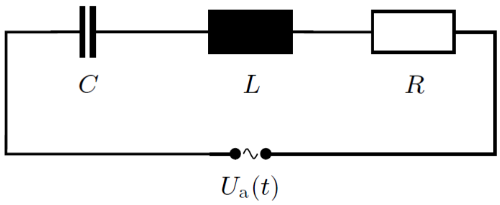
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Das AWP beschreibt eine Situation mit schwacher Dämpfung. | X | |
| b) Die DGL hat eine stationäre Lösung. | X | |
| c) Die DGL hat genau eine stationäre Lösung. | X | |

| | | |
|---|---|---|
| d) Wegen der AB ist die Lösung des AWP trivial, d. h. x(t) = 0. | | X |
| e) Die Anregung der Schwingung erfolgt mit der Resonanzfrequenz des Systems. | | X |
| f) Es gilt $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$. | | X |

**3. RLC-Schaltkreis**

Gegeben sei ein RLC-Schaltkreis, der aus einem Widerstand R = 10 Ω, einer Induktivität L = 18 mH, einer Kapazität C = 141 µF und einer externen Wechselspannungsquelle mit Effektivspannung 5 V bestehe.




a) Stellen Sie eine DGL für die Spannung $U_C(t)$ auf, die am Kondensator anliegt.
b) Bestimmen Sie die ungedämpfte Kreisfrequenz und die Dämpfungskonstante des Systems. Welcher Fall liegt vor?
c) Bestimmen Sie die Frequenz des ungedämpften und des gedämpften Systems und die Resonanzfrequenz.

a)
Wir wenden die Maschenregel an:

$$U_\mathrm{R} + U_\mathrm{L} + U_\mathrm{C} - U_\mathrm{a}(t) = 0$$

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = U_\mathrm{a}(t)$$

$$R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = U_\mathrm{a}(t)$$

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_\mathrm{C} + L \cdot C \cdot \ddot{U}_\mathrm{C} + U_\mathrm{C} = U_\mathrm{a}(t)$$

Es ergibt sich die folgende DGL für $U_C$:

$$\underline{\underline{\ddot{U}_\mathrm{C} + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_\mathrm{C} + \frac{1}{LC} \cdot U_\mathrm{C} = \frac{1}{LC} \cdot U_\mathrm{a}(t)}}$$

b)
Durch Vergleich der vorliegenden DGL mit einer allgemeinen DGL für die erzwungene gedämpfte Schwingung ergibt sich die Kreisfrequenz für die ungedämpfte Schwingung

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{1.80 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H} \cdot 1.41 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}}} \approx \underline{\underline{628\,\frac{1}{\mathrm{s}}}}$$

und für die Dämpfungskonstante

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{R}{2L} \approx \frac{10.0\,\Omega}{2 \cdot 1.80 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H}} \approx \underline{\underline{278\,\frac{1}{\mathrm{s}}}}.$$

Da $\delta < \omega_0$ gilt, liegt schwache Dämpfung vor.

c)
Für die Frequenz der ungedämpften Schwingung ergibt sich

$$\underline{\underline{\nu_0}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.80 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H} \cdot 1.41 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}}} \approx \underline{\underline{99.9\,\mathrm{Hz}}},$$

für die gedämpfte Schwingung ergibt sich

$$\underline{\underline{\nu_\mathrm{d}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\omega_\mathrm{d} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{1.80\cdot 10^{-2}\,\mathrm{H}\cdot 1.41\cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}}-\frac{(10.0\,\Omega)^2}{4\cdot(1.80\cdot 10^{-2}\,\mathrm{H})^2}} \approx \underline{\underline{89.6\,\mathrm{Hz}}}$$

und für die Resonanzfrequenz ergibt sich

$$\underline{\underline{\nu_\mathrm{r}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\omega_\mathrm{r} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\omega_0^2-2\,\delta^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{LC}-2\cdot\frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{1.80\cdot 10^{-2}\,\mathrm{H}\cdot 1.41\cdot 10^{-4}\,\mathrm{F}}-\frac{(10.0\,\Omega)^2}{2\cdot(1.80\cdot 10^{-2}\,\mathrm{H})^2}} \approx \underline{\underline{77.9\,\mathrm{Hz.}}}$$

**4. Erzwungene mechanische Schwingung →**

Ein schwach gedämpftes schwingungsfähiges mechanisches System mit dem Dämpfungsfaktor $\delta$ und der Eigen- bzw. Resonanzfrequenz $\omega_0$ (des ungedämpften Systems) wird von aussen durch eine periodische Kraft mit derselben Kreisfrequenz $\omega_0$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Lösen Sie die Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cdot\cos(\omega_0\, t)$ mit $\delta < \omega_0$ für die ABs $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

durch den *Lösungsansatz* (*Exponentialansatz*) $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$ und $\ddot{x} = \lambda^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$ und erhalten die Gleichung

$$\lambda^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} + 2\,\delta\,\lambda\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} + \omega_0^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$$

Division durch $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ führt schließlich zu der *charakteristischen* Gleichung

$$\lambda^2 + 2\,\delta\,\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Diese besitzt bei der vorausgesetzten *schwachen* Dämpfung $(\delta < \omega_0)$ *konjugiert komplexe* Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\underbrace{\delta^2 - \omega_0^2}_{<\,0}} = -\delta \pm \sqrt{-(\underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\omega_d^2\,>\,0})} = -\delta \pm \sqrt{-\omega_d^2} = -\delta \pm \mathrm{j}\,\omega_d$$

Wir erhalten somit eine *gedämpfte* Schwingung mit der Gleichung

$$x_0(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[C_1\cdot\sin(\omega_d\, t) + C_2\cdot\cos(\omega_d\, t)\right] \qquad \text{mit} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Eine partikuläre Lösung $x_p$ der inhomogenen DGL erhält man mit dem Lösungsansatz

$x_p = A\cdot\sin(\omega_0\, t) + B\cdot\cos(\omega_0\, t)$

Mit diesem Ansatz und den zugehörigen Ableitungen

$$\dot{x}_p = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein:

$$-\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta [\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)] +$$
$$+ \omega_0^2 [A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)] = a \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow$$

$$-\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) + 2\delta \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\delta \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) +$$
$$+ \omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Diese Gleichung reduziert sich wie folgt:

$$2\delta \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\delta \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + 0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Auf der *rechten* Seite haben wir dabei den *verschwindenden Sinusterm* $0 \cdot \sin(\omega_0 t)$ addiert. Durch *Koeffizientenvergleich* der Kosinus- bzw. Sinusterme beiderseits lassen sich dann die gesuchten Koeffizienten $A$ und $B$ bestimmen:

$$2\delta \omega_0 A = a \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a}{2\delta \omega_0} \qquad \text{und} \qquad -2\delta \omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Somit lautet die *partikuläre* Lösung

$$x_p = \frac{a}{2\delta \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Schwingungsgleichung ist dann die Summe aus $x_0$ und $x_p$:

$$x(t) = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-\delta t} [C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\delta \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die beiden Integrationskonstanten $C_1$ und $C_2$ berechnen wir aus den *Anfangsbedingungen* $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ wie folgt:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 [C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\delta \omega_0} \cdot \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{a}{2\delta \omega_0} \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + C_2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Zwischenergebnis: $x(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \dfrac{a}{2\delta \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$

Die benötigte Ableitung $\dot{x}(t)$ erhalten wir mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\dot{x}(t) = C_1 [\mathrm{e}^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \cdot \omega_d \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}] + \frac{a}{2\delta \omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \omega_0 =$$
$$= C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} [-\delta \cdot \sin(\omega_d t) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d t)] + \frac{a}{2\delta} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot 1 [-\delta \cdot \sin 0 + \omega_d \cdot \cos 0] + \frac{a}{2\delta} \cdot \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

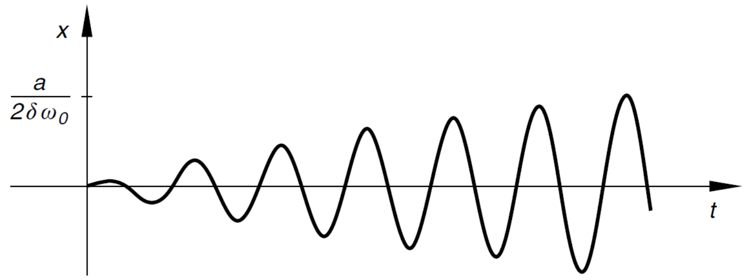
$$C_1 [-\delta \cdot 0 + \omega_d \cdot 1] + \frac{a}{2\delta} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \omega_d + \frac{a}{2\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{a}{2\delta \omega_d}$$

Die *erzwungene* Schwingung wird somit durch die Gleichung

$$x(t) = -\frac{a}{2\,\delta\,\omega_d} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t) + \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{a}{2\,\delta}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)}{\omega_d}\right], \qquad t \geq 0$$

beschrieben.



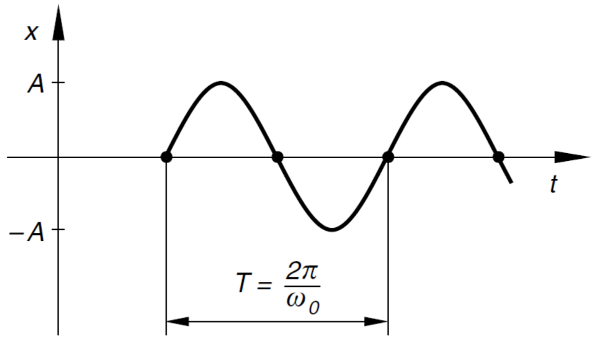

Im Laufe der Zeit ergibt sich eine reine Sinusschwingung, da der zweite Term gegen 0 strebt.

$$x(t) \approx \frac{a}{2\,\delta}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - 0\right] =$$

$$= \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) \qquad (t \gg 1/\delta)$$

Als Schwingungsamplitude ergibt sich:

$$A = \frac{a}{2\,\delta\,\omega_0}$$




**5. Stationäre Lösungen**

Bestimmen Sie die stationäre Lösung sowie Resonanzfrequenz und -amplitude der gegebenen DGL.

a) DGL: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 9x = 2\sin(3t)$ b) DGL: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 16x = 3\sin t - 4\cos t$

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 9x = 2\sin(3t)$

allg. Lsg $x(t)$ setzt sich aus homogener $x_h(t)$ und partikulärer Lsg $x_p(t)$ zusammen:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

∘ $x_h(t)$ bestimmen

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 9x = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 9}}{2} = -2 \pm i\sqrt{20}$

$x_h(t) = e^{-2t}(A \cdot \sin(\sqrt{20}t) + B \cdot \cos(\sqrt{20}t))$

→ je grösser $t$ wird, umso kleiner der Wert von $x_h$ aufgrund von Verhalten von $e^{-2t}$

↳ d.h. $x_h(t)$ nicht relevant für Langzeitverhalten und somit für die stationäre Lösung

∘ $x_p$ bestimmen mit Ansatz $x_p(t) = A \cdot e^{i(3t-\varphi)}$

$\dot{x}_p(t) = 3iAe^{i(3t-\varphi)}$

$\ddot{x}_p(t) = -9Ae^{i(3t-\varphi)}$

Einsetzen: $-9Ae^{i(3t-\varphi)} + 4 \cdot 3iAe^{i(3t-\varphi)} + 9Ae^{i(3t-\varphi)} = 2e^{i3t}$

$12iAe^{i(3t-\varphi)} = 2e^{i3t} \quad |: e^{i3t}$

$12iAe^{-i\varphi} = 2$

$12iA(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2$

$12iA\cos\varphi + 12A\sin\varphi = 2$

$\rightarrow 12iA\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow 12A\sin\frac{\pi}{2} = 2$

$A = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{6}e^{i(3t-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{6}(\cos(3t-\frac{\pi}{2}) + i\sin(3t-\frac{\pi}{2}))$

→ reelle partikuläre Lsg: $Im(x_p(t))$

$x_p(t) = \frac{1}{6}\sin(3t-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{6}\cos(3t)$

$\omega_0^2 = 9 \Rightarrow \omega_0 = 3$

$\delta = \frac{4}{2} = 2$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot 4} = 1$

$A(\omega_r) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{2\delta\omega_d} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

b) homogene DGL:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 16x = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{15}$$

$x_h(t)$ liefert mit zunehmendem $t$ immer kleineren Beitrag, deswegen für stationäre Lösung irrelevant

→ zur Bestimmung der partikulären Lösung $x_p(t)$:
nehme Ansatz $x_p(t) = A \sin t + B \cos t \quad (\omega = 1)$

$$\dot{x}_p(t) = A \cos t - B \sin t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A \sin t - B \cos t$$

Einsetzen in DGL:

$$-A \sin t - B \cos t + 2A \cos t - 2B \sin t + 16 A \sin t + 16 B \cos t = 3 \sin t - 4 \cos t$$

$$\sin t(-A - 2B + 16A) + \cos t(-B + 2A + 16B) = 3 \sin t - 4 \cos t$$

$$15A - 2B = 3$$

$$2A + 15B = -4$$

LGS: $\left(\begin{array}{cc|c} 15 & -2 & 3 \\ 2 & 15 & -4 \end{array}\right)$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 15 & -4 \\ 15 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad |\cdot(-\frac{15}{2}) \downarrow +$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 15 & -4 \\ 0 & -\frac{229}{2} & 33 \end{array}\right)$$

$$-\frac{229}{2} B = 33 \iff B = \frac{-66}{229}$$

$$2 \cdot A - 15 \cdot \frac{66}{229} = -4 \iff A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{990 - 916}{229}\right)$$

$$= \frac{37}{229}$$

stationäre Lösung: $x(t) = \frac{37}{229} \sin t - \frac{66}{229} \cos t$

$$\omega_0 = \sqrt{16} = 4$$

$$\delta = \frac{2}{2} = 1$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14}$$

$$A(\omega_r) = \frac{5}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{15}} = \frac{5 \cdot \sqrt{15}}{2 \cdot 15} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

**6. Feder-Masse-System**
Ein schwingungsfähiges mechanisches Feder-Masse-System mit den Kenngrössen m = 20 kg, b = 40 kg/s und Federkonstante k = c = 100 N/m wird durch die von aussen einwirkende zeitabhängige Kraft $F(t) = 20N \cdot \sin(\omega t)$ zu erzwungenen Schwingungen erregt.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung.
b) Wie lautet die stationäre Lösung der Schwingungsgleichung? Zeichnen Sie die Resonanzkurve $A = A(\omega)$ sowie den Frequenzgang der Phasenverschiebung φ zwischen Erregerschwingung und erzwungener Schwingung.
c) Bestimmen und skizzieren Sie die stationäre Lösung für die Erregerkreisfrequenz $\omega = 1/s$.

a)

Schwingungsgleichung (*reelle* Form): $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(\omega t)$; $\lambda_{1/2} = -1 \pm 2j$;

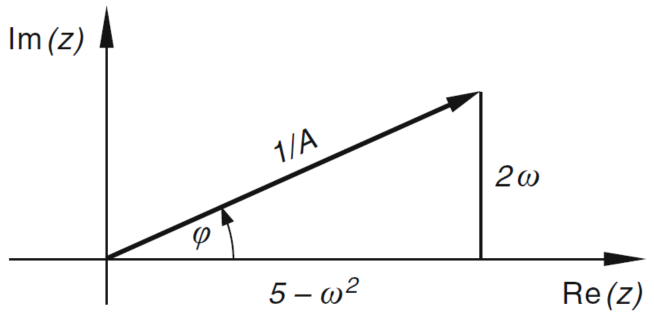
$x_0 = e^{-t}[C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)]$

Schwingungsgleichung in *komplexer* Form: $\ddot{\underline{x}} + 2\dot{\underline{x}} + 5\underline{x} = e^{j\omega t}$

*Komplexer Lösungsansatz* für eine partikuläre Lösung:

$\underline{x}_p = A \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = A \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$

$A \cdot e^{-j\varphi}(-\omega^2 + j2\omega + 5) = 1 \quad \Rightarrow \quad (5 - \omega^2) + j(2\omega) = \frac{1}{A} \cdot e^{j\varphi}$




Mit Hilfe der Abbildung folgt:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^2 = (5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\omega}{5 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) & \omega < \sqrt{5} \\ \pi/2 & \text{für} \quad \omega = \sqrt{5} \\ \arctan\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) + \pi & \omega > \sqrt{5} \end{cases}$$

*Partikuläre* Lösung in *reeller* Form:

$$x_p = \mathrm{Re}(\underline{x}_p) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

*Allgemeine* Lösung (in *reeller* Form):

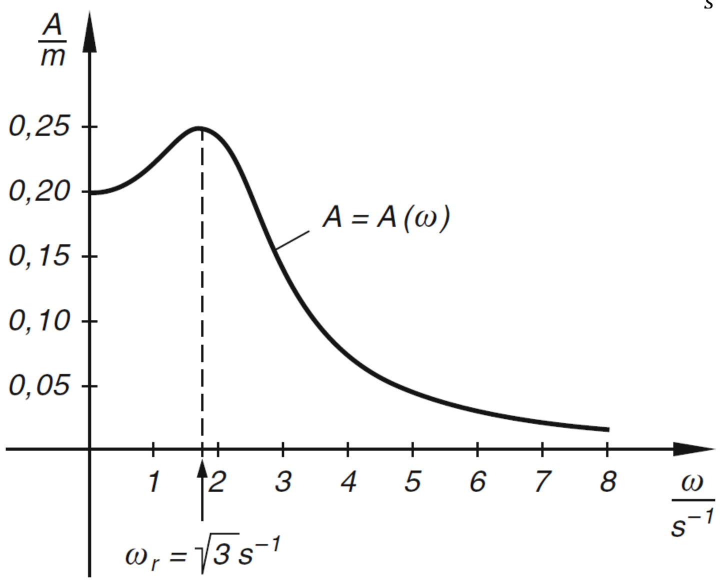
$$x(t) = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-t}[C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)] + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

b)

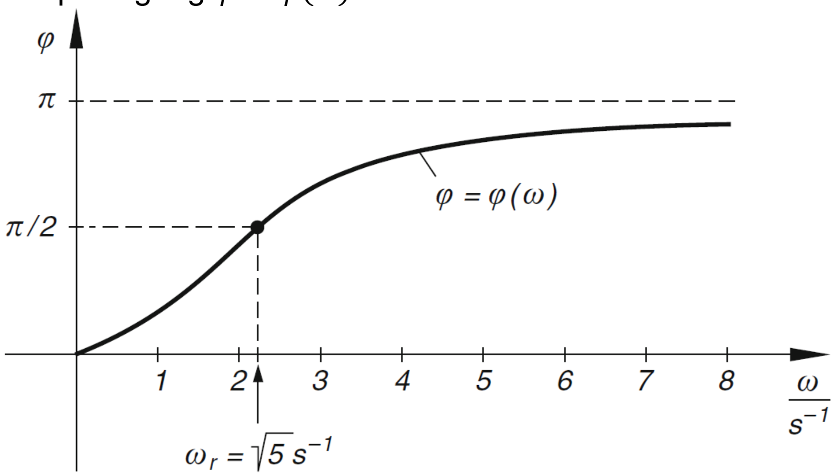
Stationäre Lösung: $x(t) = x_p = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Resonanzkurve $A = A(\omega)$

Resonanzstelle (Maximum der Kurve): $\omega = \omega_r = \frac{\sqrt{3}}{s}, A_{max} = 0{,}25m$




Frequenzgang $\varphi = \varphi(\omega)$




c)

$$A(\omega = 1) = 0{,}2236; \quad \varphi(\omega = 1) = 0{,}4636$$

$$x(t) = 0{,}2236\,\mathrm{m} \cdot \sin(1\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t - 0{,}4636)$$