Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 5

Bauingenieurwesen BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über Betrag und Vorzeichen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Für alle *positiven reellen Zahlen* $x > 0$ gilt $\|x\| = x$.	●	○
b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\big\|\|x\|\big\| = \|x\|$.	●	○
c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{sgn}\big(\operatorname{sgn}(x)\big) = \operatorname{sgn}(x)$.	●	○
d) Die *Gleichung* $\operatorname{sgn}(x) = \|x\|$ hat nur die *Lösung* $x = 0$.	○	●
e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \big\|\operatorname{sgn}(x)\big\| \leq 1$.	●	○
f) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{sgn}\big(\|x\|\big) = 1$.	○	●

2. Aussagen über Potenz-Funktionen

Wir betrachten $A \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ und die allgemeine *Potenz-Funktion*

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := x^p. \end{aligned} \tag{1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Für $p = 0.5$ darf man $A = \mathbb{R}$ wählen.	○	●
b) Für $p \leq 0$ muss in jedem Fall gelten $0 \notin A$.	●	○
c) In jedem Fall gilt $f(0) = 0$.	○	●
d) Falls $1 \in A$, dann gilt $f(1) = 1$.	●	○

3. Aussagen über eigentliche Exponentialfunktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) *Eigentliche Exponentialfunktionen* beschreiben jeweils die Beziehung zwischen zwei Grössen in vielen Anwendungen aus Alltag, Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft.	○	●
b) *Eigentliche Exponentialfunktionen* sind immer *injektiv.*	●	○
c) *Eigentliche Exponentialfunktionen* sind immer *strikt monoton steigend.*	○	●
d) Jede *eigentliche Exponentialfunktion* hat eine *Umkehrfunktion*, sofern man die *Zielmenge* geschickt wählt.	●	○
e) Es gibt keine *eigentliche Exponentialfunktion*, deren *Graph* durch den *Punkt* $\big(0\,;0\big)$ verläuft.	●	○
f) Der *Graph* jeder *eigentlichen Exponentialfunktion* verläuft durch den *Punkt* $\big(0\,;1\big)$.	●	○

4. Einfache, eigentliche Exponentialfunktionen

Wir betrachten die *eigentlichen Exponentialfunktionen* mit *Basen* $a \in \{2, 3, 1/2, 1/3\}$, d.h.

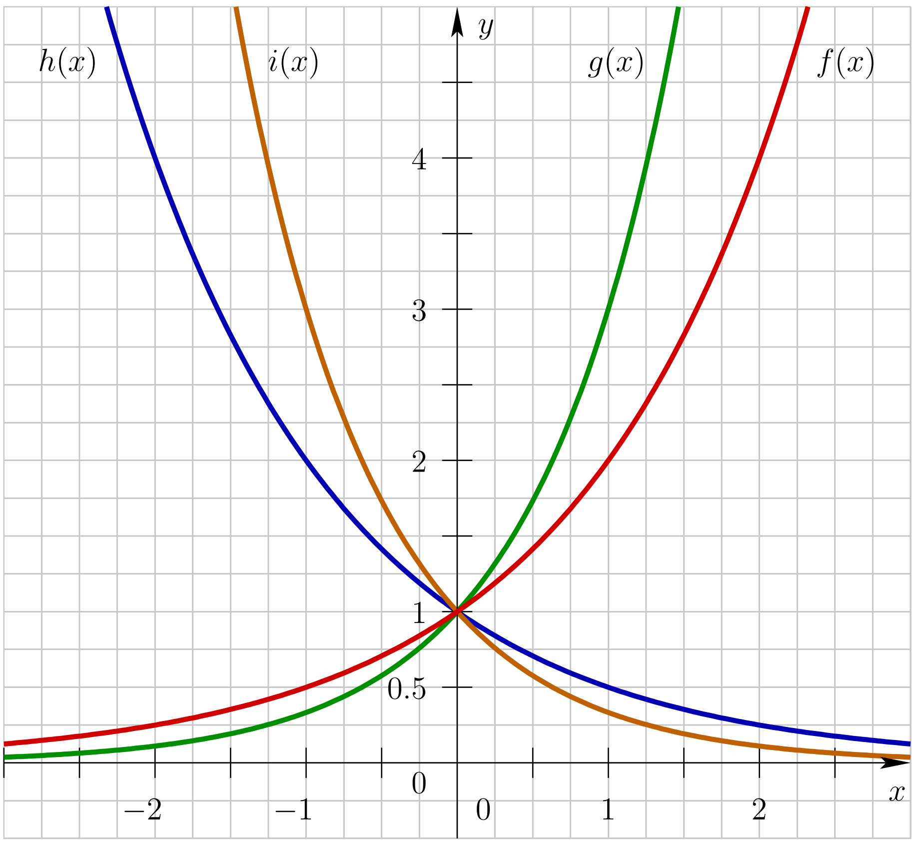
$$f(x) := 2^x, \quad g(x) := 3^x, \quad h(x) := \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{und} \quad i(x) := \left(\frac{1}{3}\right)^x. \tag{2}$$

a) Wir berechnen für die *Funktionen* f, g, h und i aus (2) die *Funktionswerte* jeweils an den Stellen $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$
-3	1/8	1/27	8	27
-2	1/4	1/9	4	9
-1	1/2	1/3	2	3
0	1	1	1	1
1	2	3	1/2	1/3.
2	4	9	1/4	1/9
3	8	27	1/8	1/27

(3)

b) Wir skizzieren die *Graphen* der *Funktionen* f, g, h und i aus (2) in einem einzigen x-y-Diagramm.



c) Gemäss Skizze aus Teilaufgabe b) sind die *Funktionen* f und g *monoton steigend*, während h und i *monoton fallend* sind. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{0 < a < 1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a^x \quad \textit{monoton fallend}}} \\ \underline{\underline{a > 1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a^x \quad \textit{monoton steigend.}}} \end{aligned} \tag{4}$$

d) Wir betrachten die *Funktionen* f, g, h und i aus (2) als *Funktionen* des Typs $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Surjektivität: Gemäss Skizze aus Teilaufgabe b) gilt

$$f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = h(\mathbb{R}) = i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}. \tag{5}$$

Weil die *Bildmenge* von f, g, h und i nur $\mathbb{R}^+$ ist, stimmt sie nicht mit der *Zielmenge* $\mathbb{R}$ überein. Die *Funktionen* sind demnach nicht *surjektiv*.

Injektivität: Weil gemäss Skizze aus Teilaufgabe b) jedes $y \in \mathbb{R}^+$ *Funktionswert* der *Funktionen* f, g, h und i zu jeweils genau einem *Argument* $x \in \mathbb{R}$ ist, sind diese *Funktionen* *injektiv*.

Bijektivität: Weil f, g, h und i nicht *surjektiv* sind, können sie auch nicht *bijektiv* sein.

e) Der Umstand, dass die *Funktionen* f, g, h und i als *Funktionen* des Typs $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwar *injektiv* aber nicht *surjektiv* sind, kann durch eine Verkleinerung der *Zielmenge* $\mathbb{R}$ auf die *Bildmenge* $\mathbb{R}^+$ behoben werden. Als *Funktionen* des Typs $\underline{\underline{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+}}$ sind f, g, h und i in der Tat *surjektiv* und damit auch *bijektiv*.

f) Wir betrachten die *Funktionen* f, g, h und i gemäss Teilaufgabe e) als *Funktionen* des Typs $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und berechnen ihre *Umkehrfunktionen*. Dazu müssen wir die *Funktionsterme* aus 2) nach x auflösen. Es seien also $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$, dann gilt

$$y = a^x \qquad \big| \log_a(\ldots) \tag{6a}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \log_a(y) = x. \tag{6b}$$

Die *Umkehrfunktionen* von f und g sind demnach

$$\underline{\underline{\begin{aligned} f^{-1} &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto f^{-1}(x) := \log_2(x) \end{aligned}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\begin{aligned} g^{-1} &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto g^{-1}(x) := \log_3(x). \end{aligned}}} \tag{7}$$

Ebenso erhalten wir für h und i die *Umkehrfunktionen*

$$\underline{\underline{\begin{aligned} h^{-1} &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto h^{-1}(x) := \log_{1/2}(x) \end{aligned}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\begin{aligned} i^{-1} &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto i^{-1}(x) := \log_{1/3}(x). \end{aligned}}} \tag{8}$$

Alternativ könnten wir die *Funktionsterme* von h^{-1} und i^{-1} auch schreiben als

$$\underline{\underline{h^{-1}(x)}} = \log_{1/2}(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(1/2)} = \frac{\log_2(x)}{-1} = \underline{\underline{-\log_2(x)}} \tag{9}$$

$$\underline{\underline{i^{-1}(x)}} = \log_{1/3}(x) = \frac{\log_3(x)}{\log_3(1/3)} = \frac{\log_3(x)}{-1} = \underline{\underline{-\log_3(x).}} \tag{10}$$

5. Aussagen über eine Funktion

Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto f(x) := \left(\sqrt{3}\right)^x - 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Funktion* f ist eine *eigentliche Exponentialfunktion.*	○	●
b) Es gilt $f(0) = 0$.	●	○
c) Es gilt $f(1'001) \in \mathbb{Q}$.	○	●
d) Die *Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \big(f(x) + 1\big)^2$ ist eine *eigentliche Exponentialfunktion.*	●	○
e) Der *Graph* von f schneidet die *Graphen* aller *eigentlichen Exponentialfunktionen.*	○	●

6. Eigenschaften von eigentlichen Exponentialfunktionen

Seien $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und f die *eigentliche Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := a^x. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir beweisen die folgenden Eigenschaften von f und prüfen diese jeweils an einem selbstgewählten Zahlenbeispiel nach.

a) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(0)}} = a^0 = \underline{\underline{1.}} \tag{13}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{f(0)}} = 2^0 = \underline{\underline{1.}} \tag{14}$$

b) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(-x)}} = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \underline{\underline{\frac{1}{f(x)}}}\,. \tag{15}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$ und $x = 3$. Wir erhalten

$$f(3) = 2^3 = 8 \tag{16}$$

$$\underline{\underline{f(-3)}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{f(3)}}}\,. \tag{17}$$

c) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(1)}} = a^1 = \underline{\underline{a.}} \tag{18}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 3$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{f(1)}} = 3^1 = 3 = \underline{\underline{a.}} \tag{19}$$

d) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(-1)}} = a^{-1} = \frac{1}{\underline{\underline{a}}}\,. \tag{20}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 3$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{f(-1)}} = 3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{\underline{\underline{a}}}\,. \tag{21}$$

e) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(x+1)}} = a^{x+1} = a^x \cdot a^1 = a^x \cdot a = \underline{\underline{a \cdot f(x).}} \tag{22}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 5$ und $x = 2$. Wir erhalten

$$f(2) = 5^2 = 25 \tag{23}$$

$$\underline{\underline{f(2+1)}} = f(3) = 5^3 = 125 = 5 \cdot 25 = \underline{\underline{5 \cdot f(2).}} \tag{24}$$

f) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(x-1)}} = a^{x-1} = \frac{a^x}{a^1} = \underline{\underline{\frac{f(x)}{a}}}\,. \tag{25}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 5$ und $x = 3$. Wir erhalten

$$f(3) = 5^3 = 125 \tag{26}$$

$$\underline{\underline{f(3-1)}} = f(2) = 5^2 = 25 = \frac{125}{5} = \underline{\underline{\frac{f(3)}{5}}}\,. \tag{27}$$

g) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(x+y)}} = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \underline{\underline{f(x)\cdot f(y).}} \tag{28}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$, $x = 3$ und $y = 5$. Wir erhalten

$$f(3) = 2^3 = 8 \tag{29}$$

$$f(5) = 2^5 = 32 \tag{30}$$

$$\underline{\underline{f(3+5)}} = f(8) = 2^8 = 256 = 8 \cdot 32 = \underline{\underline{f(3)\cdot f(5).}} \tag{31}$$

h) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(x-y)}} = a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = \underline{\underline{\frac{f(x)}{f(y)}}}\,. \tag{32}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$, $x = 3$ und $y = 5$. Wir erhalten

$$f(3) = 2^3 = 8 \tag{33}$$

$$f(5) = 2^5 = 32 \tag{34}$$

$$\underline{\underline{f(3-5)}} = f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{8}{32} = \underline{\underline{\frac{f(3)}{f(5)}}}\,. \tag{35}$$

i) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f(x\cdot y)}} = a^{x\cdot y} = \big(a^x\big)^y = \underline{\underline{\big(f(x)\big)^y = \big(f(y)\big)^x.}} \tag{36}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$, $x = 3$ und $y = 5$. Wir erhalten

$$f(3) = 2^3 = 8 \tag{37}$$

$$f(5) = 2^5 = 32 \tag{38}$$

$$\underline{\underline{f\big(3\cdot 5\big)}} = f(15) = 2^{15} = 32'768 = 8^5 = \underline{\underline{\big(f(3)\big)^5}} \tag{39}$$

$$\underline{\underline{f\big(3\cdot 5\big)}} = f(15) = 2^{15} = 32'768 = 32^3 = \underline{\underline{\big(f(5)\big)^3}}\,. \tag{40}$$

j) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f\left(\frac{x}{z}\right)}} = a^{\frac{x}{z}} = \sqrt[z]{a^x} = \underline{\underline{\sqrt[z]{f(x)}\,.}} \tag{41}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 2$, $x = 10$ und $z = 5$. Wir erhalten

$$f(10) = 2^{10} = 1'024 \tag{42}$$

$$\underline{\underline{f\left(\frac{10}{5}\right)}} = f(2) = 2^2 = 4 = \sqrt[5]{1'024} = \underline{\underline{\sqrt[5]{f(10)}\,.}} \tag{43}$$

k) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{f\big(\log_a(x)\big)}} = a^{\log_a(x)} = \underline{\underline{x.}} \tag{44}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 3$ und $x = 81$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{f\big(\log_3(81)\big)}} = f(4) = 3^4 = \underline{\underline{81.}} \tag{45}$$

l) Allgemein gilt

$$\underline{\underline{\log_a\big(f(x)\big)}} = \log_a\big(a^x\big) = \underline{\underline{x.}} \tag{46}$$

Als Beispiel wählen wir $a = 3$ und $x = 4$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{\log_3\big(f(4)\big)}} = \log_3\big(3^4\big) = \underline{\underline{4.}} \tag{47}$$

7. Aussagen über hyperbolische Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *hyperbolischen Funktionen* werden mit Hilfe der *natürlichen Exponentialfunktion* definiert.	●	○
b) Die *hyperbolische Funktion* cosh ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.	●	○
c) Die *hyperbolische Funktion* sinh ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.	●	○
d) Die *hyperbolische Funktion* tanh ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.	●	○
e) Die *hyperbolische Funktion* coth ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.	○	●

8. Aussagen über hyperbolische Funktionen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\cosh(0) \in \mathbb{N}$.	●	○
b) Es gilt $\cosh(3) - \sinh(3) = 1$.	○	●
c) Die *Funktion* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *injektiv.*	●	○
d) Die *Funktion* $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty[$ ist *bijektiv.*	○	●

9. Pythagoras-Satz für hyperbolische Funktionen

Wir betrachten den PYTHAGORAS-*Satz* für *hyperbolische Funktionen* gemäss

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \tag{48}$$

a) Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\cosh^2(0) - \sinh^2(0)}} &= \left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{2}\right)^2 = 1^2 - 0^2 = \underline{\underline{1.}}\end{aligned} \tag{49}$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}} &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{2^2} \\ &= \frac{\left(e^x\right)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^x\right)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 \cdot 1 - e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1.}}\end{aligned} \tag{50}$$