Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt DGL 9

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe trigonometrisches Monom/Polynom, L^2-Skalarprodukt, Orthonormalbasis, Fourier-Polynom, reelle/komplexe Fourier-Koeffizienten, Fourier-Reihe und Fourier-Entwicklung sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die Zusammenhänge zwischen komplexen und reellen Fourier-Koeffizienten und können diese anwenden.
- Sie können die Parität einer periodischen Funktion ausnutzen, um die Berechnung der Fourier-Koeffizienten zu vereinfachen.
- Sie können einfache Funktionen in eine Fourier-Reihe entwickeln.

1. Aussagen über erzwungen gedämpfte harmonische Schwingungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt eine Fourier-Entwicklung.	X	
b) Jede periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann exakt durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden.		X
c) Die Fourier-Entwicklung einer ungeraden periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine reine Sinusentwicklung.	X	
d) Die Fourier-Entwicklung einer geraden periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine reine Sinusentwicklung.		X

2. Orthogonalität

Welche Paare der Funktionen $\cos(kx)$, $\sin(jx)$, $k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$ sind auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ orthogonal?

Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \rightsquigarrow$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

Einsetzen in das Skalarprodukt $s = \int_0^{\pi/2} \sin(jx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin((j+k)x) + \sin((j-k)x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((j+k)x)}{j+k} + \frac{\cos((j-k)x)}{j-k}\right]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{c_+ - 1}{j+k} + \frac{c_- - 1}{j-k}\right), \quad c_\pm = \cos((j \pm k)\pi/2)
\end{aligned}
$$

(zweiter Term entfällt für $j = k$)

$\cos(\ell\pi/2) \in \{-1, 0, 1\} \quad \rightsquigarrow \quad$ mehrere Fälle

- $j = k$: orthogonal, falls $c_+ = 1$, d.h. $j + k =$ 4m $m \in \mathbb{N}_0$
- $j \neq k \wedge c_+ = 1$: orthogonal, falls ebenfalls $c_- = 1$, d.h. $j+k =$ $4m_1$ und $j-k = 4m_2$
  $m_1 \in \mathbb{N}, m_2 \in \mathbb{Z}$

$s \neq 0$ in den anderen Fällen

- $j \neq k \wedge c_+ = 0 \implies j + k$ ungerade $\implies j - k$ ungerade und

$$c_- = 0, \quad s = \frac{1}{2}\frac{(j-k)+(j+k)}{j^2-k^2} = \frac{j}{j^2-k^2} \neq 0$$

- $j \neq k \wedge c_+ = -1 \implies j + k =$ 2+ 4m und $s = 0$ falls
  (i) $c_- = -1$ und $j + k = -(j-k)$ (Widerspruch zu $j > 0$)
  oder
  (ii) $c_- = 0$ und $j + k = 2(k-j)$ bzw. $k = 3j$ (Widerspruch zu $j + k =$
  2

$$s = -\frac{1}{2}\left(\frac{c_+ - 1}{j+k} + \frac{c_- - 1}{j-k}\right) \qquad c_\pm = \cos\left((j \pm k)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{c_+(j-k) - j + k + c_-(j+k) - j - k}{j^2-k^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{c_+(j-k) + c_-(j+k) - 2j}{j^2-k^2}\right)$$

a) $j = k$: (2. Term entfällt)
$\longrightarrow c_+ = 1 \longrightarrow j+k = 4m \qquad m \in \mathbb{N}$

Da j = k: 2j = 4m bzw. j = 2m.

Im Folgenden betrachten wir die Fälle j≠k, hier kann c_+ nur die Werte -1, = und +1 annehmen, es müssen also 3 Fälle unterschieden werden.

b) $j \neq k$:

- $c_+ = 1; \quad c_- = 1$

$$j+k = 4m_1 \wedge j-k = 4m_2 \qquad m_i \in \mathbb{N}$$

c) $j \neq k$:

- $c_+ = 0 \Rightarrow j+k$ ungerade $\Rightarrow j-k$ ungerade

$$\Rightarrow s = -\frac{1}{2}\left(\frac{-2j}{j^2-k^2}\right) \neq 0$$

d) $j \neq k$

- $c_+ = -1 \qquad j+k = 2+4m \qquad m \in \mathbb{N}_0$

$\rightarrow$ Zähler: $-j+k + c_-(j+k) - 2j = 0$

$$-3j+k = -c_-(j+k)$$
$$-4j + j+k = c_-(j+k)$$

- damit $s=0$ gilt bei $c_- = -1$:

Zähler: $-3j+k = 1(j+k)$

$-4j = 0$ nicht möglich

- damit $s=0$ bei $c_- = 0$:

Zähler: $-j+k - 2j = 0$

$+3j = k$

Voraussetzung: $k = 2+4m-j$

$$3j+j = 2+4m$$
$$j = \frac{1}{2}+m$$

aussendem: $c_- = 0 = \cos\left((j-k)\frac{\pi}{2}\right)$

$$j-k = 1+2m \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

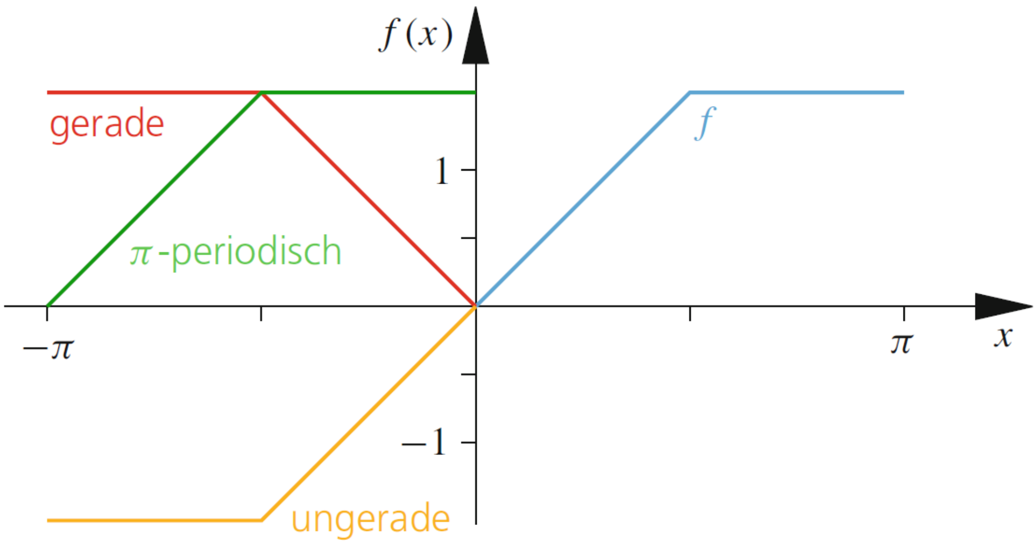
einsetzen von $3j=k$:

$$j-3j = 1+2m$$
$$\underbrace{-2j}_{<0} = \underbrace{1+2m}_{>0} \quad \lightning$$

3. Fourier-Polynom
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}.$$

Setzen Sie die Funktion
a) als gerade Funktion,
b) als ungerade Funktion
c) als π-periodische Funktion
auf das Intervall $[-\pi,0[$ fort. Skizzieren Sie jeweils den Funktionsverlauf in $]-\pi,\pi[$ und berechnen Sie jeweils die komplexen Fourier-Koeffizienten c_0, c_1 und c_{-1} sowie die reellen Koeffizienten a_0, a_1 und b_1.



a)
Integration nur von 0 bis π nötig, da Funktion gerade ist. D. h. das Integral wird dann mit Faktor 2 multipliziert. a_0 ist hier so berechnet, dass es dem $a_0/2$ aus dem Aufschrieb entspricht.

Es soll f gerade fortgesetzt werden, es gilt also

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} + \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} - 1 = -\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Da f_a reell und gerade sein soll, ist $b_1 = 0$ und

$$c_1 = c_{-1} = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{\pi}.$$

b)

Da f ungerade ist, gilt: $c_0 = a_0 = 0$ und $a_1 = 0$.

ungerade Funktion

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} -\frac{\pi}{2}\sin x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot\sin x\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\,dx$$

$$= +\frac{1}{2}\left[\cos x\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}\left[-x\cdot\cos x + \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[1+1\right] + \frac{1}{2}\left[+1\right] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} + 1$$

Daraus folgt

$$c_1 = -\frac{\mathrm{i}\, b_1}{2} = -\mathrm{i}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$c_{-1} = \frac{\mathrm{i}\, b_1}{2} = \mathrm{i}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right).$$

c)

Es gilt hier

$$\begin{aligned} c_0 = a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

wie in Teil (a). Ferner ist

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+\pi) \cos x\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = x + \pi$ im ersten Integral folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(t-\pi)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

und ganz analog folgt $b_1 = 0$. Damit ist auch $c_1 = c_{-1} = 0$.

4. Komplexe Fourier-Koeffizienten
Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion f, die durch
$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ e^{ix}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
gegeben ist.

Es ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)x}\, \mathrm{d}x.$$

Für $k = 1$ ist $c_1 = 1/2$. Für $k \neq 1$ erhalten wir

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)x}}{\mathrm{i}(1-k)} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)\pi} - 1}{\mathrm{i}(1-k)} = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \frac{(-1)^{k-1} - 1}{1-k}.$$

Damit ist $c_k = 0$ für k ungerade, $k \neq 1$ und

$$c_k = \frac{\mathrm{i}}{\pi\,(1-k)}, \quad k \text{ gerade.}$$

Die Fourierreihe ist durch

$$\left(\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\pi\,(1-2k)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} \right)$$

gegeben.

5. Reelle Fourier-Reihe
Entwickeln Sie die Funktion
a) $f(x) = x \cos x, x \in]-\pi, \pi[$
b) $f(x) = x(2\pi - x), 0 \leq x \leq 2\pi$
c) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$
in eine Fourier-Reihe in reeller Form.

a)

Die Funktion f ist ungerade, daher sind die Koeffizienten $a_k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$

Zur Bestimmung der Koeffizienten b_k berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin(kx) &= \frac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}) \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1)x}) \\
&= \frac{1}{2}(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)).
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für $k \geq 2$ die Formel

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg[\frac{\sin((k+1)x)}{(k+1)^2} - \frac{x\cos((k+1)x)}{k+1} \\
&\qquad + \frac{\sin((k-1)x)}{(k-1)^2} - \frac{x\cos((k-1)x)}{k-1}\Bigg]_0^{\pi} \\
&= -\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \\
&= (-1)^k\,\frac{2k}{k^2-1}.
\end{aligned}$$

Für $k = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Fourierreihe

$$\left(-\frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k}{k^2-1}\sin(kx)\right)$$

gefunden.

b)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) \cdot \cos(nx)\, dx = 2 \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos(nx)\, dx =$$

$$= 2\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + \frac{(n^2x^2 - 2) \cdot \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{n^2}\right) = -\frac{4}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(Integrale: 232 und 233, jeweils mit $a = n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \ldots\right)$$

c)
$f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$; *gerade* Funktion (Integration von 0 bis π, daher Faktor 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2} = \left\{\begin{array}{ccc} -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} & & n = 1, 3, 5, \ldots \\ & \text{für} & \\ 0 & & n = 2, 4, 6, \ldots \end{array}\right\}$$

(Integral: 232 mit $a = n$; $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5x) + \ldots\right)$$

Integrale:

(232)	$\int x \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}$
(233)	$\int x^2 \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \frac{(a^2x^2 - 2) \cdot \sin(ax)}{a^3}$