

Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, lineare Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der linearen Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale von linear modifizierten Elementarfunktionen zu berechnen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und den Koordinatenachsen bestimmen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen zwei sich schneidenden Funktionen bestimmen.
- Sie können das Volumen von Rotationskörpern bestimmen.

1. Aussagen über lineare Substitution

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode der linearen Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.	X	
b) Die Methode der linearen Modifikation kann nur bei gegebenen Integrationsgrenzen angewandt werden.		X
c) Die Methode der linearen Modifikation eignet sich zur Integration von Linearkombinationen von Funktionen.		X
d) Es gilt: $\int \cos(3x + 4)dx = \sin(3x + 4) + c$.		X
e) Es gilt: $\int \cos(3x + 4)dx = \frac{1}{3}\sin(x) + c$.		X

2. Aufleitung von linear modifizierten Funktionen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale unter Zuhilfenahme der linearen Substitution.

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) $\int (2x + 7)^3 dx$ | b) $\int (4 - 2x)^7 dx$ |
| c) $\int 9 \cdot 2^{3x-5} dx$ | d) $\int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} dx$ |
| e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx$ | f) $\int \sqrt{6-x} dx$ |
| g) $\int (5x - 3)^2 dx$ | h) $\int (3 - 0,25x)^7 dx$ |
| i) $\int 12 \cdot 7^{5-3x} dx$ | j) $\int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} dx$ |
| k) $\int \frac{1}{\sqrt{6x+9}} dx$ | l) $\int \frac{1}{2x-13} dx$ |

a)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (2x+7)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2x+7)^4 + c = \frac{1}{8} (2x+7)^4 + c.$$

b)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int (4-2x)^7 dx = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{8} \cdot (4-2x)^8 + c = -\frac{1}{16} (4-2x)^8 + c \\ &= -\frac{1}{16} (2 \cdot (2-x))^8 + c = -\frac{1}{2^4} \cdot 2^8 \cdot (2-x)^8 + c = -2^4 \cdot (2-x)^8 + c \\ &= \underline{\underline{-16(2-x)^8 + c}}.\end{aligned}$$

c)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 9 \cdot 2^{3x-5} dx = 9 \cdot \frac{1}{3 \ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c = \frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c.$$

d)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c = \frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c.$$

e)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx = \int (4x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (4x-3)^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4x-3} + c.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \sqrt{6-x} dx = \int (6-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (6-x)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= -\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} + c.\end{aligned}$$

g)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (5x-3)^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot (5x-3)^3 + c = \frac{1}{15} (5x-3)^3 + c.$$

h)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (3-0.25x)^7 dx = \frac{1}{-0.25} \cdot \frac{1}{8} \cdot (3-0.25x)^8 + c = -\frac{1}{2} (3-0.25x)^8 + c.$$

i)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 12 \cdot 7^{5-3x} dx = 12 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c = -\frac{4}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c.$$

j)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c = \frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c.$$

k)

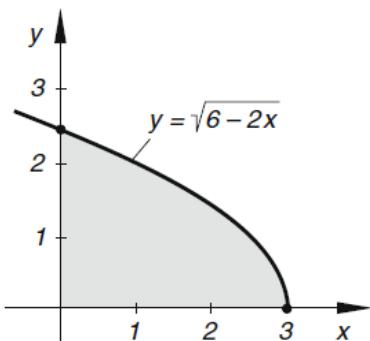
$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{6x+9}} dx = \int (6x+9)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (6x+9)^{\frac{1}{2}} + c \\ = \underline{\underline{\frac{1}{3} \sqrt{6x+9} + c.}}$$

l)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{2x-13} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-13|)} + c.}$$

3. Flächeninhalt

Welchen Flächeninhalt schliesst die Funktion $f(x) = \sqrt{6-2x}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?



Die Funktion $f(x)$ schneidet die y-Achse bei $x = 0$ und die x-Achse bei $x = 3$ (hierfür die Nullstelle von $f(x)$ bestimmen). Dies sind jeweils die obere und untere Integrationsgrenze.

$$\int_0^3 \sqrt{6-2x} dx = \int_0^3 (6-2x)^{1/2} dx = [\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = [-\frac{1}{3} \cdot (6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 2\sqrt{6}$$

4. Flächeninhalte bestimmen

- a) Welche Fläche schliesst die Kurve $f(x) = 0,2x(x^2 - 4)$ mit der x-Achse im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ ein?
- b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den Parabeln $f(x) = x^2 - 2$ und $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

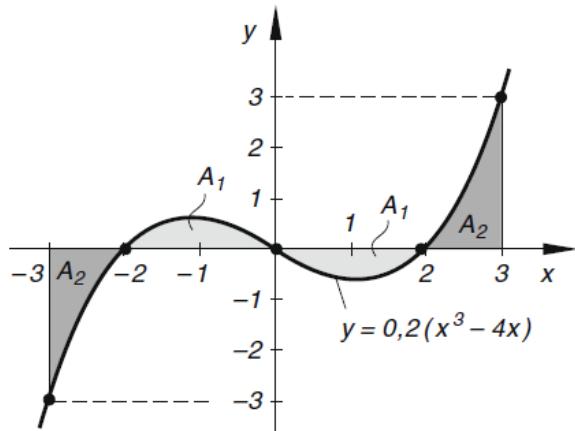
a)

Die Funktion $f(x)$ ist punktsymmetrisch, d. h. es gilt: $f(-x) = -f(x)$. Das bedeutet, man braucht nur $0 \leq x \leq 3$ betrachten, um das Integral zu bestimmen, da die Flächen auf der Seite links vom Ursprung (A_1 und A_2) genau gleich gross sind wie rechts vom Ursprung. Für die Integralgrenzen müssen die Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 3$ bestimmt werden: $f(x) = 0,2x(x^2 - 4) = 0$. Es ergibt sich $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

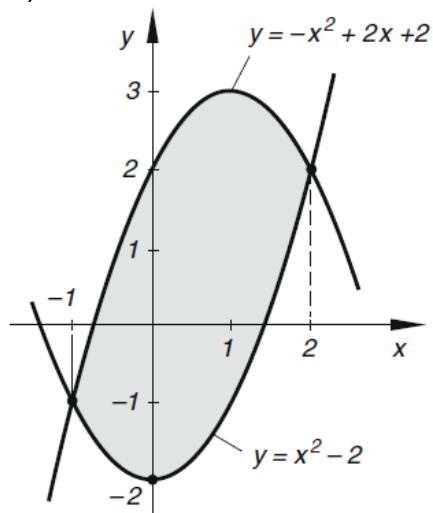
$$A_1 = \left| 0,2 \cdot \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| 0,2 \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 0,8$$

$$A_2 = 0,2 \cdot \int_{\underline{2}}^{\underline{3}} (x^3 - 4x) dx = 0,2 \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_2^3 = 1,25$$

$$A = 2(A_1 + A_2) = 4,1$$



b)



Gleichsetzen der beiden Funktionen, um die Integrationsgrenzen zu erhalten:

$$x^2 - 2 = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow$$

$$2(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$$

$$A = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2)] dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 9$$

5. Volumen von Rotationskörpern

- a) Durch Rotation der Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ um die y-Achse entsteht ein trichterförmiger Drehkörper. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn er in der Höhe $y = 5$ abgeschnitten wird.
- b) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, mit $3 \leq x \leq 5$
- um die x-Achse,
 - um die y-Achse
- entsteht.

a)

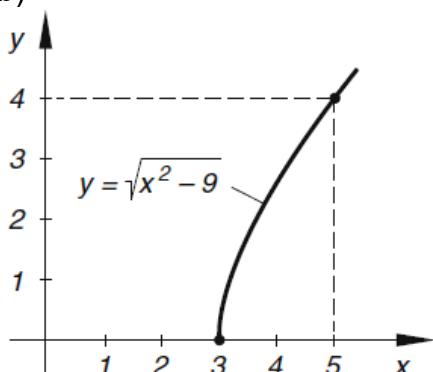
Es muss zuerst die Umkehrfunktion gebildet werden:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ besitzt als Umkehrfunktion } f^{-1}(x) = x = y^2$$

Integrationsgrenzen sind $y = 0$ und $y = 5$.

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 y^4 dy = \frac{\pi}{5} \left[y^5 \right]_0^5 = 625\pi = 1963,495$$

b)



(i)

$$V_x = \pi \cdot \int_3^5 (x^2 - 9) dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - 9x \right]_3^5 = \frac{44}{3}\pi = 46,077$$

(ii)

$$x^2 = y^2 + 9, \quad 0 \leq y \leq 4$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \cdot \int_0^4 (y^2 + 9) dy = \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 + 9y \right]_0^4 = \frac{172}{3}\pi = 180,118 \end{aligned}$$