Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 2

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Zufallsexperiment, Elementarereignis, Ereignismenge, Ereignis, unmögliches/sicheres Ereignis Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsraum, absolute/relative Häufigkeit und können diese anwenden.
- Sie kennen die Begriffe Additionssatz, Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit, totale Wahrscheinlichkeit, abhängige/unabhängige Ereignisse, Ereignisbaum, Satz von Bayes und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie können Ereignisse miteinander verknüpfen und kennen hierfür auch die De Morganschen Regeln.
- Sie kennen die Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogorov und können diese anwenden.
- Sie können Additionssatz, Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes auf konkrete Situationen anwenden.
- Sie können Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Ereignisbaums bestimmen.

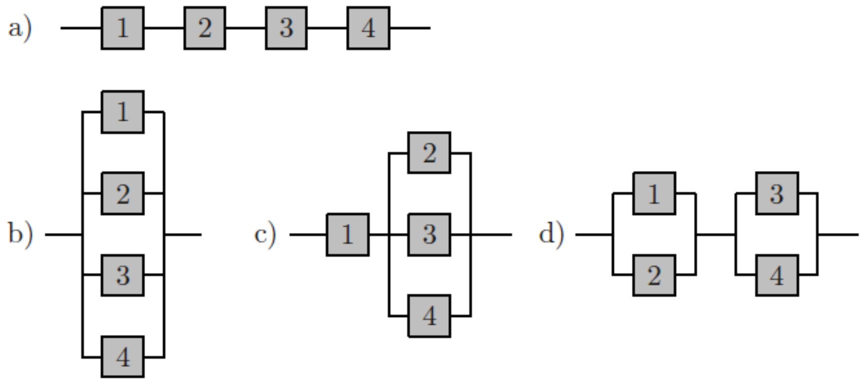
---

1. Aussagen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Gibt es doppelt so viele günstige als mögliche Ergebnisse, dann beträgt die Laplace-Wahrscheinlichkeit 2.		X
b) Die Laplace-Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ereignisses wächst proportional zur Anzahl möglicher Ergebnisse.		X
c) Verdoppelt man die Anzahl möglicher Ergebnisse bei gleichbleibender Anzahl günstiger Ergebnisse, dann halbiert man die Laplace-Wahrscheinlichkeit.	X	
d) Sind zwei Ereignisse disjunkt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des einen oder anderen gerade die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse.	X	
e) Sind zwei Ereignisse disjunkt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des einen und anderen gerade das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse.		X
f) A und B seien beliebige Ereignisse mit P(A)>0 und P(B)>0. Dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.		X
g) A und B seien beliebige Ereignisse. Dann gilt: $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$.	X	

h) A und B seien beliebige Ereignisse. Dann gilt: $P(\bar{A}\|B) = 1 - P(A\|B)$.	X	

2. Stromkreise
In einem Stromkreis befinden sich vier nummerierte Bauteile, die jedes für sich innerhalb eines gewissen Zeitraums intakt bleiben oder ausfallen können. Im letzteren Fall ist der Stromfluss durch das betreffende Bauteil unterbrochen. Es bezeichnen A_j das Ereignis, dass das j-te Bauteil intakt bleibt (j = 1,2,3,4), und A das Ereignis, dass der Stromfluss nicht unterbrochen ist. Drücken Sie für jedes der Schaltbilder a) - d) das Ereignis A durch A_1, A_2, A_3, A_4 aus.



a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$
c) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4)$
d) $(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)$

3. Qualitätskontrolle
In der Abteilung Qualitätskontrolle eines Unternehmens wird ein Posten von 2000 Stück Drehteilen, die auf drei Drehmaschinen gefertigt wurden, auf normgerechte Fertigung untersucht und in zwei Qualitätsstufen eingeordnet. Das Ergebnis ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Qualitätsstufe	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Q_1	550	650	600
Q_2	60	75	65

Betrachtet werden die zufälligen Ereignisse: M_j (j = 1, 2, 3): Das Erzeugnis wurde auf der Maschine M_j gefertigt. Q_i, (i = 1, 2): Das Erzeugnis besitzt die Qualitätsstufe Q_i.

a) Drücken Sie die folgenden zufälligen Ereignisse mit Hilfe der zufälligen Ereignisse Q_i und M_j aus: Ereignis A: Das gesuchte Erzeugnis ist auf der Maschine 1 oder auf der Maschine 2 gefertigt worden. Ereignis B: Das gesuchte Erzeugnis ist auf der Maschine 1 gefertigt worden und besitzt die Qualität Q_1. Ereignis C: Das gesuchte Erzeugnis wurde nicht auf der Maschine 1 gefertigt. Ereignis D: ist das Komplementärereignis von B.
b) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten von M_j, Q_i, A, B, C und D.

a)
$A = M_1 \cup M_2$, $B = M_1 \cap Q_1$, $C = M_2 \cup M_3$, $D = (M_1 \cap Q_2) \cup (M_2 \cap Q_1) \cup (M_2 \cap Q_2) \cup (M_3 \cap Q_1) \cup (M_3 \cap Q_2)$

b)
$p(Q_1) = 1800 / 2000 = 0{,}9$, $p(Q_2) = 200 / 2000 = 0{,}1$, $p(M_1) = 610 / 2000 = 0{,}305$, $p(M_2) = 725 / 2000 = 0{,}3625$, $p(M_3) = 665 / 2000 = 0{,}3325$, $p(A) = 1335 / 2000 = 0{,}6675$, $p(B) = 550 / 2000 = 0{,}275$, $p(C) = 1390 / 2000 = 0{,}695$, $p(D) = 1450 / 2000 = 0{,}725$

4. Studium
Langjährige Erfahrungen zeigen, dass von den Studierenden der Betriebswirtschaftslehre, die in einem Semester an den Klausuren im Fach Statistik und im Fach Finanzmathematik teilnehmen, 15 % die Statistik-Klausur, 12 % die Finanzmathematik-Klausur und 8 % beide Klausuren im ersten Anlauf nicht bestehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein(e) zufällig ausgewählte(r) Student(in)
a) in mindestens einem der beiden Fächer,
b) nur in Finanzmathematik,
c) in keinem der beiden Fächer,
d) in genau einem Fach die Klausur nicht besteht?

Ereignisdefinition:
Ereignis A: Klausur in Statistik nicht bestanden, Ereignis B: Klausur in Finanzmathematik nicht bestanden
a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}12 - 0{,}08 = 0{,}19$
b) $P(B \backslash A) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}19 - 0{,}15 = 0{,}04$
c) $1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}19 = 0{,}81$
d) $P(B \backslash A) + P(B \backslash A) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cup B) - P(B)$
$= 0{,}19 - 0{,}15 + 0{,}19 - 0{,}12 = 011$

5. Computer an Universitäten
Aus den Geschäftsberichten zweier Computerhersteller geht hervor:
- Hersteller A berichtet, dass 20 von den 40 Universitäten des Landes Rechner seines Fabrikats haben.
- Hersteller B berichtet, dass 10 Universitäten Computer seiner Firma kaufen.
- Ferner weiss man, dass 6 Universitäten Computer von beiden Herstellern besitzen.

Wie viele Hochschulen besitzen weder einen Rechner von Firma A noch von Firma B?

Wir definieren die Ereignisse

A: eine zufällig ausgewählte Universität hat Rechner von A,
B: eine zufällig ausgewählte Universität hat Rechner von B.

Dann ist gegeben:

$$\mathrm{P}(A) = 0.5\,, \quad \mathrm{P}(B) = 0.25\,, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{6}{40} = 0.15\,.$$

Anwendung der Regel von De Morgan:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \mathrm{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) \\ &= 1 - [\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)] = 0.4\,.\end{aligned}$$

6. Elektronisches Gerät

Ein elektronisches Gerät besteht aus zwei Komponenten A und B. Aus langjähriger Erfahrung weiss man, dass A mit Wahrscheinlichkeit 0.05 ausfällt. Die Wahrscheinlichkeit, dass A ausfällt, wenn B ausgefallen ist, beträgt 0.20. Ausserdem ist bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.02 beide ausfallen.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B ausfällt, wenn A ausgefallen ist?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B ausfällt?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins von beiden ausfällt?
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B nicht gleichzeitig ausfallen?
e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B nicht ausfällt, wenn A ausgefallen ist?

A: Komponente A fällt aus,
B: Komponente B fällt aus,

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(A) = 0.05\,, \quad \mathrm{P}(A|B) = 0.2\,, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0.02\,.$$

a)

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = 0.4$$

b)

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A|B)} = 0.1$$

c)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\\ &= 0.05 + 0.1 - 0.02 = 0.13\end{aligned}$$

d)

$$\mathrm{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.98$$

e)

$$\mathrm{P}(\overline{B}|A) = 1 - \mathrm{P}(B|A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

7. Suche nach Opa

Vater Martin, Mutter Silke, die Kinder Anja und Dirk sowie Opa Arnold gehen gemeinsam zum Picknick im Wald spazieren. Auf dem Nachhauseweg bemerken die Kinder plötzlich, dass der Opa nicht mehr da ist. Es gibt genau drei Möglichkeiten
(H): Opa ist schon zuhause und sitzt gemütlich in seinem Sessel.
(M): Opa ist noch auf dem Picknick-Platz und flirtet mit jungen Mädchen.
(W): Opa ist in den nahegelegenen Wald gegangen und sucht Pilze.
Aufgrund der Gewohnheiten des Opas kennt man die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse *H*, *M* und *W*: P(H) = 15%, P(M) = 80%, P(W) = 5%.
Anja wird zurück zum Picknick-Platz und Dirk zum Waldrand geschickt, um den Opa zu suchen. Wenn Opa auf dem Picknick-Platz ist, findet ihn Anja mit 90%-ger Wahrscheinlichkeit, läuft er aber im Wald herum, wird ihn Dirk mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 50% finden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anja den Opa findet?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Kinder den Opa finden wird?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, den Opa bei Rückkehr zuhause in seinem Sessel sitzend anzutreffen, falls die Kinder ihn nicht finden sollten?

Ereignis	Wahrscheinlichkeit	
Opa zu Hause	$P(H)$	0.15
Opa flirtet	$P(M)$	0.80
Opa sammelt Pilze	$P(W)$	0.05
Opa wird gefunden	$P(G)$	?
Anja findet Opa, falls er flirtet	$P(G \mid M)$	0.9
Dirk findet Opa, falls er Pilze sammelt	$P(G \mid W)$	0.5

a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass Anja den Opa findet, ist

$$\begin{aligned} P(G \cap M) &= P(G \mid M) \cdot P(M) \\ &= 0.9 \cdot 0.8 = 0.72 \end{aligned}$$

b)

Die Wahrscheinlichkeit, dass Dirk findet den Opa findet ist

$$\begin{aligned} P(G \cap W) &= P(G \mid W) \cdot P(W) \\ &= 0.5 \cdot 0.05 = 0.025 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Kinder den Opa finden wird, ist

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap M) + P(G \cap W) \\ &= 0.72 + 0.025 = 0.745. \end{aligned}$$

c)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, den Opa bei Rückkehr zuhause in seinem Sessel sitzend anzutreffen, ist

$$\begin{aligned} P\left(H \mid G^C\right) &= \frac{P\left(H \cap G^C\right)}{P\left(G^C\right)} = \frac{P\left(G^C \mid H\right) \cdot P(H)}{P\left(G^C\right)} \\ &= \frac{1 \cdot P(H)}{P\left(G^C\right)} = \frac{P(H)}{1 - P(G)} \\ &= \frac{0.15}{0.255} = 0.588\,235 \end{aligned}$$

8. Pünktlichkeit

Die Freunde Peter und Paul führen gemeinsam einen kleinen Laden. Die Ladentür ist mit zwei unterschiedlichen Schlössern gesichert. Peter verfügt über den Schlüssel für das eine Schloss, Paul verfügt über den Schlüssel für das andere Schloss. Der Laden kann folglich nur dann pünktlich geöffnet werden, wenn beide Freunde pünktlich zur Arbeit erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter rechtzeitig erscheint, beträgt 85 Prozent. Für Paul beträgt diese Wahrscheinlichkeit sogar nur 82 Prozent. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 Prozent ist mindestens einer der Freunde rechtzeitig vor der Ladenöffnung da. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Laden pünktlich geöffnet?

$$(23.20)\quad \begin{array}{l} A = \text{"Paul ist pünktlich"} \\ B = \text{"Peter ist pünktlich"} \end{array}.$$

Dem Text können wir dann entnehmen, dass gilt

$$(23.21)\quad P(A) = 0{,}82 \quad P(B) = 0{,}85 \quad P(A \cup B) = 0{,}9 .$$

Der Laden wird pünktlich geöffnet, wenn das Ereignis $A \cap B$ eintritt, d. h. wenn beide pünktlich sind.

Aus dem *Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten*

$$(23.22)\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

erhält man

$$(23.23)\quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) .$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte auf der rechten Seite von (23.23) ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$(23.24)\quad P(A \cap B) = 0{,}82 + 0{,}85 - 0{,}9 = 0{,}77$$

Antwortsatz: Das Verhalten der beiden Freunde führt dazu, dass nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 77 Prozent ihr Laden pünktlich öffnet. Beide sollten an ihrer Pünktlichkeit arbeiten.

9. Biobauer

Bauer Bio hat u.a. drei Hühner (Erna, Lisa und Moni). Erna ist seine Lieblingshenne, denn sie liefert im Mittel pro Jahr 40 Prozent des gesamten Eier-Ergebnisses, während Lisa und Moni nur jeweils 30 Prozent schaffen. Da die Eier ein Mindestgewicht einhalten müssen, gibt es einen gewissen Ausschuss. Bei Erna und Lisa beträgt er drei Prozent, bei Moni 5 Prozent.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei von Lisa stammt?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei zu klein ist?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes zu kleines Ei von Lisa stammt?

Ereignisdefinition:
E = „Das Ei stammt von Henne Erna“
L = „Das Ei stammt von Henne Lisa“
M = „Das Ei stammt von Henne Moni“
K = „Das Ei ist zu klein“
Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich zu:
$P(E) = 0{,}4$; $P(L) = 0{,}3$; $P(M) = 0{,}3$.
$P(K|E) = 0{,}03$; $P(K|L) = 0{,}03$; $P(K|M) = 0{,}05$

Damit lassen sich unter Verwendung der *Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten* die drei Fragen mit mathematischen Symbolen beantworten:

$$\text{a) } \mathrm{P}(L) = 0{,}3$$

$$\begin{aligned} b) P(K) &= P(\mathrm{K/E}) \cdot P(E) + P(\mathrm{K/L}) \cdot P(L) + P(\mathrm{K/M}) \cdot P(M) \\ &= 0{,}03 \cdot 0{,}4 + 0{,}03 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0{,}036 \end{aligned}$$

$$c) P(\mathrm{L/K}) = \frac{P(\mathrm{K/L}) \cdot P(L)}{P(K)} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}3}{0{,}036} = 0{,}25$$

Antwortsätze:

a) Mit 30-prozentiger Wahrscheinlichkeit stammt ein zufällig ausgewähltes Ei von Lisa.

b) Mit 3,6-prozentiger Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Ei zu klein.

c) Ein zufällig ausgewähltes zu kleines Ei stammt mit 25-prozentiger Wahrscheinlichkeit von Lisa.