FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

ā ` s l eq ` j_rr ? l _ 9

Computational and Data Science BSc
HS 2023

Lösungen

Mathematik 1

1. Aussagen über die natürliche Exponentialfunktion

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\exp(1) = 2.718'3$.	○	●
b) Es gilt $\exp'(x) = \mathrm{e}^x$.	●	○
c) Es gilt $\exp(10'000) = \exp^{10}(10)$.	○	●
d) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$.	●	○

2. Ableitung von Exponentialfunktionen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Mit Hilfe der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(2^x\big)' = \underline{\underline{\ln(2) \cdot 2^x}}.$$

b) Mit Hilfe der *Summen-Regel* und der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(3^x - \mathrm{e}^x\big)' = \big(3^x\big)' - \big(\mathrm{e}^x\big)' = \underline{\underline{\ln(3) \cdot 3^x - \mathrm{e}^x}}.$$

c) Mit Hilfe der *Faktor-Regel* und der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{\dot{f}(t)}} = \big(3 \cdot 5^t\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = 3 \cdot \big(5^t\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = \underline{\underline{3 \cdot \ln(5) \cdot 5^t}}.$$

d) Mit Hilfe der *Summen-Regel* sowie der *Exponential-Regel* und *Monom-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(z)}} = \big(w^z + z^w\big)' = \big(w^z\big)' + \big(z^w\big)' = \underline{\underline{\ln(w) \cdot w^z + w \cdot z^{w-1}}}.$$

e) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(q)}} = \big(u^{2q}\big)' = (2q)' \cdot \ln(u) \cdot u^{2q} = \underline{\underline{2\,\ln(u)\,u^{2q}}}.$$

f) Mit Hilfe der *Summen-Regel*, der *Faktor-Regel*, der *Ketten-Regel* und der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(l)}} = \left(3 \cdot 2^{-\frac{l}{9}} + 4\right)' = 3 \cdot \left(2^{-\frac{1}{9} \cdot l}\right)' + (4)' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{9} \cdot l\right)' \cdot \ln(2) \cdot 2^{-\frac{1}{9} \cdot l} + 0$$

$$= 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \ln(2) \cdot 2^{-\frac{l}{9}} = \underline{\underline{-\frac{\ln(2)}{3} \cdot 2^{-\frac{l}{9}}}}.$$

3. Ausbreitung des Corona-Virus

Wir betrachten einen Tag im Frühling 2020, an welchem in der Schweiz insgesamt $N_\mathrm{r} = 3'245$ bestätigte Ansteckungen mit dem Corona-Virus registriert sind und $A_\mathrm{r} = 227/\mathrm{d}$ Neuansteckungen gemeldet werden. Wenn man von einem *exponentiellen Wachstum* ausgeht, dann folgt die Gesamtzahl bestätige Ansteckungen einer *verallgemeinerten Exponentialfunktion* der Form

$$N(t) = N_0 \cdot a^{\frac{t-t_0}{\Sigma}}.$$

Die Anzahl Neuansteckungen ist die Zuwachs-Rate

$$A(t) = \dot{N}(t) = \frac{\ln(a)}{\Sigma} \cdot N(t).$$

Für die Werte am betrachteten Tag gilt demanch in guter Näherung

$$A_\mathrm{r} \approx \frac{\ln(a)}{\Sigma} \cdot N_\mathrm{r} \qquad \Big| \cdot \frac{\Sigma}{A_\mathrm{r}}.$$

Daraus und durch Einsetzen der *Basis* $a = 2$ können wir die *Zeitspanne* Σ berechnen, in welcher eine Verdopplung der Ansteckungen zu erwarten ist. Wir erhalten

$$\underline{\underline{\Sigma}} \approx \ln(a) \cdot \frac{N_\mathrm{r}}{A_\mathrm{r}} \approx \ln(2) \cdot \frac{3'245}{227\,\frac{1}{\mathrm{d}}} \approx \underline{\underline{10\,\mathrm{d}.}}$$

4. Aussagen über die natürliche Logarithmusfunktion

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\ln(\mathrm{e}) = 1$.	●	○
b) Es gilt $\ln(8)/\ln(2) = 3$.	●	○
c) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $\exp\big(\ln(x)\big) = x$.	●	○
d) Ist $f(x) = \ln\big(\lvert x \rvert\big)$, dann gilt $f'(-2) = -0.5$.	●	○
e) Die *Funktion* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist *bijektiv*.	●	○
f) Es gilt $\ln\big(\exp(\sqrt{3}\,)\big) \in \mathbb{Q}$.	○	●

5. Ableitung von Logarithmusfunktionen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Mit Hilfe der *Faktor-Regel* und der *Logarithmus-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(2\,\ln(x)\big)' = 2 \cdot \ln'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{2}{x}}}\,.$$

b) Mit Hilfe der *Faktor-Regel* und der *Logarithmus-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(6\,\log_7(x) + 1\big)' = 6 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(7)} + 0 = \underline{\underline{\frac{6}{x \cdot \ln(7)}}}\,.$$

c) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und der *Logarithmus-Regel* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \big(\log_2(2x+1)\big)' = (2x+1)' \cdot \log_2'(2x+1) = (2+0) \cdot \frac{1}{(2x+1) \cdot \ln(2)} \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{(2x+1) \cdot \ln(2)}}}\,.\end{aligned}$$

d) Mit Hilfe der *Summen-Regel* und der *Logarithmus-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(\log_5(x) + \log_x(5)\big)' = \big(\log_5(x)\big)' + \big(\log_x(5)\big)' = \underline{\underline{\frac{1}{x\,\ln(5)} - \frac{\log_x(5)}{x\,\ln(x)}}}\,.$$

e) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und der *Logarithmus-Regel* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{f'(x)}} &= \big(\log_a(bx+c)\big)' = (bx+c)' \cdot \log_a'(bx+c) = (b+0) \cdot \frac{1}{(bx+c) \cdot \ln(a)} \\ &= \underline{\underline{\frac{b}{(bx+c) \cdot \ln(a)}}}\,.\end{aligned}$$

f) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* der *Logarithmus-Regel* und der *Betrags-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(\ln\big(|x|\big)\big)' = |x|' \cdot \ln'\big(|x|\big) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\operatorname{sgn}(x) \cdot |x|} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}\,.$$

6. Diverse Ableitungen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-x)' = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \underline{\underline{-\mathrm{e}^{-x}.}}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x.$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = x' \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \big(\mathrm{e}^x\big)' = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = \underline{\underline{(1+x) \cdot \mathrm{e}^x.}}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x+2) \cdot \mathrm{e}^x.$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (x+2)' \cdot \mathrm{e}^x + (x+2) \cdot \big(\mathrm{e}^x\big)' = (1+0) \cdot \mathrm{e}^x + (x+2) \cdot \mathrm{e}^x = \big(1 + (x+2)\big) \cdot \mathrm{e}^x$$

$$= \underline{\underline{(x+3) \cdot \mathrm{e}^x.}}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \big(-x^2\big)' = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \big(-2 \cdot x^{2-1}\big) = \underline{\underline{-2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.}}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x+1) \cdot 2^x.$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (x+1)' \cdot 2^x + (x+1) \cdot \big(2^x\big)' = (1+0) \cdot 2^x + (x+1) \cdot \ln(2) \cdot 2^x$$

$$= \underline{\underline{\big(1 + \ln(2) \cdot (x+1)\big) \cdot 2^x.}}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = (x+1) \cdot 3^{-x^2}.$$

Mit Hilfe der *Produkt-Regel* und der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (x+1)' \cdot 3^{-x^2} + (x+1) \cdot \big(3^{-x^2}\big)' = (1+0) \cdot 3^{-x^2} + (x+1) \cdot \ln(3) \cdot 3^{-x^2} \cdot \big(-x^2\big)'$$

$$= 3^{-x^2} + (x+1) \cdot \ln(3) \cdot 3^{-x^2} \cdot \big(-2 \cdot x^{2-1}\big) = \big(1 + (x+1) \cdot \ln(3) \cdot (-2x)\big) \cdot 3^{-x^2}$$

$$= \underline{\underline{\big(1 - 2 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot (x+1)\big) \cdot 3^{-x^2}.}}$$

7. Diverse Ableitungen berechnen mit Python/Sympy
Wir berechnen die *Ableitungen* aus Aufgabe **6** mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
# Parameter:
f=...;
# Berechnungen:
fs=sp.simplify(sp.diff(f,x));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(fs);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=sp.exp(-x);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.}}$$

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=x*sp.exp(x);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{x}.}}$$

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=(x+2)*sp.exp(x);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x) = (x+3) \cdot \mathrm{e}^{x}.}}$$

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=sp.exp(-x**2);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{\dot{f}(t) = -2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.}}$$

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=(x+1)*2**x;
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(s) = 2^x \cdot \big((x+1) \cdot \ln(2) + 1\big).}}$$

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=(x+1)*3**(-x**2);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$\underline{\underline{f'(x) = 3^{-x^2} \cdot \big(-x \cdot (x+1) \cdot \ln(9) + 1\big).}}$$

8. Diverse Ableitungen

Wir berechnen jeweils die *Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = 5^{x^3 - \sqrt{x} + 7}.$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(x^3 - \sqrt{x} + 7\big)' \cdot \ln(5) \cdot 5^{x^3 - \sqrt{x} + 7} = \underline{\underline{\left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \ln(5) \cdot 5^{x^3 - \sqrt{x} + 7}.}}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \log_2\big(9x^2 - 4\big).$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \big(9x^2 - 4\big)' \cdot \log_2'\big(9x^2 - 4\big) = \big(9 \cdot 2x^{2-1} - 0\big) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot \big(9x^2 - 4\big)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{18x}{\ln(2) \cdot \big(9x^2 - 4\big)}}}.$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \sqrt[4]{\ln\big(x^{256}\big)} = \sqrt[4]{\ln\big(|x|^{256}\big)} = \sqrt[4]{256 \cdot \ln\big(|x|\big)} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{\ln\big(|x|\big)} = 4 \cdot \sqrt[4]{\ln\big(|x|\big)}$$

$$= 4 \cdot \big(\ln\big(|x|\big)\big)^{\frac{1}{4}}.$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \big(\ln\big(|x|\big)\big)^{\frac{1}{4}-1} \cdot \big(\ln\big(|x|\big)\big)' = \big(\ln\big(|x|\big)\big)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{\ln^3\big(|x|\big)}}}}.$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Mit Hilfe der *Reziproken-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = -\frac{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)'}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = -\frac{0-\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x-x}}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}\cdot\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}}}\,.$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \ln^{\ln(x)}(x) = \big(\ln(x)\big)^{\ln(x)}.$$

Mit Hilfe der *Exponential-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \left(\ln'(x)\cdot\ln\big(\ln(x)\big) + \ln'(x)\cdot\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\right)\cdot\ln^{\ln(x)}(x)$$

$$= \left(\frac{1}{x}\cdot\ln\big(\ln(x)\big) + \frac{1}{x}\cdot 1\right)\cdot\ln^{\ln(x)}(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x}\cdot\Big(\ln\big(\ln(x)\big)+1\Big)\cdot\ln^{\ln(x)}(x)}}\,.$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x) = \frac{2^{-\sqrt{|x|}}}{\ln(2)}\,.$$

Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{1}{\ln(2)}\cdot\left(-\sqrt{|x|}\right)'\cdot\ln(2)\cdot 2^{-\sqrt{|x|}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{|x|}}\cdot|x|'\cdot 2^{-\sqrt{|x|}} = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\cdot\sqrt{|x|}}\cdot 2^{-\sqrt{|x|}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{|x|}}\cdot 2^{-\sqrt{|x|}-1}}}\,.$$

9. Diverse Ableitungen berechnen mit Python/Sympy

Wir berechnen die *Ableitungen* aus Aufgabe 8 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x',real=True);
# Parameter:
f=...;
# Berechnungen:
fs=sp.simplify(sp.diff(f,x));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(fs);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=5**(x**3-sp.sqrt(x)+7);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$f'(x) = \frac{5^{-\sqrt{x}+x^3+7} \cdot \left(6 \cdot x^{\frac{5}{2}} - 1\right) \cdot \ln(5)}{2 \cdot \sqrt{x}} .$$

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=sp.log(9*x**2-4,2);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$f'(x) = \frac{18 \cdot x}{\left(9 \cdot x^2 - 4\right) \cdot \ln(2)} .$$

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=(sp.log(x**256))**(1/4);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$f'(x) = \frac{64.0}{x \cdot \ln^{0.75}\left(x^{256}\right)} .$$

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=1/(1+sp.exp(-x));
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)} .$$

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=(sp.log(x))**sp.log(x);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Ableitung*

$$f'(x) = \frac{\left(\ln\left(\ln(x)\right) + 1\right) \cdot \ln^{\ln(x)}(x)}{x} .$$

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
f=2**(-sp.sqrt(sp.Abs(x)))/sp.log(2);
```

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{r|l} 0 & x = 0 \\ -\frac{2^{-\sqrt{|x|}-1} \cdot x}{\left|x^{\frac{3}{2}}\right|} & \text{sonst.} \end{array} \right.$$