Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Kreiszahl, Gradmass, Bogenmass und nautische Meile sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen den einfachen Zusammenhang zwischen Winkeln im Bogenmass, Radius und Bogenlänge und können diesen anwenden.
- Sie kennen die Rechenregeln für lineare und quadratische Gleichungen und können diese anwenden.
- Sie können eine lineare bzw. quadratische Gleichung lösen und deren Lösungsmenge bestimmen.

---

1. Aussagen über das Bogenmass
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jeder Winkel kann sowohl im Grad- als auch im Bogenmass angegeben werden.	X	
b) Ein Winkel von 1 entspricht einem Winkeln von ca. 57,3°.	X	
c) Sind zwei Kreisbögen gleich lang, dann durchlaufen sie denselben Winkel.		X
d) Verdoppelt man den Radius des Bogens, dann verdoppelt man auch dessen Sektorfläche, sofern der Winkel unverändert bleibt.		X
e) Winkel im Bogenmass müssen zwingend mit der Masseinheit Radiant versehen werden.		X
f) Aus dem Winkel α und der Bogenlänge b kann die zugehörige Sektorfläche berechnet werden.	X	

2. Bogen- in Gradmass konvertieren
Geben Sie die folgenden Winkel jeweils im Gradmass an.

a) π
b) $\pi/2$
c) $\pi/3$
d) $\pi/4$
e) $\pi/6$
f) $2\pi/3$
g) $0{,}1\pi$
h) 3
i) 0,34
j) 4,56

a) Es gilt

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \underline{\underline{180^\circ.}}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{2} = \underline{\underline{90^\circ.}}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = \underline{\underline{60^\circ.}}$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{4} = \underline{\underline{45^\circ.}}$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{6}}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{6} = \underline{\underline{30^\circ.}}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = \underline{\underline{120^\circ.}}$$

g) Es gilt

$$\underline{\underline{0.1\,\pi}} = 0.1\,\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0.1 \cdot 180^\circ = \underline{\underline{18^\circ.}}$$

h) Es gilt

$$\underline{\underline{3}} = 3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \underline{\underline{171.89^\circ.}}$$

i) Es gilt

$$\underline{\underline{0.34}} = 0.34 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \underline{\underline{19.48^\circ.}}$$

j) Es gilt

$$\underline{\underline{4.56}} = 4.56 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \underline{\underline{261.27^\circ.}}$$

3. Grad- in Bogenmass konvertieren

Geben Sie die folgenden Winkel jeweils im Bogenmass an.

a) 15°	b) 150°	c) 270°
d) 5°	e) 75°	f) 240°
g) 1°	h) 1000°	i) 78,3°
j) 471°		

a) Es gilt

$$\underline{\underline{15^\circ}} = 15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12} \approx 0.083'3\,\pi\,.}}$$

b) Es gilt

$$\underline{\underline{150^\circ}} = 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6} \approx 0.833\,\pi\,.}}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{270^\circ}} = 270^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2} = 1.5\,\pi\,.}}$$

d) Es gilt

$$\underline{\underline{5^\circ}} = 5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \underline{\underline{\frac{\pi}{36} \approx 0.027'8\,\pi\,.}}$$

e) Es gilt

$$\underline{\underline{75^\circ}} = 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{12} \approx 0.417\,\pi\,.}}$$

f) Es gilt

$$\underline{\underline{240°}} = 240° \cdot \frac{\pi}{180°} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \approx 1.33\,\pi\,.}}$$

g) Es gilt

$$\underline{\underline{1°}} = 1° \cdot \frac{\pi}{180°} = \underline{\underline{\frac{\pi}{180} \approx 0.005'56\,\pi\,.}}$$

h) Es gilt

$$\underline{\underline{1'000°}} = 1'000° \cdot \frac{\pi}{180°} = \underline{\underline{\frac{50\pi}{9} \approx 5.56\,\pi.}}$$

i) Es gilt

$$\underline{\underline{78.3°}} = 78.3° \cdot \frac{\pi}{180°} \approx \underline{\underline{0.435\,\pi.}}$$

j) Es gilt

$$\underline{\underline{471°}} = 471° \cdot \frac{\pi}{180°} \approx \underline{\underline{2.62\,\pi.}}$$

4. Zug in Kurve

Betrachten Sie einen Zug, der durch eine Kurve fährt.

a) Wie lange darf der Zug maximal sein, wenn der Kurvenradius 200 m beträgt und der Zug in einem Winkel von $\pi/4$ Platz haben soll?

b) In welchem Winkel steht die Lokomotive zum letzten Wagen des Zuges, wenn der Zug 120 m lang ist und der Kurvenradius 500 m beträgt?

c) Wie gross muss der Kurvenradius mindestens sein, wenn ein Zug der Länge 300 m in einem Winkel von $\pi/6$ komplett Platz haben soll?

a) Der Zug darf nicht länger sein als $L = \alpha \cdot R = \frac{\pi}{4} \cdot 200m \approx 157m$.

b) Der Winkel zwischen der Lokomotive und dem letzten Wagen beträgt $\alpha = \frac{L}{R} = \frac{120m}{500m} = 0{,}24 \approx 0{,}0764\pi$.

c) Der Kurvenradius darf nicht kleiner sein als $R = \frac{L}{\alpha} = \frac{300m}{\pi/6} \approx 573m$.

5. Nautische Meile

Die mittlere Entfernung vom Nordpol zum Äquator entlang eines Meridians beträgt ca. 10001,966 km. Eine nautische Meile (auch Seemeile genannt) ist definiert durch 1 NM := 1852 m.

a) Wie lange ist der mittlere Weg vom Nordpol zum Äquator entlang eines Meridians ausgedrückt in nautischen Meilen?

b) Wie lange ist der mittlere Weg entlang eines Meridians, welcher einem Breitengrad entspricht?

c) Welche Idee steckt wahrscheinlich hinter der nautischen Meile?
Hinweis: der sechzigste Teil eines Grades wird auch als Winkelminute bezeichnet.

Der mittlere Weg vom Nordpol zum Äquator entlang eines Meridians ausgedrückt in nautischen Meilen beträgt

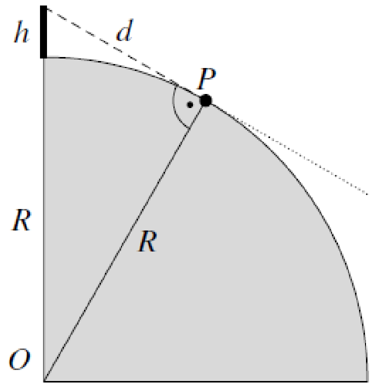
$a = a \cdot \frac{1NM}{1NM} = 10001966m \cdot \frac{1NM}{1852m} \approx 5400{,}6NM.$

Der mittlere Weg vom Nordpol zum Äquator entlang eines Meridians erstreckt sich über eine Breitendifferenz von 90°. Der mittlere Weg entlang eines Meridians, der einem Breitengrad entspricht, ist demnach

$b = \frac{a}{90} = \frac{5400{,}6NM}{90} \approx 60{,}01NM.$

Idee hinter der nautischen Meile: eine nautische Meile ist der Weg entlang eines Meridians, der einer Winkelminute (sechzigster Teil eines Breitengrades) entspricht. Die Abweichung der Distanz $b \approx 60{,}01NM$ von exakt 60NM kommt daher, dass die Werte für a und für die nautische Meile auf ganze Meter gerundet sind.

6. Trigonometrie
Welche maximale Reichweite d hat das Leuchtfeuer eines Leuchtturms, das sich h = 45 m über dem Meeresspiegel befindet? Führen Sie eine Näherungsrechnung (möglichst ohne Taschenrechner) mit dem Erdradius R = $6{,}4 \bullet 10^6$ m durch (siehe Abbildung unten).



Das Leuchtfeuer reicht maximal bis zum Punkt P am Horizont. P ist der Berührpunkt der Tangente von der Leuchtturmspitze an den Erdkreis. Da die Kreistangente stets senkrecht zum Radius verläuft, bilden die Spitze des Leuchtturms, der Punkt P am Horizont und der Erdmittelpunkt o ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten R = $6{,}4 \bullet 10^6$ m (Erdradius) bzw. d (Reichweite des Leuchtfeuer) und der Hypotenuse R+h, wobei h = 45 m die Höhe des Leuchtturms ist. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$R^2 + d^2 = (R+h)^2 \quad \big| \text{binomische Formel ...}$$
$$R^2 + d^2 = R^2 + 2\,R\,h + h^2 \quad \big| - R^2$$
$$d^2 = 2\,R\,h + h^2$$

Wir wollen nur eine Näherungsrechnung durchführen. Da $h = 45$ im Vergleich zu $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ sehr klein ist, dürfen wir h^2 auf der rechten Seite vernachlässigen:

$$d^2 \approx 2\,R\,h = 2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 45 = 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 90 = 64 \cdot 10^6 \cdot 9$$
$$\Longrightarrow \quad d \approx \sqrt{64 \cdot 10^6 \cdot 9} = 8 \cdot 10^3 \cdot 3 = 24000\,\text{m} \quad \text{bzw.} \quad d = 24\,\text{km}$$

7. Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen

a) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$

b) $\frac{x+3}{4} + \frac{1-3x}{7} = 0$

c) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-2}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$

e) $24x^2 - 65x + 44 = 0$

f) $y^3 + 19 = (y + 4)^3$

a) L = {6}

b) L = {5}

b) L = {3}

d) L = { }

e) L = $\left\{\frac{4}{3}, \frac{11}{8}\right\}$

f) L = {-3/2, -5/2}

8. Quadratische Gleichungen mit Parameter

Die folgenden quadratischen Gleichungen enthalten einen Parameter p. Die Lösungsmenge der Gleichungen hängt daher vom Wert dieses Parameters ab. Lösen Sie die Gleichungen nach x und machen Sie eine Fallunterscheidung, in welchen Fällen es 2, 1 oder keine Lösung gibt.

a) $x^2 + x + p = 0$ b) $3x^2 + px - p = 0$

a) falls $p < \frac{1}{4}$:	2 Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$
falls $p = \frac{1}{4}$:	1 Lösung	$x = -\frac{1}{2}$
falls $p > \frac{1}{4}$:	keine Lösung	L = { }
b) falls $p < -12$:	2 Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 12p}}{6}$
falls $p = -12$:	1 Lösung	$x = 2$
falls $-12 < p < 0$:	keine Lösung	L = { }
falls $p = 0$:	1 Lösung	$x = 0$
falls $p > 0$:	2 Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 12p}}{6}$