Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 10

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Orthogonalprojektion und können diese anwenden.
- Sie kennen die Begriffe Gerade, Parameterdarstellung, Normalen- und Einheitsnormalenvektor und Hessesche Normalform.
- Sie können eine Gerade in 2D und 3D sowohl durch die Parameterdarstellung als auch durch die Hessesche Normalform darstellen.

1. Aussagen über das Vektorprodukt

Für c) - h): der Vektor $\vec{v}$ soll orthogonal auf den Vektor $\vec{w}$ projiziert werden, wobei $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jeder beliebige Vektor kann auf jeden beliebigen anderen Vektor in gleicher Dimension orthogonal projiziert werden.	X	
b) Die Orthogonalprojektion lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts bestimmen.	X	
c) Es gilt: $\langle \vec{v}_\perp, \vec{w} \rangle = 0$.	X	
d) Es gilt: $\langle \vec{v}_\parallel, \vec{w} \rangle = 0$.		X
e) Es gilt: $\langle \vec{v}_\perp, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.		X
f) Es gilt: $\langle \vec{v}_\parallel, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.	X	
g) Verdoppelt man $\vec{w}$, dann verdoppelt man auch $\vec{v}_\perp$ und $\vec{v}_\parallel$.		X
h) Verdoppelt man $\vec{v}$, dann verdoppelt man auch $\vec{v}_\perp$ und $\vec{v}_\parallel$.	X	

2. Berechnung von Orthogonalprojektionen

Berechnen Sie die folgenden Orthogonalprojektionen:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{w} = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{6^2 + 0^2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 6} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{w} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 6}{0^2 + 6^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{w} = \frac{1 \cdot 6 + (-7) \cdot 8}{6^2 + 8^2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{-50}{100} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}}}.$$

d)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{w}} = \frac{(-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{w} = \frac{2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{26} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 26 \\ 0 \\ 26 \end{bmatrix} - \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 29 \\ -1 \\ 22 \end{bmatrix}}}.$$

f)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\parallel}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{w} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1}{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_\perp}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}}}.$$

3. Orthogonalprojektionen mit Python/Numpy berechnen
Berechnen Sie die Orthogonalprojektionen aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy.

a)
```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
v=np.array([2,3]); w=np.array([6,0]);
# Funktionen:
v_parallel=np.dot(v,w)/np.dot(w,w)*w;
# Berechnungen:
v_senkrecht=v-v_parallel;
# Ausgabe:
print('v_parallel = ', v_parallel);
print('v_senkrecht = ', v_senkrecht);
```

Aufgaben b) – f) analog.

4. Orthogonalprojektionen mit Python/Sympy berechnen
Berechnen Sie die Orthogonalprojektionen aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy.

a)
```
# Initialisieren
import sympy as sp;
import IPython.display as dp;
sp.init_printing();
# Parameter
v=sp.Matrix([2,3]); w=sp.Matrix([6,0]);
# Berechnungen
v_parallel=(v.dot(w)/w.dot(w))*w;
v_senkrecht=v-v_parallel
# Ausgabe
dp.display(v_parallel);
dp.display(v_senkrecht);
```

Aufgaben b) – f) analog.

5. Aussagen über Geraden in 2D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Um eine Gerade in Parameterdarstellung in 2D anzugeben, braucht es genau einen reellen Parameter.	X	
b) Durch Angabe des Einheitsnormalenvektors ist eine Gerade in 2D eindeutig bestimmt.		X
c) Die Gleichung x + y = 1 beschreibt eine Gerade in 2D.	X	
d) Die Gleichung $x^2 + y + 5 = 0$ beschreibt eine Gerade in 2D.		X
e) Der konstante Term in der Hesseschen Normalform einer Geraden in 2D ist die Länge des Normalenvektors.		X

6. Geraden in 2D

Bestimmen Sie jeweils die Parameterdarstellung, einen Normalenvektor, einen Einheitsnormalenvektor, eine Normalengleichung und die Hessesche Normalform für die gesuchte Gerade.

a) Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt (3;2) verläuft.
b) Die Gerade, die durch den 2. Quadranten im Abstand 3 parallel zur y-Achse verläuft.
c) Die Gerade, für die gilt: x = y.
d) Die Gerade, die durch die Punkte (3;4) und (-2;1) verläuft.
e) Die Gerade, die durch die Funktionsgleichung f(x) = 2x – 3 beschrieben wird.
f) Die Gerade, die die x-Achse bei x = 2 schneidet und die Steigung -5 hat.

a)
Wir wählen

$$\mathrm{s}_0 := \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \hat{\mathbf{e}}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Geradengleichung in Parameterdarstellung

$$\underline{\underline{\mathrm{s}(\tau)}} = \mathrm{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Wir wählen einen Einheitsnormalenvektor

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Da entlang der Geraden y = 2 gilt, ergibt sich die folgende Normalengleichung, die auch der Hesseschen Normalform entspricht:
y – 2 = 0.

b)
Da die Gerade im Abstand 3 zur y-Achse verläuft, geht sie auch durch den Punkt P = (-3;0). Es ergibt sich die folgende Parametrisierung

$$\mathbf{s}_0 := \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Einheitsnormalenvektor

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}}} = -\hat{\mathbf{e}}_x = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Entlang der Geraden gilt: x = -3 bzw. x + 3 = 0. Es ergibt sich die folgende Normalengleichung bzw. Hessesche Normalenform:
-x – 3 = 0.
c)
Eine Normalengleichung ergibt sich zu x – y = 0.
Wir lesen daraus den Normelenvektor ab, woraus wir den Einheitsnormalenvektor bestimmen:

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

Die Hessesche Normalenform ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0.}}$$

Die Gerade verläuft also durch den Ursprung und wir wählen

$$\mathbf{s}_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Paremeterdarstellung der Geraden ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

d)
Wir wählen

$$\mathbf{s}_0 := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die Parameterdarstellung

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}}}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor, der zu $\vec{v}$ senkrecht ist, und erhalten somit den Normalen- und Normaleneinheitsvektor:

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = R_{-\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v}) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

Wir berechnen

$$c = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{s}_0 \rangle = -\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -\big((-3)\cdot(-2) + 5 \cdot 1\big) = -(6+5)$$

$$= -11.$$

Entlang der *Geraden* gilt

$$\begin{aligned} & 0 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + c \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle - 11. \end{aligned}$$

Eine *Normalen-Gleichung* der *Geraden* ist demnach

$$\underline{\underline{-3x + 5y - 11 = 0.}}$$

Die Hessesche Normalform ergibt sich zu

$$\underline{\underline{-\frac{3}{\sqrt{34}} x + \frac{5}{\sqrt{34}} y - \frac{11}{\sqrt{34}} = 0.}}$$

e)

Entlang der Gerade gilt: y = 2x – 3, was gleichbedeutend ist mit 2x - y - 3 = 0. Daraus können wir den Normalenvektor ablesen und den Einheitsnormalenvektor bestimmen:

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = -\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

Es ergibt sich die Hessesche Normalform

$$\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{5}} x - \frac{1}{\sqrt{5}} y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.}}$$

Der y-Achsenabschnitt q der Geraden ist q = -3 und die Steigung S = 2. Daraus ergeben sich Aufpunkt und Richtungsvektor der Geraden zu

$$\mathbf{s}_0 := \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Und wir erhalten die Parameterform

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

f)

Der x-Achsenabschnitt der Geraden ist p = 2 und die Steigung ist S = -5. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{s}_0 := \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Die Parameterdarstellung ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{s}(\tau)}} = \mathbf{s}_0 + \tau \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}}}$$

Als Normalen- und Einheitsnormalenvektor erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v}) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Wir berechnen

$$c = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{s}_0 \rangle = -\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -(5 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = -(10 + 0) = -10.$$

Entlang der *Geraden* gilt

$$0 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle + c$$

$$0 = \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle - 10$$

Die Normalengleichung ergibt sich zu 5x + y -10 = 0. Die Hessesche Normalform ist

$$\underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{26}} x + \frac{1}{\sqrt{26}} y - \frac{10}{\sqrt{26}} = 0.}}$$

7. Aussagen über eine Gerade in 2D
Gegeben sei die Gerade g mit der Normalengleichung
x – y – 2 = 0.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

	Wahr	Falsch
a) Die Gerade g verläuft durch den Punkt (1;1).		X
b) Die Gerade g verläuft parallel zum Vektor $\vec{w} = 3 \cdot \hat{e}_x + 3 \cdot \hat{e}_y$.	X	
c) Die Gerade g steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{w} = \hat{e}_y - \hat{e}_x$.	X	
d) Die Gerade g verläuft parallel zur Geraden h mit der Normalengleichung -x + y = 0.	X	
e) Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Winkel von π/4.	X	

8.
Gegeben seien die 3 Punkte $P_1(3;0;4)$, $P_2(1;1;1)$ und $P_3(-7;5;-11)$. Liegen die Punkte auf einer Geraden? Falls ja, wie lautet die Geradengleichung?

Ja, da die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ *kollinear* (parallel) sind:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\,\overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\textit{Geradengleichung:}\ \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ \lambda \\ 4 - 3\lambda \end{pmatrix}$$