Übungsblatt Sto 10

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe stetige Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeitsverteilung und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie kennen den Unterschied zwischen einer diskreten und stetigen Zufallsvariablen und können ihn auf konkrete Beispiele anwenden.
- Sie können anhand einer gegebenen Dichtefunktion die Verteilungsfunktion bestimmen und umgekehrt.
- Sie können den Erwartungswert, Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung für eine stetige Zufallsvariable bestimmen.

---

1. Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen

X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f(x). Bestimmen Sie die jeweilige Verteilungsfunktion F(x):

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ $(0 \le x \le 2)$,

b) $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ $(x \ge 0;\ \lambda > 0)$,

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \ge 1)$.

Außerhalb der angegebenen Intervalle *verschwindet* die Verteilungsfunktion $(F(x) = 0)$.

a) $$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x u\,du = \frac{1}{4}\left[u^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^2 \qquad (0 \le x \le 2)$$

b) $$F(x) = \lambda \cdot \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda u}\,du = \lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda u}}{-\lambda}\right]_0^x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad (x \ge 0)$$

c) $$F(x) = \int_1^x \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \qquad (x \ge 1)$$

2. Parameter bei Dichtefunktion bestimmen

Bestimmen Sie den jeweiligen Parameter in der Dichtefunktion f(x) der stetigen Zufallsvariablen X:

a) $f(x) = \frac{1}{16}x + b$ (0 ≤ x ≤ 4),
b) $f(x) = c$ (a ≤ x ≤ b),
c) $f(x) = a(1 + x)$ (-1 ≤ x ≤ 1).
Ausserhalb der angegebenen Intervalle gilt f(x) = 0.

$$\text{a)}\quad \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x + b\right) dx = \left[\frac{1}{32}x^2 + bx\right]_0^4 = \frac{1}{2} + 4b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{8}$$

$$\text{b)}\quad c \cdot \int_a^b 1\,dx = c\left[x\right]_a^b = c(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}$$

$$\text{c)}\quad a \cdot \int_{-1}^{1} (1+x)\,dx = a\left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

3. Wahrscheinlichkeiten mittels Dichtefunktion bestimmen
Eine stetige Zufallsvariable X besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{für } 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter k.
b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
P(X ≤ -2), P(1 ≤ X ≤ 2), P(X ≥ 5), P(3 ≤ X ≤ 8).

$$\text{a)}\quad \int_0^{10} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{10} = 50k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{50}$$

$$\text{b)}\quad \textit{Verteilungsfunktion:}\ F(x) = \frac{1}{50} \cdot \int_0^x u\,du = \frac{1}{100}\left[u^2\right]_0^x = \frac{1}{100}x^2 = 0{,}01\,x^2$$

$$(0 \le x \le 10)$$

$$P(X \le -2) = 0; \qquad P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = 0{,}04 - 0{,}01 = 0{,}03$$

$$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P(3 \le X \le 8) = F(8) - F(3) = 0{,}64 - 0{,}09 = 0{,}55$$

4. Dichtefunktion einer gegebenen Verteilungsfunktion II
Die Lebensdauer T eines bestimmten elektronischen Bauelements sei eine stetige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion
$F(t) = 1 - (1 + 0{,}2t) \cdot e^{-0{,}2t}$ (t ≥ 0; sonst F(t) = 0).
a) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion f(t).
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(1 ≤ T ≤ 5).

$$\text{a)}\quad f(t) = F'(t) = -\left[0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t} + e^{-0{,}2t} \cdot (-0{,}2)(1 + 0{,}2t)\right] = 0{,}04\,t \cdot e^{-0{,}2t}$$

$$\text{b)}\quad P(1 \le T \le 5) = F(5) - F(1) = 0{,}2642 - 0{,}0175 = 0{,}2467$$

5. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung stetiger Verteilungen
Die stetige Zufallsvariable X besitze die jeweils angegebene Dichtefunktion f(x).
Berechnen Sie den Mittelwert μ, die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ.
a) f(x) = const. = c (a ≤ x ≤ b)
b) f(x) = mx (0 ≤ x ≤ 10; $m \in \mathbb{R}$)

a) *Normierung:* $\int_a^b c\,dx = c\left[x\right]_a^b = c\,(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2\,(b-a)}\left[x^2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{(b+a)\,(b-a)}{2\,(b-a)} = \frac{1}{2}\,(a+b)$$

$$E\,(X^2) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3\,(b-a)}\left[x^3\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)\,(a^2+ab+b^2)}{3\,(b-a)} = \frac{1}{3}\,(a^2+ab+b^2)$$

NR: $(b^3-a^3):(b-a) = a^2+ab+b^2$ (Polynomdivision)

$$\sigma^2 = E\,(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3}\,(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}\,(a+b)^2 =$$

$$= \frac{4\,(a^2+ab+b^2) - 3\,(a^2+2ab+b^2)}{12} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{1}{12}\,(a-b)^2$$

$\sigma = 0{,}2887\,(b-a)$

b) *Normierung:* $\int_0^{10} mx\,dx = \left[\frac{1}{2}\,mx^2\right]_0^{10} = 50\,m = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{50}$

$$\mu = \int_0^{10} x\cdot\frac{1}{50}\,x\,dx = \frac{1}{50}\cdot\int_0^{10} x^2\,dx = \frac{1}{150}\left[x^3\right]_0^{10} = \frac{20}{3}$$

$$E\,(X^2) = \int_0^{10} x^2\cdot\frac{1}{50}\,x\,dx = \frac{1}{50}\cdot\int_0^{10} x^3\,dx = \frac{1}{200}\left[x^4\right]_0^{10} = 50$$

$\sigma^2 = E\,(X^2) - \mu^2 = 50 - \frac{400}{9} = \frac{50}{9} = 5{,}5556; \qquad \sigma = 2{,}3570$