Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 5

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 1

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Additionssatz, Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit, totale Wahrscheinlichkeit, abhängige/unabhängige Ereignisse, Ereignisbaum, Satz von Bayes und deren wichtigste Eigenschaften und können diese erklären.
- Sie können Additionssatz, Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes auf konkrete Situationen anwenden.
- Sie können Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Ereignisbaums bestimmen.

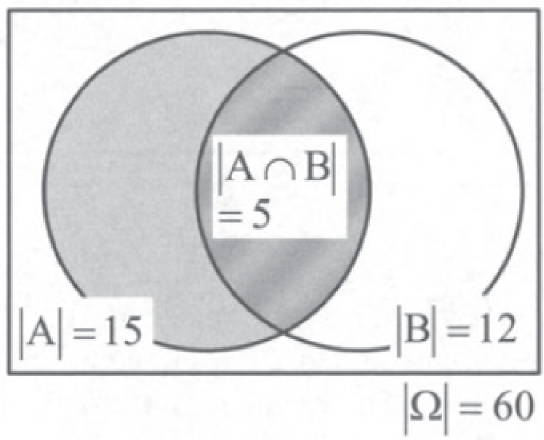
1. Qualitätskontrolle

Bei einer Qualitätskontrolle haben von 60 kontrollierten Stücken 15 den Defekt A und 12 den Defekt B. 38 Stück bieten keinen Anlass zur Beanstandung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stück, das den Defekt A aufweist, auch den Defekt B hat. Zeichnen Sie auch einen Ereignisbaum für alle Fälle, die eintreten können.

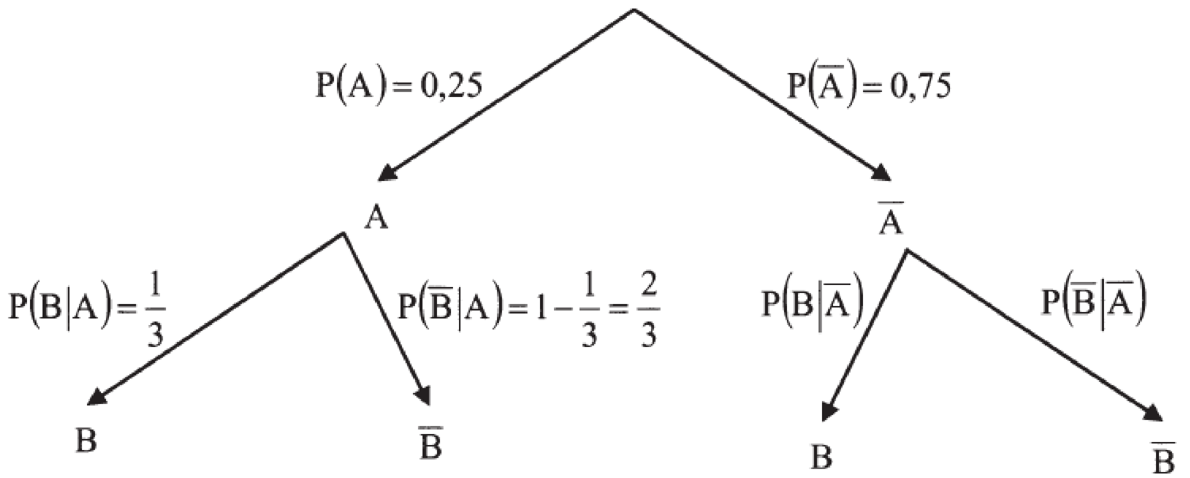
Insgesamt sind $22(=60-38)$ Stück defekt. Haben 15 Teile den Defekt A und 12 Stück den Defekt B, so müssen $(15+12)-22=5$ Teile gleichzeitig den Defekt A und den Defekt B haben. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{15}{60}=0{,}25\,,\quad P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{12}{60}=0{,}20\,,\quad P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{5}{60}=0{,}08\overline{3}\,.$$

Wir wissen, dass das Ereignis A = "Teil hat den Defekt A" bereits eingetreten ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zusätzlich noch B = "Teil hat den Defekt B" eintritt. Hierbei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung von A.

Berechnung	Grafik
1. Lösungsweg (logische Überlegung): Jetzt können nicht mehr alle Fälle, sondern nur noch diejenigen von A eintreten: $P(B\mid A)=\frac{\lvert A\cap B\rvert}{\lvert A\rvert}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}[\hat{=}33{,}3\,\%]$. 2. Lösungsweg (Berechnungsformel): $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{60}}{\frac{15}{60}}=\frac{1}{3}[\hat{=}33{,}3\,\%]$	

Veranschaulichen wir uns das Ergebnis mit einem Entscheidungsbaum. Wir haben die Vorabinformation, dass Ereignis A stattgefunden hat. Jetzt soll zusätzlich B eintreten:



2. Sportschützen

Zwei Sportschützen treffen die Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% (Schütze Nr. 1) bzw. 40% (Schütze Nr. 2), wie man aus den Trainingsleistungen schliessen kann.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Scheibe getroffen wird, wenn beide gleichzeitig schiessen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft nur einer der beiden Schützen?

Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: 1. Schütze trifft; B: 2. Schütze trifft

a) Die Scheibe wird *getroffen*, wenn das Ereignis $A \cup B$ eintritt (*entweder* trifft der 1. Schütze *oder* der 2. Schütze *oder* beide). Dann gilt nach dem *Additionssatz* für beliebige Ereignisse

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B sind bereits bekannt: $P(A) = 0{,}2$ und $P(B) = 0{,}4$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \cap B$ (*beide* Schützen treffen gleichzeitig) erhalten wir aus dem *Multiplikationssatz* für stochastisch unabhängige Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$$

(das Ergebnis des einen Schützen hat *keinen* Einfluss auf das Ergebnis des anderen Schützen). Die Scheibe wird somit mit der folgenden Wahrscheinlichkeit getroffen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}52 \mathrel{\widehat{=}} 52\,\%$$

b) Uns interessiert das folgende Ereignis:

C: Nur *einer* der beiden Schützen trifft

D. h. *entweder* trifft der 1. Schütze und der 2. Schütze trifft nicht (Ereignis $(A \cap \overline{B})$ *oder* umgekehrt der 2. Schütze trifft und der 1. Schütze trifft nicht (Ereignis $(B \cap \overline{A})$[1]). Somit lässt sich das Ereignis C wie folgt beschreiben:

$$C = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur *einer* der beiden Schützen trifft, beträgt dann nach dem *Additionssatz* (die Ereignisse $A \cap \overline{B}$ und $B \cap \overline{A}$ schließen sich gegenseitig aus):

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(B) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44 \mathrel{\widehat{=}} 44\,\%$$

$$\left(P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8; \quad P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6\right)$$

3. Einmaliges Würfeln

Betrachten Sie einmaliges Würfeln eines idealen Würfels und die beiden Ereignisse A (eine 2 wird gewürfelt) und B (eine gerade Zahl wird gewürfelt). Sind die beiden Ereignisse unabhängig voneinander?

Zur Lösung sind die folgenden Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten festzulegen:

$$A \cap B = \{2\}$$

$$W(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$W(A) = \frac{1}{6}$$

$$W(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Weil gilt

$$W(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq W(A)W(B) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

sind die Ereignisse A und B (stochastisch) abhängig voneinander.

4. Münzwurf

Zwei Münzen werden einmal geworfen. Für jede kann entweder Kopf oder Zahl eintreten. Als Ergebnismenge ergibt sich somit Ω = {(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)}. Jedes der 4 Ereignisse ist gleichwahrscheinlich und hat somit die Wahrscheinlichkeit 0,25. Es seien die folgenden Ereignisse definiert:

A: erste Münze zeigt Kopf,
B: zweite Münze zeigt Kopf,
C: beide Münzen zeigen die gleiche Seite.
Bestimmen Sie, ob die Ereignisse paarweise unabhängig voneinander sind und auch, ob alle 3 Ereignisse voneinander unabhängig sind.

Damit gilt

- $A = \{(K,K),(K,Z)\}$ mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $B = \{(K,K),(Z,K)\}$ mit $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $C = \{(K,K),(Z,Z)\}$ mit $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $A \cap B = \{(K,K)\}$ mit $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$
- $A \cap C = \{(K,K)\}$ mit $P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$
- $B \cap C = \{(K,K)\}$ mit $P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$
- $A \cap B \cap C = \{(K,K)\}$ mit $P(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.

Damit sind alle drei Ereignisse paarweise voneinander unabhängig, da

- $[P(A \cap B) =]\frac{1}{4}\left[= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)\right]$
- $[P(A \cap C) =]\frac{1}{4}\left[= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)\right]$
- $[P(B \cap C) =]\frac{1}{4}\left[= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)\right]$

Sie sind aber nicht insgesamt voneinander unabhängig, weil

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

5. Computerladen
Nach dem Studium eröffnen Sie einen Computerhandel und vertreiben PCs, Monitore und Drucker. Von allen verkauften Produkten entfallen 20 % auf die PCs,

30% auf die Monitore und 50% auf die Drucker (die Anteile sind als Wahrscheinlichkeiten interpretierbar). Aus Erfahrung wissen Sie, dass von den verkauften PCs 20 %, von den verkauften Monitoren 10% und den abgesetzten Druckern 15% reklamiert werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein verkauftes Produkt reklamiert wird?

Definition der Ereignisse:

A_1 =" Verkauf eines PCs"

A_2 =" Verkauf eines Monitors"

A_3 =" Verkauf eines **Druckers**"

B ="Verkauftes Gerät wird reklamiert"

Gegeben sind die einfachen Wahrscheinlichkeiten, dass die einzelnen Produkte verkauft werden:

$$P(A_1) = 0{,}2; P(A_2) = 0{,}3; P(A_3) = 0{,}5\,.$$

Zusätzlich sind die Anteile der Reklamationen bei den einzelnen Produkten gegeben. Von den verkauften PCs (B unter der Bedingung, dass A_1 bereits eingetreten ist) beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Reklamation $P(B|A_1) = 0{,}20$. Alle bedingten Wahrscheinlichkeiten lauten:

$$P(B|A_1) = 0{,}20; P(B|A_2) = 0{,}10; P(B|A_3) = 0{,}15\,.$$

Die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit sind erfüllt,

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ [nur die drei Produkte werden vertrieben ($P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$)]
- $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k; j,k = 1,2,3$ (ein Produkt ist nicht gleichzeitig PC und Monitor bzw. PC und Drucker bzw. Monitor und Drucker),

erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}10 \cdot 0{,}3 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 = 0{,}145\ [\hat{=}\ 14{,}5\ \%]. \end{aligned}$$

6. Bogenschütze

Ein Bogenschütze trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,3 ins „Schwarze“ (= Zentrum der Zielscheibe). Bestimmen Sie bei drei abgegebenen Schüssen die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse (Resultate):

a) 3 Treffer,
b) 2 Treffer,
c) mindestens 2 Treffer.
d) Wie oft muss er mindestens schiessen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% wenigstens einmal zu treffen?

Wir betrachten die Ereignisse

T: Treffer und $\overline{T}$: Fehlschuss

mit den Wahrscheinlichkeiten $P(T) = p = 0{,}3$ und $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Das Ergebnis eines Versuches (Treffer *oder* Fehlschuss) ist dabei *unabhängig* vom Ergebnis des vorangegangenen Schussversuches (*stochastisch unabhängige* Ereignisse).

a) Der *Multiplikationssatz* (→ FS: Kap. XV.3.2) liefert für das Ereignis TTT (= 3 Treffer):

$$P(3\ \text{Treffer}) = P(TTT) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}3^3 = 0{,}027 \mathrel{\widehat{=}} 2{,}7\,\%$$

b) Drei mögliche Ereignisse (*Fehlschuss* beim 1. bzw. 2. bzw. 3. Versuch): $\overline{T}TT$, $T\overline{T}T$, $TT\overline{T}$.

$$P(2\ \text{Treffer}) = P(\overline{T}TT) + P(T\overline{T}T) + P(TT\overline{T}) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 3\,(0{,}7 \cdot 0{,}3^2) = 0{,}189 \mathrel{\widehat{=}} 18{,}9\,\%$$

c) $P(\text{mindestens 2 Treffer}) = P(2\ \text{Treffer}) + P(3\ \text{Treffer}) = 0{,}189 + 0{,}027 = 0{,}216 \mathrel{\widehat{=}} 21{,}6\,\%$

(unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus a) und b))

d) Der Bogenschütze muss *mindestens* n Schüsse abgeben, um die Scheibe *wenigstens einmal* mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % zu treffen (n ist dabei zunächst noch unbekannt). Mit $p(i)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze die Scheibe *erstmals* beim i-ten Schuss trifft ($i = 1, 2, \ldots, n$; alle vorangegangenen Schüsse sind *Fehlschüsse*). Dabei gilt:

$$p(1) = 0{,}3; \quad p(2) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}3 \cdot 0{,}7^1; \quad p(3) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}3 \cdot 0{,}7^2;$$

$$\ldots; \quad p(n) = \underbrace{0{,}7 \cdot 0{,}7 \ldots 0{,}7}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot 0{,}3 = 0{,}3 \cdot 0{,}7^{n-1}$$

Die ganzzahlige Unbekannte n genügt dann der folgenden Bedingung:

$$p(1) + p(2) + p(3) + \ldots + p(n) = 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^1 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 + \ldots + 0{,}3 \cdot 0{,}7^{n-1} =$$

$$= 0{,}3\,\underbrace{(1 + 0{,}7^1 + 0{,}7^2 + \ldots + 0{,}7^{n-1})}_{\text{geometrische Reihe } (\rightarrow \text{ FS: Kap. I.3.3})} = 0{,}3 \cdot \frac{0{,}7^n - 1}{0{,}7 - 1} = \frac{0{,}3\,(0{,}7^n - 1)}{-\,0{,}3} = 1 - 0{,}7^n = 0{,}9 \quad \Rightarrow$$

$$0{,}7^n = 0{,}1 \mid \ln \quad \Rightarrow \quad \ln 0{,}7^n = \ln 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}7 = \ln 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}7} = 6{,}4557$$

Da n *ganzzahlig* sein muss (n = Anzahl der abgegebenen Schüsse), lautet die Lösung $n = 7$. D. h. der Schütze muss *mindestens* 7 Schüsse abgeben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % *wenigstens einmal* die Scheibe zu treffen.

7. Kugeln in Urne

In einer Urne befinden sich 4 weisse (W) und 6 schwarze (S) Kugeln. Eine Kugel wird zufällig entnommen und dafür eine der anderen Farbe wieder hineingelegt. Dann wird der Urne eine weitere Kugel entnommen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die zuletzt gezogene Kugel weiß ist,
b) man bei beiden Ziehungen jeweils Kugeln gleicher Farbe erhält,
c) beide Kugeln weiss sind, wenn bekannt ist, dass die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

Die Urne enthält *stets* 10 Kugeln, nach der 1. Ziehung somit *entweder* 3 weiße und 7 schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *weiße* Kugel gezogen wurde) *oder* je 5 weiße und schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *schwarze* Kugel gezogen wurde).

Aus dem Ereignisbaum in Bild A-22 folgt:

a) $P(W) = P(WW) + P(SW) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

b) $P(WW \cup SS) = P(WW) + P(SS) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

c) $P(WW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$

$$P = \frac{P(WW)}{P(WW \cup SS)} = \frac{12/100}{42/100} = \frac{2}{7}$$

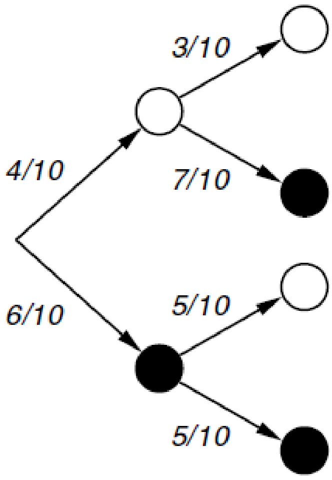


Bild A-22

8. Rohrleitungssystem

Das Rohrleitungssystem einer Erdölraffinerie besitze 500 Flanschverbindungen, von denen jede Verbindung aus zwei Einzelflanschen vom Typ F1 und F2 sowie einem Dichtungsring zwischen ihnen besteht. Es ist bekannt, dass 1% der Flansche vom Typ F1 und 1,5% derjenigen vom Typ F2 ungenügende Qualität haben. Ferner ist bei 2% der Dichtringe mangelnde Dichtungseigenschaft zu erwarten.

Wie viele absolut einwandfreie (d.h. ohne jeglichen Mangel) Flanschverbindungen im Rohrleitungssystem können wir erwarten?

Damit eine Flanschverbindung als absolut einwandfrei (Ereignis A) bezeichnet werden kann, müssen sowohl Einzelflansche als auch der Dichtungsring dieser Verbindung mangelfrei sein.

A_1 : Ereignis, dass der Flansch vom Typ F1 einwandfrei ist.

A_2 : Ereignis, dass der Flansch vom Typ F2 einwandfrei ist.

A_3 : Ereignis, dass der Dichtungsring einwandfrei ist.

Das Ereignis A, dass eine Flanschverbindung komplett einwandfrei ist, entspricht dem Durchschnitt aller drei Ereignisse:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A ist nach (9.26):

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Wahrscheinlichkeit für einwandfreien Flansch F1:

$$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Wahrscheinlichkeit für einwandfreien Flansch F2:

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$$

Wahrscheinlichkeit für einwandfreien Dichtungsring:

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

Wahrscheinlichkeit einer einwandfreien Flanschverbindung beträgt somit:

$$P(A) = 0{,}99 \cdot 0{,}985 \cdot 0{,}98 = 0{,}95565 \approx 95{,}6\%$$

Wir können also insgesamt $N = 0{,}95565 \cdot 500 = 477$ einwandfreie Flanschverbindungen erwarten.

9. Kondensatoren

Eine Warenlieferung besteht aus 250 Kondensatoren, die auf 3 Maschinen vom gleichen Typ hergestellt wurden. Dabei gilt:

Maschine	A	B	C
Produzierte Stückzahl	80	50	120
Davon Ausschuss	2	1	3

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) ein der Lieferung entnommener Kondensator defekt ist,
b) ein zufällig entnommener defekter Kondensator auf der Maschine C hergestellt wurde?

Die Verwendung eines Ereignisbaums ist hilfreich.

Anteile der 3 Maschinen A, B und C an der Gesamtproduktion (250 Kondensatoren):

A: 80 von 250 $\Rightarrow$ $P(A) = 80/250 = 0{,}32$

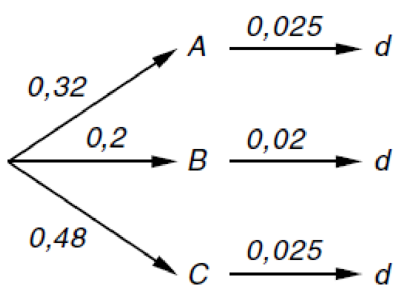
B: 50 von 250 $\Rightarrow$ $P(B) = 50/250 = 0{,}2$

C: 120 von 250 $\Rightarrow$ $P(C) = 120/250 = 0{,}48$

Wahrscheinlichkeiten für die Produktion eines *defekten* Kondensators (d) auf den Maschinen:

$P_A(d) = 2/80 = 0{,}025$; $P_B(d) = 1/50 = 0{,}02$; $P_C(d) = 3/120 = 0{,}025$

Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-24 folgt:



a) $P = 0{,}32 \cdot 0{,}025 + 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}48 \cdot 0{,}025 =$
$= 0{,}024$

b) $P = \dfrac{0{,}48 \cdot 0{,}025}{0{,}024} = 0{,}5$