

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, partielle Integration und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partielle Integration anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

1. Aussagen über partielle Integration

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode der partiellen Integration basiert auf der Produktregel der Differentialrechnung.	X	
b) Mit Hilfe der partiellen Integration kann jedes Produkt von 2 Funktionen integriert werden.		X
c) Um ein Produkt von 2 Funktionen mit partieller Integration integrieren zu können, muss man mindestens einen der Faktoren allein integrieren können.	X	
d) Mit Hilfe der partiellen Integration kann das Integral einer beliebigen differentierbaren Funktion $f(x)$ auf die Berechnung des Integrals von $x \cdot f'(x)$ zurückgeführt werden und umgekehrt.	X	

2. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int x e^x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int x \sin x dx$

d) $\int x \cos x dx$

e) $\int x^2 \sin x dx$

f) $\int x^2 \cos x dx$

g) $\int (\sin x)^2 dx$

h) $\int (\cos x)^2 dx$

i) $\int (\sinh x)^2 dx$

j) $\int (\cosh x)^2 dx$

a)

$$\underline{\underline{F(x) = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{e^x} dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c.}}$$

b)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{e^x} dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c \\ &= \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2) e^x + c}}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)} dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c = \underline{\underline{\sin(x) - x \cos(x) + c}}.\end{aligned}$$

d)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)} dx = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) dx = \underline{\underline{x \sin(x) + \cos(x) + c}}.$$

e)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)} dx = x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c \\ &= \underline{\underline{2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x) + c}}.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)} dx = x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x) dx = x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx \\ &= x^2 \sin(x) - 2 \sin(x) + 2x \cos(x) + c = \underline{\underline{(x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c}}.\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \sin^2(x) dx = \int \overset{\downarrow}{\sin(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)} dx \\ &= \sin(x) \cdot (-\cos(x)) - \int \cos(x) \cdot (-\cos(x)) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + x + b - F(x).\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & -\sin(x) \cos(x) + x + b - F(x) & | + F(x) \\ 2 \cdot F(x) & = & -\sin(x) \cos(x) + x + b & | : 2. \end{array}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{-\sin(x) \cos(x) + x + b}{2} = \frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2} + c.}}$$

h)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos^2(x) \, dx = \int \overset{\downarrow}{\cos(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)} \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) - \int (-\sin(x)) \cdot \sin(x) \, dx = \cos(x) \sin(x) + \int \sin^2(x) \, dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) \, dx = \cos(x) \sin(x) + \int 1 \, dx - \int \cos^2(x) \, dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + x + b - F(x). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \cos(x) \sin(x) + x + b - F(x) & | + F(x) \\ 2 \cdot F(x) & = & \cos(x) \sin(x) + x + b & | : 2. \end{array}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{\cos(x) \sin(x) + x + b}{2} = \frac{x + \cos(x) \sin(x)}{2} + c.}}$$

i)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sinh^2(x) \, dx = \int \overset{\downarrow}{\sinh(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\sinh(x)} \, dx \\ &= \sinh(x) \cdot \cosh(x) - \int \cosh(x) \cdot \cosh(x) \, dx = \sinh(x) \cosh(x) - \int \cosh^2(x) \, dx \\ &= \sinh(x) \cosh(x) - \int (1 + \sinh^2(x)) \, dx = \sinh(x) \cosh(x) - \int 1 \, dx - \int \sinh^2(x) \, dx \\ &= \sinh(x) \cosh(x) - x + b - F(x). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} F(x) = \sinh(x) \cosh(x) - x + b - F(x) & | & + F(x) \\ 2 \cdot F(x) = \sinh(x) \cosh(x) - x + b & | & : 2. \end{array}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{\sinh(x) \cosh(x) - x + b}{2} = \frac{\sinh(x) \cosh(x) - x}{2} + c.}}$$

j)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cosh^2(x) dx = \int \cosh(x) \cdot \cosh(x) dx \\ &= \cosh(x) \cdot \sinh(x) - \int \sinh(x) \cdot \sinh(x) dx = \cosh(x) \sinh(x) - \int \sinh^2(x) dx \\ &= \cosh(x) \sinh(x) - \int (\cosh^2(x) - 1) dx = \cosh(x) \sinh(x) - \int \cosh^2(x) dx + \int 1 dx \\ &= \cosh(x) \sinh(x) - F(x) + x + b. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} F(x) = \cosh(x) \sinh(x) - F(x) + x + b & | & + F(x) \\ 2 \cdot F(x) = \cosh(x) \sinh(x) + x + b & & \end{array}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{\cosh(x) \sinh(x) + x + b}{2} = \frac{\cosh(x) \sinh(x) + x}{2} + c.}}$$

3. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$

c) $\int_1^2 x \ln x dx$

a)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx = \int_0^3 x \cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}^{\uparrow} dx = \left[x \cdot \sqrt{x+1} \right]_0^3 - \int_0^3 \sqrt{x+1} dx \\ &= \left[x \cdot \sqrt{x+1} \right]_0^3 - \frac{2}{3} \cdot \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\ &= 3 \cdot \sqrt{3+1} - 0 \cdot \sqrt{0+1} - \frac{2}{3} \cdot (3+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot (0+1)^{\frac{3}{2}} = 6 - 0 - \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{18}{3} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I}} &= \int_1^2 x \sqrt{x-1} \, dx = \int_1^2 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\sqrt{x-1}} \, dx = \left[x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left[x(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left[(x-1)^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot (2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot (1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot (2-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15} \cdot (1-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} - 0 - \frac{4}{15} + 0 \\
 &= \frac{20}{15} - \frac{4}{15} = \underline{\underline{\frac{16}{15}}}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I}} &= \int_1^2 \overset{\downarrow}{\ln(x)} \cdot \overset{\uparrow}{x} \, dx = \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln(1) - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \\
 &= 2 \cdot \ln(2) - 0 - 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2 \ln(2) - \frac{3}{4}}}.
 \end{aligned}$$

4. Stammfunktionen bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Methode.

a) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

b) $\int e^{at} \sin(\omega t) dt$

c) $\int r^3 (\cos r^2) dr$

d) $\int \frac{x}{(\cos x)^2} dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

f) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

a)

mittels Substitution lösen

$$u(x) := x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x.$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x \, dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x} = \frac{1}{2x} du$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{x}{1+x^4} \, dx = \int \frac{x}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2x} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} \, du = \frac{1}{2} \cdot \arctan(u) + c \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \arctan(x^2) + c}}.
 \end{aligned}$$

b)

mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} F(t) &= \int e^{\uparrow at} \cdot \sin^{\downarrow}(\omega t) dt = \frac{1}{a} \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a} \int e^{\uparrow at} \cdot \cos^{\downarrow}(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot e^{at} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\omega}{a} \int e^{at} \cdot (-1) \cdot \sin(\omega t) dt \right) \\ &= \frac{1}{a} \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot e^{at} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\omega^2}{a^2} \int e^{at} \cdot \sin(\omega t) dt \\ &= e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) - \frac{\omega^2}{a^2} \cdot F(t). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} F(t) &= e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) - \frac{\omega^2}{a^2} \cdot F(t) \quad \Bigg| + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot F(t) \\ F(t) + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot F(t) &= e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) \\ \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) \cdot F(t) &= e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) \quad \Bigg| : \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(t)}} &= \frac{e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right)} + c = \frac{e^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) \cdot a^2}{\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) \cdot a^2} + c \\ &= \frac{e^{at} \cdot (a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t))}{\underline{\underline{a^2 + \omega^2}}} + c. \end{aligned}$$

c)

mittels Substitution

$$u(r) := r^2 \Rightarrow u'(r) = 2r.$$

$$\frac{du}{dr} = 2r \Leftrightarrow du = 2r dr \Leftrightarrow dr = \frac{du}{2r} = \frac{1}{2r} du$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(r)}} &= \int r^3 \cos(r^2) dr = \int u \cdot r \cdot \cos(u) \cdot \frac{1}{2r} du = \frac{1}{2} \int \overset{\downarrow}{u} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(u)} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int 1 \cdot \sin(u) du \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int \sin(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - (-1) \cdot \cos(u) + \tilde{c} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) + \cos(u) \right) + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \cdot \sin(r^2) + \cos(r^2) \right) + c.}} \end{aligned}$$

d)

Wir zerlegen den Integrand $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren u und v' :

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} = u v'$$

Begründung: Diese Zerlegung hat Aussicht auf Erfolg, da $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bekanntlich die *Ableitung* von $\tan x$ ist. Mit der gewählten Zerlegung

$$u = x, \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und damit} \quad u' = 1, \quad v = \tan x$$

führt die *partielle Integration* zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int u v' dx = u v - \int u' v dx = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x dx = \\ &= x \cdot \tan x - \underbrace{\int \tan x dx}_{I_1} = x \cdot \tan x - I_1 \end{aligned}$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 ist zwar *kein* Grundintegral, lässt sich aber durch eine *Substitution* leicht lösen, wenn man die trigonometrische Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ beachtet:

$$I_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Im Zähler steht – vom Vorzeichen abgesehen – die *Ableitung* des Nenners, das Integral I_1 ist daher durch die *Substitution* $u = \cos x$ wie folgt lösbar

$$u = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x, \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$I_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = - \int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$$

Für das vorgegebene Integral I erhalten wir damit die Lösung

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \tan x - I_1 = x \cdot \tan x - (-\ln |\cos x| + C) = x \cdot \tan x + \ln |\cos x| - C =$$

$$= x \cdot \tan x + \ln |\cos x| + C^* \quad (C^* = -C)$$

Wir „verifizieren“ das Ergebnis, indem wir zeigen, dass die 1. Ableitung des unbestimmten Integrals zum Integranden führt. Dabei verwenden wir in der angedeuteten Weise die *Produktregel* (1. Summand) und die *Kettenregel* (2. Summand):

$$I = \underbrace{x \cdot \tan x}_u \underbrace{+ \ln |\cos x|}_v + \underbrace{C^*}_t = uv + \ln |t| + C^*$$

$$I' = u'v + v'u + \frac{1}{t} \cdot t' = 1 \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{x}{\cos^2 x}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin x / \cos x = \tan x$)

e)

Die Substitution $u = 1 + e^x$ führt zu einer Vereinfachung im Nenner des Integranden. Somit gilt (versuchsweise):

$$u = 1 + e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{du}{e^x}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^x \cdot \boxed{e^x}}{u} \cdot \frac{du}{\boxed{e^x}} = \int \frac{e^x}{u} du$$

Um die alte Variable x vollständig aus dem Integral zu entfernen, lösen wir die Substitutionsgleichung $u = 1 + e^x$ nach e^x auf und setzen den gefundenen Ausdruck $e^x = u - 1$ ein. Das Integral I lässt sich jetzt leicht lösen:

$$I = \int \frac{e^x}{u} du = \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln |u| + C$$

Nach der Rücksubstitution $u = 1 + e^x$ erhält man die folgende Lösung:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = (1 + e^x) - \ln |1 + e^x| + C = e^x - \ln (1 + e^x) + C^* \quad (C^* = 1 + C)$$

f)

Mit der naheliegenden Substitution $u = \ln x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, $dx = x du$ erreichen wir unser Ziel:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int \frac{u^3}{\boxed{x}} \cdot \boxed{x} du = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C$$

Die Lösung lautet somit nach vollzogener Rücksubstitution $u = \ln x$ wie folgt:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

5. Aufleiten mit Python/Sympy

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale aus Aufgabe 4 mit Python/Sympy.

a)

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
sp.init_printing();
# Symbole:
x=sp.symbols('x');
```



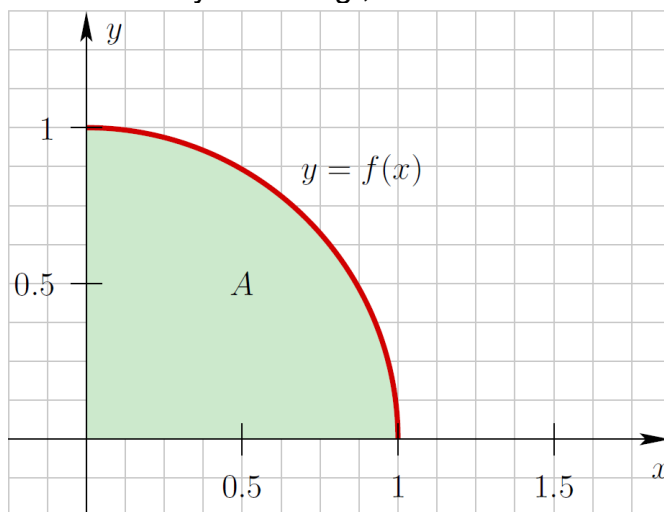
```
# Parameter:
f=x/(1+x**4);
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(f,x));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(F);
b), c), e), f)
analog zu a), jedoch Funktion f und nach Bedarf die Symbole anpassen
→ die Stammfunktion bei d) am besten mit WolframAlpha überprüfen – Lösung in
Python nicht korrekt
```

6. Fläche des Einheitskreises

Berechnen Sie die Fläche des Einheitskreises durch Integration, indem Sie einen geeigneten Teil des Kreisbogens als Graph einer Funktion auffassen und diesen integrieren.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = \sin(u)$.

Wir wählen einen Viertelkreis, der im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems liegt, um die Fläche des Einheitskreises zu bestimmen.



Für die Punkte auf dem Einheitskreis gilt:

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + f^2(x) \quad \left| -x^2 \right.$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 = f^2(x) \quad \left| \sqrt{\dots} \right.$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Die Fläche des Einheitskreises entspricht 4 mal der grün markierten Fläche in der obigen Abbildung:

$$A_K = 4 \cdot A = 4 \int_0^1 f(x) \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Um das Integral zu lösen, wählen wir die Methode der Substitution.

$$x := \sin(u) \quad \left| (\dots)' \right.$$

$$1 = \cos(u) \cdot u' \quad \left| : \cos(u) \right.$$

$$u' = \frac{1}{\cos(u)}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos(u)} \Leftrightarrow du = \frac{1}{\cos(u)} dx \Leftrightarrow dx = \cos(u) du$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A_K}} &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-\sin^2(u)} \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{\cos^2(u)} \, dx \\ &= 4 \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} |\cos(u)| \cdot \cos(u) \, du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \cdot \cos(u) \, du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \, du \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(u) \cdot \cos(u) + u \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(\sin(\pi/2) \cdot \cos(\pi/2) + \frac{\pi}{2} - \sin(0) \cdot \cos(0) - 0 \right) \\ &= 2 \cdot \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 0 \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}. \end{aligned}$$