

Übungsblatt DGL 3

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Methode der Trennung der Variablen und können diese sowohl zur Lösung von separierbaren DGL anwenden als zur Lösung von AWP, die eine separierbare DGL enthalten.

1. Aussagen über separierbare DGL

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede analytisch isolierbare autonome DGL 1. Ordnung ist separierbar.	X	
b) Jede elementar integrierbare DGL ist separierbar.	X	
c) Jede separierbare DGL hat genau eine Lösung.		X
d) Die Methode der Trennung der Variablen beruht auf der Substitutionsregel, die in der Integralrechnung ihre Anwendung findet.	X	
e) Die Methode der Trennung der Variablen kann nur auf lineare DGL angewandt werden.		X
f) Um ein AWP mit separierbarer DGL zu lösen, muss zuerst die allgemeine Lösung der DGL bestimmt werden.		X

2. Separierbare DGL

a) $y' = 2y$	b) $y' = xy$	c) $y' = y^2$
d) $y' = x^2y^3$	e) $y' = 1 + y^2$	f) $y' = 3x^2y + x^2$
g) $x^2y' = y(x-y)$	h) $xyy' = 4x^2 + y^2$	

a)

Statische Lösungen: $y_s(x) = 0$.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 & y' = 2 \cdot y && | : y \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{y} \cdot y' = 2 && \left| \int \dots dx \right. \\
 \Leftrightarrow & \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} dy = \int 2 dx = 2 \int 1 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \ln(|y|) = 2x + c && | \text{e}^{\dots} \\
 &\Leftrightarrow |y| = e^{2x+c} = e^{2x} \cdot e^c = C_1 \cdot e^{2x} \\
 &\Leftrightarrow y(x) = \pm C_1 \cdot e^{2x} = C_2 \cdot e^{2x}
 \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathbb{R}^+$ und $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{2x} \text{ mit } C \in \mathbb{R}}}.$$

b)

Statische Lösungen: $y_s(x) = 0$.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 &y' = x \cdot y && | : y \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x && | \int \dots dx \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} dy = \int x dx \\
 &\Leftrightarrow \ln(|y|) = \frac{1}{2} x^2 + c && | \text{e}^{\dots} \\
 &\Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\
 &\Leftrightarrow y(x) = \pm C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = C_2 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
 \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathbb{R}^+$ und $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \text{ mit } C \in \mathbb{R}}}.$$

c)

Statische Lösungen: $y_s(x) = 0$.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 &y' = 1 \cdot y^2 && | : y^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot y' = 1 && | \int \dots dx \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + c && | - \text{rez}(\dots) \\
 &\Leftrightarrow y(x) = -\frac{1}{x+c} = -\frac{1}{x-C} = \frac{1}{C-x}
 \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{C\}$ mit $c, C \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$\underline{\underline{y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{C\} \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{cases}}}$$

d)

Statische Lösungen: $y_s(x) = 0$.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 & y' = x^2 \cdot y^3 && | : y^3 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{y^3} \cdot y' = x^2 && \left| \int \dots dx \right. \\
 \Leftrightarrow & \int \frac{1}{y^3} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y^3} dy = \int x^2 dx \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + c && | \cdot (-2) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 - 2c = C - \frac{2}{3}x^3 && | \text{ rez}(\dots) \\
 \Leftrightarrow & y^2 = \frac{1}{C - \frac{2}{3}x^3} && | \pm \sqrt{\dots} \\
 \Leftrightarrow & y(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{C - \frac{2}{3}x^3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}} && c, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Reelle Lösungen existieren genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 & C - \frac{2}{3}x^3 > 0 && | + \frac{2}{3}x^3 \\
 \Leftrightarrow & C > \frac{2}{3}x^3 && | \cdot \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3}{2}C > x^3 && | \sqrt[3]{\dots} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt[3]{\frac{3}{2}C} > x.
 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}} & \text{für } x \in]-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2}C}[\end{cases} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

e)

Statische Lösungen gibt es nicht.

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 & y' = 1 \cdot (1 + y^2) && | : (1 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' = 1 && \left| \int \dots dx \right. \\
 \Leftrightarrow & \int \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int 1 dx \\
 \Leftrightarrow & \arctan(y) = x + c && | \tan(\dots) \\
 \Leftrightarrow & y(x) = \tan(x + c) = \tan(x - C) && c, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Reelle Lösungen existieren genau dann, wenn gilt

$$(x - C) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ C \pm \frac{\pi}{2}, C \pm \frac{3\pi}{2}, C \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$

Es ergeben sich die folgenden allgemeinen Lösungen:

$$y(x) = \tan(x - C) \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ C \pm \frac{\pi}{2}, C \pm \frac{3\pi}{2}, C \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

f)

Statische Lösungen:

$$0 = x^2 \cdot (3y_s + 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3y_s + 1 \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow -1 = 3y_s \quad | : 3.$$

Daraus erhalten wir genau eine *statische Lösung*, nämlich

$$y_s(x) = -\frac{1}{3}.$$

Nicht statische Lösungen mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmen:

$$y' = x^2 \cdot (3y + 1) \quad | : (3y + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3y + 1} \cdot y' = x^2 \quad | \int \dots dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{3y + 1} \cdot y' dx = \int \frac{1}{3y + 1} dy = \int x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln(|3y + 1|) = \frac{1}{3} x^3 + c \quad | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(|3y + 1|) = x^3 + 3c \quad | e^{...}$$

$$\Leftrightarrow |3y + 1| = e^{x^3 + 3c} = e^{x^3} \cdot e^{3c}$$

$$\Leftrightarrow |3y + 1| = C_1 \cdot e^{x^3}$$

$$\Leftrightarrow 3y + 1 = \pm C_1 \cdot e^{x^3} = C_2 \cdot e^{x^3} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow 3y = C_2 \cdot e^{x^3} - 1 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{C_2}{3} \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3} = C_3 \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathbb{R}^+$ und $C_2, C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allgemeine Lösung durch Kombination der statischen und nicht statischen Lösung:

$$y(x) = C \cdot e^{x^3} - \frac{1}{3} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

g)

$$x^2 y' = y(x - y) = xy - y^2 \Rightarrow y' = \frac{xy - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Sie lässt sich also durch die folgende *Substitution* in eine durch „*Trennung der Variablen*“ lösbarer Dgl überführen:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \Rightarrow y' = 1 \cdot u + u' \cdot x = u + xu' \quad (\text{Ableitung mit der Produktregel})$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow u + xu' = u - u^2 \Rightarrow xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = -u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}$$

Integration beider Seiten führt zur Lösung für die Hilfsvariable u :

$$\int \frac{du}{u^2} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int u^{-2} du = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\ln|x| + C \Big| \cdot (-1) \Rightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| - C \Rightarrow u = \frac{1}{\ln|x| - C} \quad (\text{nach Kehrwertbildung})$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *Lösung*:

$$y = xu = x \cdot \frac{1}{\ln|x| - C} = \frac{x}{\ln|x| - C} \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

h)

$$y' = \frac{4x^2 + y^2}{xy} = \frac{4x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} = 4 \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) = 4 \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right)$$

darstellen (x/y ist der *Kehrwert* von y/x). Die *Substitution*

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \Rightarrow y' = 1 \cdot u + u' \cdot x = u + xu' \quad (\text{Ableitung mit der Produktregel})$$

führt dann zu einer Dgl, die sich durch „*Trennung der Variablen*“ lösen lässt:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = 4u^{-1} + u = \frac{4}{u} + u \Rightarrow xu' = \frac{4}{u} \Rightarrow \\ xu' &= x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4}{u} \Rightarrow u du = \frac{4}{x} dx \Rightarrow \int u du = 4 \cdot \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \\ \frac{1}{2}u^2 &= 4(\ln|x| + \ln|C|) \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = 4 \cdot \ln|Cx| \Big| \cdot 2 \Rightarrow u^2 = 8 \cdot \ln|Cx| \Rightarrow \\ u &= \pm \sqrt{8 \cdot \ln|Cx|} = \pm 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|} \quad (\text{Rechenregel: R1}) \end{aligned}$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die *allgemeine* Lösung der Dgl:

$$y = xu = \pm 2x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$$

3. AWP mit separierbarer DGL

Lösen Sie mit Hilfe der Trennung der Variablen das folgende AWP.

- a) DGL: $y' - xy^2 = x$; Anfangsbedingung: $y(0) = 1$.
- b) DGL: $y' - 2\sqrt{y} = 0$; Anfangsbedingung: $y(2) = 9$.
- c) DGL: $y' = (1 + x + y)^2$; Anfangsbedingung: $y(0) = 2$.

a)

Durch Umformen erhält man die analytisch isolierte Form

$$\begin{aligned} y' - xy^2 &= x & | + xy^2 \\ \Leftrightarrow y' &= x + xy^2 = x \cdot (1 + y^2). \end{aligned}$$

Statische Lösungen gibt es keine.

Nicht statische Lösungen durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} y' &= x \cdot (1 + y^2) & | : (1 + y^2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' &= x & | \int_0^x \dots dx \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' dx &= \int_0^x x dx \\ \Leftrightarrow \int_1^y \frac{1}{1 + y^2} dy &= \int_0^x x dx \\ \Leftrightarrow \left[\arctan(y) \right]_1^y &= \arctan(y) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 0) & | + \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \arctan(y) &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4} & | \tan(\dots) \\ \Rightarrow y(x) &= \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4}\right). & \blacksquare \end{aligned}$$

Die letzte Umformung stellt keine Äquivalenzumformung dar. Sie ist jedoch umkehrbar, wenn gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4} &< \frac{\pi}{2} & | - \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} x^2 &< \frac{\pi}{4} & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &< \frac{\pi}{2} & | \pm \sqrt{\dots} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{2}} &< x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Aus der nicht statischen Lösung (*) erhält man die Lösung des AWP:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right].$$

b)

Durch Umformen erhält man die analytisch isolierte Form

$$\begin{aligned} y' - 2\sqrt{y} &= 0 & | + 2\sqrt{y} \\ \Leftrightarrow y' &= 2\sqrt{y} = 1 \cdot 2\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Statische Lösungen: $y_s(x) = 0$.

Nicht statische Lösungen durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
& y' = 1 \cdot 2\sqrt{y} && | : (2\sqrt{y}) \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 1 && | \int_2^x \dots dx \\
\Rightarrow & \int_2^x \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' dx = \int_2^x 1 dx \\
\Leftrightarrow & \int_9^y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_2^x 1 dx \\
\Leftrightarrow & [\sqrt{y}] \Big|_9^y = \sqrt{y} - \sqrt{9} = [x] \Big|_2^x = x - 2 && | + 3 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{y} = x + 1 && | (\dots)^2 \\
\Rightarrow & y(x) = (x + 1)^2. && | \blacksquare
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung stellt keine Äquivalenzumformung dar. Sie ist jedoch umkehrbar, wenn gilt

$$\begin{aligned}
& x + 1 \geq 0 && | - 1 \\
\Leftrightarrow & x \geq -1.
\end{aligned}$$

Aus der nicht statischen Lösung (*) erhält man die Lösung des AWP:

$$\underline{\underline{y(x) = (x + 1)^2 \text{ für } x \in [-1, \infty[}}$$

c)

$$\begin{aligned}
u &= 1 + x + y, \quad u' = 0 + 1 + y' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow \\
y' &= (1 + x + y)^2 \Rightarrow u' - 1 = u^2 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{du}{1 + u^2} = dx
\end{aligned}$$

Nach der bereits vorgenommenen *Trennung der Variablen* werden beide Seiten *integriert*:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int 1 dx \Rightarrow \arctan u = x + C \Rightarrow u = \tan(x + C)$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *allgemeine Lösung*:

$$u = 1 + x + y = \tan(x + C) \Rightarrow y = \tan(x + C) - x - 1$$

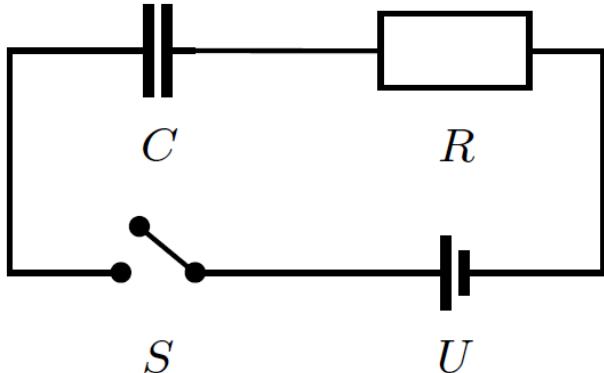
Aus dem *Anfangswert* $y(0) = 2$ bestimmen wir die *spezielle Lösung*:

$$y(0) = 2 \Rightarrow \tan C - 1 = 2 \Rightarrow \tan C = 3 \Rightarrow C = \arctan 3 = 1,2490 \quad (\text{Bogenmaß !})$$

Lösung: $y = \tan(x + 1,2490) - x - 1$

4. RC-Schaltkreis mit Gleichspannungsquelle

Gegeben ist der unten abgebildete RC-Schaltkreis mit Widerstand $R = 4 \Omega$, einer zu Beginn vollständig entladenen Kapazität $C = 15 \text{ mF}$ und einer Gleichspannungsquelle mit $U = 12 \text{ V}$.



- Stellen Sie die DGL und Anfangsbedingung (also das AWP) für die Spannung $U_C(t)$ auf, die an der Kapazität C anliegt, und zwar ab dem Zeitpunkt, wenn der Schalter S geschlossen wird.
- Klassifizieren Sie die DGL, bestimmen Sie die statischen Lösungen und plotten Sie das Richtungsvektorfeld mit Python/Numpy. Beurteilen Sie die Stabilität der statischen Lösungen.
- Bestimmen Sie die Lösung des AWP.

a)

Für die Spannung $U_C(t)$, die an der Kapazität anliegt, die Ladung $Q(t)$, die in der Kapazität zur Zeit t gespeichert ist und den Strom $I(t)$, der im Schaltkreis vorliegt, gilt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Der Schalter S werde zum Zeitpunkt t_0 geschlossen. Solange der Schalter geschlossen ist, kann die Maschenregel nach Kirchhoff angewandt werden:

$$U_R + U_C = U$$

$$R \cdot I + U_C = U$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = U$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} = U - U_C$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot (U - U_C)$$

es gilt außerdem: $U_C(t_0) = 0$, da die Kapazität C zu Beginn entladen ist

es liegt folgendes AWP vor:

$$\text{DGL: } \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot (U - U_C)$$

Anfangsbedingung: $U_C(t_0) = 0$

b)

Die DGL ist 1. Ordnung, analytisch isolierbar, autonom, linear inhomogen mit konstanten Koeffizienten und separierbar. Für die statischen Lösungen muss gelten:

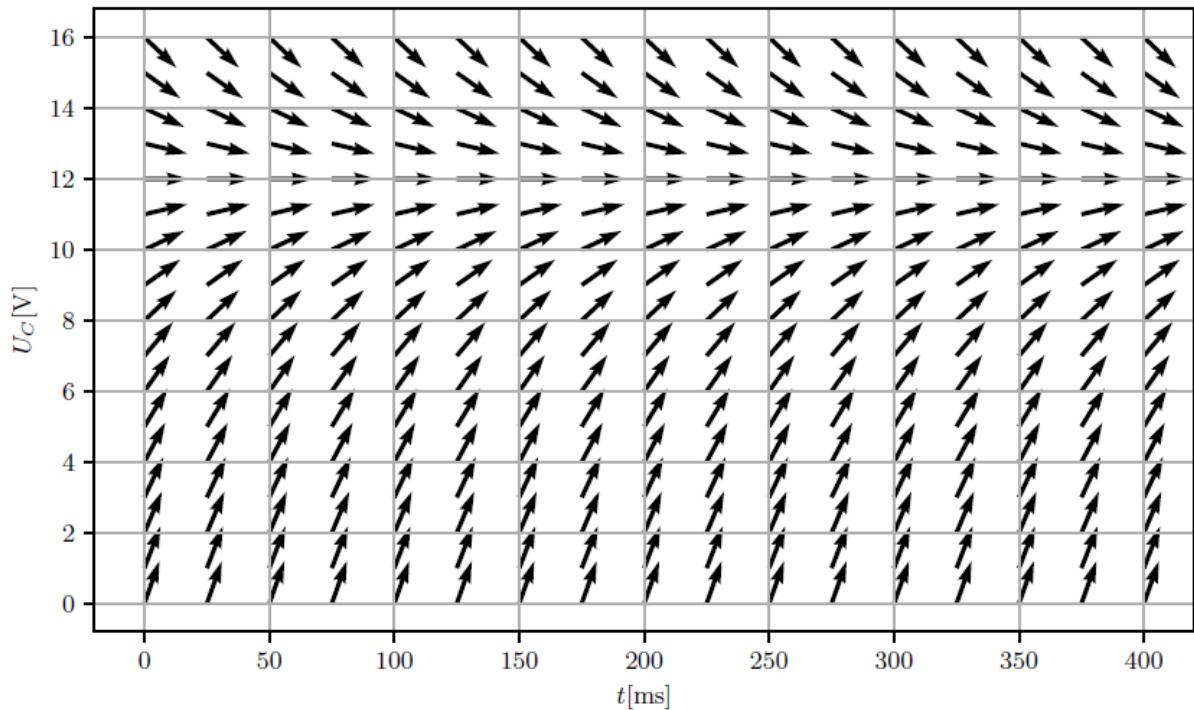
$$0 = -\frac{1}{RC} \cdot U_C + \frac{1}{RC} \cdot U = -\frac{1}{RC} \cdot (U_C - U).$$

Es ergibt sich somit als statische Lösung: $U = 12 \text{ V}$.

Python Code:

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
R=4.00; C=15.0e-3; U=12.0;
t_a=0; t_b=0.4; U_a=0; U_b=16.0;
N_t=17; N_U=17; sc_t=1e3; sc=2.5e4; aw=0.004; fig=1;
# Funktionen:
def f(t,U_C): s=(U-U_C)/(R*C); return s;
def v(t,U_C):
    v_t=0*t+1;
    v_U_C=f(t,U_C);
    return v_t,v_U_C;
# Daten:
t_data=np.linspace(t_a,t_b,N_t);
U_C_data=np.linspace(U_a,U_b,N_U);
[t_grid,U_C_grid]=np.meshgrid(t_data,U_C_data);
[v_t_grid,v_U_C_grid]=v(t_grid,U_C_grid);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.quiver(t_grid*sc_t,U_C_grid,v_t_grid*sc_t,v_U_C_grid,
           angles='xy',scale=sc,width=aw);
pl.xlabel('$t[\mathrm{ms}]$'); pl.ylabel('$U_C[\mathrm{V}]$');
pl.grid('on');
```

Richtungsvektorfeld:



Die ermittelte statische Lösung ist folglich ein globaler Attraktor und stabil.
c)

Die statische Lösung haben wir schon ermittelt: $U = 12 \text{ V}$.

Nicht statische Lösungen mittels Trennung der Variablen:

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{-1}{RC} \cdot (U_C - U)$$

$$\frac{1}{U_C - U} \cdot \frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC}$$

$$\int_0^t \frac{1}{U_C - U} dU_C = - \int_{t_0}^t \frac{1}{RC} dt$$

$$\ln \left(\frac{U_C - U}{-U} \right) = -\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)$$

$$\frac{U_C - U}{-U} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

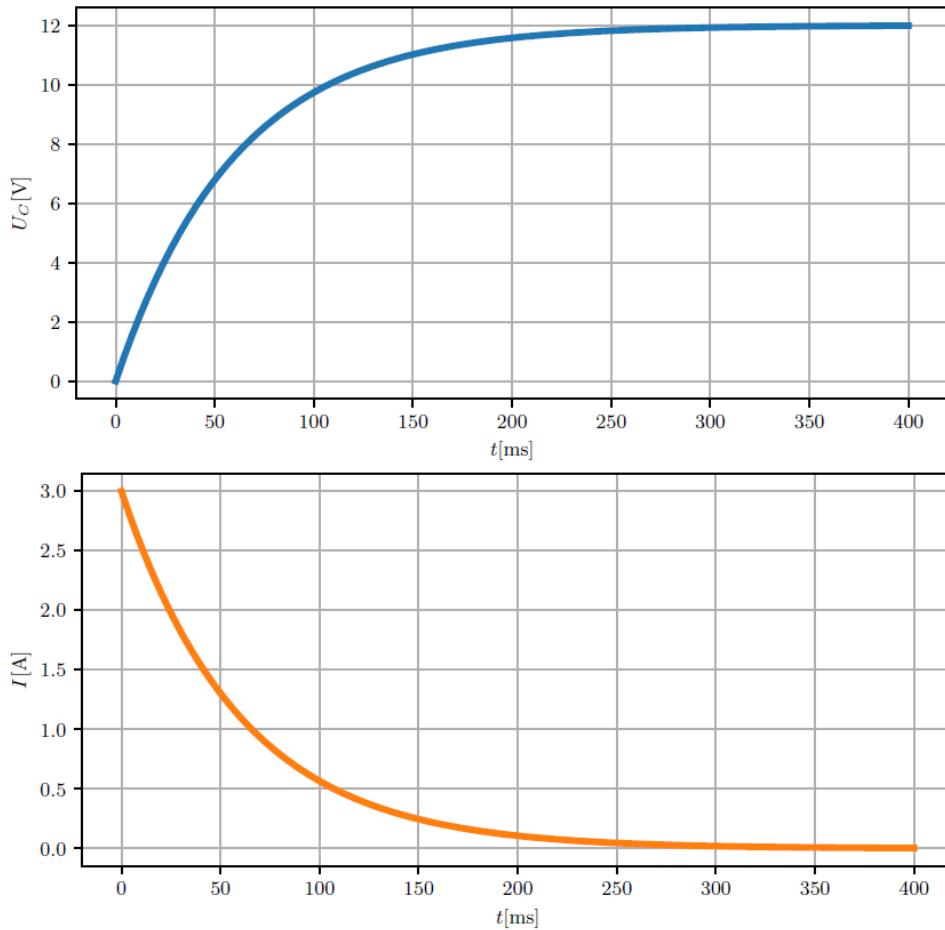
$$U_C - U = -U \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

$$U_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)} \right) \quad \text{lösung des AWP}$$

Für den Strom $I(A)$ ergibt sich:

$$I(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = C \cdot U \cdot \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$

$$= \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot (t - t_0)}$$



5. Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer beschleunigten Masse unter Berücksichtigung der Reibung

Die Bewegung einer Masse, die durch eine konstante Kraft beschleunigt wird und einer der Geschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft unterliegt, genüge der folgenden DGL:

$$10 \frac{dv}{dt} + v = 40 \text{ mit Anfangsbedingung } v(0) = 10.$$

- a) Wie lautet das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz?
- b) Welche Endgeschwindigkeit v_E erreicht die Masse?

Zunächst trennen wir die Variablen, dann werden beide Seiten integriert:

$$10 \cdot \frac{dv}{dt} + v = 40 - v = -(v - 40) \Rightarrow \frac{dv}{v - 40} = -\frac{dt}{10} = -0,1 dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v - 40} = -0,1 \cdot \int 1 dt$$

$$\ln |v - 40| = -0,1t + \ln |C| \Rightarrow \ln |v - 40| - \ln |C| = -0,1t \Rightarrow \ln \left| \frac{v - 40}{C} \right| = -0,1t$$

$$\left| \frac{v - 40}{C} \right| = e^{-0,1t} \Rightarrow \frac{v - 40}{C} = \pm e^{-0,1t} \Rightarrow v - 40 = \pm C \cdot e^{-0,1t} = K \cdot e^{-0,1t} \Rightarrow$$

$$v = 40 + K \cdot e^{-0,1t} \quad (\text{mit } K = \pm C)$$

Zu Beginn der Bewegung (d. h. zur Zeit $t = 0$) beträgt die Geschwindigkeit $v(0) = 10$. Aus dieser *Anfangsgeschwindigkeit* lässt sich die Integrationskonstante K wie folgt berechnen:

$$v(0) = 10 \Rightarrow 40 + K \cdot e^0 = 40 + K \cdot 1 = 40 + K = 10 \Rightarrow K = 10 - 40 = -30$$

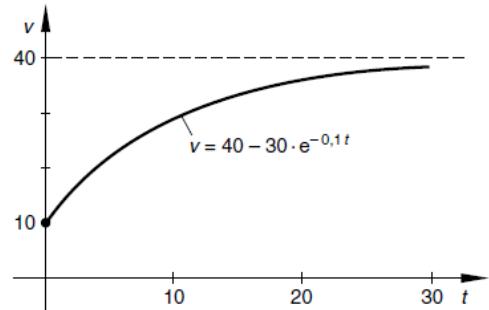
Das gesuchte *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* lautet damit

$$v = 40 - 30 \cdot e^{-0,1t}, \quad t \geq 0$$

Die Endgeschwindigkeit v_E erhält man für $t \rightarrow \infty$, d. h. nach (theoretisch) unendlich langer Zeit:

$$v_E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (40 - 30 \cdot e^{-0,1t}) = 40$$

($e^{-0,1t}$ strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen 0)



6. Salzzugabe in Wassertank

Ein Tank enthalte 1000 l Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ strömen pro Minute 10 l der Lösung aus dem Tank heraus sowie 10 l Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg hinzu. Ein Superrührgerät mischt die Lösung sofort vollständig.

Wie gross ist der Salzgehalt $u(t)$ für $t > 0$?

Das Volumen des Wassers im Tank ist konstant, deshalb enthält jeder Liter zur Zeit $t \geq 0$ die Menge $u(t)/1000$ kg Salz. Der Ausfluss an Salz (in kg) im (kleinen) Zeitraum Δt ist

$$10 \cdot \frac{u(t)}{1000} \Delta t = 0,01 u(t) \Delta t.$$

Zugleich werden $2\Delta t$ kg Salz in den Tank eingebracht. Die Änderung des Salzgehaltes ist also

$$\Delta u = -0,01 u(t) \Delta t + 2 \Delta t.$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ führt dies auf die Differentialgleichung

$$u' = -0,01 u + 2.$$

Lösung der Gleichung mit Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{du}{-0,01 u + 2} = \int dt \iff \ln |-0,01 u + 2| = -\frac{t}{100} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R},$$

und damit

$$u(t) = 200 - 100 c e^{-t/100}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung $u(0) = 50$ folgt $c = 1,5$ und

$$u(t) = 200 - 150 e^{-t/100}.$$