FHGR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Sto 1

Computational and Data Science
BSc HS2024

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Fakultät, Binomialkoeffizient, Pascalsches Dreieck, Permutation, Kombination, Variation und können diese erklären und anwenden.
- Sie können Fakultäten und Binomialkoeffizienten für natürliche Zahlen berechnen.
- Sie kennen die Formeln für die Permutationen von n Elementen, für die Kombinationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung und für Variationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung und können diese anwenden.

1. Aussagen

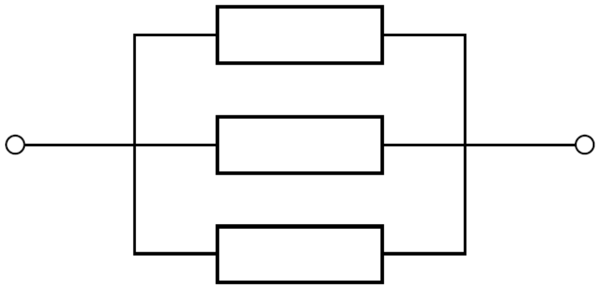
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Fakultät ist für alle reellen Zahlen definiert.		X
b) Für alle $n \epsilon \mathbb{N}^+$ gilt: $n! = (n-1)! \cdot n$.	X	
c) Die Fakultät $n!$ ist gerade die Anzahl Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte auf n unterscheidbare Plätze zu verteilen.	X	
d) Jeder Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist eine natürliche Zahl.	X	
e) Verdoppelt man sowohl n als auch k, dann ändert sich der Wert des Binomialkoeffizienten nicht.		X

2. Vermischte Aufgaben

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 weisse, 2 graue und 1 schwarze Kugel anzuordnen?

b) Für die Parallelschaltung von 3 Widerständen stehen 5 verschieden Widerstände $R_1 \ldots R_5$ zur Verfügung. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, von den 5 Widerständen 3 für den Schaltkreis auszuwählen, wenn
(i) jeder Widerstand höchstens einmal
(ii) mehrmals verwendet werden darf?



c) Beim gleichzeitigen Wurf zweier unterschiedlich gekennzeichneter homogener Würfel interessieren wir uns für die auftretenden Augenpaare. Wie viele verschieden Augenpaare sind möglich?
d) Aus den Ziffern 1 bis 9 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jede Ziffer nur einmal verwendet werden darf?
e) Ein Autokennzeichen bestehe aus ein bis drei Buchstaben gefolgt von 4 Ziffern. Wie viele verschiedene Kennzeichen können so erzeugt werden?
f) In einem Büro mit 3 Angestellten sind 4 Telefonate zu erledigen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 4 Aufgaben auf die drei Personen zu verteilen?
g) Ein Rangiermeister der SBB hat die Aufgabe, einen Zug aus sechs Wagen derart zusammenzustellen, dass zwei Wagen der ersten Klasse, drei Wagen der zweiten Klasse und ein Gepäckwagen im Zug vorhanden sind. Wie viele verschiedene Wagenreihungen können theoretisch an der Wagenstand-Anzeigetafel angegeben werden?
h) In der Lagerhaltung werden Materialien unterschiedlicher Abmessung und Rohstoffzusammensetzung häufig durch Farbmarkierungen gekennzeichnet. Wie viele verschiedene Materialsorten können z.B. markiert werden, wenn die Farben Schwarz, Rot, Gelb und Blau zur Verfügung stehen und jede Materialsorte mit zweifarbigen Etiketten gekennzeichnet wird, deren Anordnung wegen des Vermeidens von Identifikationsfehlern ohne Belang ist?

a)
Es handelt sich um eine Permutation:
Es gibt folglich $P(6;3,2,1,)=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 2\cdot 1}=2\cdot 5\cdot 6=60$ Anordnungsmöglichkeiten.
b)
Die Anordnung der Widerstände spielt keine Rolle. Somit handelt es sich um Kombinationen, bei (i) ohne und bei (ii) mit Zurücklegen. Die Anzahl der Möglichkeiten ergeben sich zu:
(i) $C(5;3)=\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$
(ii) $C_W(5;3)=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35$
c)
Da die Würfel unterscheidbar sind (z. B. ein schwarzer und ein weisser Würfel), handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung, d. h. es ist relevant ob eine Zahl mit dem ersten oder zweiten Würfel geworfen wurde. Es treten also geordnete Zahlenpaare auf.
$V_W=(6;2)=6^2=36$
d)
Die 3 Ziffern werden auf 3 Plätze verteilt, wobei jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf. Es handelt sich um eine Variation ohne Wiederholung.
$V(9;3)=\frac{9!}{(9-3)!}=7\cdot 8\cdot 9=504$
e)
Es handelt sich um Variationen mit Wiederholung. Da es Kennzeichen mit 1, 2 oder 3 Ziffern gibt, müssen die Möglichkeiten erst getrennt berechnet und dann addiert werden:
$26^3\cdot 10^4+26^2\cdot 10^4+26^1\cdot 10^4=1{,}828\cdot 10^8$.
f)
Es handelt sich um eine Kombination mit Zurücklegen:

$C_W(3;4) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$

g)

Es handelt sich um eine Permutation, wobei Elemente mehrfach vorkommen können:

$P(6;3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60.$

h)

Es handelt sich um eine Kombination ohne Zurücklegen:

$C(4;2) = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$

3. Immobilienmakler

In einem Immobilienbüro bilden drei Wohnungsmakler ein Team. Da sich die Geschäfte im Wesentlichen auf die Wochenenden konzentrieren, gibt es unter den drei Maklern L, U, G stets Probleme mit der Aufteilung der Wochenenddienste (Samstag und Sonntag). Um die Einteilung der Wochenenddienste zu objektivieren, entscheiden sie sich für das folgende Zufallsexperiment: Es werden drei Zettel mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen in eine Schachtel gelegt, geschüttelt und dann zwei Zettel zufällig gezogen. Geben Sie die möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperiments an und ermitteln Sie ihre Anzahl, wenn

a) mit der Aufteilung festgelegt werden soll, an welchem Tag ein Makler Dienst hat (der zuerst gezogene Zettel steht für Samstag) und es möglich sein soll, dass ein Makler an beiden Tagen Dienst hat.
b) doppelter Dienst möglich ist, jedoch nicht bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Makler Dienst hat.
c) kein doppelter Dienst möglich ist, jedoch bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Makler Dienst hat.
d) kein doppelter Dienst möglich ist und nicht bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Makler Dienst hat.

a)

Variation mit Wiederholung:

$3^2 = 9.$

Ergebnisse: {L,L}, {L,U}, {L,G}, {U,U}, {U,G}, {G,G}, {G,U}, {G,L}, {U,L}

b)

Kombination mit Wiederholung:

$C_W(3;2) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{6}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6.$

Ergebnisse: {L,L}, {L,U}, {L,G}, {U,U}, {U,G}, {G,G}

c)

Variation ohne Wiederholung:

$V(3;2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Ergebnisse: {L,U}, {L,G}, {U,G}, {G,U}, {G,L}, {U,L}

d)

Kombination ohne Wiederholung:

$C(3;2) = \binom{3}{2} = \frac{3}{1} = 3.$

Ergebnisse: {L,U}, {L,G}, {U,G}

4. Sportwettkampf
An einem Wettkampf beteiligen sich 8 Sportler. Sie wollen die drei Medaillengewinner voraussagen.
a) Wie viele Tipps müssen Sie abgeben, damit Sie mit Sicherheit die drei Gewinner dabeihaben?
b) Wie viele Tipps brauchen Sie, wenn auch noch die Rangfolge – Gold, Silber, Bronze – stimmen soll?

a)
Kombination ohne Wiederholung:
$C(8;3) = \binom{8}{3} = \frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 56.$
b)
Variation ohne Wiederholung:
$V(8;3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$

5. Passworte
Ein Passwort muss 6 Stellen haben. Wie viele Passwörter gibt es, wenn
a) 6 Kleinbuchstaben,
b) 6 verschiedene Kleinbuchstaben,
c) 5 Kleinbuchstaben und eine Ziffer oder
d) 4 Kleinbuchstaben und 2 Ziffern
enthalten sein müssen?

a)
Variation mit Wiederholung:
$26^6 = 308915776.$
b)
Variation ohne Wiederholung:
$V(26;6) = \frac{26!}{(26-6)!} = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 = 165765600.$
c)
Variation mit Wiederholung, wobei noch die Anordnung der Ziffer innerhalb der Buchstaben berücksichtigt werden muss mittels der Bestimmung der Permutationen: Man ermittelt die Möglichkeiten für 5 Buchstaben gefolgt von einer Ziffer ($26^5 \cdot 10 = 118813760$) und ermittelt anschliessend die Anzahl der Permutationen bzgl. an welcher Stelle kann die Ziffer auftauchen: $6 \cdot 26^5 \cdot 10 = 712882560.$
d)
Variation mit Wiederholung – jetzt von einer Anordnung von 4 Buchstaben und 2 Ziffern ausgehen ($26^4 \cdot 10^2 = 45697600$) und hierfür die möglichen Permutationen bestimmen ($P(6;4,2) = \frac{6!}{4!\cdot2!} = 15$): $15 \cdot 26^4 \cdot 10^2 = 685464000$