

Übungsblatt DGL 10

Computational and Data Science
BSc HS2023

Lösungen

Mathematik 3

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe L^2 -Skalarprodukt, Fourier-Polynom/Reihe, reelle/komplexe Fourier-Koeffizienten, Fourier-Entwicklung – Gibbssches Phänomen sowie deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Parität einer periodischen Funktion ausnutzen, um die Berechnung der Fourier-Koeffizienten zu vereinfachen.
- Sie können periodische Funktionen in eine Fourier-Reihe entwickeln.
- Sie können eine auf einem Intervall definierte Funktion sinnvoll erweitern und durch eine Fourier-Reihe darstellen.

1. Aussagen über Fourier-Entwicklungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jedes stückweise stetige Signal des Typs $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Fourier-Entwicklung.		X
b) Jedes stückweise stetige, periodische Signal des Typs $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Fourier-Entwicklung.	X	
c) Jedes stückweise stetige Signal des Typs $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Fourier-Entwicklung.	X	
d) Bei der periodischen Erweiterung eines nichtperiodischen Signals auf einem Intervall ist die Vermeidung von Sprüngen wichtiger als die Herstellung einer Parität.	X	

2. Aussagen über die Fourier-Entwicklung einer Funktion

Gegeben sei die Funktion $f(t) = t^2$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) f hat negative Parität.		X
b) f kann auf $[0, 1]$ durch eine reine Sinusreihe dargestellt werden.	X	
c) f kann auf $[0, 1]$ durch eine reine Cosinusreihe dargestellt werden.	X	
d) f kann auf $[-1, 1]$ durch eine reine Sinusreihe dargestellt werden.		X
e) f kann auf $[-1, 1]$ durch eine reine Cosinusreihe dargestellt werden.	X	
f) f kann auf $[-1, 2]$ durch eine reine Sinusreihe dargestellt werden.		X

3. Aussagen über eine Fourier-Entwicklung

Gegeben sei eine periodische Funktion $x(t)$ mit Fourier-Entwicklung

$$x_n(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} \cdot \cos(\pi k t).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $x_{17}(t) = x_{18}(t)$.	X	
b) Die Periode von x ist 1.		X
c) Es gilt: $x_n(t) = x_n(-t)$.	X	
d) Die Funktion $x(t)$ hat negative Parität.		X

4. Grenzwerte von Summen

Gegeben seien die Summen

$$A(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{und} \quad B(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

a) Es sei $\omega > 0$. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int t^2 \cdot \cos(\omega t) dt.$$

b) Stellen Sie $f(t) = t^2$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch eine Fourier-Reihe dar.

c) Betrachten Sie die Fourier-Reihe aus b) an der Stelle $t = 0$ und zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

d) Betrachten Sie die Fourier-Reihe aus b) an der Stelle $t = \pi$ und zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n) = \frac{\pi^2}{6}.$$

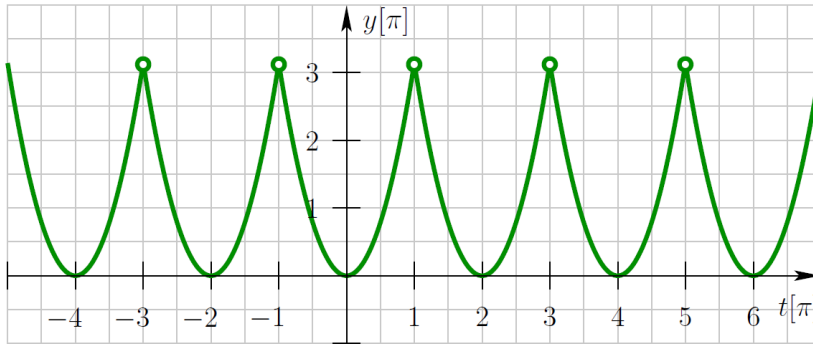
a)

Es sei $\omega > 0$. Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int t^2 \cos(\omega t) dt}} &= \int \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(\omega t)} dt = \frac{t^2}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{2}{\omega} \int \overset{\downarrow}{t} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(\omega t)} dt \\ &= \frac{t^2}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{2t}{\omega^2} \cos(\omega t) - \frac{2}{\omega^2} \int \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{t^2}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{2t}{\omega^2} \cos(\omega t) - \frac{2}{\omega^3} \sin(\omega t) + c \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{t^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) \cdot \sin(\omega t) + \frac{2t}{\omega^2} \cdot \cos(\omega t) + c.}} \end{aligned}$$

b)

Zur Bestimmung der Fourier-Reihe von $f(t) = t^2$ mit Periode $T = 2\pi$ erweitern wir die Funktion periodisch. $f(t)$ hat positive Parität.



Für die *reellen* FOURIER-Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_T \text{PE}_{(T,+)}[f](t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[t^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi} \cdot \left(\pi^3 - (-\pi)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3\pi} \cdot 2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T \text{PE}_{(T,+)}[f](t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos\left(\frac{2\pi k}{2\pi} t\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\left(\frac{t^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \cdot \sin(kt) + \frac{2t}{k^2} \cdot \cos(kt) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\left(\frac{\pi^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \cdot \sin(k\pi) + \frac{2\pi}{k^2} \cdot \cos(k\pi) - 0 - 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k^2} \cdot \cos(k\pi) \\ &= \frac{4}{k^2} \cdot \cos(k\pi) = 4 \frac{(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

$$b_k = 0.$$

Die *reelle* FOURIER-Entwicklung ist daher

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(kt)$$

und auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gilt

$$\underline{\underline{f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(kt).}}$$

c)

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(k \cdot 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot 1 \quad \Bigg| : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \Bigg| -\frac{\pi^2}{12}.$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} .}}$$

d)

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot (-1)^k \quad \Bigg| : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^k\right)^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \Bigg| -\frac{\pi^2}{12}$$

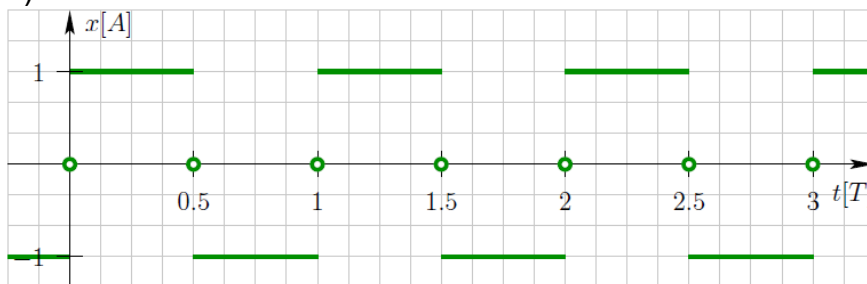
Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} B(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6} .}}$$

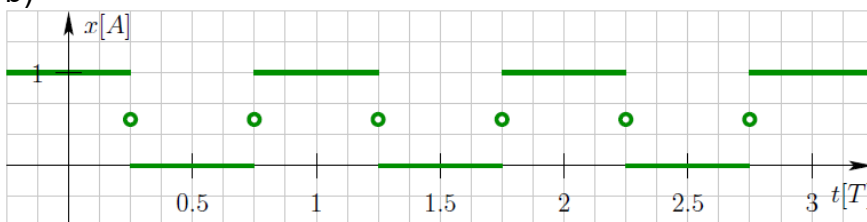
5. Reelle Fourier-Entwicklungen

Bestimmen Sie jeweils die Fourier-Entwicklungen der gegebenen periodischen Signale mit Periodendauer T und Amplitude A. Nutzen Sie die Parität der gegebenen Funktion.

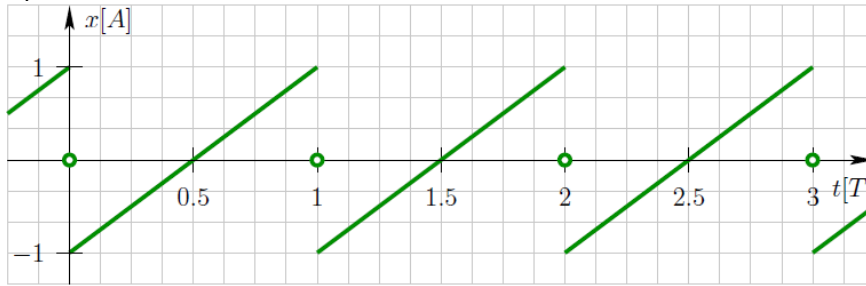
a)



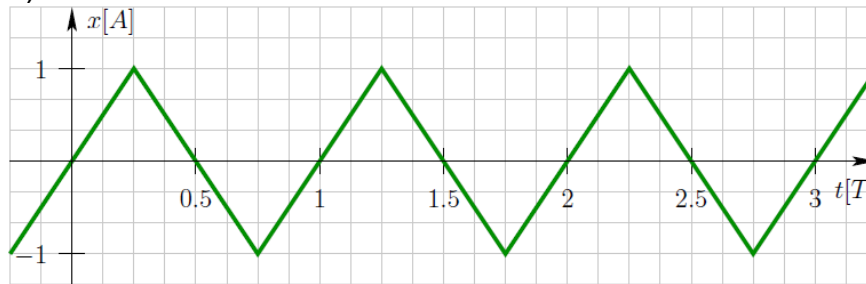
b)



c)



d)



a)

Es liegt negative Parität vor, deshalb können wir eine reine Sinusreihe verwenden.

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\ &= \frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{4A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi k} \cdot (-1) \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{2A}{\pi k} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot 0\right) \right) = -\frac{2A}{\pi k} \cdot (\cos(\pi k) - \cos(0)) \\ &= -\frac{2A}{\pi k} \cdot ((-1)^k - 1) = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Die *reelle* FOURIER-Entwicklung des Signals ist daher

$$\underline{\underline{x_n(t) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right).}}$$

b)

Es liegt positive Parität vor, deshalb können wir eine reine Cosinusreihe verwenden.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_T x(t) dt = \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{\frac{T}{4}} A dt = \frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} 1 dt = \frac{4A}{T} \cdot [t] \Big|_0^{\frac{T}{4}} = \frac{4A}{T} \cdot \left(\frac{T}{4} - 0\right) \\ &= \frac{4A}{T} \cdot \frac{T}{4} = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{4A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi k} \cdot \left[\sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Big|_0^{\frac{T}{4}} \\
&= \frac{2A}{\pi k} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot 0\right) \right) = \frac{2A}{\pi k} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin(0) \right) \\
&= \frac{2A}{\pi k} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot ((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}} - 0 \right) = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k}
\end{aligned}$$

$$b_k = 0.$$

Die *reelle* FOURIER-Entwicklung des Signals ist daher

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x_n(t)}} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \\
&= \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k} \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right).
\end{aligned}$$

c)

Es liegt negative Parität vor, deshalb können wir eine reine Sinusreihe verwenden.
Es gilt ausserdem für $t \in]0, T[$

$$x(t) = \frac{2A}{T} \cdot (t - 0) - A = \frac{2A}{T} t - A.$$

Für die *reellen* FOURIER-Koeffizienten erhalten wir

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{2A}{T} t - A \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T} \int_0^T \left(\frac{2}{T} t - 1 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T} \int_0^T \frac{2}{T} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt - \frac{2A}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{4A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt - 0 \\
&= \frac{4A}{T^2} \cdot \left[\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Big|_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot T\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot T \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot T\right) - 0 + 0 \right) \\
&= \frac{A}{\pi^2 k^2} \cdot \sin(2\pi k) - \frac{2A}{\pi k} \cdot \cos(2\pi k) = \frac{A}{\pi^2 k^2} \cdot 0 - \frac{2A}{\pi k} \cdot 1 = -\frac{2A}{\pi k}.
\end{aligned}$$

Die *reelle* FOURIER-Entwicklung des Signals ist daher

$$\underline{\underline{x_n(t) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)}}.$$

d)

Es liegt negative Parität vor, deshalb können wir eine reine Sinusreihe verwenden.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T} \cdot t & t \in [0, T/4] \\ 2A - \frac{A}{T} \cdot t & t \in [T/4, T/2] \end{cases} = \begin{cases} \frac{4A}{T} t & t \in [0, T/4] \\ 2A - \frac{4A}{T} t & t \in [T/4, T/2]. \end{cases}$$

Für die *reellen* FOURIER-Koeffizienten erhalten wir

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \\
&= \frac{4}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4A}{T} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2A - \frac{4A}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \right) \\
&= \frac{16A}{T^2} \underbrace{\int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt}_{=I_1} + \frac{8A}{T} \underbrace{\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt}_{=I_2} - \frac{16A}{T^2} \underbrace{\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt}_{=I_3}.
\end{aligned}$$

Die einzelnen Integrale sind

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \left[\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Bigg|_0^{\frac{T}{4}} \\
&= \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot \frac{T}{4} \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - 0 + 0 \\
&= \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{T^2}{8\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\
I_2 &= \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = -\frac{T}{2\pi k} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Bigg|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{T}{2\pi k} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right) = \frac{T}{2\pi k} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos(\pi k) \right) \\
I_3 &= \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \left[\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right] \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2\pi k} \cdot \frac{T}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \\
&\quad + \frac{T}{2\pi k} \cdot \frac{T}{4} \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \\
&= 0 - \frac{T^2}{4\pi k} \cdot \cos(\pi k) - \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \frac{T^2}{8\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\
&= \frac{T^2}{8\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{T^2}{4\pi k} \cdot \cos(\pi k) - \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{16A}{T^2} \cdot I_1 + \frac{8A}{T} \cdot I_2 - \frac{16A}{T^2} \cdot I_3 = \frac{8A}{T} \cdot I_2 + \frac{16A}{T^2} \cdot (I_1 - I_3) \\
&= \frac{8A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi k} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos(\pi k) \right) + \frac{16A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{T^2}{8\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{T^2}{8\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \frac{T^2}{4\pi k} \cdot \cos(\pi k) + \frac{T^2}{4\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right) \\
&= \frac{4A}{\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{4A}{\pi k} \cdot \cos(\pi k) + \frac{4A}{\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - 2 \cdot \frac{2A}{\pi k} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\
&\quad + \frac{4A}{\pi k} \cdot \cos(\pi k) + \frac{4A}{\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{8A}{\pi^2 k^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \\
&= \frac{8A}{\pi^2 k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}} = \frac{4A}{\pi^2} \cdot \frac{((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^2}.
\end{aligned}$$

Die *reelle* FOURIER-Entwicklung des Signals ist daher

$$\underline{\underline{x_n(t)}} = \sum_{k=1}^n b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) = \underline{\underline{\frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{((-1)^k - 1) \cdot (-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)}}.$$