宏观经济学笔记

刘子越

2020 年 11 月 3 日

目录

1 Introduction

本笔记致力于学习宏观经济学，难度和内容覆盖中级宏观经济学和高级宏观经济学，在囊括绝大部分高级宏观的内容后，我将注明中级部分。本笔记从 2020 年 3 月 7 日开始编辑，最新版本日期请参见标题页。

本笔记的中级部分的主要参考是威廉森《宏观经济学》(第五版)，罗默《高级宏观经济学》(第四版，第三版) [1]，以及一些其他的教材包括曼昆、萨缪尔森、巴罗、芝加哥大学的教材等 [Barro, 2007, Doepke et al., 1999, Mankiw, 2003, Romer, 2006, 2011, Samuelson and Nordhaus, 2009, Williamson, 2005]。除此之外，在笔记中还会大量参考原始文献。

本笔记的高级部分的主要参考是阿西莫格鲁《现代经济增长导论》(经济增长)，麦坎德利斯《The ABCs of RBCs: 动态宏观经济模型入门》和加利《货币政策、通货膨胀与经济周期：新凯恩斯主义分析框架引论》(经济波动和 DSGE)。

本笔记的中级部分所跟的课程是清华大学社会科学学院经济学研究所，谢丹夏老师所教授的中级宏观经济学，在此基础上进行了大量而繁杂的补充。谢老师的中级宏观可以称为"全国最难本科生中级宏观经济学"，据我所感觉[2]，其特点是

1. 采用科学的分析方法，通过进行一些假设对经济进行研究，并且和数据相对应来检查模型的正确与否。
2. 采用现代宏观经济学的分析方法，强调从微观基础出发构建一般均衡的宏观经济模型。
3. 强调通过数学化的经济学模型理解宏观经济。

谢老师的讲课内容相对而言也比较现代，可以直接和高级宏观经济学对接。当然，于此对应的是内容难度非常大，一节课讲课内容也非常多。作为例子，我作为一个系统学习过经济增长理论的数学系学生，每次听完课之后需要一天的时间来消化、整理笔记；可想而知对于大二的经济系本科生而言，这门课是非常困难的，并且很难彻底消化。

高级部分目前只有自学和之前在科大高宏课的部分；之后学习正式的高宏课时会对没有写的内容进行补充。

[1] 第三版主要参考传统凯恩斯波动理论，而这一部分在第四版中已经被删去。

[2] 谢老师自己似乎有对他自己课程的评价，但是我没有那份 ppt。

在本笔记中，全部经济理论都将以数学模型化的形式出现，并且对于各个命题进行**仔细的推导**。这是由于我持的观点大体和谢老师一致，我尤其注重以经济学模型和数学推导得到具有强烈经济意义的结果。详尽的推导，则来源于平时我就希望将模型的每一个细节弄清楚怎么来的，而不是像阿西莫格鲁一样将绝大多数并不容易的推导留作习题。阿西莫格鲁的习题的最主要特点就是，如果你不弄清楚这个模型到底是怎么回事，其实根本做不下去。

在有时间和更充足的积累之后，我将考虑为本笔记留一些不太难的习题，并自己提供参考答案。

写笔记时，最麻烦的地方就在于同时参考多本教材以及原始文献，以梳理清楚体系和我的问题。这个过程非常的艰难和令人头痛，但是也非常的快乐。而数学模型的部分对我来说轻车熟路，反而是比较简单的那一部分。当然，我自己看模型很少能直接看明白，大部分情况下需要亲手进行计算，这也是本笔记的写作初衷。而一个有趣的事情是本笔记日益丰厚，以至于逐渐拥有了分享和公开的价值。

除此以外，第二麻烦的地方就是梳理体系、需要按照某种顺序对内容进行整理。这种整理常常改动非常大，隔一段时间就要几乎完全推翻以往的顺序、修改标题、移动位置。所幸 LyX 在调整位置上功能非常强大，不需要复制黏贴、只需要在目录页进行手动操作就可以整体移动，提供了许多方便。

截止到最新更新时间，本笔记的余下内容按照如下思路安排：

- 第一部分介绍一般均衡，首先给出个体决策行为和基本的一般均衡模型，然后分别考察劳动力市场、信贷市场和货币市场，以介绍这些话题和处理进一步的内容。

- 第二部分承接第一部分，基于一般均衡和第一部分介绍的各个市场来介绍经济波动理论，涉及新古典、凯恩斯主义、新古典综合派、新凯恩斯主义，从新古典跨期模型和传统的 IS-LM 模型逐步进入现代的 DSGE 模型；

- 第三部分介绍经济增长理论，中级难度主要介绍外生增长的 Malthus 模型、Solow 模型和 Ramsey 模型，以及内生增长的 Lucas 模型；高级难度从 Romer 模型开始，将逐步涉及阿西莫格鲁中讲述的大部分内容；

- 最后一部分介绍开放经济，目前只讨论中级宏观中涉及到的商品贸易

初步和国际金融初步；在高级部分可能将涉及非常复杂的新的小型开放经济的模型。

- 本笔记的一部分章节只有标题没有内容，这是因为笔者正在努力码字、进行更新。还有一部分可能长期没有内容，这些有待于空闲之时进行修改。

Part I

一般均衡

2 个体决策

2.A 家庭决策

2.1 家庭的单期决策

2.1.1 闲暇-消费替代

消费者解最大化问题

$$\begin{aligned} \max_{C,l}\ & u(C,l) = \log C + b(1-l) \\ s.t.\ & C \le wl + \pi - \tau \\ & C \ge 0, l \in [0,1] \end{aligned}$$

拉格朗日函数（不含边界）是

$$\mathcal{L} = u(C, 1-l) + \lambda(wl + \pi - \tau - C)$$

对应的一阶条件是

$$\begin{aligned} 0 &= u_C - \lambda \\ 0 &= \lambda w + u_l \\ 0 &= wl + \pi - \tau - C \end{aligned}$$

对消费者而言，只有消费和闲暇是内生选择的。我们将预算约束变形，将闲暇视作商品：

$$C + w(1-l) \le w + \pi - \tau$$

可以看到，闲暇的价格正好等同于工资；预算线恰好是 $C + w(1-l) = w + \pi - \tau$. 是一条交两个轴的直线, 斜率对应工资 w. 它和无差异曲线相切的点正是消费者选择的点。注意：无差异曲线有很多个，但是预算约束只有一条。

直观来看，工资的提高可以导致预算约束的扩大，从而导致消费和闲暇都有扩大的倾向，这被称为收入效应；工资的提高还导致了闲暇的价格提

高，这导致有扩大消费而缩减闲暇的倾向，这被称为替代效应。二者同时作用，消费必然提高，闲暇的变化则未知。另外，公司利息收入 π 和负税收 $-\tau$ 变大时，是单纯的预算约束扩大，消费和闲暇都会提高，被称为纯收入效应。至于具体是多少，使用隐函数定理可以轻易计算，这对大部分经济学学生应当需要专门练习，我应该不用。

2.1.2 劳动力市场供给曲线

在上面对效用函数的假设下，FOC

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} =&\lambda\\ b =&\lambda w\\ C =&lw+\pi-\tau\end{aligned}$$

解得

$$C=\frac{w}{b}$$

$$l=\frac{1}{b}-\frac{\pi-T}{w}$$

从而劳动力市场获得了一种供给曲线:

$$l^s(w)=\frac{1}{b}-\frac{\pi-T}{w}$$

它是工资的增函数。

2.2 储蓄的几种假说

2.2.1 凯恩斯的绝对收入假说

认为消费仅与当期收入有关

$$C_t=a+bY_t$$

and

$$\frac{C_t}{Y_t}=b+\frac{a}{Y_t}$$

一般的情形会假定边际消费倾向递减，即

$$\partial_Y(\frac{C}{Y})_t<0$$

2.2.2 弗里德曼永久性收入假说

人们的消费行为主要取决于永久性收入，不取决于现期收入的绝对水平。而偶然所得的“暂时性收入”本质上不影响消费行为。只有没有预期到的影响未来收入的政策变化才能影响消费。强调不是暂时性的收入，而是永久性的收入在消费决定中的重要性，人们在好年景进行储蓄，以弥补坏年景的亏空。

即消费平滑化。

2.2.3 Modigliani 生命周期理论

$$C = aW_R + bY_L$$

财产收入 + 劳动收入，边际消费倾向。

人在工作期间的每年收入 Y_L，不能全部用于消费，总有一部分要用于储蓄，从参加工作起到退休为止，储蓄一直增长，到工作期最后一年时总储蓄达最大。从退休开始，储蓄一直在减少，到生命结束时储蓄为零。还分析出消费和财产的关系: 财产越多和取得财产的年龄越大，消费水平越高。

2.2.4 信贷市场初步 (Credit Market)

当期发行 1 单位债券，必须承诺未来支付 $1+r$ 单位消费品，其中 r 为实际利率。

未来消费品比当期消费品更便宜，价格为 $\frac{1}{1+r}$.

现在假定借款和贷款利率相同，且无风险。

2.2.5 两期消费和意外收入

$$\max u(C_1) + \beta u(C_2)$$
$$s.t.\ C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$

FOC:

$$\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \beta(1+r)$$

储蓄

$$S = Y_1 - C_1$$

and

$$C_2 = Y_2 + (1+r)S$$

那么无论是当期收入提高还是未来收入提高，都会同时提高两个时期的消费。当期收入提高，而未来收入不变，未来消费提高，说明储蓄提高了（$C_2 = Y_2 + (1+r)S$）；未来收入提高，当期收入不变，当期消费提高，说明储蓄降低了。

永久性的收入增加则不一定改变储蓄或储蓄率。

利率的影响比较复杂。首先，利率提高形成一个替代效应，未来消费价格降低。对于储蓄为正的 Lender 而言，利率增加意味着他具有一个正的收入效应，从而未来消费一定提高，当期消费影响不定号。对于储蓄为负的 Borrower，收入效应是负的，当期消费一定减少，未来消费不定号。具体的计算通过隐函数定理进行计算如下：

$$0 = F(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} u'(C_1) - \beta(1+r)u'(C_2) \\ (1+r)C_1 + C_2 - (1+r)Y_1 - Y_2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} u''(C_1) & -\beta(1+r)u''(C_2) \\ 1+r & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_r = \begin{pmatrix} -\beta u'(C_2) \\ -(Y_1 - C_1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}{dr} = -J^{-1}F_r = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \beta(u'(C_2) + (1+r)u''(C_2)(Y_1 - C_1)) \\ -\beta(1+r)u'(C_2) + u''(C_1)(Y_1 - C_1) \end{pmatrix}$$

where $\Delta = \det(J) < 0$. 它是不定号的。为了确定，我们来区分替代效应和收入效应。

$$\left.\frac{d\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}{dr}\right|_{SE} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \beta u'(C_2) \\ -\beta(1+r)u'(C_2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (-) \\ (+) \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{d\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}{dr}\right|_{IE} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \beta(1+r)u''(C_2)(Y_1 - C_1) \\ u''(C_1)(Y_1 - C_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (\mathrm{sign}\{S\}) \\ (\mathrm{sign}\{S\}) \end{pmatrix}$$

收入效应的符号仅仅取决于 $Y_1 - C_1$ 的符号，即是否具有正储蓄。

有正储蓄时，未来消费必然增加；有负储蓄时，当期消费必然减少。另外两种则不定号。

2.2.6 无限期消费

$$\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$
$$s.t.\ K_{t+1} = (1+r_t)K_t + Y_t - C_t - T_t$$

现值表示：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - T_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}$$

或连续形式

$$\int_0^{\infty} C(t)\exp\{-\int_0^t r(s)ds\}dt = \int_0^{\infty} (Y(t)-T(t))\exp\{-\int_0^t r(s)ds\}dt$$

也可写成无庞氏条件的弱不等式形式

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t - T_t}{\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)}$$

显然取等号时才会最优。

最优消费的边际替代率恰好等于价格之比，即：

$$MRS_{C_t,C_{t+1}} = 1 + r_{t+1}$$

改写为欧拉方程：

$$u'(C_t) = \mathbb{E}_t\{\beta u'(C_{t+1})(1+r_{t+1})\}$$

2.3 家庭两期决策

2.3.1 效用最大化问题

家庭最大化跨期效用

$$\max \log(C) + b\log(1-L) + \log C' + b\log(1-L')$$
$$s.t. C + \frac{C'}{1+r} = \pi + wL - T + \frac{\pi' + w'L' - T'}{1+r}$$

一阶条件为：

$$0=\frac{1}{C}-\lambda=\frac{1}{C'}-\frac{\lambda}{1+r}=\lambda w-\frac{b}{1-L}=\lambda\frac{w'}{1+r}-\frac{b}{1-L'}$$

决定方程：

$$C+\frac{C'}{1+r}=\pi+wL-T+\frac{\pi'+w'L'-T'}{1+r}$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{C}=\frac{b}{1-L}&\Leftrightarrow w(1-L)=bC\\ w'(1-L')&=bC'\\ \frac{C'}{C}&=(1+r)\end{aligned}$$

解方程（注意到它是线性的）

code:

Solve[{

c1 + c2 / (1+r) == p1 + w1 l1 - t1 + (p2 + w2 l2 - t2)/ (1+r),

w1 (1-l1) == b c1,

w2 (1- l2) == b c2,

c2 / c1 == 1+r},

{ c1,c2,l1,l2}]

Result:

{c1 -¿ -((-p1 - p2 - p1 r + t1 + r t1 + t2 - w1 - r w1 - w2)/(2 (1 + b) (1 + r))), c2 -¿ -((-p1 - p2 - p1 r + t1 + r t1 + t2 - w1 - r w1 - w2)/(2 (1 + b))), l1 -¿ -((b p1 + b p2 + b p1 r - b t1 - b r t1 - b t2 - 2 w1 - b w1 - 2 r w1 - b r w1 + b w2)/(2 (1 + b) (1 + r) w1)), l2 -¿ -((b p1 + b p2 + b p1 r - b t1 - b r t1 - b t2 + b w1 + b r w1 - 2 w2 - b w2)/(2 (1 + b) w2))}

即：

$$\begin{aligned}C=&\frac{1}{2(1+b)}(\pi+w-T+\frac{\pi'+w'-T'}{1+r})\\=&\frac{1}{2}(\pi+wL-T+\frac{y'}{1+r})\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

$$L=\frac{1}{2w(1+b)}(2w-b(\pi-T-w)-\frac{b(\pi'-T'+w')}{1+r})\tag{2.3.2}$$

2.3.2 决策对外在条件变化的响应

$$dC = \frac{1}{2(1+b)}(d\pi + dw - dT - (\frac{\pi' + w' - T'}{1+r})\frac{dr}{1+r}) \tag{2.3.3}$$

$$wdL^S + L^S dw = \frac{1}{2(1+b)}(2dw - b(d\pi - dT - dw) + \frac{b(\pi' + w' - T')}{(1+r)^2}dr) \tag{2.3.4}$$

2.B 企业

2.4 企业单期决策

2.4.1 劳动力要素投入

公司（尤其是在单个时期）仅决定劳动力要素的投入。生产函数为: $Y = zf(l)$, 满足一般的性质。这里有微妙的区别，我们在考虑跨期的宏观模型的时候更注重资本尤其是人力资本，因为资本会积累；但是在单期环境下，资本是固定的，劳动力的变化更有意义。另外，单期模型普遍将储蓄率认为是外生的，因为内生的储蓄率必须通过动态最优得到。

企业利润为 $\pi = zf(l) - wl$, 从而有:

$$\max_{l} \ zf(l) - wl$$

对企业而言，工资 w 是外生给定的。将其画在 y - $(1-l)$ 坐标系下，其生产可能性边界得到一个上面凹的曲线，其成本得到一个直线，斜率对应工资 w. 最优产出必然和成本直线平行，并且相切于生产可能性边界。

企业没有其他约束条件是因为这里只有单一要素投入。其一阶条件为:

$$zf'(l) = w$$

2.5 投资

和 Ramsey 模型不同的是，本模型需要考虑企业的投资行为。本模型对应的是企业所租赁的资本作为生产要素无法灵活调整的情形。在条件允许的情况下，我们还会考察它和 Ramsey 模型在多大程度上等价。

2.5.1 企业

企业拥有资本 K, 其演化方程由投资决定:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

企业的生产函数为

$$Y = zF(K, L)$$

企业的当期利润

$$\pi = Y - wL - I$$

从而企业的总利润现值为

$$\Pi(t) = \int_t^\infty \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(s')ds'\}ds$$

企业解利润最大化问题:

$$\max \Pi(0) = \int_0^\infty (F(K,L) - wL - I) \exp\{-\int_t^s r(s')ds'\}ds$$
$$s.t.\ \dot{K} = I - \delta K$$

哈密顿函数为

$$\mathcal{H} = (F(K,L) - wL - I) \exp\{-\int_0^t r(s')ds'\} + \Lambda(I - \delta K)$$

一阶条件为

$$0 = \mathcal{H}_I = -\exp\{-\int_0^t r(s')ds'\} + \Lambda$$

$$-\dot{\Lambda} = \mathcal{H}_K = \exp\{-\int_0^t r(s')ds'\}F_K - \Lambda\delta$$

接下来我们将得到惊人的结果:

$$-\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = F_K - \delta$$

$$\dot{\Lambda} = -r(t) \exp\{-\int_0^t r(s')ds'\} = -r(t)\Lambda$$

从而:

$$r(t) = F_K - \delta$$

恒成立! 即: 企业的投资选择必然使得资本的边际回报率和折旧率的和为利率!

那么初始值怎么办? 处理方法很简单, 企业会提供一个无穷大的投资, 形成一个 Dirac 函数, 从而导致 0 处的右侧极限的资本满足上述形式; 或者说, 企业会选择一个合适的初始资本。

接下来我们来分析乘子 Λ 的含义。在最优控制中, 我们可以知道,

$$\Lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial K}$$

即资本的边际贴现利润。它也是投资回报率 (边际投资收益)。

劳动的就算了，很简单：

$$w = F_L$$

从上面的讨论中，我们发现，企业的行为和 Ramsey 模型中的行为完全等价。不论是企业自己进行投资还是每回合租赁资本，得到的资本行为是完全相同的。

2.5.2 更具体的投资行为的讨论

在连续模型中，企业的投资行为会被狄拉克函数约化，从而导致利率的冲击带来的影响很难判断。

第一种限制是不允许狄拉克函数，比如不允许企业借钱投资，那么在资本达到最优之前，企业的全部产出用于投资；在削减到最优之前，企业的全部产出会用于出售。

第二种是离散化。当我们需要考虑各种随机冲击的影响时，离散化是最好的处理方法。假定当期的资本不是最优的（比如发生了随机事件，让世界利率提高或者边际资本收益率突然降低），那么投资行为必须满足：

$$K_t + I_t - \delta K_t = K_{t+1}$$

and

$$\mathbb{E}_t(\partial_K(Y_{t+1})) = \mathbb{E}_t(r_{t+1})$$

即期望的下一期的边际资本产出应当等于期望的下一期利润。

那么考虑本期资本最优时对应的投资为 I_t^E，而本期受到冲击影响，本期资本为 $K_t = K_t^E + \varepsilon_t$，那么

$$I_t = I_t^E - \varepsilon_t$$

即资本的冲击和投资的冲击完全对应（在需求端）。这初步说明了投资收到的冲击影响很大；消费的影响小需要用欧拉公式解释。

2.6 企业两期决策

企业在两期决策时，具有外生的资本初始值。工资、利率也是外生的。企业自行决定投资，并且未来的资本全部会转化回货币。

可以证明，期望的未来的资本值将满足边际产出等于利率。每一期的劳动力需求也满足边际产出等于工资。

2.6.1 最优决策和一阶条件

企业最大化跨期利润

$$
\begin{aligned}
&\max \pi + \frac{\pi'}{1+r} \\
&s.t. \pi = zK^{\alpha}L^{\beta} - wL \\
&\quad \pi' = z'K'^{\alpha}L'^{\beta} - w'L' + K' - I(1+r) \\
&\quad K' = I + (1-\delta)K
\end{aligned}
$$

因为投资是借贷行为，所以应该被计入下期利润分红而不是当期利润分红。

最大化条件：

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L} = \beta z K^{\alpha} L^{\beta-1}$$

$$w' = (1-\alpha)\frac{Y'}{L'} = \beta z' K'^{\alpha} L'^{\beta-1}$$

$$r + \delta = \alpha\frac{Y'}{K'} = \alpha z' K'^{\alpha-1} L'^{\beta}$$

Code:

```
Solve[{
w1 == b z1 (K1 )^a L1^(b-1),
w2 == b z2 (K2 )^a L2^(b-1),
r + d == a z2 (K2 )^(a-1) L2^(b)},{K2, L1, L2}]
```

解得：

$$L = (\frac{\beta z K^{\alpha}}{w})^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$L' = \left(\frac{\beta z' K'^{\alpha}}{w'}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$L' = \left(\frac{K'^{1-\alpha}(\delta+r)}{\alpha z'}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$K' = \left(\frac{(\delta+r)^{1-\beta} w'^{\beta}}{\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta} z'}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$I = K' - (1-\delta)K$$

with $\alpha + \beta \leq 1$.

2.6.2 局部变化

$$dL^d = L^d_K dK + L^d_w dw + L^d_z dz$$

with

$$\frac{dL^d}{L^d} = \frac{1}{1-\beta}\frac{dz}{z} - \frac{1}{1-\beta}\frac{dw}{w} + \frac{\alpha}{1-\beta}\frac{dK}{K} \tag{2.6.1}$$

and

$$\frac{dI}{K'} = -\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{d\delta + dr}{\delta + r} + \Lambda_1 dw' + \Lambda_2 dz' \tag{2.6.2}$$

and

$$(r+\delta)K' + w'L' = Y'$$

and

$$d\pi = dY - Ldw - wdL \tag{2.6.3}$$

3 基本的一般均衡模型

3.1 Introduction for General Equilibrium

3.2 单期一般均衡

3.2.1 模型设置

第一个一般均衡模型考察单期的一般均衡。有两组 Player 和两个市场:

	家庭	企业
产品市场	需求	供给
劳动力市场	供给	需求

其中,家庭的决策来自于 Section 2.1.1, 企业的决策来自于 Section 2.4.1.

3.2.2 市场解

市场解的标准操作是：要素市场均衡 + 产品市场均衡。注意市场均衡意味着最大化效用或利润以及市场出清。

要素市场均衡的条件是：要素价格对"消费"和"生产"相等，并且要素市场出清（充分就业）。对于本模型，要素只有劳动力，也就是闲暇。其价格为工资。所以要素市场均衡的表现形式（在图中）为预算线和成本线的斜率相等（工资等于工资）；企业决策的使用劳动力数量和消费者决策的出工数量相等。应当回忆，无差异曲线是活动的，而和成本平行的曲线也是活动的，在预算线给定的情形下，有非零测度个要素市场均衡但是产品市场不均衡的情形（市场不出清）!

数学表达：$w^d = w^s, l^d = l^s, \pi = Y - w^d l$.

产品市场均衡的条件是：市场价格对企业和消费者相等，并且市场出清。我们在模型中已经设定了消费品的价格恒为 1，所以价格相等的条件可以不用检查。注意，在存在消费税时，需要检查。市场出清意味着企业决策得到的产品数量和消费者决策的消费数量相等。在产品市场均衡但是要素市场不均衡的情况下，生产在生产可能性边界上，但是无差异曲线和生产可能性边界是相交而不是相切!

数学表达：$zf(l) = Y = C$.

产品市场不均衡的例子是存在进出口或消费税，要素市场不均衡的例子是存在失业或劳动力流动，或工资补贴或所得税。

下面关注一阶条件。消费者（复制上文哦~）

$$0 = u_C - \lambda$$
$$0 = \lambda w - u_l$$
$$0 = wl + \pi - C$$

即

$$u_l = w^s u_C$$
$$C = w^s l^s + \pi$$

对于企业，

$$zf'(l^d) = w^d$$

化简，得到：

$$zf'(l) = w = \frac{u_l}{u_C}$$
$$C = Y = zf(l)$$

记住它，我们之后将和福利最大化解对比。

3.2.3 计划解

社会计划者解如下效用最大化问题：

$$\max_{C,l} u(C, l)$$
$$s, t, \; C \le Y = zf(l)$$

受到"资源约束"的控制。在计划解中，最重要也是最常见的约束就是资源约束，而在市场解中，它以各个市场的市场出清体现。

其一阶条件为

$$0 = u_C - \lambda$$
$$0 = \lambda zf'(l) - u_l$$
$$0 = zf(l) - C$$

即

$$zf'(l)u_C = u_l$$
$$C = zf(l)$$

为帕累托最优解。消费和产出相等（无浪费），休闲带来的边际效用恰好等于将这个微分时间用于工作得到的产出带来的边际效用。画在图上，即是生产可能性边界和无差异曲线的切点。

这个解与市场均衡相同！这就回到了福利经济学第一定理。

3.3 两期一般均衡

3.3.1 家庭，企业

家庭和企业具有跨期决策，如小节 2.3 2.6所述。

3.3.2 产品市场

产品市场的需求端是

$$Y^d = C + I + G$$

供给端是

$$Y^s = zF(K, L)$$

对于每一期都成立。

3.3.3 劳动力市场

供给端由家庭给出

$$L^s$$

by maximize utility.

需求端由企业给出

$$L^d$$

by maximize profit.

3.3.4 信贷市场

信贷市场均衡（可以由前两个市场均衡得到）

$$G - T + \frac{G' - T'}{1 + r} = 0$$

3.3.5 一般均衡

由于这里只有两期，并且结果是线性的，我们可以解出一般均衡的表达式。（先不解了）

Mathematica Code:

3.4 OLG 模型

我们接下来引入 OLG 模型。这里参考 Acemoglu [2009] Chapter 9, 进而自动引入了经济增长。

3.4.1 人口, 偏好和技术

在这个经济中，时间是离散的并且是无限期的。每个个体存活两期。

我们假定一个个体的一般的效用函数为

$$U_t(c_1(t), c_2(t+1)) = u(c_1(t)) + \rho u(c_2(t+1))$$

其中效用函数满足边际效用递减且恒正。这时两个时期的消费都是正常品，因为交叉项 $u_{c_1c_2} = 0$. 贴现率 ρ 取正数，也可以比较大，但一般来讲在 $(0, 1)$ 之间。

要素市场是竞争的。

个体只能在他们存活的第一期进行工作，并且提供了一个单位的劳动力，劳动力市场也给出了均衡的工资率 $w(t)$. 我们现在假定具有指数的人口增长 (如果考虑生育行为，可以考虑参考 Becker 2013 构建；具体的文献我也不知道), 那么

$$L(t) = (1+n)^t L(0) = e^{n't} L(0)$$

生产的另一个要素是资本品，并且生产函数具有规模收益不变、边际收益递减等性质：

$$Y = F(K, L)$$

一种简化是资本品的折旧率被假定为 1, 那么当期的资本品完全决定于上一期的储蓄率或者是决定于当期的储蓄率。

现在，要素价格（根据企业的跨期选择问题等等）

$$r(t) = F_K - \delta = f'(k) - \delta$$

$$w(t) = F_L = f(k) - kf'(k)$$

我们在后续实际上均假定了折旧率为 1. 否则有些东西无法运行。（主要是资本的转移交接问题，需要遗产效用等）

3.4.2 消费选择

消费者最大化跨期效用

$$\max_{c_1,c_2,s} u(c_1)+\rho u(c_2)$$
$$s.t.\ c_1(t)+s(t)\le w(t)$$
$$c_2(t+1)\le(1+r(t+1))s(t)$$

一阶条件为

$$u'(c_1)=\rho(1+r(t+1))u'(c_2)$$

特别的，取对数效用 $u=\log$, 那么

$$\frac{c_{2,t+1}}{c_{1,t}}=\rho(1+r_{t+1})$$

并且，储蓄

$$s(t)=s(w(t),r(t+1))$$

那么社会总储蓄

$$S(t)=s(t)L(t)$$

资本积累为

$$K(t+1)=(1-\delta)K(t)+L(t)s(w(t),r(t+1))$$

特别的，如果 $\delta=1$, 那么 $K(t+1)=S(t)$.

3.4.3 标准情形

我们首先计算标准情形，并提供解析解。

令 $u(c)=\log c$, $F(K,L)=K^\alpha L^{1-\alpha}$, $\delta=\delta=1$, 适当的时候取 1.

那么现在，

$$C=c_1(t)L(t)+c_2(t)L(t-1)$$

$$I=S=(w(t)-c_1(t))L(t)$$

$$C+I=Y$$

$$K(t+1)=(1-\delta)K(t)+I(t)$$

$$Y(t)=F(K(t),L(t))$$

根据消费的跨期选择，

$$\frac{c_{2,t+1}}{c_{1,t}} = \rho(1 + r_{t+1})$$

从而储蓄

$$s(t) = \frac{\rho}{1+\rho} w(t)$$

而工资率

$$w(t) = F_L = (1-\alpha)\frac{F}{L} = (1-\alpha)k^\alpha$$

where $k = \frac{K}{L}$.

那么，资本的动态方程为

$$K(t+1) = \frac{\beta\rho}{1+\rho} k^\alpha(t)L(t) + (1-\delta)K(t)$$

进而

$$k(t+1)(1+n) = k(t+1)\frac{L(t+1)}{L(t)} = \frac{\beta\rho}{1+\rho} k^\alpha(t) + (1-\delta)k(t)$$

也就是

$$k(t+1) = \frac{1}{1+n}\frac{\beta\rho}{1+\rho} k^\alpha(t) + \frac{1-\delta}{1+n}k(t)$$

这直接就给出了资本积累的动态方程。

我们注意到，上面式子的最大好处在于储蓄本身和利率无关，从而利率行为不影响资本积累动态。当然，利率行为会影响到消费在两代人之间如何分配的；但是无法影响消费和投资的分配。这一独立性是标准情况的最大好处。

3.4.4 动态稳定性

由于我们的个体都是两期个体，它们的行为已经自动满足无庞氏条件和横截条件。我们接下来关心在去除横截条件之后，资本积累的动态稳定性。直觉上应该是稳定的，事实上，注意到差分方程：

$$\Delta k(t) = \frac{1}{1+n}\frac{\beta\rho}{1+\rho} k^\alpha(t) - \frac{\delta}{1+n}k(t) - \frac{n}{1+n}k(t)$$

其稳定点唯一，方程为

$$0 = \frac{1}{1+n}\frac{\beta\rho}{1+\rho} k^\alpha - \frac{\delta+n}{1+n}k$$

从而

$$k^* = (\frac{\beta}{\delta+n}\frac{\rho}{1+\rho})^{\frac{1}{\beta}}$$

where $\beta = 1-\alpha$.

Then Jacobi 矩阵

$$\begin{aligned} J =& \frac{1}{1+n}(\frac{\alpha\beta\rho}{1+\rho}k^{-\beta} - (\delta+n)) \\ =& \frac{1}{1+n}(\frac{\alpha\beta\rho}{1+\rho}\frac{1+\rho}{\rho}\frac{\delta+n}{\beta} - (\delta+n)) \\ =& -\frac{\beta}{1+n}(\delta+n) < 0 \end{aligned}$$

从而均衡点附近局部稳定。

注意到系统是一维系统，且平衡点唯一、局部稳定，简单讨论可知这是全局稳定点。

从而证明了动态稳定性。

3.4.5 技术进步

我们接下来考察技术进步的情况。

存在技术进步时，对于生产函数 $F(K,AL) = K^\alpha(AL)^{1-\alpha}$, 考察 $k = \frac{K}{AL}$, 那么首先，工资率

$$w = F_L = (1-\alpha)A\frac{Y}{AL} = A(1-\alpha)k^\alpha$$

工资率的增长率会发生变化。

对于资本积累，注意到储蓄率

$$s(t) = \frac{\rho}{1+\rho}w(t)$$

那么

$$K(t+1) = \frac{\beta\rho}{1+\rho}k^\alpha(t)L(t)A(t) + (1-\delta)K(t)$$

这时，单位有效劳动资本积累方程变为了

$$k(t+1)(1+n)(1+g) = \frac{\beta\rho}{1+\rho}k^\alpha(t) + (1-\delta)k(t)$$

均衡点满足

$$k^* = (\frac{\beta}{n+g+\delta+ng}\frac{\rho}{1+\rho})^{\frac{1}{\beta}}$$

整体来讲没什么变化。和连续模型不同的是，在这里多出了 ng 项，这一项在小量情况和连续复利下容易被近似掉。

3.4.6 消费分配

我们接下来观察消费的分配。

对于消费行为，注意到

$$c_{1,t} = w_t - s_t$$

而

$$s_t = \frac{\rho}{1+\rho} w_t$$

那么

$$c_{1,t} = \frac{1}{1+\rho} w_t$$

并且储蓄率

$$\frac{S}{Y} = \frac{\rho}{1+\rho} \frac{wL}{Y} = \frac{(1-\alpha)\rho}{1+\rho}$$

而产出分配:

$$Y_t = F_L L_t + F_K K_t$$

从而有

$$c_{2,t} L_{t-1} = F_K K_t = \alpha Y_t$$

这造成了一定程度的扭曲。

3.4.7 帕累托最优

在平衡位置，帕累托最优意味着储蓄率

$$\frac{S}{Y} = \alpha - \rho \frac{K}{Y} = \alpha - \frac{\alpha\rho}{r}$$

观察储蓄率立刻知道市场解往往不是帕累托最优的, 并且首先是积累的非最优。

至于消费分配的最优问题，这可能比较难以判断；但是这个市场已经是失灵的了。对于这一失灵的解决方案，我们将通过社会保障等方法进行，具体见 5.6 以考察解决办法。

3.4.8 非标准情况

非标准情况下，我们的一阶条件表明

$$\frac{u'(c_{1,t})}{u'(c_{2,t+1})} = \rho(1 + r_{1+t})$$

那么可以解出年轻人储蓄

$$s_t = s(r_{1+t}, w_t) = s(k_t)$$

进而，

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n} s(k_t) - \frac{\delta + n}{1+n} k_t$$

只要 $s(k_t)$ 是凹的，并且满足稻田条件，就有动态稳定性和唯一解。

3.5 无限期一般均衡

这是所谓的 Ramsey-Cass-Koopman 模型。

3.6 两部门一般均衡 *

4 劳动力市场

4.1 单期一般均衡的比较静态分析

4.2 就业匹配模型（DMP）

4.2.1 活跃在劳动力市场的消费者与企业

消费者最大化效用……直接假定有一个需求函数，使得市场的预期报酬 P 和活跃在劳动力市场的就业人员 Q 具有一个关系 $P(Q)$.

企业招工成本为 k. 设不活跃在劳动力市场的企业不生产，并且积极企业的数量为 A.

4.2.2 匹配

成功找到工作的工人、企业成功招到工人，由匹配函数决定。具体到个人，在匹配发生前体现为概率形式。

$$M = em(Q, A)$$

where e 为匹配效率，em 为匹配函数。设函数有如下性质：

1. $em(xQ, xA) = xem(Q, A)$[规模收益]
2. $m(0, A) = m(Q, 0) = 0$[零化条件]
3. $em(Q, A) \leq \max\{Q, A\}$[最大值条件]
4. $m_Q > 0$, $m_A > 0$[单调递增条件]
5. $m_{QQ} < 0, m_{AA} < 0$[凹性条件（边际报酬递减）。更完善的为二阶导数矩阵是负定的]

4.2.3 消费者的最优化

对于一个消费者而言，匹配成功的概率为：

$$p_c = \frac{M}{Q} = \frac{em(Q, A)}{Q} = em(1, j)$$

where

$$j = \frac{A}{Q}$$

为劳动力市场紧张度。

预期报酬

$$P = p_c w + (1 - p_c)b = b + em(1, j)(w - b)$$

where b 为低保，w 为工资。

由于预期报酬和活跃工人数量之间有关系，所以满足

$$P(Q) = p_c w + (1 - p_c)b = b + em(1, j)(w - b)$$

4.2.4 企业的最优化

对于一个企业而言，匹配成功的概率为：

$$p_f = \frac{M}{A} = \frac{em(Q, A)}{A} = em(\frac{1}{j}, 1)$$

对于企业，其生产函数为

$$Y = zL$$

那么一个招收一个工人的产出为 z，企业所得利润为 $z - w$. 在劳动力市场的预期利润为

$$p_f(z - w) - k$$

自由进入条件表明，预期利润必然为 0.

$$p_f(z - w) - k = 0$$

$$em(\frac{1}{j}, 1) = \frac{k}{z - w}$$

4.2.5 工资

因为这里的生产函数比较愚蠢，边际报酬不变，工资必须通过纳什讨价还价得到。我觉得这有点古怪。

4.2.6 内生 Q and A

给定工资，由

$$em(\frac{1}{j}, 1) = \frac{k}{z - w}$$

j 被解出来了。

由

$$P(Q) = p_c w + (1 - p_c) b = b + em(1, j)(w - b)$$

Q 被解出来了。A 也就被解出来了。

这样，这个模型的全部内容被给定了。

4.2.7 均衡分析

注意到内生变量为:

$$P(Q) = b + em(1, j)(w - b)$$

$$\frac{1}{j} em(1, j) = em(\frac{1}{j}, 1) = \frac{k}{z - w}$$

其他都是外生的。记 $g(j) = m(1, j)$.

那么 Jacobbi 矩阵只有二维，比较好算。

$$F(Q, j, oths) = \begin{pmatrix} b + eg(j)(w - b) - P(Q) \\ \frac{k}{z-w} - e\frac{g(j)}{j} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.2.1}$$

$$\nabla_{\{Q,j\}} F = \begin{pmatrix} -P'(Q) & eg'(j)(w - b) \\ 0 & \frac{e}{j^2}(g(j) - jg'(j)) \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

$$(\nabla_{\{Q,j\}} F)^{-1} = \frac{j^2}{eP'(Q)(g - jg')} \begin{pmatrix} -\frac{1}{j^2} e(g - jg') & e(w - b)g' \\ 0 & P'(Q) \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

其他参数的影响:

$$\begin{pmatrix} eg \\ \frac{k}{(z-w)^2} \end{pmatrix} dw, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{(z-w)^2} \end{pmatrix} dz, \begin{pmatrix} 1 - eg \\ 0 \end{pmatrix} db, \begin{pmatrix} (w - b)g \\ -\frac{g}{j} \end{pmatrix} de$$

由隐函数定理:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\begin{pmatrix}Q\\ j\end{pmatrix}}{\partial w}=&\frac{j^2}{eP'(Q)(g-jg')}\begin{pmatrix}-\frac{1}{j^2}e(g-jg') & e(w-b)g'\\ 0 & P'(Q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}eg\\ \frac{k}{(z-w)^2}\end{pmatrix}\\
=&\frac{j^2}{eP'(Q)(g-jg')}\begin{pmatrix}-\frac{1}{j^2}e(g-jg')eg+e(w-b)g'\frac{k}{(z-w)^2}\\ P'(Q)\frac{k}{(z-w)^2}\end{pmatrix}\\
=&\frac{j^2}{eP'(Q)(g-jg')}\begin{pmatrix}-e(\frac{g}{j}-g')\frac{k(z-w)}{(z-w)^2}+eg'\frac{k(w-b)}{(z-w)^2}\\ P'(Q)\frac{k}{(z-w)^2}\end{pmatrix}\\
=&\frac{j^2}{eP'(Q)(g-jg')}\begin{pmatrix}-e\frac{g}{j}\frac{k(w-b)}{(z-w)^2}+eg'\frac{k(z-w)}{(z-w)^2}+eg'\frac{k(w-b)}{(z-w)^2}\\ P'(Q)\frac{k}{(z-w)^2}\end{pmatrix}\\
=&\frac{j^2}{eP'(Q)(g-jg')}\begin{pmatrix}-e\frac{g}{j}\frac{k(w-b)}{(z-w)^2}+eg'\frac{k(z-b)}{(z-w)^2}\\ P'(Q)\frac{k}{(z-w)^2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.2.4}
$$

上面值似乎不能判断正负，下面值为正。

讨价还价理论一般认为价格由工会等组织和企业讨价还价决定，而凯恩斯主义认为工资刚性。

4.3 动态 DMP Model

参考:

D.Romer 高宏 Section 10.6

Pissarides (1985)

Mortensen (1986)

Mortensen and Pissarides (1994)

Pissarides (2000)

4.3.1 基本假设

经济由工人和职位组成。工人数量为 1(连续体). 每个工人处于就业或失业。

就业工人产出 y 固定不变，工资为 w ，效用拟线性

闲暇的工人获得效用 b

折现率为 r

每个职位也有两种状态；有人负责时，产出为 y 劳动成本为 w 。维持职位的成本为 c

$E(t)$ 就业人数 $U(t)$ 失业人数

$F(t)$ 有人负责的岗位数 $V(t)$ 空缺岗位数

匹配函数

$$M(U,V)$$

下岗率 λ, 就业动态：

$$\dot{E}=M(U,V)-\lambda E$$

工资的结构参数 $\phi(t)$ 外生。即工人获得一部分剩余、厂商获得一部分剩余。

4.3.2 岗位价值和就业价值

接下来我们要计算岗位的价值。

为了计算岗位价值，我们需要引入保险公司来计算期望利润和期望价值。更详细的推导（这个部分的解释不太正确）请参见后文熊彼特模型的部分 16.1.2。这部分内容看时间和心情进行修正。

设一个有人负责的岗位的价值为 $V_F(t)$, 无人负责的岗位的价值为 $V_V(t)$. 每个瞬间，离职的概率为 λ, 就职的概率为 $\alpha(t)$. 那么，有人负责的岗位的价值（可以看成一种资产）的变化由如下方程决定：

$$\dot{V_F}=rV_F-\pi-\lambda(V_V-V_F)$$

其中，第一项 rV_F 是价值的贴现，$\pi=y-w-c$ 由于在每个时刻这个资产可以产生这么多利润，所以下一个时刻这些利润被释放后，这个资产的价值就变低了，$-\lambda(V_V-V_F)$ 表示每个瞬间有 λ 的概率离职造成的资产损失。

它的积分方程是

$$V_F(t)=\int_t^\infty(\pi(s)+\lambda(s)V_V(s))\exp\{-\int_t^s r(\tau)d\tau\}\exp\{-\int_t^s\lambda(\tau)d\tau\}ds$$

同理，

$$V_V(t)=\int_t^\infty(-c(s)+\alpha(s)V_F(s))\exp\{-\int_t^s r(\tau)d\tau\}\exp\{-\int_t^s\alpha(\tau)d\tau\}ds$$

$$\dot{V}_V = rV_V + c - \alpha(V_F - V_V)$$

设就业工人的价值为 V_E, 下岗工人的价值为 V_U, 找到工作的概率为 $a(t)$ (对于工人)

$$\dot{V}_E = rV_E - w + \lambda(V_E - V_U)$$

$$\dot{V}_U = rV_U - b + a(V_U - V_E)$$

4.3.3 就职概率和就业概率

假定 M 规模收益不变，并且是柯布道格拉斯的，$\theta = \frac{V}{U}$,

$$M = kU\theta^\gamma$$

就业概率（工作觅得率）为

$$a = \frac{M}{U} = k\theta^\gamma$$

就职概率（空缺填补率）为

$$\alpha = \frac{M}{V} = k\theta^{\gamma-1}$$

4.3.4 均衡

首先，工人数量的演化过程被刻画了,

$$\dot{E} = M(U,V) - \lambda E$$

其次，剩余间的分配表明

$$(1-\phi)(V_E - V_U) = \phi(V_F - V_V)$$

第三，空缺职位是可以被随意创造或消除的（自由进入），从而

$$V_V = 0$$

第四，四个价值的演化方程

$$\dot{V}_E = rV_E - w + \lambda(V_E - V_U)$$

$$\dot{V}_U = rV_U - b + a(V_U - V_E)$$

$$\dot{V}_V = rV_V + c - \alpha(V_F - V_V)$$

$$\dot{V_F} = rV_F - \pi - \lambda(V_V - V_F)$$

第五，模型的初始条件

$$E(0) = E_0$$

最后，价格的横截条件：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} V_i(t) = 0, \forall t$$

4.3.5 化简

令 $Q = V_E - V_U$, then

$$\dot{Q} = rQ - (w - b) + (\lambda + a)Q$$

Denote $V_F = P$, since $V_V = 0$, then

$$\alpha P = c$$

$$\dot{P} = rP - (y - w - b) + \lambda P$$

and

$$\phi P = (1 - \phi)Q$$

$$\dot{E} = a(\theta)(1 - E) - \lambda E$$

转化为增长率，

$$g_Q = r + \lambda + a - \frac{w - b}{Q}$$

$$g_P = r + \lambda - \frac{y - w - b}{P}$$

利用 $\phi P = \bar{\phi} Q$ (i.e. $Q = nP$), $\alpha P = c$,

$$-g_\alpha = r + \lambda - \frac{y - w(t) - b}{c}\alpha(\theta) = r + \lambda + a(\theta) - \frac{w(t) - b}{nc}\alpha(\theta)$$

$$\dot{E} = a(\theta)(1 - E) - \lambda E$$

现在化简到了三个变元的动力系统，其中变元 θ 和 w 是自治的.

注意到 θ 的运动条件中可以消去 w, 先表示出 w：

$$-\frac{y - w(t) - b}{c} = \frac{a(\theta)}{\alpha(\theta)} - \frac{w(t) - b}{nc}$$

$$\frac{n+1}{n}w(t) - \frac{b}{n} - y + b = c\theta(t)$$
$$w(t) = \theta(t)\phi c + \phi y - (2\phi - 1)b$$

接下来消去 w，

$$(1-\gamma)g_\theta = r + \lambda - \frac{(1-\phi)(y-2b)k}{c}\frac{1}{\theta^{1-\gamma}} + \phi k\theta^\gamma$$

* 目测法可以一眼看出这是一个正反馈系统，并且有唯一的平衡点。由于定价的横截条件，职位空缺也应该有横截条件。从而平衡位置是唯一解。

设唯一解为 θ^*, 工资也为 w^*. 这时的就业率动态是

$$\dot{E} = a^*(1-E) - \lambda E$$

是一个负反馈系统。收敛到就业率的平衡位置。

4.3.6 阶级斗争和提醒

上文中，直到方程

$$(1-\gamma)g_\theta = r + \lambda - \frac{(1-\phi)(y-2b)k}{c}\frac{1}{\theta^{1-\gamma}} + \phi k\theta^\gamma$$

都不依赖于其他变量是否是常数。

但是从 * 开始，依赖于方程是否自治。

对于含有动荡的阶级斗争的外生参数 $\phi(t)$, 这个方程的行为将受到这些其他路径参数的支配。注意到正反馈和横截条件（可以用类似我研究中用的方法证明），在给定路径参数的情况下解仍然是唯一的。

但是仍然可能有路径，从而导致一些其他收敛行为。

也可以用工资参数来刻画这一路径。注意：工资参数和就业率参数是独立的。

从而给出了新的工资参数设置的方法。

5　信贷市场、财政赤字和金融危机

5.1　完美信贷市场和李嘉图等价

5.1.1　模型设置

不考虑生产的具体行为，只考虑借贷行为。

我们计算无限期时间的情况。

一个人身上背负债券 b, 背负债券时要么债券会增殖（今天需要还 1 块，明天还 1.1 块，后天还 1.1^2 块，$\cdots$），个体也可以选择偿还部分债券

$$b_{t+1} = (1 + r_{t+1})b_t + q_t$$

where q_t 是购入的债券数量。q_t 为负时，相当于出售债券或者偿还。连续时间情况：

$$\dot{b} = rb + q$$

对于政府，它的行为应当是：

$$\dot{B}_g = rB_g + T - G$$

多余的钱用来购买债券，亏空的钱用来发行债券。

债券现值约束（也是无庞氏条件）：

$$\int_\tau^\infty b(t)\exp\{-\int_\tau^t r(s)ds\}dt = 0$$

or

$$\sum_{t=\tau}^\infty \frac{b_t}{\prod_{s=\tau}^t 1 + r_s} = 0$$

政府的跨期预算约束同理为

$$\int_\tau^\infty G(t)\exp\{-\int_\tau^t r(s)ds\}dt = \int_\tau^\infty T(t)\exp\{-\int_\tau^t r(s)ds\}dt$$

信用市场出清意味着：

$$\sum_{i\in\mathcal{F}} b_i(t) + B_g(t) = 0$$

即私人债券和国债的总和为 0.

产品市场出清意味着

$$Y(t) = C(t) + G(t) + I(t)$$

代表性家庭:

$$\max \int e^{-\rho t} u(c) dt$$
$$s.t. \dot{k} = rk + \pi - c - q - T$$
$$\dot{b} = rb + q$$

运动方程为

$$\dot{m} = rm + \pi - c - T$$

$$g_{u'(C)} = -(r - \rho)$$

5.1.2 一般均衡

市场出清条件表明

$$M = \sum_i m_i = \sum_i k_i + \sum_i b_i = K - B_g$$

收入法核算 GDP:

$$Y = \sum_i (rm_i + \pi_i - T_i) + rB_g + T + \delta K = rK + \delta K + \Pi$$

支出法核算 GDP:

$$Y = \sum_i c_i + G + I$$

信贷市场出清:

$$\sum_i q_i + T - G = 0$$

从而

$$\dot{K} = rK + \Pi - C - G$$

$$\dot{B}_h = rB_h + G - T$$

$$\dot{M} = rM + \Pi - C - T$$

5.1.3 李嘉图等价

加总社会财富，

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \dot{M} + \dot{B}_g \\ &=(rM + \Pi - C - T) + (rB_g + T - G) \\ &=rK + \Pi - C - G \\ &=Y - \delta K - C - G\end{aligned}$$

消费行为

$$\dot{C} = \sum_i g_{c_i} c_i = C(r - \rho)$$

从而和政府收税、债券行为无关，只和政府购买有关！（税收等价于发行债券）

5.1.4 李嘉图等价的条件

1. 消费增长率对所有消费者相同（税收变化 $\dot{T}_i$ 对每个消费者一样）
2. 大家都活着
3. 税收没有扭曲（收税成本为 0）
4. 完美信贷市场：
   (a) 没有消费者受到信贷限制
   (b) 没有信贷市场缺陷

5.2 信贷市场均衡条件

本节将给出信贷市场的利息率和资本租金-折旧率相等的原因。

消费者最大化跨期效用

$$\max \mathbb{E}_0\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, 1 - L_t)\}$$

with $\beta < 1$ and $u(C, 1 - L) = \log C_t + b \log(1 - L_t)$.

家庭在每一期选择购买债券，投资 (扩大股权) 和消费，资产的增值由如下方程给出：

$$I_t + C_t + B_{t+1} \leq w_t L_t + r_t K_t + R_t B_t + \pi_t$$

$$K_{t+1} \leq (1-\delta)K_t + I_t$$

$$K_t \geq 0$$

$$K_0 \; given, \; NPC$$

其中 B_t 为所购买的债券, K_t 为家庭所拥有的资本股权。

Lagrangian is:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, 1-L_t) \\ & + \lambda_t \theta_t^1 (w_t L_t + r_t K_t + R_t B_t + \pi_t - (I_t + C_t + B_{t+1})) \\ & + \lambda_t \theta_t^2 (1-\delta) K_t + I_t - K_{t+1})\end{aligned}$$

首先计算无套利约束:

$$0 = \mathcal{L}_{I_t} = \mathbb{E}_t \lambda_t (\theta_t^2 - \theta_t^1)$$

$$0 = \mathcal{L}_{K_{t+1}} = \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} (\theta_{t+1}^1 r_{t+1} - \theta_{t+1}^2 (1-\delta)) - \lambda_t \theta_t^2$$

$$0 = \mathcal{L}_{B_{t+1}} = \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} \theta_{t+1}^1 R_{t+1} - \lambda_t \theta_t^1$$

由内点解，可知 (Assume)

$$\theta_t^2 = \theta_t^1 = 1$$

then

$$\mathbb{E}_t \{\lambda_{t+1}(r_{t+1} - (1-\delta)) - \lambda_t\} = 0$$

$$\mathbb{E}_t \{\lambda_{t+1} R_{t+1} - \lambda_t\} = 0$$

从而债券价格的无套利条件为

$$\mathbb{E}_t i_{t+1} = \mathbb{E}_t R_{t+1} - 1 = \mathbb{E}_t r_{t+1} - \delta$$

where i_{t+1} 为债券的利息率。

5.3 一个简单的国家破产算法

国家的账户为

$$S^g = T - TR - INT - G$$

where T tax 税收，TR transfer 转移支付，INT 国债利息，G 政府购买。财政赤字是说基本剩余 $S_t^{pr} = T - TR - G$ 是负值的情形。

设真实 GDP 具有 g 的增长率，

$$Y_t = (1+g)^t Y_0$$

设基本剩余 S^{pr} 是真实经济的一个固定比例的值:

$$S_t^{pr} = a(1+g)^t Y_0$$

where a 是一个常数，可以正可以负。

设 B_t 为政府所购买的债券。那么

$$B_t = (1+r)B_{t-1} - a(1+g)^t Y_0$$

方向和我们上一个模型的方向一致。

政府债券将收敛于

$$B_t = \frac{-aY_0(1+g)^t}{g-r}$$

then

$$\frac{B_t}{Y_t} = \frac{-a}{g-r}$$

政府不背负太多债券，还需要总具有财政赤字的话，必须要 $g > r$. 这往往是比较困难的。

5.4 信息不对称、信贷市场缺陷和有限承诺

5.4.1 信息不对称、信贷市场缺陷

Introduction 信贷市场缺陷体现于债券价格遭到扭曲。这种扭曲体现为贷款利率低于借款利率。

交易双方所面临的价格不同，比较典型的情形是政府征税。不过，特殊到信贷市场上，这种扭曲一般不是由于征税，而是由于信息不对称所导致的。

信息不对称是指存在一些老赖，他们不会还款而是赖账，但是银行无法区分谁是老赖谁是好人，从而信誉好的借方需要向银行支付一笔违约溢价，这个违约溢价恰好就是利差。

我们依然考虑两期模型。贷款利率为 r_0, 借款利率为 r_1. 利差 $\Delta r = r_1 - r_0 > 0$. 这是因为所有个体必须通过银行进行发贷（储蓄）或者借贷（透支）。

政府进行征税，也许会进行政府购买或者再分配。

市场不出清的情况非常非常麻烦，希望以后有功夫可以仔细的做各种市场不出清的问题。

消费者: 为什么在存在利差的情况下福利会损失? 对于一个具有收入 y 的消费者，它的预算约束为:

$$c + s = y - t$$

$$c' = y' - t' + s(1 + r_0 + \chi_{s<0}\Delta r)$$

即储蓄为负是它是借方，储蓄为正时它是贷方。

从而预算约束为:

$$(y - c - t) + \frac{y' - c' - t'}{1 + r_0 + \chi_{s<0}\Delta r} \geq 0$$

通过画预算约束以及跨期消费的无差异曲线图像，可以发现，在存在利差的情况下，消费者的选择会更倾向于既不借款也不贷款。

这种情况下，很明显的并不满足边际条件。实际上，

$$1 + r_0 < MRS_{C,C'} < 1 + r_1$$

银行决策 存在 a 部分群体具有好的信用，而 $1 - a$ 部分群体则为老赖。

假定所有人都向银行借 L 的款（或者，预期有 a 部分借款被赖掉了。）

银行的利润为:

$$\pi = aL(1 + r_1) - L(1 + r_0) = L(a(1 + r_1) - (1 + r_0))$$

均衡状态下利润为 0. 从而

$$r_1 = \frac{1 + r_0}{1} - 1$$

5.4.2 有限承诺

模型设置 如何处理老赖?

机制设计：抵押品，比如房子

H: 个体的房子个数

p: 房价

Assumption: 房屋流动性差，当期不能出售。然而，以住房财富为抵押进行借贷是有可能的，但有附带的限制。

贷款额度不能超过房屋价值。

银行在这种情况下能够最大化利润。

消费者 消费者的预算约束为：

$$c+\frac{c'}{1+r}=y-t+\frac{y'-t'+pH}{1+r}$$

以及间接约束

$$-s(1+r)\leq pH$$

这种情况下，利差不再存在。

这种情况下的消费者预算约束变成梯形。但是福利要比利差的情形高一些。

房价突然下跌，也就是抵押品价值下降，那么当期消费会下降（一方面终身收入减少了，另一方面梯形的高缩水更快。）

5.5 房地产泡沫: Kiyotaki-Moore Model

Kiyotaki & Moore (1997)

信贷限制可能对经济造成的小冲击会放大许多倍，从而导致产出波动较大。

他们的模型之所以具有影响力，是因为早期的实际商业周期模型通常依赖于大型的外部冲击来解释总产出的波动。相反，Kiyotaki-Moore 模型显示了如果信贷市场不完善，相对较小的冲击就足以解释商业周期的波动。

可以参考：

Kiyotaki, Nobuhiro & Moore, John (1997). "Credit Cycles". Journal of Political Economy. [Kiyotaki and Moore, 1997]

Iacoviello, Matteo (2005). "House Prices, Borrowing Constraints, and Monetary Policy in the Business Cycle". American Economic Review. [Iacoviello, 2005]

两篇文章。Iacoviello is a student of Kiyotaki. 可以在 wiki 上找到后者的 pdf

由于是无限期模型，暂时不去抄录。考完试再看这个。

5.6 社会保障

5.6.1 Introduction

社会保障计划是政府提供的退休储蓄手段，用来纠正信贷市场失灵。

信贷市场失灵的一个集中体现在于所谓的动态无效率，这来源于 OLG 模型中，个体的数量是无限的、期限也是无限的。这一无效率的讨论已经在 3.4.7 中体现。

我们先介绍两个概念：

社会保障计划

1. 完全基金制 (Fully funded)
   - For each worker, the government invests the tax payments. 政府将征税用于投资。
   - 等效于强制储蓄
   - 越来越受欢迎
2. 现收现付制 (Pay-as-you-go)
   - 将对当期年轻人征的税直接转移支付给当期的老年人。

社会保障机制正是处理 OLG 模型中信贷-遗产市场具有外部性造成的帕累托无效率的政府机制。完全基金制是非常标准的机制，是政府替个体进行储蓄决策，强制多进行储蓄的机制。在完全基金制下面，个体的理想决策应当是 0 储蓄的。

接下来我们参考 Acemoglu 2009 Section 9.5 进行阐述。

（暂不更新）

5.6.2 完全基金社会保障

5.6.3 非基金保障

Part II

货币

6 货币的基本模型

6.1 货币的微观基础: 两厢情愿模型

6.2 货币跨期模型

6.2.1 银行的准备金：如何发行货币?

当政府向某个银行 i 增加 Δm_i 单位的准备金时，而银行具有 r 的法定准备金比率；那么，最终被创造出的货币为

$$\Delta M = \Delta m_i \sum_{n=0}^{\infty}(1-r)^n = \frac{\Delta m_i}{r}$$

6.2.2 信用卡、货币与定期存款

活期存款等价于纸币，利率非常低接近于 0. 在当代，活期存款和纸币作为交易手段的区别越来越小了，注意到平时使用支付宝的时候完全可以从银行卡的活期账户中直接提取出来金额。

定期存款时，消费者不能灵活的将金额从定期存款中转移出来。而信用卡则是反向的定期存款，会让消费者对银行产生每月结算的债务。

对于消费者，设一个月为一期，定期存款也是一个月一次结算。他在回合开始时拥有财富 K_t, 他选择现金数量 M_t 和定期存款数量 D_t. 他当期的消费为 C_t, 消费中超出现金的部分需要使用信用卡结算，从而在回合结束时他在信用卡上有债款 $X_t = \max\{C_t - M_t, 0\}$.

实际上，理性的消费者在一个月的支出不会有盈余。因为如果有盈余意味着有多余的现金，那么他在开始决策的时候就会将这些现金变为定期存款，以获得利润的增值。这个条件可以使用带角点的最优控制得到，这里仅仅通过文字描述得到。

消费者的货币需求 消费者在下一期开始时，会得到储蓄的增殖并且被动的偿还信用卡借款。那么预算约束为

$$K_{t+1} = Y_{t+1} + S_t(1+R_t) - X_t(1+q_t)$$

$$K_t = M_t + S_t$$

最优控制为

$$\max_{M,C} U(\{C_t\})$$

从而约束条件变为:

$$K_{t+1} = Y_{t+1} + (K_t - M_t)(1 + R_t) - (P_t C_t - M_t)(1 + q_t)$$

一个约束条件是对持有现金数量的边际收益为 0，即

$$\lambda_t(M_t(1 + q_t) - M_t(1 + R_t)) = 0$$

即

$$R_t = q_t$$

否则消费者会选择全部使用现金或者全部使用信用卡。

在这种情况下，消费者的现金需求为

$$M_t = P_t C_t - X_t$$

一般来说是正数。X_t 为均衡的信用卡账数量。

银行的信用卡供给 银行维护信用卡系统需要各种成本，从而信用卡的供给是有限的。而信用卡的收益是其回报率 q_t, 从而根据边际成本等于边际收益；而名义价格不影响信用卡的管理难度 (无非就是多一个零或者两个零而已)，可以得到信用卡的供给曲线

$$x_t^s(q_t) = \frac{X_t^s}{P_t}(q_t)$$

假定只有消费者进行信用卡记账，企业不被允许（他们本身就是从银行借钱）使用信用卡记账。政府则不需要，从而可以给出信用卡的均衡值

$$x_t^s(R_t) = x_t^* = x_t(R_t)$$

我们认为它具有向上的供给曲线，从而

$$x_t'(R_t) > 0$$

6.2.3 货币需求

企业的货币需求 企业的大宗货物贸易不允许使用信用卡。从而企业在回合开始时，向银行借的现金数量恰好是投资数量：

$$P_tI_t = M_t^f$$

在下一期需要进行偿还，从而由企业的边际回报率和市场利率之间有关系：

$$r_t + \delta_t = (\frac{\partial F}{\partial K})_t$$

总货币需求 企业和消费者的总货币需求为

$$P_tI_t + P_tC_t - X_t$$

如果计算入政府的货币需求，那么总货币需求为

$$P_tG_t + P_tI_t + P_tC_t - X_t$$

无论何种情况，总的货币需求都是

$$M_t^d = P_tY_t - X_t = P_t \cdot (Y_t - x_t(R_t))$$

我们将这一函数形式改写：

$$M_t^d = P_tL(Y_t, R_t)$$

其中 $L(\cdot,\cdot)$ 满足

$$L_Y > 0, L_R < 0$$

货币数量论 回顾货币数量论，我们有

$$MV = PY$$

即货币数量 * 周转速度 = 价格 * 总产出。

应当注意，货币数量论的经典公式是在没有信用卡这一金融创新的情形下给出的。当我们引入了信用卡，货币数量论的公式应当被转变为

$$MV = PL(Y, r)$$

推理如下：

注意左侧，货币数量的量纲是货币单位，而周转速度的量纲是时间的倒数，从而 MV 本身意味着单位时间内流通的货币。

注意我们的离散模型，给定一期的时间界限也就给定了所谓的单位时间，从而有

$$MV = M_t$$

也就是说，货币数量论的经典公式在含信用卡的情形中变为了

$$MV = P(Y - x(R)) = PL(Y, r)$$

周转速度在离散模型中意义不够大，因为我们可以人为给定周转时间，在连续模型中才能体现的比较好。但是因为我们主要讨论经济波动，而连续模型中讨论摩擦是非常困难的事情，并且可能有许多非常糟糕的结果，所以我们考虑离散模型并且去除周转速度。

6.2.4 货币供给和政府预算平衡

政府在每一期可以进行如下决策：进行税收、进行政府支出、发行债券、印钱。印钱本身意味着新增货币。

政府的预算平衡为：

$$P_tG_t + (1 + R_{t-1})B_{t-1} = P_tT_t + B_t + \Delta M_t$$

左边为支出，政府需要进行政府购买，并且偿还上一期的债券（如果不偿还，等价于政府同时买入了相应的这一期的债券）。右边为收入，税收收入、债券所得的收入、政府 (悄悄地或者是明目张胆的) 印钱得到的收入。

对于三十年代的德国政府，其有大量的债券需要偿还，从而左边的第二项非常大，而税收和购入的债券却完全跟不上，以至于它必须大量引发钞票，即提供一个非常大的 ΔM_t 以平衡预算。

货币只能从政府手里流出，从而政府印钱数量就是货币供给的增加数量：

$$\Delta M_t = M_t^s - M_{t-1}^s$$

6.2.5 货币均衡

由于对于市场上的其他 Player 而言，政府的行为是外生的 (什么时候对于其他 Player 而言也是内生的？参考 (新) 政治经济学！)，从而货币市

场上有一个外生的货币供给，由政府的行为决定：

$$M_t^s$$

当然，政府也可以采用不同的货币供给规则，并且将信息公开或不公开，那么这种情况下，货币供给可能也是价格水平、产出、利率等的函数。

$$M_t^s(P_t,\cdots)$$

货币市场均衡意味着

$$M_t^s(P_t,\cdots)=M_t^d=P_tL(Y_t,R_t)$$

在货币供给外生决定的情况下，实际经济行为和预期的通货膨胀（注意 $R_t\approx\frac{\mathbb{E}_tP_{t+1}-P_t}{P_t}+r_t$）完全决定了实际货币需求。特别的，如果假定预期通货膨胀为 0, 那么货币市场均衡可以决定出当期的价格水平：

$$P_t=\frac{M_t^s}{L(Y_t,r_t)}$$

并且货币行为只影响当期价格水平，不影响实际经济运行，从而得到了古典二分法。

如果是传统凯恩斯主义，价格水平是刚性的并且假定通胀为 0，我们就得到了传统的 LM 曲线

$$M=PL(Y,r)$$

and P given.

6.2.6 零名义利润和流动性陷阱

我们接下来考察名义利润

$$R_t=0$$

的特殊情况，以及此情形下的各个曲线。

首先，名义利润为 0 意味着银行不会提供信用卡服务，因为信用卡服务必然具有成本，而无套利条件表明信用卡利率和定期存款利率相等，都为 0. 这时，我们观察消费者的决策。

消费者 消费者在每期开始时具有财产 K_t, 在这个时候，它选择取出一定数量的现金进行消费，将另一部分纳入定期存款和储蓄，即

$$K_t = S_t + M_t$$

接下来它进行消费，多余的持有现金的数量为 $M_t - P_tC_t$.

那么下一期的财产数量是

$$K_{t+1} = S_t(1+R_t) + M_t - P_tC_t$$

在 $R_t > 0$ 的情况下，消费者必然选择角点解：

$$M_t = P_tC_t, \forall R_t > 0$$

但是 $R_t = 0$ 时，消费者可以选择内点解，只需要满足角点条件

$$M_t \geq P_tC_t, \text{ for } R_t = 0$$

从而得到了一个关于 R 的货币需求曲线：R 越大，货币需求越小。特别的，当 R 等于 0 时，$M > PC$ 都是可行的货币需求。

货币需求 总的货币需求为

$$M_t^d = M_t + P_tI_t \geq P_tY_t$$

从而货币需求集合为

$$\{M^d : M^d \geq PY\}$$

它是一个无边界的"三角"区域。

如果假定存在一个先验的价格水平，它如果正是均衡情况的价格水平就不会改变，那么我们得到了一个先以斜率 $M^d \sim PY$ 上升，而后呈现水平直线 $M^d \geq P^*Y$, for $P = P^*$ 的货币需求曲线。

在这种情况下（水平的货币需求曲线上），增加货币供给不会改变价格水平；从而导致产生了流动性陷阱。

6.3 货币效用模型 (MIU)

6.4 Diamond-Dybvig Banking and Bank Run Model

7 货币先行模型 (CIA)

7.1 货币先行模型 I

模型的本质特征：加在消费上的 CIA 约束

7.1.1 基本模型

环境 市场中有三个主体：家庭、企业和政府。在这里，我们假定政府以铸币税发行货币，并征收一定量的人头税，并用此支付政府购买 G. 在第一阶段的问题中，我们假定政府购买 $G+T$ 用于公共服务，家庭的效用

$$u = \log C + \log(G+T) - bL$$

家庭、企业求解各自的最大化问题，而政府追求最优货币政策与财政政策。

每个时刻 t 开始时，家庭持有来自上期的货币 M_t 和资本品 K_t.

第一阶段 回合的第一阶段是生产阶段。家庭选择家庭的劳动时长 L, 并且将自己的资本品租赁出去。但是租金和工资并不先付，而是后付；并且不签订有关工资和租金价格的任何协议。

这个阶段，企业租赁资本、雇佣劳动力进行生产。

注意，由于政府通过铸币税来增加货币供给，在这个时候家庭还不知道货币政策的意外信息。

第二阶段 回合的第二阶段是产品市场开放阶段。

- 家庭
  - 使用上期存留的现金购买商品，$P_tC_t \le M_t$
  - 签订投资协议，将剩余的商品在支付工资和租金时按照价格用实物支付。
- 企业
  - 卖出部分商品
  - 剩余的商品签订投资协议
- 政府

- 印刷货币，购买商品 G_t
- 通过税收购买商品 T_t，这部分在要素市场开放时征收并且偿还，这里签订的是协议。

第三阶段　要素市场开放阶段

- 家庭
  - 完成投资，$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$
  - 获得要素收入
  - 被征收人头税
  - 完成货币储蓄 $M_{t+1} + P_t I_t = M_t - P_t C_t + P_t r_t K_t + P_t w_t L_t - P_t T_t$
- 企业
  - 偿还全部内容
  - $C_t + I_t + \frac{G_t}{P_t} + T_t = Y_t = r_t K_t + w_t L_t$
- 政府
  - 平衡预算，$G_t + P_t T_t = P_t(Y_t - I_t - C_t)$

家庭行为　由于公共服务对家庭而言外生，所以只需要最大化自己的劳动力就可以了。

我们从 t 时刻开始解方程，特别要关心 $t, t+1$ 时刻的信息如何。

$$\begin{aligned}
\max_{C,L,K,M,I} & \mathbb{E}_\tau \beta^t (\log C_t - bL_t) \\
s.t.\, & K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t \\
& M_{t+1} - M_t = P_t(r_t K_t + w_t L_t - T_t - C_t - I_t) \\
& M_t \geq P_t C_t \\
& M_\tau = 0 \\
& NPC
\end{aligned}$$

其最大化时，

$$
\begin{aligned}
0 = \mathcal{L}_{L_t} &= -b\beta^t + \mathbb{E}_{t-1}\{\mu_t P_t w_t\} \\
0 = \mathcal{L}_{C_t} &= \beta^t \log C_t - \mathbb{E}_{t-1}\{\mu_t P_t + \nu_t P_t\} \\
0 = \mathcal{L}_{I_t} &= \mathbb{E}_t\{\lambda_t - \mu_t P_t\} \\
0 = \mathcal{L}_{K_t} &= \mathbb{E}_{t-1}\{\lambda_t(1-\delta) + \mu_t r_t P_t - \lambda_{t-1}\} \\
0 = \mathcal{L}_{M_t} &= \mathbb{E}_{t-1}\{\mu_t - \mu_{t-1} + \nu_t\} \\
0 &= P_t C_t - M_t
\end{aligned}
$$

7.1.2 连续模型

连续的 CIA 约束：$vM \geq \ldots$ where v 为货币周转速度。

为了和增长模型形成直接对比，我这里舍弃波动模型常用的闲暇效用，而是采用固定劳动力总供给的方式。

家庭

$$
\begin{aligned}
\max_{C,I} \; & \int_0^\infty e^{-\rho t} \log C dt \\
s.t. \; & \dot{K} = I - \delta K \\
& \dot{M} = P(rK + wL - T - C - I) \\
& vM \geq PC \\
& M(0) = M_0, K(0) = K_0, NPC
\end{aligned}
$$

这里的 v 是获得收入的速度，也就是货币周转的速度。

其哈密顿函数为

$$
\mathcal{H} = e^{-\rho t} \log C + \lambda(I - \delta K) + \mu P(rK + wL - T - C - I) + \nu(vM - PC)
$$

一阶条件

$$
\begin{aligned}
0 = \mathcal{H}_C &= e^{-\rho t}\frac{1}{C} - \mu P - \nu P \\
0 = \mathcal{H}_I &= \lambda - \mu P \\
-\dot{\lambda} = \mathcal{H}_K &= \lambda(r - \delta) \\
-\dot{\mu} = \mathcal{H}_M &= \nu v \\
0 &= \nu(vM - PC)
\end{aligned}
$$

化简：

$$\frac{1}{v}(r-\delta+g_P)=\pi$$

$$g_C+g_{1+\pi}=r-\delta-\rho$$

$$vM=PC$$

由于 r,v,δ,g_P 对于家庭而言是外生的，所以 $\pi\coloneqq\frac{1}{v}(r-\delta+g_P)$ 是一个外生路径 for 家庭。从而上面的方程决定了消费行为。

企业、政府，一般均衡 企业的一阶条件

$$Y_K=r$$

$$Y_L=w$$

产品的一般均衡

$$Y=C+I+G+T$$

货币的一般均衡

$$\dot{M}=G$$

经济动态

$$Y_L=w$$

$$Y=C+I+G+T$$

$$Y_K=r$$

$$\dot{M}=G$$

$$\dot{K}=Y-C-G-T-\delta K$$

$$\frac{1}{v}(r-\delta+g_P)=\pi$$

$$g_C+g_{1+\pi}=r-\delta-\rho$$

$$vM=PC$$

首先，独立变量 $Y_L=w$, $I=Y-C-G-T$
不妨设 $L=1$, $Y=A^{1-\alpha}K^{\alpha}$.
对于外生政府而言，$G(t),T(t)$ 外生从而 $M(t)$ 外生.
在本模型，暂时不讨论金融创新。货币周转速度 v 外生给定。

那么

$$g_P + g_C$$

也外生了。

其他的直接组成经济动态。如果稳定，那么自治的系统表明有 BGP。

帕累托最优 计划者最大化社会福利

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}(\log C + \log H)dt$$
$$\dot{K} = F(K, L) - C - H - \delta K$$

从而

$$C = H, g_C = Y_K - \delta - \rho$$

最优政策

$$Y_K = r$$
$$\dot{M} = G$$
$$\dot{K} = Y - C - G - T - \delta K$$
$$\frac{1}{v}(r - \delta + g_P) = \pi$$
$$g_C + g_{1+\pi} = r - \delta - \rho$$
$$vM = PC$$

最优政策要求 $g_C = r - \delta - \rho$, 从而 $\pi = \text{const}$, 从而 $r + g_P = \text{const}$.

另外，$G + T = C$.

我们可以继续采用上三角方法。首先解出货币政策，再通过给定的货币政策路径解出财政政策。只需要最后满足

$$T = C - G$$

对于货币政策，我们需要

$$g_M = g_P + r - \delta - \rho = \text{const}$$

从而需要一个常数增长率的货币。

反过来，如果有常数增长率的货币，

$$g_C = Y_K - \delta - \rho$$

从而直接成为最优。

在这个模型中，货币是超中性的，常数增长率的货币都是最优货币政策。

7.1.3 政府支出用于技术增长

设政府支出用于技术增长，

$$\dot{A} = G + T$$

帕累托最优

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \log C dt \\
&\dot{K} = F(K, A) - C - H - \delta K \\
&\dot{A} = H
\end{aligned}$$

then

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \log C + \lambda(A^{1-\alpha} K^\alpha - C - H - \delta K) + \mu H$$

从而

$$g_C = Y_K - \delta - \rho$$

$$\lambda = \mu$$

$$-g_\lambda = Y_K, -g_\mu = Y_A$$

有点麻烦不想算了

7.1.4 公开市场操作

环境 家庭具有三个成员：

- 生产者：负责生产 or 出卖劳动力和出租资本
- 商品购买者：负责购买价格为 P_t 的商品，他的预算约束为 $P_t C_t \leq M_t - Z_t$
- 债券购买者：负责购买债券，价格为 q_t, 预算约束为 $q_t B_t \leq Z_t$.

期初，家庭选择 C_t, Z_t, 而 N_t 来自于上期。

第一阶段 首先是家庭决策和商品生产阶段，家庭决定当期劳动供给、当期资本出租，企业进行商品生产

第二阶段 产品市场和当期债券市场同时开放。

家庭购买 q_tZ_t 数量的当期债券，并且购买 P_tC_t 的消费品。CIA 约束为 $q_tZ_t + P_tC_t \le M_t$

政府发放了一部分债券，数量为 X_t. 从而 $\sum_{i\in\mathcal{H}} Z_t = X_t$.

第三阶段 要素市场开放和当期债券市场偿还阶段

企业将要素报酬归还家庭，家庭进行投资，当期债券得到偿还。

家庭的预算约束为

$$M_{t+1} + P_tI_t = M_t - q_tZ_t - P_tC_t + P_tY_t + Z_t$$

货币均衡

$$M_{t+1} - M_t = (1-q_t)\sum_{i\in\mathcal{H}} Z_t = (1-q_t)X_t$$

这是货币增长的市场出清

（这个模型更适合用于下面的要素预付货币先行模型）

7.2 货币先行模型 II

模型的本质特征：加在生产上的 CIA 约束

7.2.1 基本模型 1

产品市场和还款市场同时开放，要素市场和借款市场先后开放。

环境 和加在消费上的 CIA 约束相反，在这个模型中，首先开放要素市场和短期债券市场，然后生产，最后开放产品市场。

两个模型的不同在于这个模型更加基于资本的逻辑，其实也更贴合现实。而这个模型造成的无效率要远比之前更广泛。

在每一期开始时，家庭持有来自上期的资本 K_t 和来自上期的货币 M_t

第一阶段 当期债券市场的借贷阶段开放

- 家庭
  - 将一部分货币 H_t 贷款给企业作为营运资本
  - 将一部分货币用于购买当期债券 Z_t
  - 家庭的 CIA 约束为 $Z_t + H_t \leq M_t$
- 企业
  - 向家庭和政府借债（简化起见，消除多角债务，只向家庭借债）作为营运资本
- 政府
  - 发行债券（公开市场操作）G_t
- 债券市场均衡
  - $H_t = W_t L_t + R_t K_t$
  - $\sum Z_t = G_t$

第二阶段 要素市场开放

- 企业
  - 雇佣劳动力、租赁资本并支付要素报酬
- 家庭
  - 出卖劳动力，并获得预付的工资报酬 $W_t L_t$
  - 将资本出租，并获得预付的租金 $R_t K_t$

第三阶段 生产。家庭和政府在这个阶段没有操作。

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

第四阶段 产品市场开放，当期债券市场的偿还阶段开放

- 家庭
  - 获得债券收入 $(1+\pi_t)(Z_t+H_t)$
  - 进行消费 $-P_tC_t$
  - 进行投资 $-P_tI_t$, $K_{t+1}-K_t=I_t-\delta K_t$
  - 将留存的货币代入下一期
  - $M_{t+1}=\pi_t(Z_t+H_t)+M_t+W_tL_t+R_tK_t-P_tC_t-P_tI_t$
- 企业
  - 卖出商品
  - 偿还债券
  - $PY-(1+\pi)(RK+WL)$
- 政府
  - 偿还债券 $(1+\pi)G$
- 货币市场均衡：$M_{t+1}-M_t=\pi_tG_t$ (in Total Sociaty)

7.2.2 连续模型 1

家庭行为

$$
\begin{aligned}
&\max_{C,I,Z,H}\int_0^\infty e^{-\rho t}\log C dt\\
&s.t.\ \dot{K}=I-\delta K\\
&\qquad \dot{M}=\pi(Z+H)+P(wL+rK-C-I)\\
&\qquad vM\geq Z+H
\end{aligned}
$$

哈密顿函数

$$
\mathcal{H}=e^{-\rho t}\log C+\lambda(I-\delta K)+\mu(\pi(Z+H)+P(wL+rK-C-I))+\nu(vM-Z-H)
$$

一阶条件

$$e^{-\rho t}\frac{1}{C}=\mu P$$
$$\lambda=\mu P$$
$$\mu\pi=\nu$$
$$-\dot{\lambda}=\lambda(r-\delta)$$
$$-\dot{\mu}=\mu v\pi$$

动态:

$$g_C=r-\delta$$

$$v\pi=r-\delta+g_P$$

$$vM=Z+H$$

一般均衡　产品市场均衡

$$Y=C+I$$

要素市场均衡

$$Y_K=(1+\pi)r,Y_L=(1+\pi)w$$

信贷市场均衡

$$\dot{M}=\pi Z$$

家庭行为

$$g_C=(1+\pi)r-\delta$$

$$v\pi=r-\delta+g_P$$

$$vM=Z+H$$

$$\dot{K}=Y-C-\delta K$$

$$Y=(1+\pi)H$$

化简　Step1 工资和劳动力具有独立性，将工资独立：$Y_L = (1+\pi)w$. 其余方程为：

$$Y = C + I$$

$$Y_K = (1+\pi)r$$

$$\dot{M} = \pi Z$$

$$g_C = r - \delta$$

$$v\pi = r - \delta + g_P$$

$$vM = Z + H$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

$$Y = (1+\pi)H$$

Step2 消去 Z 和 H

$$Y_K = (1+\pi)r$$

$$g_C = r - \delta$$

$$v\pi = r - \delta + g_P$$

$$v\pi M - \dot{M} = \frac{\pi}{1+\pi}Y$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

Step3 观察发现 g_P 独立。于是通胀方程独立，为

$$v\pi = r - \delta + g_P$$

其余方程为

$$Y_K = (1+\pi)r$$

$$g_C = r - \delta$$

$$v\pi M - \dot{M} = \frac{\pi}{1+\pi}Y$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

Step4 观察，抓手为 M, K, C; 中间变量为 Y, π, r. 另外，$M(t)$ 是外生的。从而 $M(t)$ 路径可以决定利润率 π, 进而其他变量被决定。

BGP 和最优货币政策 设技术增长率为 g, 我们观察 BGP 下的货币增长.

此时，$g_Y = g_K = g_C = g$.

$$v\pi - g_M = \frac{\pi}{1+\pi}\frac{Y}{M}$$

如果要让 π 为定值，必须有

$$g_M = g$$

或者

$$g_M = 0$$

此时，π 被 $\frac{Y}{M}$ 决定，或者 $\pi = 0$. π 被决定后，一方面可以算出 BGP 的各个量，另一方面可以算出通胀率 g_P.

在最优经济中，$\pi = 0$ 并且 $g_P = -(r-\delta)$, 并且 $Z = -H$. 也就是家庭停止使用货币购买债券，企业融资全部来自政府。而政府的债券没有利率，从而没有货币进入市场。

这是 vM 不变而 $g_P + g_Y = 0$ 的货币政策，是最理想的情况。

7.2.3 模型 2

要素市场和借款市场同时开放，产品市场和还款市场先后开放。

环境

第一阶段 要素市场和借款市场同时开放。

- 家庭:
  - 购买当期债券 H_t
  - 租出资本并出卖劳动力 $R_tK_t + W_tL_t$
- 企业:
  - 发放债券 $R_tK_t + W_tL_t$
  - 用发行的债券换得的货币支付要素报酬
- 政府
  - 发放债券 Z_t
  - $H_t = R_tK_t + W_tL_t + Z_t$

第二阶段 产品市场开放

- 家庭
  - 购买消费品
  - CIA 约束:$R_tK_t + W_tL_t + M_t \geq H_t + P_tC_t$

第三阶段 投资阶段开放,并开放债券市场的还款阶段

- 家庭
  - 预算约束:$M_{t+1} - M_t = \pi_t H_t + R_tK_t + W_tL_t - P_tC_t - P_tI_t$
  - 投资方程:$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$

家庭行为 家庭最大化问题

$$\begin{aligned}
&\max_{C,I,H} U[C(t)] \\
&s.t.\ \dot{K} = I - \delta K \\
&\qquad \dot{M} = \pi H + P(wL + rK - C - I) \\
&\qquad M + P(rK + wL) \geq H + PC
\end{aligned}$$

一阶条件

$$
\begin{aligned}
{}_C\ & 0 = e^{-\rho t}u'(C) - P\mu - P\nu \\
{}_I\ & 0 = \lambda - P\mu \\
{}_H\ & 0 = \pi\mu - \nu \\
{}_K\ & -\dot{\lambda} = -\lambda\delta + \mu Pr + \nu Pr \\
{}_M\ & -\dot{\mu} = \nu
\end{aligned}
$$

化简

$$
\begin{aligned}
& Y_K - \delta = \pi - g_P \\
& g_C + g_{1+\pi} = Y_K - \delta - \rho
\end{aligned}
$$

一般均衡

$$
\begin{aligned}
& \dot{M} = \pi Z \\
& H = P\frac{Y}{1+\pi} + Z \\
& \dot{K} = Y - C - \delta K \\
& g_C + g_{1+\pi} = Y_K - \delta - \rho \\
& Y_K - \delta = \pi - g_P \\
& M - Z = PC
\end{aligned}
$$

观察，立刻独立一项 $H = P\frac{Y}{1+\pi} + Z$
接下来，令 g_{M-Z} 恒定为 j，那么 $\dot{M} - \dot{Z} = jM - jZ$
$g_C + g_P = j$, then $g_{1+\pi} = \pi - \rho - j$.
Then $\pi = \rho + j$ 恒定，从而
$g_C = Y_K - \delta - \rho$ 最优。仍然是常数增长最优。

7.2.4 模型 3 双约束

借款-要素-产品-还款

$$
\begin{aligned}
&M \geq H \\
&M - H + P(rK + wL) \geq PC \\
&\dot{M} = \pi H + P(wL + rK - C - I) \\
&\dot{K} = I - \delta K \\
&\mathcal{H} = e^{-\rho t}\log C + \lambda(I - \delta K) + \xi(M - H + P(rK + wL - C)) \\
&\quad\quad + \mu(\pi H + P(wL + rK - C - I)) + \nu(M - H)
\end{aligned}
$$

FOC

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} =& e^{-\rho t}\log C + \lambda(I - \delta K) + \xi(M - H + P(rK + wL - C)) \\
&+ \mu(\pi H + P(wL + rK - C - I)) + \nu(M - H) \\
e^{-\rho t}\frac{1}{C} =& P(\mu + \xi) \\
-\dot{\lambda} =& \mu P r - \lambda\delta + \xi P r \\
-\dot{\mu} =& \nu + \xi \\
\mu\pi =& \nu + \xi \\
\lambda =& P\mu
\end{aligned}
$$

7.2.5 模型 4 家庭有三个成员

家庭有三个成员，一个负责持来自上期的货币进行消费，一个负责持来自上期的货币购买债券，一个负责管理资本品、出卖劳动力。

预算约束不变，货币约束为：

$$M_t \geq H_t + P_t C_t$$

这种情况下是允许要素预付的，不过比较奇怪的是要素报酬的发放在消费前（在离散模型中）。

在连续模型中这些问题比较圆润。

另一种故事是：家庭在收入到手时立刻选择持有跨期债券/资本还是持有货币，然后货币可以用来干嘛干嘛。

家庭行为

$$\max_{C,I,H} U[C(t)]$$
$$s.t.\ \dot{K} = I - \delta K$$
$$\dot{M} = \pi H + P(wL + rK - C - I)$$
$$M \geq H + PC$$

一阶条件

$$_C\ 0 = e^{-\rho t}u'(C) - P\mu - P\nu$$
$$_I\ 0 = \lambda - P\mu$$
$$_H\ 0 = \pi\mu - \nu$$
$$_K\ -\dot{\lambda} = -\lambda\delta + \mu P r$$
$$_M\ -\dot{\mu} = \nu$$

化简

$$r - \delta = \pi - g_P$$
$$g_C + g_{1+\pi} = r - \delta - \rho$$

一般均衡

$$\dot{M} = \pi Z$$
$$H = P\frac{Y}{1+\pi} + Z$$
$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$
$$g_C + g_{1+\pi} = r - \delta - \rho$$
$$r - \delta = \pi - g_P$$
$$M - Z = PC$$

这种情况仍然是紧缩最优 $\pi = 0$

家庭的流动性完全依赖于政府在收回货币过程中所提供的短期反向流动性，来满足消费的需要。

进行化简，由于 M and Z 由政府给出，记 $g_P + g_C = j$, then

$$r - \delta = \pi + g_C - j$$

$$g_C + g_{1+\pi} = r - \delta - \rho$$

then

$$g_{1+\pi} = \pi - \rho - j$$

令 $1+\pi=\alpha$, $\pi=\alpha-1<0$, then

$$\alpha-1-\rho=j$$

此时,

$$r=\frac{1}{\alpha}Y_K=A$$

$$g_C=A-\delta-\rho$$

而在罗默外溢模型中有效。

7.3 货币线性模型 III: 金融中介和工资预付的营运资本

7.3.1 模型设置和各主体的求解问题

环境 市场中有四个主体：家庭、企业、金融中介和中央银行。

在每个时刻 t 开始时, 家庭持有来自上期的货币 M_t.

第一阶段 回合的第一个阶段是劳动力市场和营运贷款市场开放。在这一阶段:

- 家庭
  - 选择自己的劳动时长（或就业率）h，并获得工资 Pw
  - 选择将来自上期的货币和工资的一部分 N_t 贷出给金融中介
  - 选择留存一定数量的货币 M_t-N_t
- 企业
  - 雇佣劳动力
  - 向金融中介贷款 $P_tw_th_t$
  - 将从金融中介贷来的款项作为工资支付给工人
- 金融中介
  - 收到来自中央银行的新印货币 G_t
  - 收到来自家庭的贷款（但是需要偿还）（向家庭贷款）N_t
  - 贷款给企业 G_t+N_t

- 中央银行
  - 直接印发货币 G_t，转移给金融中介

第一阶段完成后，企业进行生产

第二阶段 回合的第二阶段是生产完成后，产品市场开放。

- 家庭
  - 利用现金购买商品进行商品消费 $P_tC_t + N_t \leq M_t + P_tw_th_t$
  - 将本回合剩余的收入（但暂时不是现金）作为投资，并立据
- 企业
  - 将全部商品要么卖出，要么转化为可以偿还资本租金或者向金融机构所贷款项的流通物 P_tY_t

第三阶段 回合的第三阶段，营运贷款市场的偿还阶段开放，跨期债券市场开放，资本租赁市场开放。

- 家庭
  - 收到资本租金 $P_tr_tK_t$
  - 收到第一阶段贷款的本金和利息 $N_t(1 + r_t^n)$
  - 收到债券利息 $(1 + i_t)B_t$ (我们将省略这一项)
  - 进行投资 I_t
  - 购买债券 B_{t+1}
  - 留存有一定的货币，进入下一期 M_{t+1}
  - $M_{t+1} + I_t = M_t + P_tw_th_t - N_t - P_tC_t + N_t(1 + r_t^n) + P_tr_tK_t$
  - $K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$
- 企业
  - 向家庭偿还资本租金 $P_tr_tK_t$
  - 向金融机构偿还营运资本的本金和利息 $(1 + r_t^f)P_tw_th_t$
- 金融机构

– 向家庭偿还营运资本的本金和利息 $(1+r_t^n)N_t$

– 收到来自企业的营运资本的本金和利息 $(1+r_t^f)(N_t+G_t)$

主体问题 家庭最大化如下效用最大化问题:

$$\begin{aligned}\max_{C_t,I_t,h_t,K_t,M_t} & \sum_{t=0}^{\infty}\mathbb{E}\beta^t u(C_t,1-h_t)\\ s.t.\ & P_tC_t+N_t\leq M_t+P_tw_th_t\\ & M_{t+1}+P_tI_t=M_t+P_tw_th_t-P_tC_t\\ & \qquad +N_tr_t^n+P_tr_tK_t\\ & K_{t+1}-K_t=I_t-\delta K_t\\ & K_0=K_0,M_0=M_0\\ & NPC\end{aligned}$$

竞争性企业的一阶条件是

$$(1+r_t^f)w_th_t=Y_L$$

$$r_tK_t=Y_K$$

金融机构是零利润的，其预算约束为

$$(1+r_t^n)N_t=(1+r_t^f)(N_t+G_t)$$

市场出清 金融市场出清为

$$N_t+G_t=P_tw_th_t$$

产品市场出清

$$Y_t=C_t+I_t$$

最后，可以推出货币市场出清:

$$M_{t+1}-M_t=G_t$$

7.3.2 连续模型

家庭

$$
\begin{aligned}
\max_{C,I,L,K,M} \int_0^\infty & e^{-\rho t}(\log C - bL)dt \\
s.t.\ & PC + N \le M + PwL \\
& \dot{M} = PwL + PrK - PC - PI + Nr^n \\
& \dot{K} = I - \delta K \\
& K(0) = K_0, M(0) = M_0 \\
& NPC
\end{aligned}
$$

哈密顿函数

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & e^{-\rho t}(\log C - bL) + \nu(M + PwL - PC - N) \\
& + \mu(P(wL + rK - C - I) + r^n N) + \lambda(I - \delta K)
\end{aligned}
$$

一阶条件

$$
\begin{aligned}
0 = \mathcal{H}_C = & e^{-\rho t}\frac{1}{C} - \mu P - \nu P \\
0 = \mathcal{H}_I = & \lambda - \mu P \\
0 = \mathcal{H}_N = & \mu r^n - \nu \\
0 = \mathcal{H}_L = & -e^{-\rho t}b + \mu P w + \nu P w \\
0 = & \nu(M + PwL - PC - N) \\
-\dot{\lambda} = \mathcal{H}_K = & -\lambda\delta + \mu P r \\
-\dot{\mu} = \mathcal{H}_M = & \nu
\end{aligned}
$$

化简:

$$
\begin{aligned}
e^{-\rho t} = & \lambda(1 + r^n)C \\
\lambda = & \mu P \\
\nu = & \mu r^n \\
bC = & w \\
-g_\lambda = & r - \delta \\
-g_\mu = & r^n \\
M + PwL = & PC + N
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\dot{K} &= I - \delta K \\
bC &= w \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + PwL &= PC + N \\
&\text{Budget Constraint}
\end{aligned}
$$

注意到通过市场出清能得到 $\dot{M} = G$, 不需要预算约束，只需要添加这个货币均衡条件即可。

$$\dot{M} = G$$

企业和金融机构　企业是零利润的，一阶条件为

$$
\begin{aligned}
(1 + r^f)w &= Y_L \\
r &= Y_K
\end{aligned}
$$

金融机构是零利润的，其预算约束为

$$(1 + r^n)N = (1 + r^f)(N + G)$$

金融市场出清为

$$N + G = PwL$$

一般均衡，运动方程和化简　把方程放一块

$$
\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - C - \delta K \\
bC &= w \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + PwL &= PC + N \\
\dot{M} &= G \\
(1+r^f)w &= Y_L \\
r &= Y_K \\
(1+r^n)N &= (1+r^f)(N+G) \\
N + G &= PwL
\end{aligned}
$$

化简，诀窍是先化简只在两个方程出现的

1. 消去 $1+r^f$

$$
\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - C - \delta K \\
bC &= w \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + PwL &= PC + N \\
\dot{M} &= G \\
(1+r^n)\frac{N}{N+G}w &= Y_L \\
r &= Y_K \\
N + G &= PwL
\end{aligned}
$$

2. 消去 PwL

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - C - \delta K \\
bC &= w \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + G &= PC \\
\dot{M} &= G \\
(1+r^n)\frac{N}{N+G} w &= Y_L \\
r &= Y_K
\end{aligned}$$

3. 观察到 N 只在一个方程出现，从而去掉这个方程，其他的仍然自治。计算 N 的方程是 $(1+r^n)\frac{N}{N+G}w = Y_L$, 其余方程为:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - C - \delta K \\
bC &= w \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + G &= PC \\
\dot{M} &= G \\
r &= Y_K
\end{aligned}$$

4. 观察到 w 只在一个方程出现，从而去掉这个方程，其他的仍然自治。计算 w 的方程为 $bC = w$, 其余方程为

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - C - \delta K \\
g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\
r^n - g_P &= r - \delta \\
M + G &= PC \\
\dot{M} &= G \\
r &= Y_K
\end{aligned}$$

5. 注意到 $M(0) = M_0$ 外生，$G(t)$ 路径外生（由央行给出），$M(t) = \int_0^t G(s)ds + M_0$ 也外生。从而可以将外生的方程去掉。记 $g_{M+G} = j$

为一种特殊的货币增长率，那么

$$\begin{aligned}\dot{K} &= Y - C - \delta K \\ g_C + g_{1+r^n} &= r - \delta - \rho \\ r^n - g_P &= r - \delta \\ g_P + g_C &= j \\ r &= Y_K\end{aligned}$$

并且 PC 外生（价格的绝对水平外生）

6. 消去 g_P，
$$\begin{aligned}\dot{K} &= Y - C - \delta K \\ g_{1+r^n} &= r^n - j - \rho \\ g_C &= r - \delta + j - r^n \\ r &= Y_K\end{aligned}$$

7. 观察动力系统，r^n 的行为和实际经济无关；但是 C, K 的行为和名义经济 r^n, j 有关。从而这个方程是由 r^n 核心驱动的。首先解析方程 $g_{1+r^n} = r^n - j - \rho$. 不妨假定货币具有广义常数的增长率 $j = \text{const}$. 那么，根据正反馈和横截条件，r^n 的唯一动态是
$$r^n = j + \rho$$

8. 维持上面的假定，考虑实体经济，
$$g_C = r - \delta - \rho$$
$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$
除了这两个方程，还需要考察劳动力来维持实体经济。我们把前面独立出来的方程还原回来（唯独不还原 r^f）：
$$PC = M + G$$
$$N + G = PwL$$
$$bC = w$$
$$(1 + j + \rho)\frac{N}{N+G}w = Y_L$$

化简：

$$bPCL = \frac{(1-\alpha)P}{1+j+\rho}F(K,L) + G$$

足够解出劳动力。另外，其他名义变量的方程为

$$N = bPCL - G$$

$$bC = w$$

$$(1+r^n)N = (1+r^f)(N+G)$$

9. 那么，实体经济的方程为

$$g_C = r - \delta - \rho$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

$$bCL = \frac{(1-\alpha)}{1+j+\rho}F(K,L) + \frac{G}{P}$$

$$C = \frac{M+G}{P}$$

货币长期非中性 在实体经济中，货币政策 $G(t)$ 明显对就业的方程有直接影响。

我们和最优经济进行比较。在最优经济中，

$$g_C = r - \delta - \rho$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

$$bCL = (1-\alpha)F(K,L)$$

具有明显的区别。

广义常数增长率货币政策和常数增长率货币政策 在刚才，为了 r^n 恒定，我假定货币以广义常数增长。这个增长的具体的微分方程是

$$\ddot{M} + (1-j)\dot{M} - jM = 0$$

这个方程有多个基于 $\cosh jt$ 和 $\sinh jt$ 的解。而我们实际上总是只要求了初始条件 $M(0) = M_0$. 为了方便，我们可以取其中一个特解狭义常数增

长率的货币政策，即 $\dot{M} = jM$, 进而 $\ddot{M} = j\dot{M} = j^2M$. 这满足广义常数增长率的货币政策。

此时，$G = jM$. $C = \frac{(1+j)M}{P}$. $M = M_0 \exp\{jt\}$.

我对经济进行非常强的假定。假定处在平衡位置，来探索近似的最优货币政策。假设经济没有增长（类 RC 经济），平衡位置 $g_C = 0$, 那么

$$g_P = g_M = j$$

那么，

$$C = \frac{(1+j)M}{P}$$

平衡位置的市场均衡方程是

$$bCL = \frac{(1-\alpha)}{1+j+\rho}F(K,L) + \frac{j}{1+j}C$$

$$C + \delta K = Y$$

$$Y_K = \delta + \rho$$

我们希望货币政策使得平衡位置达到最优解的平衡位置。对于最优解的平衡位置，可以解出参数组 (C^*, K^*, L^*). 并且参数组满足后两个方程，以及

$$A \coloneqq bC^*L^* = (1-\alpha)F(K^*, L^*) =: B = (1-\alpha)Y$$

那么，我们要找到 j, 使得

$$A = B\frac{1}{1+j+\rho} + C^*(1 - \frac{1}{1+j})$$

对于通货膨胀的经济，$j > 0$, 上式的右侧取值范围为

$$B\frac{1}{1+\rho} \sim C^*$$

如果 $C > B$, 那么上面的式子存在通货膨胀的最优货币政策。

下面进行检验，在 RC 经济中，

$$\frac{C}{Y} + \frac{\alpha\delta}{\delta+\rho} = 1$$

我们希望：

$$1 - \frac{\alpha\delta}{\delta+\rho} = \frac{C}{Y} > (1-\alpha)$$

只需要

$$0 < \rho$$

恒成立!

从而存在一个最优货币增长率 $j > 0$ 使得经济在稳态附近实现最优。

具体而言,

$$\frac{1-\alpha}{1+j+\rho} - (1 - \frac{\alpha\delta}{\delta+\rho})\frac{1}{1+j} = -\alpha\frac{\rho}{\delta+\rho}$$

MMA 代码:

Solve[(1-a)/(1+j+r)-(1-a d/(d+r))/(1+j)==-a r / (d+r),j]

$$j^{OP} = \frac{-\alpha(1+\rho) + \sqrt{\alpha^2(1+\rho)^2 + 4\alpha(1-\alpha)(\delta+\rho)}}{2\alpha}$$

代入 $\alpha = 0.33$, $\rho = 0.02$, $\delta = 0$, 得到

$$j^{OP} = 0.038$$

并且它关于 δ 单调。

所以在无增长 RC 经济中,近似最优货币政策为接近 4% 的通货膨胀率。

8 Friedman-Lucas 货币意外模型

8.1 Friedman-Lucas Surprise Model I

我们基于基准模型和威廉森的教材 [Williamson, 2005] 的逻辑建立一个卢卡斯意外模型。

8.1.1 消费者

消费者最大化效用

$$\max U(c, c', l, l')$$
$$s.t.\ P_C c + \frac{P'_C c'}{1+R} = Wl + \Pi - T + \frac{P'_C y'}{1+R}$$

where P_C 为消费品的价格。

首先，假定消费者对未来的判断基本准确, 并且通货膨胀均匀的作用在消费品价格和投资品价格上，即

$$\frac{P'_C}{1+R} = \frac{P_C}{1+r}$$

那么预算约束变为

$$c + \frac{c'}{1+r} = \frac{W}{P_C}l + \frac{\Pi}{P_C} - \frac{T}{P_C} + \frac{y'}{1+r}$$

接下来，假定当通货膨胀的时候，投资品的价格反应比消费品的价格反应快。有几个因素：

1. 企业对市场信息掌握的更加充分，从而愿意对投资品调价以及对投资品的调价作出反应
2. 金融市场的反应速度比产品市场快，尤其比消费品市场快
3. 消费品的价格收到管控的可能性大于投资品受到管控的可能性
4. 增加货币供给的时候房价作为投资品上涨速度比消费品快

那么在这个模型中，可以假定消费品的通胀在下一期才能实现，也就是短期消费品的价格具有刚性。

这样一来，我们可以知道：

$$c = \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{Wl + \Pi - T}{P_C} + \frac{y'}{1+r}\right) = c^d\left(\frac{Wl + \Pi - T}{P_C}, r\right)$$

$$l = l^s(\frac{W}{P_C}, \frac{\Pi - T}{P_C}, r)$$

初步观察可以发现，当总物价水平提升时，实际工资

$$w = \frac{W}{P} = \frac{W}{P_C}\frac{P_C}{P} \neq \frac{W}{P_C}$$

如果跟着提升，就会导致消费者认为的实际工资不等于真正的实际工资。这是造成意外的根源。

详细计算需要在模型中内生给出。

8.1.2 企业

企业具有完全的信息。这是因为企业的代理人会雇佣许多金融学家来帮助他们获取和分析市场信息。而通过股权进行分红的家庭不是代理人，一般没有这个信息。

企业的利润最大化表明

$$\begin{aligned}
&\max \Pi + \frac{\Pi'}{1+R} \\
&s.t.\ \Pi = Pf(k,l) - Wl \\
&\qquad \Pi' = P'f(k',l') - W'l' + P'k' - (1+R)P_I i \\
&\qquad k' = i + (1-\delta)k
\end{aligned}$$

其一阶条件是

$$\begin{aligned}
f_l &= \frac{W}{P} \\
\Pi &= Py - Wl \\
f_k' &= \delta + (1+R)\frac{P_I}{P'} - 1
\end{aligned}$$

也就是企业支付的工资为实际工资，而投资行为也会因为投资品的单方面价格变化导致实际利率产生偏差。

我们在之后计算时将分别讨论认为实际利率和投资行为对此有反应和无反应的情况，结论应当是一致的。

8.1.3 货币市场

货币供给由外生给出：

$$M = P_C(c - x(R)) + P_I i((1+R)\frac{P_I}{P'})$$

短期消费品价格具有刚性，从而外生货币供给的增加全部流入投资品的增加。

价格水平通过几种方法给出：

1. 认为在基年时，c, i 的价格为 1，计算传统的 GDP 平减指数
2. 考虑货币数量论，$MV = Py = P(c+i)$ 应当成立
3. 考虑货币需求函数，$M^s = P(y - x(R))$ 应当成立

以上三种方法均给出如下结果：

$$P = \frac{P_C c + P_I i}{c+i}$$

8.1.4 无通胀、投资不理性

这种情况是威廉森的教材 Williamson [2005] 和老师上课时讨论的情况。认为投资者可以发现真实利率和实际价格水平，并且投资品的价格水平相比于物价水平没有上涨：

$$\frac{P_I}{P} = 1$$

这种情况的问题在于，如果物价水平上涨、投资水平和物价水平同时上涨、消费者的篮子里的价格水平都没有变，这会导致矛盾，实质上不是货币市场均衡。解决非均衡的方案有两个：

1. 按照我这里的思路，认为消费品价格刚性。但是这违背了理性预期的思想。
2. 所有消费者平均来看的理性预期是正确的，但是具体到个体上可能有偏差，从而产生了分布、方差和效率损失。
3. 按照课本上的思路，那么投资不是理性的。

我们直接认为投资不理性：

$$i = i(r)$$

那么一般均衡表现为：

$$M = P_C(c - x(r)) + P_I i(r) = Py - P_C x(r)$$

$$y^d(l) = c(\frac{P}{P_C} y, r) + i(r) + G$$

$$l^d(\frac{W}{P}) = l^s(\frac{W}{P_C}, r)$$

我们直接关心投资品价格水平的提高对实际经济的影响。货币供给是如何产生这个影响的暂且不关心：$dP > 0, dP_C = 0$

我们全部变为相对价格和实际工资的表述形式：

$$y^d(l) = c(py, r) + i(r) + G$$

$$l^d(w) = l^s(pw, r)$$

那么

$$(1 - pc_Y)wl_w^d dw = c_Y y dp + (c_r + i_r)dr$$

$$l_w^d dw = l_w^s p dw + l_w^s w dp + l_r^s dr$$

where

$$l_w^d < 0, l_w^s > 0, l_r^s > 0, 0 < c_Y < \frac{1}{1+\rho}, c_r < 0, i_r < 0, p = \frac{P}{P_C}$$

在货币变化不太大的情况下，

$$pc_Y < 1$$

仍然成立。那么

$$\mathfrak{a}dw + \mathfrak{b}dr = \mathfrak{e}dp$$

$$\mathfrak{c}dw + \mathfrak{d}dr = \mathfrak{f}dp$$

where

$$0 > \mathfrak{a} = (1 - pc_Y)wl_w^d$$

$$0 < \mathfrak{b} = -c_r - i_r$$

$$0 > \mathfrak{c} = l_w^d - l_w^s p$$

$$0 > \mathfrak{d} = -l_r^s$$

$$0 < \mathfrak{e} = c_Y y$$

$$0 < \mathfrak{f} = l_w^s w$$

那么

$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \end{pmatrix} = \frac{dp}{\Delta} \begin{pmatrix} \mathfrak{d}\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\mathfrak{f} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{f} - \mathfrak{c}\mathfrak{e} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} - \\ ? \end{pmatrix}$$

where

$$\Delta = \mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} > 0$$

从而实际工资降低，产出提高，货币短期非中性。实际利率的变化是不清晰的。

应当注意，如果

$$pc_Y > 1$$

也就是货币政策使用过当的时候，产出也不一定提高了！

8.1.5 教材的情形

教材上的讨论认为名义工资仅仅影响了劳动力的供给，而不会影响消费。

认为实际消费占收入的固定比重 (储蓄率固定)，即 $c(y,r) = \frac{ky}{1+r}$, 在这种函数形式下，实际上不太满足消费平滑；但是没关系，产出的需求曲线因此不为价格改变。

如果要为此赋予严格的微观基础，需要政治经济学结构。

从而有

$$y^d(l) = c(y,r) + i(r) + G$$
$$l^d(w) = l^s(pw,r)$$

注意到在 subsection 10.2.4 中，有

$$dY^d - dY^s = dy$$

$$dL^d - dL^s = dl$$

那么，

$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mathfrak{d}dy - \mathfrak{b}dl \\ -\mathfrak{c}dy + \mathfrak{a}dl \end{pmatrix}$$

with $\mathfrak{a} < 0, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} > 0, \Delta < 0$.

一个名义价格的提升会导致劳动力的供给的增加趋势，从而劳动力超额需求减小，$dl = -\lambda dp$. Then

$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mathfrak{b}\lambda dp \\ -\mathfrak{a}\lambda dp \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}$$

and

$$dY/dp = L^d_w dw/dp > 0$$

这就是课本上的结果。

货币的变化? 我们接下来考察，为了实现这样的价格水平的提高，货币供给需要发生怎样的变化。

注意到

$$M = PL(Y, r) = p(Y - X(r))$$
$$dM = \frac{M}{p}dp + p(dY - X_r dr)$$

看不出来。

名义工资 也看不出来。

8.2 Friedman-Lucas Surprise Model II

我们接下来观察更加准确的意外模型。

参考 Chicago University 1999 *Macroeconomics* [Doepke et al., 1999] Section 19.1, "The Model of Lucas (1972)".

在本节中，我们将考虑 Lucas 的重要的模型的一个简化版本。我们会得到预期价格水平，实际价格水平和失业率之间的关系。我们将用这个关系来讨论菲利普斯曲线的一种特殊的函数形式。我们不会精确地推导出菲利普斯曲线，因为我们的模型将是静态的，以保持阐述的简单。动态模型非常优雅，感兴趣的读者可以直接参考卢卡斯的论文。

这种模式依赖于私营部门中许多独立行业的决策。这些行业之间无法就价格进行沟通。他们会根据对产品真实需求状况的估计来雇佣劳动力。

8.2.1 行业决策

Let Q_i be output in industry i.(行业产出) 假设所有行业都只使用一种投入，即劳动力。设 L_i 为行业 i 的雇佣人数，假设所有行业都有共同的生产函数:

$$Q_i = L_i^\alpha$$

where 技术参数 $\alpha \in (0, 1)$. 假设所有工人的工资是他们所提供的劳动单位的 1 单位工资 ($w = 1$)。从而行业总成本为

$$\text{TotalCost}(Q_i) = L_i = Q_i^{\frac{1}{\alpha}}$$

在一个行业中它将拥有行业的价格 P_i 去度量它的产出。这个价格由两部分组成: 所有行业共同的一般价格水平 P 和行业 i 特有的冲击项 Z_i. 这

些项由价格方程联系起来:

$$P_i = PZ_i \tag{8.2.1}$$

冲击项 Z_i 给出了行业 i 的产出的实际价格。一般的价格水平要到期末才会公布，因为行业都在互相独立的孤岛上，生产过程中无法沟通。

所有私营部门的行业在这段时期开始时都对利润有一个共同的预测，我们用 P^e 来表示。因此，行业 i 对其实际价格 Z_i 的最佳估计是:

$$Z_i^e = \frac{P_i}{P^e} \tag{8.2.2}$$

回顾私营部门只能观测到名义价格 P_i.

行业的期望利润为:

$$\pi_i^e = Z_i^e Q_i - \text{TotalCost}(Q_i)$$

竞争性均衡意味着每个企业最大化利润，从而（注意这里没有不变的规模收益所以没有自由进入条件）

$$Z_i^e = \frac{1}{\alpha} Q_i^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

从而

$$L_i = (\alpha Z_i^e)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{8.2.3}$$

通过预期，如果企业估计对其产品的需求异常强劲 (如果 Z_i^e 很大)，它们将需要更多的劳动力.

利用方程 (8.2.2), (8.2.3), 我们有

$$L_i = (\alpha \frac{P_i}{P^e})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

当然可以写成对数线性形式:

$$l_i = \frac{1}{1-\alpha}(p_i - p^e) + \frac{1}{1-\alpha}\log(\alpha)$$

where 小写字母表示的 $x = \log X$ 是大写字母表示的对数。回顾方程 (8.2.1), 那么

$$l_i = A + \frac{1}{1-\alpha}(z_i + p - p^e) \tag{8.2.4}$$

where $A = \frac{1}{1-\alpha}\log(\alpha)$.

8.2.2 就业

（这里开始与课本略有不同）

总的劳动力数量为 N, 那么失业率

$$U = \frac{N - \sum_i L_i}{N} = 1 - \sum_i e^{l_i - n}$$

就业率

$$V = \sum_i e^{l_i - n}$$

对于一个意外的通货膨胀的货币政策：$p - p^e = \Delta p$, 对数劳动力供给为

$$l_i^e + \frac{\Delta p}{1-\alpha}$$

where $l_i^e = A + \frac{1}{1-\alpha} z_i$. 在无意外的情形下具有一个自然就业率

$$V^e = \sum_i e^{l_i^e - n}$$

从而真实就业率

$$V = \sum_i e^{l_i^e - n} e^{\frac{\Delta p}{1-\alpha}} = e^{\frac{\Delta p}{1-\alpha}} V^e$$

从而意外的通货膨胀会提高就业率。对数就业率

$$v = \frac{\Delta p}{1-\alpha} + v^e$$

就业率的提高会进一步提高产出。

8.3 Friedman-Lucas Surprise Model III

翻译：Lucas [1972]

8.3.1 经济的结构

我们基于 Samuelson [1958] 的模型。每个阶段，N 个相同的个体出生，并且存活两个阶段。因而，每个阶段具有常数数量的人口 $2N$: N 个 0 岁的个体，和 N 个 1 岁的个体。在人生的第一个阶段 (0 岁)，每个人提供 (自由决定的?) n 单位的劳动力并且产生 n 单位的产出。将第 i 岁的消费记作 c^i, i.e. c^0 and c^1. 总产出不允许被储存但是可以被浪费，以至于具有资源约束

$$c^0 + c^1 \leq n,\ c^i, n \geq 0 \tag{8.3.1}$$

由于 n 可能不同，实际产量的波动在物理上是可能的。[3]

除了劳动产出以外，这里还有另一种商品：法定货币，仅仅由政府决定。金钱参与经济，通过一种阶段性的转移支付给较老的一代成员，一个数量与每个人的转移持有成比例。遗产不被允许，因此未使用的现金余额在持有者死亡时将归货币当局所有。

在这个框架内，唯一可能发生的交换是年轻人交出产出，以换取从上一时期留存下来的、由老年人转移而改变的钱。我们将假设这种交换发生在两个物理上独立的市场。为了使问题尽可能简单，我们假定老一代在这两个市场之间进行分配，以使它们之间的货币总需求相等。年轻人随机分配，分数 $\theta/2$ 到一个，分数 $1-\theta/2$ 到另一个。一旦将人员分配到市场，就不可能在市场之间进行交换或沟通。在每个市场中，通过拍卖进行交易，所有交易都以单一的市场清算价格进行。

每一老一代人的平均转移货币供应量，是所有代理人都知道的。用 m 表示该数量。转账后余额 (用 m' 表示) 一般不为人知 (直到下一个时期)，除非它们是由当期价格水平"披露"给交易员的。类似地，分配变量 θ 是未知的，除非通过价格间接地知道。名义货币供应量的历史发展是由政府通过

$$m' = mx \tag{8.3.2}$$

给出，其中 x 是随机变量。设 x' 为该转移变量下一个周期的值，设 θ' 为下一个周期的分配变量。假设 x 和 x' 是相互独立的，具有相同的连续密度函数 f on $(0,\infty)$。类似地，θ 和 θ' 是独立的，有连续的对称密度 g on $(0,2)$.

8.3.2 偏好和需求函数

每个年轻个体解效用最大化问题：

$$U(c,n) + \mathbb{E}\{V(c')\} \tag{8.3.3}$$

其中 c 为当期消费，c' 为未来消费，n 为当期的劳动力供给。效用函数 U 满足

$$U_c > 0, U_n < 0, U_{cn} + U_{nn} < 0, U_{cc} + U_{cn} < 0 \tag{8.3.4}$$

以保证消费和闲暇都不是劣等品。效用函数 V 满足边际效用递减，替代效应占支配条件（未来商品价格提升将让当期商品的消费变多），有界弹性条

[3]这种度量总产出的方式比较像马克思的价值度量法，而不是新古典度量法。

件，和稻田条件

$$\begin{aligned} V' > 0, V'' < 0, \\ V''(c')c' + V'(c') > 0, \\ \frac{c'V''(c')}{V'(c')} \leq -a < 0, \\ \lim_{c' \to 0} V'(c') = +\infty, \\ \lim_{c' \to +\infty} V'(c') = 0, \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

9 货币搜寻模型

9.1 货币搜寻模型

Part III

经济波动

10 新古典波动理论

10.1 IS 曲线

10.1.1 家庭行为:

家庭在现在和未来中进行消费的选择。我们使用两期而不是无限期是因为在我们的框架中，未来的期望值是不会改变的，从而两期一定可以等价的容纳无限期的情形。为了容纳无限期情形，我们把第二期和以后的所有期全部纳入"未来"这一事件中，并且加以效用的贴现率。在一般的无限期模型中，贴现率必须是小于 1 的，因为每一阶段对应的时间是均等化的。然而当我们将以后的全部期都纳入两期时，相当于是现在和全部未来作比较，孰重孰轻尚未可知。从而贴现率未必小于 1。[4]

家庭解跨期效用最大化问题:

$$\max u(C) + \rho u(C')$$
$$s.t. C + \frac{C'}{1+r} = \pi + wL - T + \frac{y'}{1+r}$$

where y' 是未来总收入，C' 是未来总消费，π 是当期企业利润分红，wL 是就业收入，T 为税收。记当期收入为 $y = \pi + wL - T$. 效用函数 $u(C) = \log C$.

拉格朗日函数是

$$\mathcal{L} = u(C) + \rho v(C') + \lambda(-C - \frac{C'}{1+r} + y + \frac{y'}{1+r})$$

一阶条件为:

$$\lambda = \frac{1}{C} = (1+r)\rho\frac{1}{C'}$$

[4]实际上可以初步估计大约为 ρ, 对于无限期的贴现率是 $e^{-\rho t}$, $\rho > 0$ 的情况。这个验证不在此处进行，因为不太重要。

i.e.

$$(1+r)\rho C = C'$$

从而解得

$$C = \frac{1}{1+\rho}(y + \frac{y'}{1+r})$$

这就是消费函数

$$C(y,r) = \frac{1}{1+\rho}y + \frac{1}{1+r}\frac{y'}{1+\rho}$$

注意到 $y = \pi - wL - T = Y - T$, 它给出了一般的储蓄曲线。

10.1.2 企业行为

企业比较重要的是投资行为。以及雇佣劳动力的行为。这个在小节 2.6 的企业行为中得到计算。应该注意，未来的全部资本预期中都会通过折旧转化为产出。在这里不再计算，只强调两件事情：

1. 投资 I 是关于 r 和未来量的函数。假定未来量不变的情况下，投资只和实际利率有关。

2. 企业雇佣劳动力的数量直接取决于工资。工资越高，雇佣的劳动力越少。另外，雇佣数量和利率无关。

10.1.3 新古典情况：劳动力市场出清

劳动力市场出清，也就是工资灵活时，企业雇佣的总劳动力数量是家庭提供的总劳动力数量。这时工资是内生决定的。当期总产出供给

$$Y^s = zF(K,L)$$

三个量初始资本、总劳动力、技术水平全部都是外生给定的。从而总产出供给是一个定值。

体现在总供给-总需求曲线上，它关于价格（比如实际利率）是一条竖直向上的直线，是所谓的新古典情形。

10.1.4 凯恩斯情况：工资刚性和就业灵活

凯恩斯提出了工资刚性的情况，工资是一个外生给定的数值，不允许被调整。

现在假定生产函数为

$$Y^s = zLK^{\alpha}$$

即劳动力的边际产出也是一个外生的值，从而只要企业的边际产出大于工资，企业就会更倾向于生产，从而没有任何东西能够约束总供给，除非市场出清：

$$Y^s = Y^d$$

当然，其他生产函数也可以做到这一点，只要保证企业的边际产出总是大于工资。

10.1.5 IS 曲线：实际两期模型的结果

作为实际两期模型的结果，产出供给分为两种情况

$$Y^s = zF(K, L)$$

外生给定的情况，和

$$Y^s \geq Y^d$$

灵活的情况。

无论何种情况，我们都有：

$$Y^s = Y^d = C + I + G$$

以及

$$C = \frac{1}{1+\rho}(Y-T) + \frac{1}{1+r}\frac{y'}{1+\rho}$$

(注意到 $\pi + wL = Y$) 以及

$$I = I(r)$$

从而得到了 IS 曲线：

$$Y = C(Y-T, r) + I(r) + G$$

当然，这两种情况的总供给曲线还不是足够的合意，所以我们需要引入就业，来考察新的情形。我们首先考察带就业的新古典情形。

10.2 两期一般均衡模型的比较静态

10.2.1 模型抽取

从实际两期模型 (Section 3.3) 的框架出发，只考虑当期情况和经济波动。单纯提取出第一期，作为实际两期模型的结果，我们可以得到经典的总需求-总供给模型。

在 Section 10.1 的模型中，它本身没有详细考虑就业，那么总供给是给定的，对应经典的宏观模型中总供给不随任何价格变化、呈一条竖直线的“新古典”宏观模型，它很难给出一些特别有价值的结果。相比之下，对于本模型对于本模型，我们容纳了就业，可以提出一些稍稍不同的东西，主要是在总供给端具有价值。

这个模型由于暂时没有货币，本质上是含就业的灵活价格的 IS 模型。

抽取： 实际两期模型可以抽去未来市场，得到如下当前市场模型：

对于消费者，

$$C = C(\pi + wL - T, r)$$

并且注意到方程 2.3.1, 这是一个线性函数

$$C = \frac{1}{2}(\pi + wL - T + \frac{y'}{1+r})$$

并且他们的就业决策

$$L^s = L^s(\pi - T, w, r)$$

由方程 2.3.2，也是一个接近线性的函数

$$L^s = A(2+b) - Ab(\frac{\pi - T}{w}) - \frac{AY'b}{(1+r)w}$$

对于企业，有投资需求

$$I = I(r)$$

以及劳动力市场需求

$$L^d = L^d(w)$$

以及利润函数

$$\pi = Y - wL$$

从而当期的一般均衡表现为如下形式：

$$Y^s(L) = Y^d = C(Y-T, r) + I(r) + G$$

$$L^d(w) = L^s(\pi - T, w, r)$$

$$\pi = Y - wL$$

with

$$0 < C_Y = \frac{1}{1+\beta}, C_r < 0$$

$$I_r < 0, Y_L^s > 0$$

$$L_w^d < 0, L_w^s > 0, L_r^s > 0, L_\pi^s < 0$$

代入利润，

$$Y^s(L) = C(Y-T, r) + I(r) + G$$

$$L^d(w) = L^s(Y - wL - T, w, r)$$

10.2.2 财政政策乘数

$$(wL_w^d - C_Y)dw = C_r dr + dG$$

$$L_w^d dw = L_\pi^s d\pi + L_w^s dw + L_r^s dr$$

$$\begin{aligned} d\pi =& (wL_w^d - C_Y)dw - wL_w^d dw - Ldw \\ =& -(C_Y + L)dw \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} (wL_w^d - C_Y)dw &= (C_r + (1 - C_Y)I_r)dr + dG \\ 0 =& -L_w^d dw - L_\pi^s (C_Y + L)dw - L_\pi^s I_r dr + L_w^s dw + L_r^s dr \\ =& (L_w^s - L_\pi^s (C_Y + L) - L_w^d)dw + L_r^s dr \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} dw + \mathfrak{b} dr =& dG \\ \mathfrak{c} dw + \mathfrak{d} dr =& 0 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
0 > \mathfrak{a} =& wL_w^d - C_Y \\
0 < \mathfrak{c} =& L_w^s - L_\pi^s(C_Y + L) - L_w^d \\
0 < \mathfrak{b} =& -(C_r + (1 - C_Y)I_r) \\
0 < \mathfrak{d} =& L_r^s
\end{aligned}$$

从而

$$\Delta = \mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} < 0$$

而财政政策乘数

$$\frac{dY}{dG} = wL_w^d \frac{\mathfrak{d}}{\Delta} > 0$$

注意到

$$\mathfrak{a} < wL_w^d < 0, \Delta < \mathfrak{a}\mathfrak{d} < 0$$

从而

$$\mid \frac{dY}{dG} \mid < \frac{\mid \mathfrak{a}\mathfrak{d} \mid}{\mid \Delta \mid} < 1$$

得证!

10.2.3 当期全要素生产率

全要素生产率会直接同时影响产出供给和劳动力需求，其他影响不是直接的。

注意到生产函数

$$Y^s = zF(L)$$

and the FOC of firms

$$F'(L^d) = \frac{w}{z}$$

从而

$$\begin{aligned}
zF(L) &= C(Y - T, r) + I(r) + G \\
L^d(\frac{w}{z}) &= L^s(Y - T, w, r)
\end{aligned}$$

全要素生产率变动时，有

$$\begin{aligned}
F(L)dz + wdL = C_Y dY + C_r dr + I_r dr = dY \\
L_w^d d(\frac{w}{z}) = L_Y^s dY + L_w^s dw + L_r^s dr = dL
\end{aligned}$$

定符号：

$$fdz + wdL = adY - bdr = dY$$

$$-cdw + hdz = -ddY + edw + gdr = dL$$

从而

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} dY \\ dL \\ dw \\ dr \end{pmatrix} \\
=&\frac{dz}{bc+be+bcdw+(1-a)cgw}\begin{pmatrix} b(cf+ef+ehw) \\ -b(cfd-eh)-(1-a)cfg \\ (1-a)g(f+hw)+b(h+d(f+hw)) \\ -(1-a)(cdzf+dzef+dzehw) \end{pmatrix} \\
\sim& dz\begin{pmatrix} + \\ ? \\ + \\ - \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

就业关于技术冲击的符号不确定，但是经验一般认为它是正值。具体可以用采取合适的参数和函数形式得到。

10.2.4 一般情形

注意到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}dw + \mathfrak{b}dr =& dY^d - dY^s \\
\mathfrak{c}dw + \mathfrak{d}dr =& dL^d - dL^s
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
0 > \mathfrak{a} =& wL_w^d - C_Y \\
0 < \mathfrak{c} =& L_w^s - L_\pi^s(C_Y + L) - L_w^d \\
0 < \mathfrak{b} =& -(C_r + (1-C_Y)I_r) \\
0 < \mathfrak{d} =& L_r^s \\
0 > \Delta =& \mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}
\end{aligned}$$

在二者只有一个移动的情况下，工资和利润的改变都是定号的。

记超额需求的变动为

$$dY^d - dY^s = dy$$

$$dL^d - dL^s = dl$$

那么，

$$\begin{pmatrix} dw \\ dr \end{pmatrix} = \frac{-1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\mathfrak{d}dy + \mathfrak{b}dl \\ \mathfrak{c}dy + (-\mathfrak{a})dl \end{pmatrix}$$

从而当产出超额需求有一个正向变动时，工资有负向变动、利率有正向变动；劳动力超额需求有正向变动时，工资和利率都有正向变动。

并且进一步的，

$$dY = wL^s_w dw$$

and 产出超额需求情况下，

$$\frac{dY}{dy} = \frac{wL^s_w \mathfrak{d}}{\Delta} \in (0,1)$$

也就是说，劳动力超额需求正向变动时，产出负向变动；产出超额需求正向变动时，产出正向变动并且乘数小于等于 1.

特别的，财政政策提供了一个产出超额需求的正向变动，并且产出超额需求-财政政策的乘数是 1. 所以财政政策乘数小于等于 1.

10.2.5 未来全要素生产率

未来全要素生产率提高时，企业的投资需求增加。由于贴现率不变，当期消费关于产出的系数不变，但是关于利率的系数变大（预期收入增加）从而当期消费整体其实是变大的，注意 $C = \frac{1}{1+\rho}(Y + \frac{Y'}{1+r})$. 当期闲暇会变大，因为认为未来的收入变高了。

从而投资具有一个正的超额需求，而消费中本质上具有一个正的超额需求 (注意 C_Y 没有变)，从而产出需求得到了一个正的超额需求。而劳动力供给减小，从而劳动力也具有正的超额需求。

从一般情形来看，会形成一个正的利率变动，而工资和产出的情况不明朗。

10.3 技术冲击和真实经济周期

10.3.1 idea

我们考虑技术冲击对基准模型的影响，尤其考察定性分析。我将尽量转化为传统语言来刻画这件事情，因为现代语言我们有 DSGE 模型去刻画。

我们采用前面介绍的基准模型。基准模型的特点是首先给出了总需求曲线；然后总供给曲线通过考察工资和就业实现。由于调价是完全灵活的，名义完善性成立从而古典二分法成立。总需求-总供给相图在 r-Y 坐标上实现。（注意传统的 IS-LM 模型也是在这个相图上成立，他们认为价格具有完全的名义刚性）那么考察一个冲击时，首先考察 IS 曲线是否移动，然后考察总供给以决定总供给曲线，就可以得到最终的真实经济变化。

在标准的 RBC 模型中，我们认为当期技术水平的冲击会具有序列正相关的响应，从而未来的技术冲击也变大。但是在这里，新古典的波动模型是两期模型，并且是低度参数化和高度定性化的，引入未来技术冲击将会对分析造成极大的困难（否则就是在哄骗人），所以只需要考察当期技术冲击并且严格的将结果表述出来即可。

不同于上一节中我采用隐函数定理进行计算，在本节中我将使用传统的图示分析法得到相同的结果。

进行模型设置时，除使用上一节中所使用的两期一般均衡模型以外，也将货币跨期模型引入，进行经济波动的分析。

10.3.2 当期技术冲击

首先，技术冲击的来临不会影响总需求 (IS 曲线)，从而在 IS-总供给 (r-Y) 相图上，IS 曲线是固定的。由于最终均衡位置一定会在 IS 曲线上实现，从而产出提升必然意味着利率的降低。

接下来考察总供给。技术冲击会导致劳动力需求上升、总供给函数的上升。假设产出最终居然下降了，利率提高、劳动力供给提高，而劳动力需求是提高的，从而产出必然提高，这产生了矛盾。从而产出上升的假定正确。

产出最终上升、利率下降，从而当期消费、投资都是提升的。利率降低、劳动力的供给则会降低；而劳动力需求提升了，从而工资必然提升但是就业是否提升不确定。如果选用柯布道格拉斯生产函数，那么 $w = \beta\frac{Y}{L}$ 从而平均劳动生产率几乎就是工资。这种情况下平均劳动生产率提升了。

现在，总产出提升、利率下降，那么名义货币需求提升，在货币供给不

变的情况下价格会发生减小，否则无法匹配名义货币需求。

这样，我们得到了新古典波动模型所产生的周期现象：

	新古典波动模型	经验数据
消费	顺周期	顺周期
投资	顺周期	顺周期
价格水平	逆周期	逆周期
货币供给	非周期（假定外生给定）	顺周期
就业	不确定（取决于参数）	顺周期
实际工资	顺周期	顺周期
平均劳动生产率	顺周期	顺周期

当我们采用合适的微观/宏观数据作为参数、并且进行对数线性化等计算，应该也能得到就业顺周期的结果。从而对新古典波动模型的技术冲击的模型结果和数据初步吻合。

10.4 Real Business Cycle Model

参考 1: Chapter 1 in Thomas Cooley's *Frontiers of Business Cycle Research* which written by Cooley and Prescott.

参考 2: Romer *Advanced Macroeconomics*, 4th ed.

这里还赠送了信贷市场平衡的推导.

10.4.1 家庭

消费者最大化跨期效用

$$\max \mathbb{E}_0\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t, 1-L_t)\}$$

with $\beta < 1$ and $u(C, 1-L) = \log C_t + b\log(1-L_t)$.

家庭在每一期选择购买债券，投资和消费，资产的增值由如下方程给出：

$$I_t + C_t + B_{t+1} \leq w_t L_t + r_t K_t + R_t B_t + \pi_t$$

$$K_{t+1} \leq (1-\delta)K_t + I_t$$

$$K_t \geq 0$$

$$K_0 \ given, \ NPC$$

其中 B_t 为所购买的债券, K_t 为家庭所拥有的资本。

Lagrangian is:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, 1 - L_t) \\ &+ \lambda_t \theta_t^1 (w_t L_t + r_t K_t + R_t B_t + \pi_t - (I_t + C_t + B_{t+1})) \\ &+ \lambda_t \theta_t^2 (1 - \delta) K_t + I_t - K_{t+1})\end{aligned}$$

首先计算无套利约束:

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{L}_{I_t} &= \mathbb{E}_t \lambda_t (\theta_t^2 - \theta_t^1) \\ 0 = \mathcal{L}_{K_{t+1}} &= \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} (\theta_{t+1}^1 r_{t+1} - \theta_{t+1}^2 (1 - \delta)) - \lambda_t \theta_t^2 \\ 0 = \mathcal{L}_{B_{t+1}} &= \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} \theta_{t+1}^1 R_{t+1} - \lambda_t \theta_t^1\end{aligned}$$

由内点解，可知 (Assume)

$$\theta_t^2 = \theta_t^1 = 1$$

then

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t \{\lambda_{t+1} (r_{t+1} - (1 - \delta)) - \lambda_t\} = 0 \\ \mathbb{E}_t \{\lambda_{t+1} R_{t+1} - \lambda_t\} = 0\end{aligned}$$

从而债券价格的无套利条件为

$$\mathbb{E}_t i_{t+1} = \mathbb{E}_t R_{t+1} - 1 = \mathbb{E}_t r_{t+1} - \delta$$

where i_{t+1} 为债券的利息率。

其余一阶条件为

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{L}_{C_t} &= \mathbb{E}_t (\beta^t u_C (C_t, 1 - L_t) - \lambda_t) \\ 0 = \mathcal{L}_{L_t} &= \mathbb{E}_t (\beta^t u_L (C_t, 1 - L_t) - \lambda_t w_t)\end{aligned}$$

化简：Eular equation:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_t} &= u_C (C_t, 1 - L_t) \\ &= \beta^{-t} \mathbb{E}_t \lambda_t \\ &= \mathbb{E}_t \{\beta u_C (C_{t+1}, 1 - L_{t+1}) (r_{t+1} - (1 - \delta))\} \\ &= \mathbb{E}_t \{\beta \frac{1}{C_{t+1}} (r_{t+1} - (1 - \delta))\}\end{aligned}$$

$$u_C(C_t, 1-L_t)w_t = u_L(C_t, 1-L_t)$$

i.e.

$$\frac{w_t}{C_t} = \frac{b}{1-L_t}$$

令家庭财产 $A_t = K_t + B_t$, 有

$$\mathbb{E}_t\{A_{t+1}\} = w_t L_t + R_t A_t + \pi_t - C_t$$

稍稍关心一下（类）投资行为（储蓄行为）的波动。我们在后面将发现，当期利率基本上是由当期的资本存量和技术水平决定的。如果技术水平发生了波动（比如上一期到当期的实际技术进步率小于预期），从而导致当期资本存量偏离（比如超过）均衡值，那么当期的利率水平就会略小于上一期的期望利率水平。当期利率偏小会导致当期的储蓄和投资行为稍稍减少。

另外，由于技术的波动，上期预期的当期资本存量水平大于当期的均衡利率对应的资本存量水平；从而上期预期的下期（上期-当期-下期）资本存量水平要大于当期预期的下期资本存量水平；在这个角度讲，也会抑制投资行为。

10.4.2 企业

企业每个时期根据当期租金率 r_t 和工资率 w_t 选择租赁资本和雇佣劳动力进行生产。

由于价格和要素都是灵活配置的，企业最大化每一期利润

$$\max_{K_t, H_t} e^{z_t} F(K_t, H_t) - w_t H_t - r_t K_t$$

where $F = K^\alpha H^{1-\alpha}$ and z_t follows an AR(1) process

$$z_t = z_0 + gt + \tilde{z}_t$$

$$\tilde{z}_t = \rho \tilde{z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

with ε_t white noise (i.i.d and 0-mean) or follows an I(1) process

$$z_t - z_{t-1} = g + \varepsilon_t$$

with $\varepsilon_t \ll g$ white noise.

最大化利润表明

$$w_t = e^{z_t} F_H(K_t, H_t)$$

$$r_t = e^{z_t} F_K(K_t, H_t)$$

and 自由进入条件表明企业是局部一次齐次的，从而利润为 0:

$$r_t K_t + w_t H_t = Y_t = e^{z_t} F(K_t, H_t)$$

劳动力市场均衡和资本市场均衡表明

$$K_t = A_t,\ H_t = L_t$$

应当注意市场债券和为 0（借贷平衡）$\sum_i B_t(i) = 0$, 从而代表性家庭的借贷为 0.

11 凯恩斯主义和新古典综合派

11.1 乘数模型

11.1.1 模型假定

首先，我们假定总投资是外生的。$I = \bar{I}$.

而总消费取决于总产出。$C = C(Y)$. 在均衡的局部，具有线性形式：$C = b + aY + o(\|Y - Y^*\|^2)$ where $a = C'(Y^*)$ and $b + aY^* = C^*$ and $C^* + \bar{I} = Y^*$.

11.1.2 均衡的"稳定性"

我们首先确定 a 的取值范围，这需要我们关心稳定性问题。稳定性是指当由于某种冲击使得投资或者消费或者什么东西发生了微小的改变后，有回到均衡位置的趋势。

这需要我们首先规定这个经济的运动规律。直觉上看，如果实际产出高于均衡产出，那么消费者会选择该实际产出对应的消费，接下来，这个消费和投资联合在一起又会形成一个新的产出。这样的运动规律形成了一个虚拟的动力系统：

$$Y_{n+1} = I + C(Y_n)$$

这种直觉上形成的均衡必然具有稳定性，从而有：$Y_{n+1} - Y_n = I + C(Y_n) - Y_n$, $C'(Y^*) - 1 < 0$ i.e. $a < 1$.

11.1.3 乘数 (multiplier)

注意到

$$0 = \bar{I} + C(Y^*) - Y^*$$

乘数通过隐映射定理得到：

$$\lambda_I^Y = \frac{\partial Y^*}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1-a} > 1$$

即在均衡附近，投资对产出的贡献总是正的并且大于 1。

类似的，我们考虑政府购买，有：

$$Y = I + G + C$$

在上述均衡附近同样也有

$$\lambda_G^Y = \frac{1}{1-a} > 1$$

11.1.4 财政政策乘数的典型批评

一个最典型的批评在于；如果上述方程总成立，那是不是无限制的增加政府购买就会无限制的增加消费?

首先一定要注意的是上述定理在均衡附近才成立，非均衡时则很难讲；另外，总需求曲线 $C(Y)$ 在极端情况下会表现出什么形式也非常难说。

另外的说法则是通过潜在总产出和实际总产出的区分来进行：上述均衡必须在供给能充分进行时才能成立。当供给端无法变得更大时，增加政府购买只会挤占投资和消费。

在和我们的标准 (基准) 模型中的财政政策乘数对比时，我们注意到，实际上政府购买也会挤占投资和消费。消费是收入的函数而不简单的是产出的函数。实际上 $dY = wdL$ 会消除掉里面的相当一部分。当然，如果政府购买不会挤占投资和消费：直觉上，萧条时，投资和消费已经非常低，从而没什么挤占的空间，这种情况下被认为是属于凯恩斯主义的情形。

11.1.5 对稳定性的批评

对于这里利用稳定性推导出乘数的过程，一个最重要的事情就是现代宏观经济学中，这样的稳定性实际上并不存在。在基于内生储蓄率决策的现代模型中，均衡点在消费维度是不稳定的，否则无法得到收敛到最优且无庞氏的结果。而如果均衡点稳定，那么消费者可以随意选择初始消费值，反正以后总会到那里的，从而会导致最优决策无法进行。从这一点来看，“直觉”的稳定性被破坏了，从而这里的推导过程就不太 OK。

11.1.6 乘数模型作为 AS-AD Model 的特例

总需求

$$AD = C(P) + I + G$$

具有斜向下的曲线模式。

令总供给

$$\begin{cases} P = P_0 & Y \leq Y_{Max} \\ Y = Y_{Max} & Y \geq Y_{Max} \end{cases}$$

具有 L 形的曲线。

那么总产出几乎总取决于总需求。

11.2 IS-LM 模型

见 D.Romer 高宏，第三版.

11.2.1 IS 曲线

产出需求

$$AD = E(Y, r, G, T)$$

with (标准情形)

$$E(Y, r, G, T) = C(Y - T) + I(r) + G$$

在本模型中，认为总供给可以在一定限度内自由移动。那么

$$Y = E(Y, r, G, T)$$

对应的交点是凯恩斯主义的交点。在该假定下，基于稳定性假设，我们有

$$E_Y < 1$$

这个假定的总供给是灵活移动的（至少是有活动空间的），即总产出还未达到总供给的上界。当然，随着总供给接近上界，可能会带来价格水平上升等负面作用，这需要在 AS-AD 曲线中考察。

利用隐函数定理，我们可以计算

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{E_x}{1 - E_Y}$$

显而易见的是，如果利率不变，那么政府购买乘数

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - E_Y} > 1$$

for 标准情形。税率乘数

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{E_T}{1 - E_Y} = -\frac{E_Y}{1 - E_Y}$$

for 标准情形。

上述曲线同时可以得到利率和产出互相对应的 IS 曲线:

$$Y = Y(r, G, T)$$

with

$$Y_r\Big|_{IS} = \frac{E_r}{1 - E_Y}$$

11.2.2 货币市场

现代银行提供总货币量或者提供利率目标。

提供总货币量的供给为 M, 那么真实货币余额的出清条件为

$$\frac{M}{P} = L(Y, r + \pi^e), L_1 > 0, L_2 < 0$$

where P 为价格水平，$r + \pi^e$ 为名义利率：预期通胀率和真实利率的和。

提供利率目标的银行则直接根据总产出和通胀进行利率调整:

$$r = r(Y, \pi), r_Y > 0, r_\pi > 0$$

即为 MP 曲线。此时，M 内生决定但无关紧要。

两种情况几乎是等价的，所以我们主要考虑 MP 分析。

11.2.3 r-Y 相图

IS-LM 模型中，IS 曲线和 LM (MP) 曲线都可以画在相图中，只需要考察总需求或者央行政策的移动就可以完成分析。

11.2.4 AS-AD 相图

在这里假定 AS 曲线和通胀有着向上的关系，即总供给增加时货币通胀变大:

$$\pi = \pi(Y), \pi_Y \geq 0$$

or

$$Y = AS(\pi)$$

AD 曲线来自 IS-MP 曲线。由于通胀不进入支出函数 $E(\cdot)$, IS 曲线不受影响。而由货币政策规则，在通胀增大时会提高中央银行在产量水平既定时所确定的真实利率（如果货币供给被控制，那么货币需求要求名义利率不变从而降低真实利率，这主要取决于什么变什么不变）。

接下来观察 AD 曲线的斜率。Note that

$$AD = Y(r(Y,\pi), T, G)$$

with $Y_r\big|_{IS} = \frac{E_r}{1-E_Y}$. Then

$$dY = Y_r(r_Y dY + r_\pi d\pi)$$

and

$$Y_\pi\big|_{AD} = \frac{Y_r r_\pi}{1 - Y_r r_Y} = \frac{r_\pi}{\frac{1-E_Y}{E_r} - r_Y}$$

11.2.5 一般均衡

$$Y = Y(r(Y,\pi), T, G) = AS(\pi)$$

两个方程，可以决定通胀率和总产出。

$$Y = Y(r(Y,\pi), T, G)$$

$$\pi = \pi(Y)$$

有:

$$dY = Y_r r_Y dY + Y_r r_\pi d\pi + Y_T dT + Y_G dG$$

$$d\pi = \pi_Y dY$$

从而

$$(1 - Y_r r_Y + Y_r r_\pi \pi_Y) dY = Y_T dT + Y_G dG$$

1. 财政政策乘数

$$\frac{dY}{dG} = \frac{Y_G}{1 - Y_r r_Y + Y_r r_\pi \pi_Y} = \frac{1}{1 - E_Y - E_r(r_Y - r_\pi \pi_Y)}$$

2. 平衡预算乘数

此时 $dG = dT = dB$,

$$\frac{dY}{dB} = \frac{Y_G - Y_T}{1 - Y_r r_Y + Y_r r_\pi \pi_Y} = \frac{1 - E_Y}{1 - E_Y - E_r(r_Y - r_\pi \pi_Y)}$$

3. 自动稳定器：税收作为收入的函数 $T = T(Y)$

$$(1 - Y_r r_Y + Y_r r_\pi \pi_Y)dY = Y_T T_Y dY + Y_G dG$$

相图分析改日手画。

11.2.6 一般均衡 (固定货币供给情形)

$$\begin{aligned} Y = C(Y - T) + \lambda I(r) + G \\ \frac{M}{P} = \mu L(Y, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY =& C'dY + I(r)d\lambda + I'(r)dr \\ \frac{dM}{P} =& \mu(L_1 dY + L_2 dr) + Ld\mu \end{aligned}$$

1. $d\mu = 0, dY = 0$, 求 $dM/d\lambda, dr/d\lambda$

$$\begin{aligned} 0 =& I(r)d\lambda + I'(r)dr \\ \frac{dM}{P} =& \mu L_2 dr \\ I(r)d\lambda =& -I'(r)\frac{dM}{\mu L_2 P} \end{aligned}$$

2. $d\lambda = 0, dY = 0$, 求 $dM/d\mu$

$$\begin{aligned} dY =& C'dY + I(r)d\lambda + I'(r)dr \\ \frac{dM}{P} =& \mu(L_1 dY + L_2 dr) + Ld\mu \end{aligned}$$

3. $C = a + bY$, $da \neq 0$

$$dY = da + bdY - hdr$$

$$kdY = fdr$$

$$dY = da + bdY - \frac{hk}{f}dY$$

$$(1 - b + \frac{hk}{f})dY = da$$

$$
\begin{aligned}
dI =& dY - dC = dY - (bdY + da) \\
=& (1-b)dY - da \\
=& -\frac{\frac{hk}{f}}{1 - b + \frac{hk}{f}} da
\end{aligned}
$$

11.3 总供给

总供给的处理方法有主要的如下四种，并且可以结合起来使用

	工资	价格
黏性且市场不出清	凯恩斯模型	价格黏性模型
信息不对称（货币意外）	工人意外模型	厂商意外模型

最后都会形成一个局部的凯恩斯-理性预期式供给曲线：

$$
Y = \bar{Y} + a(P - P^e)
$$

11.3.1 凯恩斯模型

假定名义工资刚性。产出由竞争性厂商生产，劳动 L 是唯一的生产要素。那么

$$
AS = Y = F(L)
$$

厂商会雇佣劳动直到

$$
F'(L) = \frac{W}{P}
$$

从而总供给随着价格水平的上升而上升（因为名义工资不变，企业会多雇佣劳动力），在达到充分就业之前。

由于名义工资是固定的，那么较高的通胀意味着较低的真实工资，从而提升产出，这样就得到了向上的总供给曲线。

模型的问题 模型的主要问题在于在这个模型中真实工资是反周期的，即产出越高真实工资越低。然而我们的经验证据表明，真实工资是适当的顺周期的。

11.3.2 粘性价格

假定通胀和价格都是既定的，工资是可变的。

11.3.3 工人的货币意外

11.3.4 厂商的货币意外

11.4 Phillips Curve

11.4.1 传统凯恩斯主义的 Phillips 曲线

11.4.2 理性预期的 Phillips 曲线

11.5 黏性价格模型

这个模型是威廉森教材的“新凯恩斯主义经济波动模型”，但是这个模型实质上并不新凯恩斯，而是传统凯恩斯或者新古典综合派的模型。真正属于新凯恩斯的经济波动模型几乎都是 DSGE 模型，并且有着非常惊人的复杂性质。

11.5.1 模型设置和图示分析

实际经济几乎以新古典基准模型运行。但是有所不同的是，在本模型中，假定价格具有黏性并且货币市场出清。货币市场出清时，央行可以通过控制货币供给以及利用观察到的通货膨胀率控制实际利率。这也是现代银行的运行方式：利率目标制。

其他市场均不出清：产品市场通过总产出需求决定最终产值，劳动力市场通过劳动力供给决定最终就业值。

注意到劳动力市场不出清，平均劳动生产率不再等于工资（不再满足均衡条件）。

11.5.2 货币冲击

首先应当注意到，货币冲击实际上没有改变任何真实经济的函数，仅仅作为一个扭曲性的“价格”而存在，从而总需求曲线不会因货币冲击而发生移动。

在商品市场，利率降低、总需求曲线不变，从而实际需求量增加，从而总产出增加。

在货币市场，当央行调节利率目标以扩大生产时，也就是利率降低时，货币需求必然增大，从而货币供给必须提前进行提高。

在劳动力市场，由于总产出增加了，那么所需的均衡就业量增加了。而劳动力供给曲线由于利率的下降而下降，从而工资必然大幅度提高。

而平均劳动生产率 $\frac{Y}{N}$ 下降，因为边际产出递减。

从而得到如下表格

	黏性价格货币冲击	经验数据
消费	顺周期	顺周期
投资	顺周期	顺周期
价格水平	非周期（假定外生给定）	逆周期
货币供给	顺周期	顺周期
就业	顺周期	顺周期
实际工资	顺周期	顺周期
平均劳动生产率	逆周期	顺周期

11.5.3 技术冲击

技术冲击时，商品市场的总需求曲线不变，而利率目标也没有变，从而总产出不变。

货币市场上，货币需求不变，从而货币供给不变。

劳动力市场上，满足这个产出所需要的就业数量降低，从而工资降低（劳动力供给曲线随着工资降低而降低）。产出不变就业降低，平均劳动生产率显然提高。

	黏性价格技术冲击	经验数据
消费	非周期（不变）	顺周期
投资	非周期（不变）	顺周期
价格水平	非周期（假定外生给定）	逆周期
货币供给	非周期（不变）	顺周期
就业	逆周期	顺周期
实际工资	逆周期	顺周期
平均劳动生产率	顺周期	顺周期

11.5.4 总需求冲击

凯恩斯主义的特点是认为经济波动由总需求冲击引起。最典范的例子就是投资需求的冲击。

总需求受到冲击时，IS 曲线向右上移动。

利率目标制时，总产出增加。货币供给相应增加。

就业量因为总产出增加而增加，而它取决于劳动力供给，从而工资必然提升（劳动力供给曲线没有移动，因为利率没有变）。但是相应的，平均劳动生产率必须降低。

从而

	黏性价格技术冲击	经验数据
消费	顺周期	顺周期
投资	顺周期	顺周期
价格水平	非周期（假定外生给定）	逆周期
货币供给	顺周期	顺周期
就业	顺周期	顺周期
实际工资	顺周期	顺周期
平均劳动生产率	逆周期	顺周期

12 DSGE: RBC, CIA, MIU and Financial Market

13 DSGE: New Keynesian Framework

13.1 家庭和新凯恩斯 IS 曲线

13.2 厂商和新凯恩斯 Phillips 曲线

13.3 基本新凯恩斯主义模型

见 Galí [2015].

13.3.1 家庭；价格指数和最优消费品选择

家庭最大化效用：

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, N_t)$$

where

$$C_t = (\int_0^1 C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

由连续统的商品构成。

预算约束为：

$$\int_0^1 P_t(i) C_t(i) di + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + T_t$$

where B_t 表示在 t 时期购买的、在 $t+1$ 时期到期的名义无风险贴现的债券（Q_t 为本期购买预期下期返还 1 单位货币的债券的价格），N_t 为劳动力市场参与率，W_t 为名义工资。

偿付条件（No-Ponzi Condition）

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t\{B_T\} \geq 0.$$

设加总价格指数为

$$P_i = (\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

最优消费水平选择（对于给定的价格水平）满足

$$C_t(i) = (\frac{P_t(i)}{P_t})^{-\varepsilon} C_t.$$

且预算约束改变为

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + T_t$$

家庭的内生储蓄率决策满足欧拉方程和一阶条件：

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \{ \frac{\partial_C U_{t+1}}{\partial_C U_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \}$$

$$-\frac{\partial_C U_t}{\partial_N U_t} = \frac{W_t}{P_t}$$

设 CRRA 效用函数

$$U = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

最优动态的对数线性形式为：

$$c_t = \mathbb{E}_t \{ c_{t+1} \} - \frac{1}{\sigma} (i_t - \mathbb{E}_t \{ \pi_{t+1} \} - \rho)$$

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t$$

where $i_t = -\log Q_t$ 为短期名义利息率，$\rho = -\log \beta$ 为贴现率，$w = \log W, c = \log C$, $p = \log P, n = \log N$ and $\pi_t = \log(\frac{P_t}{P_{t-1}})$ 为通货膨胀率.

最后，给出一个持有货币余额的对数线性需求形式：

$$m_t - p_t = y_t - \eta i_t$$

with budget constraint

$$P_t C_t + Q_t B_t + M_t \leq B_{t-1} + M_{t-1} + W_t N_t - T_t$$

and $y_t = c_t$.

事实上，我们在此及以后均不讨论货币持有的微观基础，我们有很多办法得到相应的微观基础。并且认为货币余额的对数线性需求是一个在宏观层面上（而不是只对消费者）成立的一个规律。在市场出清时，宏观的规律和代表性家庭的选择相吻，并且和其他动态行为独立（上期货币并不会在下一期具有更高的利息率）。

13.3.2 厂商：垄断竞争，价格动态和最优选择

连续统的厂商生产对应产品，形成垄断竞争。他们使用如下生产函数和相同的技术

$$Y_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha}$$

Calvo (1983) Calvo [1983] 提出，任意时期，每一厂商仅以 $1-\theta$ 的概率重新设定价格，并且 i.i.d. 从而每一期有 θ 的厂商保持价格不变，每一价格的平均持续期为 $\frac{1}{1-\theta}$, 从而成为衡量黏性的指标。

在这样的框架下，总价格动态由如下方程描述：

$$(\frac{P_t}{P_{t-1}})^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)(\frac{P_t^*}{P_{t-1}})^{1-\varepsilon}$$

其中 P_t^* 为优化后的价格。

稳态附近的对数线性化近似为

$$\pi_t = (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1})$$

通货膨胀源于：厂商优化选择的价格不同于前一期的平均价格。

在时期 t 进行再优化的厂商选择 P_t^* 来最大化此价格有效期间所产生的利润的现市值：

$$\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathbb{E}_t \{\beta^k (\frac{C_{t+k}}{C_t})^{-\sigma} (\frac{P_t}{P_{t+k}})(P_t^* Y_{t+k}\big|_t - \Psi_{t+k}(Y_{t+k}\big|_t))\}$$

满足需求约束

$$Y_{t+k}\big|_t = (\frac{P_t^*}{P_{t+k}})^{-\varepsilon} C_{t+k}$$

where Ψ 为名义成本函数，ψ 为名义边际成本函数。其具有一阶条件：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathbb{E}_t \{\beta^k (\frac{C_{t+k}}{C_t})^{-\sigma} (\frac{P_t}{P_{t+k}}) Y_{t+k}\big|_t (P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \psi_{t+k}\big|_t)\}$$

无刚性的情形下 $(\theta = 0)$，退化为 $P_t^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\psi_t\big|_t$ 为最优价格设定。记 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} = \mathcal{M}$ 为期望的或无摩擦的加成。

对数线性化，得到：

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \mathbb{E}_t \{\widehat{mc}_{t+1}\big|_t + (p_{t+k} - p_{t-1})\}$$

where $\widehat{mc}_{t+1}\big|_t = mc_{t+1}\big|_t - mc$ 表示边际成本相对于稳态值 $mc = -\mu = -\log \mathcal{M}$ 的对数偏离差。

可以写作

$$p_t^* = \mu + (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k \mathbb{E}_t\{mc_{t+1}\big|_t + p_{t+k}\}$$

重新选择的价格是他们自身当前的和预期的名义边际成本的加权平均值上的一个期望的加成，并且权重和概率 θ^k 成比例。

13.3.3 均衡

产品市场出清

$$Y_t(i) = C_t(i) \; and \; Y_t = C_t$$

合并市场出清条件和欧拉方程，得到均衡条件

$$y_t = \mathbb{E}_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - \rho)$$

劳动力市场出清:

$$N_t = \int_0^1 N_t(i)di$$

and moreover

$$N_t = (\frac{Y_t}{A_t})^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^1 (\frac{P_t(i)}{P_t})^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di$$

and 对数线性化的

$$(1-\alpha)n_t = y_t - a_t - d_t$$

其中 $a_t = \log A_t$, $d_t = (1-\alpha)\log(\int_0^1 (\frac{P_t(i)}{P_t})^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di)$ 度量价格在厂商中的分散程度。

零通胀稳态的附近，d_t 一阶近似到 0. 有 $(1-\alpha)n_t + a_t = y_t$.

经济的平均实际边际成本为

$$\begin{aligned} mc_t =& w_t - p_t - mpn_t \\ =& w_t - p_t - (a_t - \alpha n_t) - \log(1-\alpha) \\ =& w_t - p_t - \frac{1}{1-\alpha}(a_t - \alpha y_t) - \log(1-\alpha) \end{aligned}$$

where mpn_t 是经济中的平均边际劳动产品。从而有

$$\begin{aligned} mc_{t+k}\big|_t =& mc_{t+k} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(y_{t+k}\big|_t - y_{t+k}) \\ =& mc_{t+k} - \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}(p_t^* - p_{t+k}\big|_t) \end{aligned}$$

最后，我们来写经济的运行模式。

价格差分方程为

$$p_t^* - p_{t-1} = \beta\theta\mathbb{E}_t\{p_{t+1}^* - p_t\} + (1-\beta\theta)\Theta\widehat{mc}_t + \pi_t$$

通货膨胀方程

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \lambda\widehat{mc}_t$$

欧拉方程

$$y_t = \mathbb{E}_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - \rho)$$

where $\Theta = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\varepsilon\alpha}$, $\lambda = \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta}\Theta$.

新凯恩斯主义的菲利普曲线（NKPC）为

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa\bar{y}_t$$

where $\bar{y}_t \coloneqq y_t - y_t^n$ 是产出缺口 and y_t^n 是灵活价格状态下的产出，$\kappa = \lambda(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha})$。菲利普曲线表明通货膨胀率和产出缺口（失业）之间的交替关系。

动态的 IS 方程（DIS）：

$$\bar{y}_t = -\frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n) + \mathbb{E}_t\{\bar{y}_{t+1}\}$$

where $r_t^n = \rho + \sigma\mathbb{E}_t\{\Delta y_{t+1}^n\}$ 为自然利息率。动态的 IS 方程表明，产出缺口和实际利率相对于其自然水平值的当前的以及预期的偏差和成比例：$\bar{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(r_{t+k} - r_{t+k}^n)$.

这一部分形成一个递归结构：给定外生的自然利率和实际利率（一般主要由技术等参数决定），DIS 决定了产出缺口；而给定产出缺口路径，NKPC 决定了通货膨胀。

为了完成整个模型，还需要补充一个或多个用于决定名义利率 i_t 的方程：即描述货币政策如何被执行。当价格具有黏性时，货币政策非中性。

13.3.4 简单利率规则

简单利率规则为：

$$i_t = \rho + \phi_\pi\pi_t + \phi_y\bar{y}_t + \nu_t$$

where ϕ_π and ϕ_y 由当局选择，ν_t 是零均值的外生因素（但一般不 iid，实际上一般认为 AR（1））。

对外生因素考察

$$\nu_t = \rho_\nu \nu_{t-1} + \varepsilon_t^\nu$$

AR(1) 过程时，认为是货币政策冲击的效应。

校准之后，当收到收缩性货币政策的冲击时，即利息率上升，ε_t^ν 取到一个正值时（直觉上，这样会萎缩消费）：

1. 产出缺口减小，而产出的自然水平不受货币政策冲击影响，所以产出下降。
2. 通货膨胀率下降。
3. 名义利率和实际利率增加。实际利率加的更多一些 0.58, 名义利率 0.41 加的较少但大于冲击幅度。它是预期通货膨胀下降的结果。
4. 货币增长第 0 期为负，第 1 期及之后为正（第 0 期即为紧缩的货币政策）
5. 冲击幅度大约 0.25

嗯⋯有点意思

更关注的事情在于技术冲击的影响。依然认为技术冲击服从 AR(1).

1. 技术有正冲击（1）时，
2. 产出缺口有负冲击 (-0.1)，而产出有正冲击 (1)（自然产出具有更大的正冲击）
3. 通货膨胀有下降 (-0.5)。
4. 就业下降 (-0.2)。
5. 名义利率 (-0.9) 和实际利率 (-0.4) 下降；名义利率下降更多。
6. 货币当期增长，即期立刻失去影响（9 -¿ 0 -¿ 0）

13.3.5 外生货币供给

货币市场的均衡条件为

$$y_t - \eta i_t = l_t = m_t - p_t$$

其中 l_t 为实际余额。实际上：

$$l_t - l_{t-1} + \pi_t = \Delta m_t$$

将货币增长和实际余额和通货膨胀联系在了一起。我们认为货币的增长路径是外生的（而不再是利率规则外生）。

一个扩张性的货币政策冲击为

$$\Delta m_t = \rho_m \Delta m_{t-1} + \varepsilon_t^m$$

with $\varepsilon_t^m > 0 (= 0.25)$. 即货币的增长速度比平时快了那么一点。

在给定外生货币供给而不是利率时，扩张性货币政策的影响为

1. 产出缺口增大，对应的，产出增大 (0.3)。
2. 通货膨胀增大 (0.6)
3. 名义利率提升 0.17、实际利率降低 -0.25
4. 实际余额具有驼峰效应，在下一期冲击达到最大 0.14, 当期冲击大约 0.11
5. 货币增长冲击为 1

最后我们考虑技术冲击。技术有正冲击时，给定货币增长路径

1. 产出具有驼峰冲击，在第 3 期达到最大，约为 0.5；第一期大约 0.25
2. 产出缺口具有负冲击（自然产出有非常大的正冲击）-1
3. 通货膨胀为 -1 的负冲击
4. 就业大约-1.5 的负冲击
5. 名义利率似乎有正冲击，但数量级在 10 的 -18 次方，可以忽略不计
6. 实际利率有 0.75 的正冲击

13.4 内生资本积累的新凯恩斯主义 DSGE 模型

本节我将参考 Yun [1996], 来理解内生资本积累的新凯恩斯主义模型。我的重点在于理解模型设置，因为我对 RBC 的方法也不是很熟悉。

我将首先对文本进行翻译，并作初步的分节。

13.4.1 企业

经济体中包含无穷多个家庭，公司和一个政府。经济体中也包含一个连续测度的被垄断竞争企业生产的不同的商品。这些不同的商品加总的生产一个用于消费和增加总资本存量的单一组合商品。[相当于大量中间品，可以轻易套入内生增长模型] 同时，每一个企业面临的需求函数 [注意这里是垄断企业] 可以从特定的不同商品的聚合品中推导出来。为了描述它们的关系，我引入一个 Dixit - Stiglitz 形式的不同商品的聚合品

$$D_t = (\int_0^1 D_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{13.4.1}$$

其中 $\varepsilon > 1$, D_t 是 t 期组合商品的数量，$D_t(i)$ 是商品 i 的需求，$P_t(i)$ 是由公司 i 设定的商品 i 的价格。每一个公司面临的需求由获取方程 (13.4.1) 给出的 D_t 的最小化加总成本问题的解给出。记价格指数 [类似于 CPI] 为

$$P_t = (\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{13.4.2}$$

作为最小化成本的结果，公司 i 的需求函数遵循如下形式:

$$D_t(i) = (\frac{P_t(i)}{P_t})^{-\varepsilon} D_t. \tag{13.4.3}$$

注意方程 (13.4.3) 中的需求函数具有常数弹性 ε.

另一方面，公司 i 使用资本和劳动力生产商品 i。伴随生产技术和固定劳动力成本的生产函数为

$$Y_t(i) = F(K_t(i), z_t(H_t(i) - H^0)), \tag{13.4.4}$$

其中 $H^0, H_t(i), Y_t(i)$ 分别表示固定劳动力成本、加总劳动力投入和公司 i 在 t 时期的产出，z_t 表示劳动力扩张的技术水平。在这里，生产函数 F 具有对资本和净劳动力 $H_t - H^0$ 的常数规模收益。技术进步由对数随机游走给出:

$$z_t = z_{t-1} \exp(\gamma_t), \tag{13.4.5}$$

其中 γ_t 是具有无条件平均值 γ_z 的白噪声. [这就是技术进步的平均速度] 公司 i 的总成本函数可以被写作

$$TC_t(i) = \min_{H_t(i), K_t(i)} R_t K_t(i) + W_t H_t(i) \ s.t. \ D_t(i) = F(K_t(i), z_t(H_t(i) - H^0)),$$

其中 R_t 和 W_t 分别是资本服务的名义租金率和劳动力的名义工资率。

在本文中，我将假定租金率和工资率是完全灵活的，在一个完全竞争的要素市场中实现。因此，边际成本独立于产出水平。[注意上面给出的是总成本函数，边际成本为上述最小化问题中的拉格朗日乘子 lambda，并且它在竞争市场中独立于产出；因为是垄断竞争企业，没有零利润定理] 成本最小化条件可以被写作

$$W_t = MC_t \times z_t(\partial_2 F)(K_t(i), z_t(H_t(i) - H^0)) \tag{13.4.6}$$

$$R_t = MC_t \times (\partial_1 F)(K_t(i), z_t(H_t(i) - H^0)) \tag{13.4.7}$$

其中 MC_t 为时期 t 的边际成本。注意到上述最小化成本的条件对总量保持不变，因为生产函数是 1 次齐次的。进一步的，我们可以将总成本函数写作 $TC_t(i) = MC_t D_t(i) + W_t H^0$. 总结起来，$t$ 期企业 i 的瞬时真实利率可以被写作

$$\phi(\frac{P_t(i)}{P_t}, \frac{MC_t}{P_t}, D_t, W_t) = (\frac{P_t(i)}{P_t} - \frac{MC_t}{P_t})(\frac{P_t(i)}{P_t})^{-\varepsilon} D_t - \frac{W_t H^0}{P_t}. \tag{13.4.8}$$

在描述瞬时利润之后，我们可以基于 Calvo [1983] 来考虑公司是如何决定价格的。在每一个时期，$1-\alpha$ 部分的公司会采用一个新的价格，而另一部分则会采用上一期的价格乘以平均通货膨胀率 π 而不考虑上一次的价格已经用了多长时间，其中 $\alpha \in [0,1)$. 因此，这样的 Calvo 类型意味着当时期 t 的新承诺价格 $P_{t,t}$ 给出了价格指数随时间递归的演化方程

$$P_t^{1-\varepsilon} = (1-\alpha) P_{t,t}^{1-\varepsilon} + \alpha \pi^{1-\varepsilon} P_{t-1}^{1-\varepsilon} \tag{13.4.9}$$

其中 P_{-1} 给定。进一步的，我们通过计算利润最大化问题来解得承诺价格：

$$\max_{P_{t,t}} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \mathbb{E}_t \big[\frac{\Lambda_{t+k}}{\Lambda_t} \phi(\frac{\pi^k P_{t,t}}{P_{t+k}}, \frac{MC_{t+k}}{P_{t+k}}, D_{t+k}, W_{t+k}) \big]$$

其中 Λ_t 稍后详细解释。基于瞬时利率的表达式，我们可以解出承诺价格

$$P_{t,t} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \mathbb{E}_t \big[\Lambda_{t+k} P_{t+k}^{\varepsilon-1} D_{t+k} MC_{t+k} \big]}{\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta\pi)^k \mathbb{E}_t \big[\Lambda_{t+k} P_{t+k}^{\varepsilon-1} D_{t+k} \big]}. \tag{13.4.10}$$

在这里，企业考虑给定的总需求、资产价格的随机折现因子、边际成本和价格水平。进一步的，当 $\alpha = 0$ 时退化为灵活价格情形，给出了

$$\chi_{\alpha=0}(P_t - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} MC_t) = 0. \tag{13.4.11}$$

13.4.2 个体家庭

让我们来考虑代表性家庭。代表性家庭在 0 时期考虑最大化期望效用

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x(C_{1t}, C_{2t}), L_t + bL_{t-1}) \tag{13.4.12}$$

其中 C_{1t}, C_{2t} 分别是现金消费和信贷消费，L_t 是休闲并且参数 $b \in (-1, 1)$. 这里，b 非 0 意味着当期效用不独立于上期效用。在每个阶段，家庭面临时间约束

$$L_t + H_t \leq \bar{H} \tag{13.4.13}$$

其中 H_t 为工作时长或活跃在劳动力市场的人数，$\bar{H}$ 是一个固定的时间。

在证券市场集中开放之前，家庭在时期 t 拥有名义财富 N_t 来自于 $t-1$ 时期的遗留和种种收入 T_t. 因而家庭面对证券市场约束

$$B_t + M_t^h \leq N_t + T_t \tag{13.4.14}$$

其中 B_t 是名义无风险的债券在 t 时期的名义价值，M_t^h 是名义余额需求。证券市场关闭后，商品市场开放并且家庭通过现金购买商品

$$P_t C_{1t} \leq M_t^h. \tag{13.4.15}$$

每一个时间结束之后，家庭收到工资、租金回报率和企业分红。所以 $t+1$ 时期开始时的家庭财富为

$$N_{t+1} = B_t\theta_t + W_t H_t + (R_t + P_t(1-\delta))K_t + M_t^h - P_t(C_{1t} + C_{2t} + K_{t+1}) + \Pi_t^h \tag{13.4.16}$$

其中折旧率 $\delta \in (0, 1)$, θ_t, K_t, Π_t^h 分别为名义利率、加总资本存量和加总企业利润。家庭通过解上述约束下的最大化效用问题来决定消费需求、劳动力供给和货币需求。

当期一阶条件表明

$$\frac{\partial_1 x(C_{1t}, C_{2t})}{\partial_2 x(C_{1t}, C_{2t})} = \theta_t, \tag{13.4.17}$$

$$\partial_C U(x, L_t + bL_{t-1})\partial_1 x(C_{1t}, C_{2t}) = \Lambda_t \theta_t, \tag{13.4.18}$$

其中 $\Lambda_t = \mathbb{E}_t[\beta P_t \Lambda_t^h]$, Λ_t^h 为预算约束 (13.4.16) 的拉格朗日乘子。注意到 $x(C_1, C_2)$ 1 次齐次，方程 (13.4.16) 给出了消费比率 $\frac{C_{1t}}{C_{2t}} = h(\theta_t)$. 我们定义一个新的内生变量

$$\Phi_t = \frac{\partial_C U}{\partial_L U}. \tag{13.4.19}$$

从而可以得到消费需求和劳动力供给函数：

$$\begin{aligned} C_t &= C(\Lambda_t, \theta_t, \Phi_t) \\ H_t &= -bH_{t-1} + H^S(\Lambda_t, \theta_t, \Phi_t) \end{aligned} \tag{13.4.20}$$

Euler 方程为

$$\Lambda_t \frac{W_t}{P_t} = \Lambda_t \Phi_t e(\theta_t) + \mathbb{E}_t\big[\beta b \Lambda_{t+1} \Phi_{t+1} e(\theta_{t+1})\big] \tag{13.4.21}$$

其中 $e(\theta_t) = \frac{\theta_t}{x(h(\theta_t), 1-h(\theta_t))}$. 同时，证券和投资的一阶条件为

$$\Lambda_t = \mathbb{E}_t\big[\beta \frac{P_t \theta_{t+1}}{P_{t+1}} \Lambda_{t+1}\big], \tag{13.4.22}$$

$$\Lambda_t = \mathbb{E}_t\big[\beta \Lambda_{t+1} (\frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} + 1 - \delta)\big]. \tag{13.4.23}$$

进一步的，当名义利息率 $\theta_t > 1$ 时，现金增长约束的等式成立。因此，我们假设 $\theta_t > 1$ 恒成立，并且每一期的实际余额需求方程为

$$\frac{M_t^h}{P_t} = h(\theta_t) C(\Lambda_t, \theta_t, \Phi_t). \tag{13.4.24}$$

此外，政府发放货币 T_t, 从而货币存量的动态方程为 $M_t = M_{t-1} + T_t$. 对于货币增长速度 ω_t, $M_t = \omega_t M_{t-1}$.

13.4.3 总产出

在描述个体行为后，我们来转向加总的产出行为。加总需求 D_t 在每个时期必须等于加总产出 Y_t ，从而有 $Y_t = (\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$. 加总产出的定义没什么用，然而它可以得到加总需求和加总要素需求在均衡处的关系。使用这样的聚合体，总需求和生产要素由 $Y_t = (\int_0^1 F(K_t(i), z_t(H_t(i) - H^0))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ 给出。但我们希望能够将总产出仅表示为总要素投入的函数，如果定义另一种加总算子 $Y_t^* = \int_0^1 Y_t(i) di$, 使得 $Y_t^* = F(K_t, z_t(H_t - H^0))$, 其中 $K_t = \int_0^1 K_t(i) di$, $H_t = \int_0^1 H_t(i) di$. 那么这两种加总之间由价格指数给出关系：记 $P_t^* = (\int_0^1 P_t(i)^{-\varepsilon} di)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, 有 $Y_t^* = (\frac{P_t}{P_t^*})^{\varepsilon} Y_t$.

因此，均衡时，必然有：

$$C_t + I_t = Y_t^* \tag{13.4.25}$$

$$I_t - \delta K_t = K_{t+1} - K_t. \tag{13.4.26}$$

[备注，聚合形式 $Y_t = (\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ 是描述需求的等效形式；但是实际消耗的资源不应带权重，所以为 $C_t + I_t = Y_t^*$ 形式]

另外，Calvo 类型意味着价格指数具有如下发展形式：

$$(P_t^*)^{-\varepsilon} = (1-\alpha)P_{t,t}^{-\varepsilon} + \alpha\pi^{-\varepsilon}(P_{t-1}^*)^{-\varepsilon}. \tag{13.4.27}$$

因此，这里只有两个预先决定的价格 (P_{t-1}, P_{t-1}^*). 这允许我们不在一个太大的状态空间内考虑价格的缓慢变化。

至此，我们完成了模型和均衡的全部描述。

13.4.4 评价

我相当于花了一天时间写了两遍几乎差不多的模型设置…不得不说新凯恩斯的模型设置真的太庞大了。

基本上可以把握的到基本的模型设置是怎样的，并且它们表明，一定要对垄断竞争足够熟悉才能进行新凯恩斯的更好的处理。

由于研究波动时，很少考虑计划解，所以让技术外生进步是足够使用的。

嗯，主要作用就是让我温习了一遍如何翻译别人的模型设置，以及补上了一些微观基础的 GAP（这一遍过的时候很多地方我会自己算一下…）

叹口气，还是太神秘，需要模拟。

Part IV

经济增长

14 外生增长理论

14.1 马尔萨斯经济增长模型

14.1.1 农业社会人口演化

设农业社会的人口演化为

$$\frac{\dot{N}}{N} = g(\frac{C}{N})$$

其中 C 为加总消费（食物），N 为人口数量。人口增长率由人均消费给出。生育率函数 g 满足 $g(c^*) = 0, g'(c^*) > 0.$

14.1.2 农业社会生产函数

生产函数由土地和劳动力给出：

$$Y = zF(\bar{L}, N)$$

where $\bar{L}$ 为土地数量，z 为生产效率。生产函数满足一次齐次、边际产出为正。

14.1.3 均衡

出清条件意味着土地上的所有产出都被吃掉了。

$$Y = C$$

14.1.4 动力系统

由于 $C = Y$,

$$\frac{\dot{N}}{N} = g(\frac{zF(\bar{L}, N)}{N}) = g(zf(\frac{\bar{L}}{N}))$$

均衡处满足

$$\frac{C}{N} = zf(\frac{\bar{L}}{N}) = c^*$$

所以技术改变不影响均衡人均消费，只影响人口数量。

下面考察稳定性：

$$\partial_{\log N} g(zf(\frac{\bar{L}}{N})) = -\frac{\bar{L}}{N} g' z f' < 0$$

稳定。

14.1.5 评价

马尔萨斯给出了最早的关于经济增长的思考，并且得到了一个相当悲观的结果。在资本这种强有力到可怕的事物出现之前，土地的制约彻底的锁死了经济，甚至连生产效率的提升都并没有多大作用。他给出了最朴素的动力系统的观点来解释为什么人民的生活水平不会变好。技术水平提升，由于土地不变，人口会变多，从而再一次达到均衡。这样的表述发人深省，并且到目前仍然在支配着相当多的国家的运动规律：它们并没有资本积累，或者说资本的积累非常有限，从而并未逃脱马尔萨斯的陷阱。

14.2 Solow 模型

参考 Solow [1956].

14.2.1 资本积累

$$\dot{K} = I - \delta K$$

14.2.2 生产，消费和投资

$$Y = F(K, AL)$$

$$I + C \leq Y$$

14.2.3 外生储蓄率

$$sY = I$$

for s given.

14.2.4 动力系统

Let $k = \frac{K}{A(t)L(t)}$,

$$\dot{K} = sF(K, AL) - \delta K$$

暂时假设人口增长率和技术增长率恒定，分别为 g. 那么 k 可以视为单位人力资本资本存量。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{k}}{k} =& \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} \\ =& s\frac{f(k)}{k} - \delta - g - n\end{aligned}$$

where $f(k) = F(k, 1)$. 从而

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + g + n)k$$

14.2.5 均衡点和稳定性

均衡点满足:

$$sf(k^*) = (\delta + g + n)k^*,$$

稳定性检验:

$$J = sf'(k^*) - (\delta + g + n)$$

代入均衡点、边际收益递减,

$$J = s(f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*}) = -(1 - \alpha)(\delta + g + n) < 0$$

where α 是均衡位置附近的弹性 $\frac{k \partial f}{f \partial k}$.

14.2.6 黄金律

黄金储蓄率的定义是最大化均衡位置消费。

$$\begin{aligned}&\max_s \ (1 - s)f(k^*) \\ &s.t. \ sf(k^*) = (\delta + g + n)k^*\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = (1 - s)f(k^*) - \lambda((\delta + g + n)k^* - sf(k^*))$$

FOC:

$$0 = (1 - s)f'(k^*) - \lambda((\delta + g + n) - sf'(k^*))$$

$$0 = -f(k^*) + \lambda f(k^*)$$

从而当且仅当

$$f'(k^*_{gl}) = \delta + g + n$$

时，达到黄金律水平。

此时：

$$f'(k^*_{gl}) = \delta + g + n = s_{gl}\frac{f(k^*_{gl})}{k^*_{gl}}$$

从而

$$s_{gl} = \alpha$$

14.2.7 评价

应当注意，均衡位置是 $k = \frac{K}{AL}$ 保持恒定。在技术进步的情况下，人均资本 $\frac{K}{L} = Ak$ 指数增长。Solow 模型基本解释了在有资本的情形下，技术进步的极端重要性。无论储蓄率多高，人口增长多快，折旧率多大，资本占的比重多大，Solow 模型表明，经济增长速度完全而且仅取决于技术进步速度。

但是 Solow 模型有太多事物没能内生化了。家庭的储蓄应当具有微观基础，而技术为什么能进步则是一个非常迷幻的问题，似乎直接外生给定了技术的指数进步就给出了经济的指数增长。

14.3 Ramsey-Cass-Koopman Model

见 Cass [1965], Koopmans et al. [1963], Ramsey [1928].

14.3.1 家庭

设家庭人口为 $L(t)$ 增长率为 n.

家庭最大化效用

$$\max_{C(t)\in C^1(\mathbb{R})} \int_0^\infty e^{-\rho t} L(t) \log(\frac{C(t)}{L(t)}) dt$$

面临预算约束

$$\dot{\mathcal{A}} = r\mathcal{A} + wL - C$$

和无庞氏条件

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathcal{A}(t)e^{\int_0^t r(s)ds}dt \geq 0$$

其一阶条件为

$$\frac{\dot{C/L}}{C/L} = r - \rho$$

横截条件为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{A}(t)}{C(t)}e^{-\rho t} = 0$$

14.3.2 总生产

设代表性企业具有加总生产函数

$$Y = F(K, AL)$$

在每个时刻，企业租赁资本、雇佣工人进行生产，其成本为

$$RK + wL$$

利润为

$$\max_{K,L} F(K, AL) - (RK + wL)$$

或者最大化长期利润（在无价格刚性时等效）

$$\max_{K(t),L(t)}\int_0^\infty e^{-\int_0^t r(s)ds}(F(K(t), A(t)L(t)) - (R(t)K(t) + w(t)L(t)))dt$$

其一阶条件为

$$R = F_K$$

$$w = F_L$$

for all t.

对于规模收益不变的生产函数，利润最大化意味着

$$\pi = F - KF_K - LF_L = 0$$

14.3.3 均衡

资源约束，或者说是 GDP 的支出法度量，告诉我们

$$C + I = Y$$

资本市场出清：

$$S = I$$

资本积累：

$$\dot{K} = I - \delta K$$

由于总家庭资产和总资本相等：

$$K = \mathcal{A}$$

市场均衡意味着

$$\begin{aligned}\dot{K} =& I - \delta K \\ =& Y - C - \delta K \\ =& RK + wL - C - \delta K \\ =& rK + wL - C\end{aligned}$$

从而有

$$r = R - \delta$$

14.3.4 技术进步和动力系统

设技术进步率为 g, 人口增长率为 n. 记 $k = \frac{K}{AL}, c = \frac{C}{AL}$.
无横截条件约束的动力系统有：

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - g = F_K - \delta - g - \rho$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{Y}{K} - \frac{C}{K} - \delta - g - n = \frac{F}{K} - \frac{c}{k} - \delta - g - n$$

Note that

$$F_K = \alpha \frac{1}{K} F(K, AL) = \alpha \frac{1}{k} F(k, 1) = f'(k)$$

for $f(k) = F(k, 1)$ and $\alpha = \frac{K}{F} \frac{\partial F}{\partial K}$ 为弹性。

约化，可知

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \delta - g - \rho$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{f(k)}{k} - \frac{c}{k} - \delta - g - n$$

本形式下的动力系统是**自治的**，即演化和时间的绝对位置无关系：If $x(t) = x(0)$, then $x(t+s) = x(s)$）。

14.3.5 均衡和鞍轨

均衡位置 (c^*, k^*) s.t. $(\dot{c}, \dot{k})(c^*, k^*) = 0$. 即随时间演化不变。满足：

$$f'(k^*) = \delta + g + \rho$$

$$\frac{f(k^*)}{k^*} - \frac{c^*}{k^*} = \delta + g + n$$

$$\frac{s^* f(k^*)}{k^*} = \delta + g + n$$

均衡位置附近的 Jacobi 矩阵

$$J_{\log c, k} = \begin{pmatrix} & f''(k) \\ -c & f'(k) - (\delta + g + n)k \end{pmatrix}$$

具有负的行列式（注意生产函数边际收益递减）。从而必然有一正一负两个实根，不具有中心流形而是双曲的，请参见 Hartman - Grobman 定理。

我们可以画出动力系统的相图（请参见任意一本高宏课本），来了解本系统的行为模式。

在通常的假设下，本系统具有唯一的均衡点，并且有两组鞍轨。这两组鞍轨，一组是远离均衡点并且 $\frac{c}{k}$ 会趋向于无穷的轨道，叫不稳定轨道。另一组是随着时间运行而趋向于均衡点的轨道，叫做稳定轨道。对于任意不在这两条轨道和均衡点上的点，它随时间演化必然靠近不稳定轨道。

14.3.6 横截条件

注意到横截条件为

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \frac{k(t)}{c(t)} = 0$$

有如下引理（此处不加证明，读者可查阅相关文献或向作者索要）

横截条件成立当且仅当存在 $0 < a < b < +\infty$ s.t.

$$a \le \frac{k(t)}{c(t)} \le b$$

for all t.

横截条件表明，可行的轨道必然是稳定轨道。由于每一个初始值 $k(0)$ 都和稳定轨道有交点，从这个交点对应的 $c(0)$ 出发的轨道正是唯一的最优解。

进一步的，可以将初始消费写作初始资本的函数（政策函数），这是最优控制对应的动力系统。那么均衡点在这个意义下是稳定的。

这种稳定性表明，对均衡的讨论正是完备的对本系统的讨论。

14.3.7 均衡储蓄率和"黄金储蓄率"

均衡状态下的储蓄率为:

$$s^* = \alpha \frac{\delta}{\delta + \rho - n}$$

而黄金储蓄率为 $s^*_{gl} = \alpha$. 黄金储蓄率还有作用吗? 谁才是最优解?

当然是新古典增长模型是最优解，毕竟新古典增长模型是通过解效用最大化问题得到的。

14.3.8 评价

均衡位置（平衡增长路径）的人均产出增长速度完全且只依赖于技术进步速度。无论是更快或者更慢的人口增长速度都不会影响增长速度最终收敛到技术进步速度上。当然，在新古典增长模型中，储蓄率是内生的，不再有区分更高储蓄率和更低储蓄率的必要。

这个模型是最基本的模型，一切高宏模型（无论是 RBC 内生增长还是新凯恩斯）都要从这个模型出发构建。

14.3.9 附录：动力系统与二维动力系统

Def 14.3.1 (动力系统)**.** *A dynamical system is the tuple* $\langle \mathcal{M}, f, \mathcal{T} \rangle$ *with* $\mathcal{M}$ *a manifold (locally a Banach space or Euclidean space),* $\mathcal{T}$ *the domain for time (the reals, the integers, ...) (Abelian group) and* $f : \mathcal{T} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ *an evolution rule* $t \to f^t$ *(with* $t \in \mathcal{T}$*) such that*

1. $f^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$,

2. $f^{t+s} = f^t \circ f^s$.

这个定义应该比较宽泛。我们要求“状态集”$\mathcal{M}$ 是一个流形；事实上，我们一般遇到的都是欧氏空间，或者像延时系统那样遇到 Banach 空间，都比较简单。“时间集”$\mathcal{T}$ 一般取整数或者实数，它代表系统从某个状态出发向前演化多久或向后演化多久。在这样的定义下，动力系统已经是自治的了（一般我们可以通过添加维度 $\dot{\theta} = 1$ 来消去时间项从而让动力系统变得自治）。f^t 是一个微分同胚，用于表示从某时刻（因为自治，绝对的时间没有意义）的某给定状态出发，演化 t 时间的结果。微分同胚意味着双射且逆也是可微的：双射非常容易理解，从一个状态出发时间向后演化或者是时间向前演化，应该都有对应的状态。

上述定义的两条定义，第一条是说从本状态出发，不演化还是本状态；第二条是说，先演化 t 后演化 s 时间、先演化 s 后演化 t 时间、演化 $t+s$ 时间都是等价的。

对于二维动力系统，我们有完整的理论去揭示它的性质。这使得本模型具有极端清晰的几何图像。需要注意的是，高维（三维及以上）的动力系统不具有完备的讨论；详细的说，常常具有混沌性质。所以，像新古典增长模型一样的完备的对动力系统的讨论，在绝大多数情况下都无法完成。一般情况下，可以通过数数来得知是否是二维系统。在内生增长模型中，m 个状态变量和 n 个控制变量对应 $m+n-1$ 维，而在外生增长模型（比如本模型），则为 $n+m$ 维。本模型中，控制变量有一个，状态变量有一个，所以对应一个二维的动力系统。

二维动力系统的强势之处在于，我们可以完全的分类二维系统：

Thm 14.3.2 (Poincare-Bendixson)**.** *极限集非空，有界，不包含平衡点，则必然是一条闭轨线。*

Thm 14.3.3. *有界区域内半轨线的极限集只可能是如下三者之一：*

1. *平衡点，*

2. *闭轨线，*

3. *平衡点与 $t \to +\infty, t \to -\infty$ 时趋于这些平衡点的轨线（鞍轨）。*

15 内生增长模型: Lucas and Romer

15.1 AK Model

15.2 Romer Knowledge Spillover Model

15.3 Lucas Model

参考 Lucas [1989]. 我在这里不考虑人口增长。

15.3.1 家庭

设家庭人口为 1.

代表性家庭每个时刻进行消费（可以选择每个时刻的消费量），最大化效用

$$\max_{C(t)\in C^1(\mathbb{R})} \int_0^\infty e^{-\rho t}\log(C(t))dt.$$

代表性家庭具有家庭资产 $\mathcal{A}$, 通过市场利息率 r 进行增值。家庭在每个时刻可以选择分出一部分精力进行工作和进修。设工作和进修的总时长为 1, 工作时长为 u, 进修时长为 $1-u$. 家庭具有人力资本 H, 市场单位时间人力资本工资为 w, 从而家庭在每个时刻具有工资收入 wuH. 从而家庭面临预算约束

$$\dot{\mathcal{A}} = r\mathcal{A} + wuH - C$$

和无庞氏条件

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathcal{A}(t)e^{\int_0^t r(s)ds}dt \geq 0.$$

家庭在进修时可以获得人力资本。在本模型中，我们认为人力资本的增长率只和一个外生参数以及进修花费的精力有关，并成线性关系：

$$\dot{H} = \eta(1-u)H.$$

家庭解决上述最优化问题时，它具有哈密顿函数

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t}\log(C) + \lambda(r\mathcal{A} + wuH - C) + \mu(\eta(1-u)H)$$

其一阶条件为

$$0 = \frac{e^{-\rho t}}{C} - \lambda$$
$$0 = \lambda wH - \mu\eta H$$

$$-\dot{\lambda} = \lambda r$$

$$-\dot{\mu} = \lambda w u + \mu\eta(1-u)$$

横截条件为

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\mathcal{A}(t) + \mu(t)H(t) = 0$$

在这里最好化简清楚。消去影子价格。中间过程如下

$$\lambda w = \mu\eta$$

$$-\dot{\mu} = \lambda w u + \mu\eta(1-u) = \mu\eta$$

$$-r(t) + g_w(t) = g_\lambda + g_w = g_\mu = -\eta$$

这个方程将决定 u 的行为。它的原理有点麻烦，因为这个东西看上去对家庭是外生的；但是考虑市场均衡，如果这个式子不满足，u 将取到边界解，从而导致工资一下子拉高或者拉低；那么稳定的经济必然会内生的满足上面这个式子，从而约束了 u 的行为。所以 u 的行为同时也需要用市场均衡来得到。

15.3.2 总生产和均衡

代表性企业的总生产函数为

$$Y = F(K, uH) = K^\alpha (uH)^{1-\alpha}$$

设不存在折旧率，均衡时的工资率和利率满足：

$$r = Y_K = \alpha\frac{Y}{K}$$

$$w = Y_{uH} = (1-\alpha)\frac{Y}{uH}$$

从而均衡时的经济系统的演化方程为：

$$\dot{K} = Y - C$$

$$\dot{H} = \eta(1-u)H$$

家庭端决定的均衡条件还有：

$$-r + g_Y - g_u - g_H = -r + g_w = -\eta$$

15.3.3 动力系统

计算发现，动力系统体现为如下形式：let $y = \frac{Y}{K}$, $c = \frac{C}{K}$,

$$g_y = -(1-\alpha)(y - \frac{\eta}{\alpha})$$

$$g_u = \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta + \eta u - c$$

$$g_c = c - (1-\alpha)y - \rho$$

这个系统非常简洁！因为变量 y 是分离的，并且以指数速度向均衡利率收敛。而 u, c 侧几乎是线性的不稳定，并且分割曲面都是平面。从而有显然的鞍轨，并且被横截条件控制。从而我们只需要考虑均衡增长路径。

15.3.4 BGP

均衡增长路径满足：

$$g_Y = g_H = g_K = g_C, g_w = g_r = g_u = 0$$

i.e.

$$r^* = \eta$$

$$r^* - \rho = g^*$$

$$\frac{1}{\alpha} r^* s^* = g^*$$

$$\eta(1 - u^*) = g^*$$

So

$$g^* = \eta - \rho$$

$$s^* = \alpha \frac{\eta - \rho}{\eta}$$

$$u^* = \frac{\rho}{\eta}$$

Lucas 增长模型的评价同 Romer 模型一并给出。

15.4 Romer Model

见 Romer [1990].

15.4.1 家庭

设家庭人口为 L.

代表性家庭每个时刻进行消费（可以选择每个时刻的消费量），最大化效用

$$\max_{C(t)\in C^1(\mathbb{R})}\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\log(C(t))dt.$$

代表性家庭具有家庭资产 $\mathcal{K}$, 通过市场利息率 r 进行增值。家庭在每个时刻可以选择在生产部门或者研发部门工作。生产部门工作时长为 u^S, 研发部门工作时长时长为 $1-u^S$ (劳动力供给). 生产部门工资为 w_L, 研发部门工资为 w_R, 从而家庭面临预算约束

$$\dot{\mathcal{K}} = r\mathcal{K} + (w_L u^S + w_R(1-u^S))L - C$$

显而易见的是市场给出的两种工资必然相等，否则家庭就会全部选择进行研发或者进行生产活动。从而得到如下劳动力市场均衡条件：

$$w_L = w_R = w$$

家庭的预算约束变为

$$\dot{\mathcal{K}} = r\mathcal{K} + wL - C$$

以及无庞氏条件

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathcal{K}(t)e^{\int_0^t r(s)ds}dt \geq 0$$

其一阶条件为

$$\frac{\dot{C}}{C} = r - \rho$$

横截条件为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{K}(t)}{C(t)}e^{-\rho t} = 0$$

15.4.2 物质生产部门

物质生产部门是竞争性的行业。代表性企业通过购买中间产品（流动不变资本：投入品，原材料或者不耐用机器）来进行生产，其生产函数为

$$Y = (uL)^{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^A x_i^{\alpha}di$$

其中 u 为企业雇佣的工人数目（劳动力需求）。它在每个时刻的成本为

$$wuL + \int_0^A p_i x_i di$$

企业在每个时刻均最大化利润，

$$\max \int_0^A (uL)^{1-\alpha} \frac{1}{\alpha} x_i^\alpha - p_i x_i di - wuL$$

一阶条件为

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{uL}$$
$$(uL)^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1} = p_i$$

这些代表了劳动力市场和资本市场的需求曲线。需求函数

$$x_i(p_i) = uLp_i^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

劳动力市场均衡表明 $u = u^S$.

15.4.3 中间品部门

中间品部门是垄断竞争的。每开发出一个新专利，就会有一个法人企业成立，购买这个专利并且进行运营、进行垄断。

它购买最终产品，每 1 单位的本专利对应的中间品需要 ψ 单位的最终产品来进行生产（恒定边际成本）。

它面临的需求函数为

$$\alpha(uL)^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1} = p_i$$

它的利润最大化问题为

$$\begin{aligned}\max_{p_i} \ \pi_i =& p_i x_i(p_i) - \psi x_i(p_i) \\ =& uLp_i^{-\frac{1}{1-\alpha}}(p_i - \psi)\end{aligned}$$

FOC

$$0 = -\frac{1}{1-\alpha} p_i^{-\frac{1}{1-\alpha}-1}(p_i - \psi) + p_i^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

i.e.

$$\alpha p_i = \psi$$

中间品价格、中间品提供数量、瞬时利润都是均匀的。

不妨假定 $\psi = \alpha$, then

$$p_i = 1$$

$$x_i = uL$$

$$\pi_i = uL(1-\alpha)$$

中间品部门所购买的专利费用，它满足

$$V_i(t) \leq \int_t^\infty \pi_i(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} ds$$

右端是运营这个专利所带来的总利润的贴现值。那么市场均衡告诉我们，这个应该取等号。

从而

$$V_i(t) = \int_t^\infty \pi_i(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} ds$$

注意到瞬时利润与 i 无关，从而

$$V(t) = \int_t^\infty \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} ds$$

接下来给出这个方程的等价表述：

两边对时间 t 求导，得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -\left[\pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\}\right]\Big|_{s=t} + \int_t^\infty \frac{d}{dt}\left[\pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\}\right] ds \\
&= -\pi(t) \exp\{0\} + \int_t^\infty \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} \frac{d}{dt}\left[-\int_t^s r(\tau) d\tau\right] ds \\
&= -\pi(t) + \int_t^\infty \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\}(-[-r(\tau)]\mid_{\tau=t}) ds \\
&= -\pi(t) + r(t) \int_t^\infty \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} ds \\
&= -\pi(t) + r(t) V(t)
\end{aligned}$$

这是积分方程对应的微分方程。对于积分方程而言，如果要让方程等价，除了微分方程还需要边界条件。这个边界条件是定价的横截条件：

$$\lim_{t\to\infty} V(t) \exp\{\int_0^t r(\tau) d\tau\} = 0$$

这是由于我们需要利润的贴现值是一个正实数而不是正无穷大，具体的推导如下：

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi(s) \exp\{-\int_t^s r(\tau)d\tau\}ds$$

$$\begin{aligned}
V(t)\exp\{-\int_0^t r(\tau)d\tau\} = &\int_t^{\infty} \pi(s)\exp\{-\int_0^s r(\tau)d\tau\}ds \\
=&(\int_0^{\infty} - \int_0^t)(\pi(s)\exp\{-\int_0^s r(\tau)d\tau\}ds) \\
=&V(0) - \int_0^t \pi(s)\exp\{-\int_0^s r(\tau)d\tau\}ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} V(t)\exp\{\int_0^t r(\tau)d\tau\} = 0 =&V(0) - \lim_{t\to\infty}\int_0^t \pi(s)\exp\{-\int_0^s r(\tau)d\tau\}ds \\
=&V(0) - \int_0^{\infty} \pi(s)\exp\{-\int_0^s r(\tau)d\tau\}ds \\
=&V(0) - V(0) = 0
\end{aligned}$$

这两个方程联合起来应该和积分方程等价，这里不加证明。（只要对微分方程作积分，那么相差一个常数；再使用横截条件证明相差的常数为 0 ，即得证，读者如感兴趣应自行证明）。

注意，若 $\dot{V}(t) = 0, r(t) \geq r_{inf} > 0$ 恒成立，那么横截条件会被自动满足（请读者自行证明）。

15.4.4 研发部门

研发部门是完全竞争且自由进入的。他们雇佣劳动力进行研发，研发的函数为

$$M(t) = A(t)H(t)$$

其中 M 为这个时刻新专利的数量，H 为雇佣的研发人员，A 为社会技术水平，和个体企业决策无关（知识外溢）。那么，市场出清意味着

$$\dot{A}(t) = M(t)$$

$$H(t) = (1 - u(t))L$$

企业的利润为

$$V(t)M(t) - w(t)H(t)$$

从而自由进入条件表明

$$(V(t)A(t) - w(t))\chi_{H(t)>0} = 0$$

内点解意味着

$$V(t)A(t) = w(t)$$

15.4.5 均衡

接下来考察市场均衡。

最终产品 Y 的供给是竞争性企业给出的，

$$Y = (uL)^{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^A x_i^\alpha di$$

注意到垄断者的定价和需求函数表明 $x = x_i = uL$, 从而

$$Y = \frac{1}{\alpha}(uL)^{1-\alpha}Ax^\alpha = \frac{1}{\alpha}A(t)u(t)L$$

最终产品的需求有两个部分：消费、中间品的投入品，也就是

$$Y = C + X$$

其中中间品的投入品为

$$X = \int_0^A \psi x_i di = \psi Ax = \alpha A(t)u(t)L$$

中间品的供给需求已经被计算；研发部门有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\pi(t) + r(t)V(t)\\ &= -(1-\alpha)uL + rV\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} V(t)\exp\{\int_0^t r(\tau)d\tau\} = 0$$

$$\dot{A} = A(1-u)L$$

劳动力市场均衡意味着两种工资相等，从而有

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{uL} = VA$$

最后，消费行为意味着

$$\frac{\dot{C}}{C} = r - \rho$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)V(t)}{C(t)}e^{-\rho t} = 0$$

where $AV = \mathcal{K}$.

15.4.6 化简

注意到劳动力市场均衡

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{uL} = VA$$

和产出供给

$$Y = \frac{1}{\alpha}(uL)^{1-\alpha}Ax^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}A(t)u(t)L$$

联立可得

$$(1-\alpha)\frac{\frac{1}{\alpha}A(t)u(t)L}{uL} = VA$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} = V$$

从而专利费是一个固定的数额，$\dot{V} = 0$。再利用专利费的 HJB 方程

$$\dot{V}(t) = -(1-\alpha)uL + rV$$

可得

$$rV = (1-\alpha)uL$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = V$$

$$\Rightarrow r = \alpha uL$$

产品市场均衡可得

$$\frac{1-\alpha^2}{\alpha}AuL = C$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = r - \rho = \alpha uL - \rho$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = (1-u)L$$

从而

$$g_u = g_C - g_A = (1+\alpha)uL - \rho - L$$

利用横截条件，可得

$$g_u = 0$$

恒成立，从而

$$u = \frac{1}{1+\alpha}\frac{\rho + L}{L}$$

注意，内点解成立的条件是

$$\alpha L > \rho$$

这与 AK 模型中的条件基本相同，意味着经济是“生产型”的，一个增长的经济比停滞和倒退的经济福利更高。

15.4.7 BGP

Romer Model 化简到最后是一个一维动力系统，只有方程

$$g_u = (1+\alpha)uL - \rho - L$$

和横截条件。这个动力系统是正反馈的，从而横截条件意味着 u 有唯一解。由于 u 是一个比例，也就是所谓的垂直量，这种利率恒定、增长率恒定、研发人员占比恒定的路径自然是平衡增长路径 (BGP).

我们接下来将平衡增长路径上面的各个量用参数表示出来。

$$u = \frac{1}{1+\alpha}\frac{\rho+L}{L}$$

$$g_A = g_Y = g_C = \frac{\alpha L - \rho}{1+\alpha}$$

$$r = \frac{\alpha}{1+\alpha}(\rho+L)$$

$$V = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$Y = \frac{1}{\alpha}\frac{\rho+L}{1+\alpha}A(t)$$

$$C = \frac{1-\alpha}{\alpha}(\rho+L)A(t)$$

收入的消费率

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{rK+wL} \\
=&\frac{\frac{1-\alpha^2}{\alpha}AuL}{rVA+LVA} \\
=&\frac{\rho+L}{(\frac{\alpha}{1+\alpha}(\rho+L)+L)} \\
=&\frac{(1+\alpha)(\rho+L)}{\alpha\rho+(1+2\alpha)L}
\end{aligned}$$

另外，GDP 等于最终产品产出 - 中间品 + 研发部门产出数量 * 专利价格，也就是

$$GDP = Y - X + V\dot{A} = C + VAg_A$$

消费率

$$1 - s = \frac{C}{C + VAg_A} = \frac{(\rho + L)}{(\rho + L) + \frac{\alpha L - \rho}{1+\alpha}} = \frac{(1+\alpha)(\rho + L)}{\alpha\rho + (1+2\alpha)L}$$

从而收入的消费率等于 GDP 的消费率，没有出现错误。

16 Models of Schumpeterian Growth

16.1 A Baseline Model of Schumpeterian Growth

这是一个从数学结构上非常近似于 Romer 模型的熊彼特模型。我们从这个熟悉的数学结构出发进行处理和计算。

16.1.1 基本环境

家庭的偏好和之前相同。我们假定劳动力只用于最终产品生产，而不用于研发。研发需要依靠最终产品的投入进行研发，总研发投入为 $Z(t)$. 那么最终产品市场均衡表明

$$C(t)+Z(t)=Y(t)-X(t)$$

其中 $X(t)$ 为为生产中间品的投入。

与先前不同的是，中间品拥有一个额外的参数属性：质量。设中间品 v 于时刻 t 有一些不同的厂家可能生产出售不同的质量，质量的集合为

$$\mathcal{Q}(v,t)$$

每个厂家的中间品的质量为 q.

最终产品生产商使用不同种类 $v\in(0,1)$ 的中间品进行生产。对于每一种中间品，它必须选择某个质量的厂家进行生产[5]。它从集合 $\mathcal{Q}(v,t)$ 中选择一个质量 $q(v,t)$, 其生产函数为

$$Y(t)=\frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}\int_0^1 q(v,t)x(v,t\mid q)^{\alpha}dv$$

我们顺便计算出最终产品生产商的一阶条件和要素需求函数，以凸显这个模型设置的特色。

生产商在选择劳动力时，比较简单，

$$w=(1-\alpha)\frac{Y}{L}$$

它在选择质量为 q 的第 v 种中间品时，面临的价格为 $p(v,t\mid q)$. 它会比较选择不同质量的需求和价格。那么，它的情况如下：

[5]这是为了避免在稻田条件下可能出现的小生产情况，也就是每一个质量的产品都用一点点，来取得接近于无穷大的边际产出。

中间品的边际收益为

$$\frac{\partial Y}{\partial x(v,t\mid q)}=L^{1-\alpha}q(v,t)x(v,t\mid q)^{\alpha-1}$$

边际成本为

$$p(v,t\mid q)$$

它会选择 x 的数量使得边际收益等于边际成本，

$$q(v,t)L^{1-\alpha}x(v,t\mid q)^{\alpha-1}=p(v,t\mid q)$$

$$q(v,t)L^{1-\alpha}x(v,t\mid q)^{\alpha}=p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)$$

$$(\frac{q}{p})^{\frac{1}{1-\alpha}}L=x(v,t\mid q)$$

另外，它需要选择 q, 让它的总利润最大，从而需要有

$$\int_0^1\frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}q(v,t)x(v,t\mid q)^{\alpha}-p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)dv\geq\int_0^1\frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}q'(v,t)x(v,t\mid q')^{\alpha}-p(v,t\mid q')x(v,t\mid q')dv$$

这意味着

$$\frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}q(v,t)x(v,t\mid q)^{\alpha}-p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)\geq\frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}q'(v,t)x(v,t\mid q')^{\alpha}-p(v,t\mid q')x(v,t\mid q')$$

我们还要代入要素需求，有

$$\frac{1}{\alpha}p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)-p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)\geq\frac{1}{\alpha}p(v,t\mid q')x(v,t\mid q')-p(v,t\mid q')x(v,t\mid q')$$

也就是

$$p(v,t\mid q)x(v,t\mid q)\geq p(v,t\mid q')x(v,t\mid q')$$

再代入一次要素需求，

$$\frac{q_0}{p_0^{\alpha}}\geq\frac{q_1}{p_1^{\alpha}}$$

其中 q_0 是最终被选定的中间品质量。

我们大概描述一下上面的过程。在计算要素需求函数时，我们涉及到了两个比较过程。第一个是边际收益和边际成本的比较，对于每一种可能被厂商所用的中间品，它可以利用这个过程得到可能使用的数量。第二步是比较同一类中间品不同质量下的价格。如果一个产品质量更好，但是过于昂贵，厂商不会选择它；如果质量差，而价格便宜不到能够让厂商选择的地步，也不会被选择。由于质量参数和数量参数有着不同的地位（不齐次），这为质量能够带来不同选择提供了机会。厂商最终选择的商品质量必须满足最终的价格的条件。这将为中间品厂商的定价带来限制，同一类产品不同质量的中间品厂商间将形成竞争。

我们将利用这个条件完成 Acemoglu 习题的 14.9 和 14.10.

16.1.2 中间品厂商

我们将使用一个与 Acemoglu 不同而更加简单的经济结构。在这个经济结构中，阿罗替代效应不被出现。我们以下表列出我们的研究计划来考察不同情况下可能出现的现象：

- 中间品厂商是否进行研发？如果研发只由研发市场进行，所有中间品厂商无论新进入者还是旧垄断者，面临的都是外部决策，从而不存在阿罗替代效应。
- 如果中间品厂商进行研发，是否有边际成本的区别？
- 研发过程是积累过程还是独立过程？研发成功的可能性仅仅依赖于当期投入还是依赖于累计的投入量？

负责生产质量 $q(v,t)$ 的中间品厂商需要使用最终产品以边际成本 $\psi q(v,t)$ 来生产。他们可以制定每个时刻的价格以最大化利润；但是需要考虑其他质量的中间品的竞争。这是它们的短期行为。

长期行为上，他们是垄断竞争的，具有自由进入的性质。企业将预期下一个质量的商品出现的时间，并选择购买或者不购买新质量产品的专利。而新企业选择购买新质量产品的专利后，预期的长期利润和这次的成本是相等的，也就是期望贴现零利润。

我们先让中间品厂商不进行研发，而是通过竞争性的研发市场进行研发。中间品厂商通过购买专利进入市场。

另外，我们还需要设定中间品世界的竞争者的情况。我们采用"质量阶梯"，也就是

$$\mathcal{Q}(v,t)=\{\lambda^n q_0 : n\in\mathbb{Z}\cap[0,N(v,t)]\}$$

我们首先观察短期行为。

中间品厂商的短期行为 中间品厂商 q 面临需求函数

$$x(v,t\mid q)=\begin{cases}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{1-\alpha}}L & \frac{q}{p^\alpha}>\frac{q_1}{p_1^\alpha},\forall q_1\\ (\frac{q}{p})^{\frac{1}{1-\alpha}}L_q & \frac{q}{p^\alpha}\geq\frac{q_1}{p_1^\alpha},\forall q_1 \text{ and } \frac{q}{p^\alpha}=\frac{q_1}{p_1^\alpha},\exists q_1\\ 0 & \frac{q}{p^\alpha}<\frac{q_1}{p_1^\alpha},\exists q_1\end{cases}$$

其中 L_q 是使用 q 质量商品的最终厂商使用的劳动力的总数量。

由于需求函数关于外生参数 L_q 是线性的，它不影响到定价，这为我们的处理提供了方便。现在，

$$\max_{\psi q \leq p \leq \min_{q_i \in \mathcal{Q}(v,t)}\{(\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} p_i\}} (p-\psi q)(\frac{q}{p})^{\frac{1}{1-\alpha}} L$$

是垄断者的最大化条件。它一方面要保证具有正的需求，另一方面要保证具有正的利润流，这为定价提供了一些限制。

我们来计算排除掉这些限制的情况：

$$p = \frac{\psi q}{\alpha}, \text{if } \frac{\psi q}{\alpha} \leq \min_{q_i \in \mathcal{Q}(v,t)} \{(\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} p_i\}$$

这是不受限制的条件。

我们来讨论这个条件究竟意味着什么。首先，如果这个企业是头部（质量最高）的企业，当它选定纯垄断定价后，其他企业能选择垄断定价吗? 如果其他企业选择垄断定价，意味着

$$p_i = \frac{\psi q_i}{\alpha}$$

进而

$$\frac{\psi q}{\alpha} \text{ v.s. } (\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\psi q_i}{\alpha}$$

等价于

$$q_i^{\alpha} \text{ v.s. } q^{\alpha}$$

左边天然小于等于右边。从而非头部企业不能选择纯垄断定价。

非头部企业为了获得利润，会试图调低价格来和头部企业进行竞争。非头部企业的最低价格是 ψq_i，也就是竞争可能的 $\min_{q_i \in \mathcal{Q}(v,t)}\{(\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} p_i\} = \min_{q_i \in \mathcal{Q}(v,t)}\{(\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} \psi q_i\}$, 从而头部企业不受限制的条件应该是：

$$\begin{aligned} &\psi q \leq \alpha (\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} \psi q_i \\ \Leftrightarrow &q^{\alpha} \leq \alpha^{\alpha} \frac{q}{q_i} q_i^{\alpha} \\ \Leftrightarrow &(\frac{q}{q_i})^{1-\alpha} \geq \frac{1}{\alpha^{\alpha}}, \forall i \end{aligned}$$

在阶梯创新下，这意味着

$$\lambda \geq \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}.$$

[Acemoglu, EX 14.9 解答完毕]

如果头部企业受到限制，意味着有些企业将和它形成竞争。由于质量优势的存在，在其他企业短期利润为 0 的情况下，头部企业的短期利润为正。为了追求最大的利润，头部企业更愿意占据全部市场（非占据全部市场时，它的短期利润甚至可能为 0），从而它的定价必然追求占领全部市场[6]，也就是

$$p < (\frac{q}{q_i})^{\frac{1}{\alpha}} \psi q_i, \forall i$$

并且取到极限值。这时，它的定价不由垄断决定，而是由竞争决定，

$$p = \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \psi q.$$

[Acemoglu, EX 14.10 解答完毕]

综上，

$$p = \begin{cases} \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \psi q & \lambda < \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\ \frac{\psi q}{\alpha} & \lambda \geq \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \end{cases}$$

这关于 λ 是一个连续函数。也分别意味着激烈创新和非激烈创新。

短期的利润流为

$$\pi = (p - \psi q) x$$

为了方便我们整体的计算，令 $p = q$, 这只需要通过调整 ψ 来决定，并且由于

$$\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \psi = 1, \lambda > 1,$$

这总是成立的。

进而，

$$p = q, x = L.$$

以及利润流

$$\pi = (1 - \psi) L q$$

where

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \lambda \geq \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \\ \lambda^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} & 1 < \lambda < \frac{1}{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \end{cases}$$

[6]定价的古诺均衡，而不是定量的；如果是纯古诺均衡会意味着双方均零利润，而现在有一方零利润

中间品厂商的长期行为 我们的关键在于计算专利价值。与之前通过直接积分定义不同的是，我们现在可能需要利用动态规划来获得这个信息。

由于在新专利出现后，旧的专利完全无法和新专利进行竞争（参见上面的价格古诺均衡）。设大家对于新专利出现的概率具有一致的预期：$z(v, t \mid q)$. 我们将基于此进行计算。

设专利价值为 V, '我们需要得到 V 的表达式。设市场上存在一个零利润的保险公司，它将企业个体的期望利润转化为准确利润，并且由于垄断竞争企业数量有无穷多个，它自己就能直接获得实在的期望利润。这样的保险公司可以将整个经济润滑，为我们的计算带来方便。

对于一个专利，大家认为每个时刻它有失去价值的概率 $z(t)$, 企业购买保险 $i(t)$：如果它失去价值，那么企业将获得赔偿，赔偿的价格应该是专利失去价值前一瞬间的价值。那么

$$V(t) = \int_t^\infty (\pi(s) - i(s)) \exp\{-\int_t^s r(\tau) d\tau\} ds$$

对于企业而言，专利价值的微分方程为

$$\dot{V} = rV - \pi + i$$

而根据保险公司的零利润条件，

$$i(t) = z(t)V(t).$$

从而可以得到专利价值的微分方程：

$$\dot{V} = rV - \pi + zV$$

自由进入表明专利价值就是专利价格（固定成本），从而结束了我们对于垄断者长期行为的描述。

另外，如果我们以专利价格为 1, 那么消费品价格为 P, 利润流为 $P\pi = (1-\psi)PL$, 以及专利价格的微分方程直接决定了利息率：

$$r = (1-\psi)PL - z$$

16.1.3 研发部门

我们仍然表示：期望利润为 0. 如果一个企业研发失败，那么它会获得保险公司的补偿；如果一个企业研发成功，它所支付的保险费用也将让它的利润为 0. 而保险公司也具有零利润。

我们省略这一步。

社会平均质量为

$$Q(t)=\int_0^1 q(v,t)dv$$

其中 q 为头部企业质量，也就是 $q(v,t)=\sup\mathcal{Q}(v,t)$. 设平均质量的提升为

$$\dot{Q}=\eta Z$$

这给出了宏观的条件。为了和前面的中间品对接，我们需要探究是怎样的微观基础才能得到这样的条件。注意到

$$\dot{Q}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_0^1\left(q(v,t+\Delta t)-q(v,t)\right)dv}{\Delta t}=\eta Z(t)$$

而大数定律意味着

$$Q(t)=\mathbb{E}q(v,t)$$

以及

$$\dot{Q}(t)=\mathbb{E}(\dot{q}(v,t))$$

$$\Delta Q(t)=\mathbb{E}(\Delta q(v,t))$$

由于在 $(t,t+\Delta t)$ 时间内发生创新的概率为 $z(t)\Delta t$, 从而这个期望值为

$$q(v,t)\left(z(t)\Delta t\cdot(\lambda-1)\right)$$

进而

$$\eta Z(t)=qz(\lambda-1)$$

也就是如果在种类 v 上的研发投入为 $Z(v,t)$, 那么它在时刻 t 产生创新的概率为

$$z(v,t)=\frac{\eta}{\lambda-1}\frac{Z(v,t)}{q(v,t)}$$

并且根据这个式子，$\dot{Q}=\int_0^1\dot{q}(v,t)dv=\int_0^1 Z(v,t)dv=Z(t)$.

这意味着研发是独立的，今天的研发失败不能促进明天的研发成功。当然，这是为了我们在数学上和 Romer 模型等价作出的假设；我将在之后尝试使用非独立的情况，很可能会造成种种问题。

接下来，我们观察新专利的价格。在罗默模型中，$r(t),\pi(v,t)$ 是同质的，从而 $V(v,t)$ 是同质的。但在这里，

$$\dot{V}(v,t)=r(t)V(v,t)+z(v,t)V(v,t)-\pi(v,t)$$

也许是不同质的，并且 $z(v,t)$ 由竞争决定，有不同质的风险，我们需要仔细考察。

首先，

$$\pi(v,t) = (1-\psi)Lq(v,t)$$

不同质。

其次，若

$$V(v,t \mid \lambda q(v,t)) \neq V(u,t \mid \lambda q(u,t))$$

考虑研发的期望利润，

$$\mathbb{E}\pi_{RD} = \frac{\eta}{\lambda-1}\frac{Z(v,t)}{q(v,t)}V(v,t \mid \lambda q(v,t)) - Z(v,t)$$

期望利润应当相等。注意到规模收益不变，如果有过强烈的异质性扭曲，会造成这个商品的研发投入为 0。市场力量将通过这样的方式调整研发投入的量的大小，而这个量将决定 z 进而影响 V. 从而这个均衡可以通过市场力量实现。

那么这意味着

$$\frac{\eta}{\lambda-1}\frac{V(v,t \mid \lambda q(v,t))}{q(v,t)} = 1$$

简便起见，令 $\lambda\eta = \lambda - 1$, 从而 $V(v,t \mid \lambda q(v,t)) = \lambda q(v,t)$, 从而 $V(v,t \mid q) = q$.

16.1.4 一般均衡

首先，注意到

$$x(v,t \mid q) = L,$$

因为我们设定 $p(v,t \mid q) = q$. 那么，

$$Y(t) = \frac{L^{1-\alpha}}{\alpha}\int_0^1 q(v,t)L^{\alpha}dv = \frac{L}{\alpha}Q(t)$$

进而，

$$X(t) = \int_0^1 q(v,t)\psi x(v,t \mid q)dv = \psi LQ(t)$$

所以最终产品净产出为

$$C + Z = Y - X = (\frac{1}{\alpha} - \psi)LQ(t)$$

接下来考虑专利价值。

$$\pi(v,t \mid q) = (1-\psi)Lq(v,t)$$

$$\dot{V}(v,t \mid q) = r(t)V(v,t \mid q) + z(v,t \mid q)V(v,t \mid q) - \pi(v,t \mid q)$$

其中 $z(v,t \mid q)$ 代表对 λq 的研发概率。

$$V(v,t \mid q) = q$$

从而

$$(1-\psi)Lq(v,t) = r(t)q(v,t) + z(v,t \mid q)q(v,t)$$

进而

$$(1-\psi)L - r(t) = z(v,t \mid q)$$

从而 $z(v,t \mid q)$ 与 v, q 无关，保持独立性，记作 $z(t)$. 由于

$$z(v,t) = \frac{\eta}{\lambda - 1}\frac{Z(v,t)}{q(v,t)}$$

所以

$$z(t)q(v,t) = \frac{1}{\lambda}Z(v,t)$$

$$z(t)Q(t) = \frac{1}{\lambda}Z(t) = \frac{1}{\eta\lambda}\dot{Q}(t)$$

这里，方程有

$$\dot{Q}(t) = (\lambda - 1)z(t)Q(t)$$

$$C(t) + \lambda z(t)Q(t) = (\frac{1}{\alpha} - \psi)LQ(t)$$

$$r(t) + z(t) = (1-\psi)L$$

以及家庭的行为

$$g_C(t) = r(t) - \rho$$

到这里化简就容易了。直接消去 (r, z),

$$\frac{1}{\lambda - 1}g_Q + g_C + \rho = (1-\psi)L$$

$$C + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\dot{Q} = (\frac{1}{\alpha} - \psi)LQ$$

写成更加容易处理的形式，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda-1}g_Q + g_Q + g_c + \rho &= (1-\psi)L \\
c + \frac{\lambda}{\lambda-1}g_Q &= (\frac{1}{\alpha} - \psi)L
\end{aligned}
$$

where $c = \frac{C}{Q}$, 注意到 $\frac{1}{\lambda-1} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda-1}$,

$$
\begin{aligned}
g_c &= c - \rho - \frac{1-\alpha}{\alpha}L \\
c + \frac{\lambda}{\lambda-1}g_Q &= (\frac{1}{\alpha} - \psi)L
\end{aligned}
$$

第一个方程自治且正反馈、有唯一平衡位置，根据横截条件，

$$
c^* = \rho + \frac{1-\alpha}{\alpha}L
$$

进而

$$
g_Q^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}\left((1-\psi)L - \rho\right)
$$

为经济增长率, 并且 BGP 是唯一解。

到这里，基本的熊彼特模型和 AK、Romer 模型均同构。

Part V

开放经济

17 商品和资金贸易

17.1 经常账户盈余

17.1.1 概念

NX 为净出口，表示本国最终产品出卖到其他国家的商品。满足:

$$
Y = C + I + G + NX
$$

NFP 为国外对本国居民的净要素支付，比如: 本国居民通过线上上班为外国领土上的公司工作，收入得到的工资属于 NFP; 本国居民持有国外企业的股份，收入得到的利润分红属于 NFP. 满足:

$$NFP = GNP - GDP$$

当两国之间只有商品流动没有要素流动时，$NFP = 0$.

经常账户盈余 $CA = NX + NFP$. 是国外在本期流动给本国的资金。

注意到 $NFP = 0$ 时，$CA = NX = Y - C - I - G$, 而 $Y - C - T = S_p$ 为个人储蓄，$T - G = S_g$ 为政府储蓄，从而

$$CA = S_p + S_g - I = S - I$$

17.1.2 模型

两期模型，两期收入给定。

国内居民与外国居民之间可以互相借贷，世界信贷市场实际利率是给定的。

无投资，无要素流动，只有商品和资金流动。

那么

$$CA = S$$

一国消费者解跨期效用最大化问题，其预算约束为

$$C + \frac{C'}{1+r} = Y - T + \frac{Y' - T'}{1+r}$$

政府的预算约束为

$$G + \frac{G'}{1+r} = T + \frac{T'}{1+r}$$

注意到经常账户盈余

$$CA = Y - C - G$$

国民现值预算约束为

$$C + G + \frac{C' + G'}{1+r} = Y + \frac{Y'}{1+r}$$

代入，写为储蓄形式:

$$\begin{aligned} C + G + CA &= Y \\ C' + G' &= Y' + (1+r)CA \end{aligned}$$

注意到这个预算约束的形式，和家庭的跨期预算约束形式一致：

$$
\begin{aligned}
C + S_p =& Y - T \\
C' =& Y' - T' + (1+r)S_p
\end{aligned}
$$

这意味着经常账户盈余充当着整个国家的总储蓄的作用，并且可以借此进行消费平滑。事实上在这个模型里我们有

$$S = CA$$

应当注意税收变化不影响 CA.

（感觉受到了欺骗）

17.2 商品贸易模型

基于跨期模型。

17.2.1 IS 曲线

产出需求

$$Y^d = C(Y, r) + I(r) + G + NX$$

但是 NX 是灵活的。

国内产出需求

$$Y^d - NX = C(Y, r) + I(r) + G$$

17.2.2 总供给曲线

产出供给

$$Y^s = F(K, N(Y, r))$$

从而对于给定的世界利率 r^*, 产出供给是一个定值，由

$$Y = F(K, N(Y, r))$$

解出。产出需求的其他三项通过产出供给和利率给定，而净出口则弥补其中的差值。

画出国内产出需求曲线和产出供给曲线，并且给定国际利率，可以直接得到净出口额。

17.2.3 比较静态

国际利率提升 由于国内总需求曲线是斜向下的，总供给曲线是斜向上的；利率的提高会提高总供给、降低国内总需求、提高净出口额。

当前生产效率提升 生产效率提升意味着总供给曲线的变化。注意到

$$Y = zF(K, N(Y, r))$$

总产出必然提升（简单推理，以前推过），劳动力供给下降。

由于产出提升，消费需求也小幅提升，但是提升程度小于产出提升程度，从而国内总需求提升不如总供给提升大，从而出口也提升。

未来生产效率提升 未来生产效率提升不会影响到当期总供给，从而当期产出不变。由利率不变，投资需求变大，从而出口额会下降。

18 国际金融初步

18.1 概念

18.1.1 名义汇率、实际汇率和购买力平价

名义汇率： 用本币表示 1 单位外币的价格。比如 $e = 6.3$, 本币为人民币，外币为美元，那么 1 \$ = 6.3 ě.

实际汇率： 设本国产品以本币计价为 P, 外国同产品以外币计价为 P^*. 先以本币兑外币，再以外币购买国外相同产品，统一计价基础，则得到实际汇率

$$\frac{eP^*}{P}$$

若实际汇率大于 1，则购买国内商品更便宜；反之则购买国内商品更贵。

购买力平价： 假定长期具有购买力平价，即实际汇率为 1.

18.1.2 汇率制度

浮动汇率制： 市场作用下让汇率自由变动

固定汇率制：（Hard pegs, 硬钉住）一国承诺将其名义汇率无限期钉住其他国家货币。

1. 美元化：放弃本国货币，放弃征收铸币税的能力。
2. 建立货币局。本国货币钉住一种强势货币，建立货币联系。本国通货发行以外汇储备作为发行保证，保证本国货币随时可以按固定汇率兑汇。
3. 建立货币联盟。

中间汇率制： Soft pegs, 软钉住。(BBC 汇率制度).

18.1.3 CIP and UIP

- CIP: Covered Interest Parity: 抛补利率平价

  比如有 1 美元，存一段时间可以得到 1+ia 美元

  先换为欧元得到 1/E 欧元，存相同时间得到 (1+ie)/E 欧元

  抛补利率平价意味着 (1+ie)F/E=1+ia, 其中 F 为远期汇率

- UIP: Uncovered Interest Parity: 无抛补利率平价

  用预期汇率 E^e 计算。预期汇率有风险

平时我们认为 UIP 成立。

那么，

Note that

$$\frac{E^e}{E} = 1 + \frac{\Delta E^e}{E}$$

so

$$i_a = i_e + \frac{\Delta E^e}{E}$$

利率等于利率 + 预期贬值率。

横坐标汇率 E，纵坐标两者名义利率之商 i_a/i_e, 对于小型开放经济，世界实际利率相同，i_e 外生的，假定预期贬值率固定的，那么短期有

$$i_a = i_e + \frac{\Delta E^e}{E}$$

从而得到一个斜向下的曲线。

18.2 长期/新古典情形

在这种情形下，我们假定 PPP 成立，即 $P = eP^*$ 成立。由于我们考虑小型经济，国外价格 P^* 是外生的，接下来需要考察内生变量 e, P 的变化。

我们认为金融市场是世界市场，也就是国际实际利率 r^* 等同于国内实际利率。

新古典情形下，我们还有古典二分法，实体经济和货币互相独立，也就是实体经济仅仅取决于实体经济本身，产出和利率不会被货币、汇率影响。从而 $Y = Y(r^*)$.

在这种情况下，实际货币需求

$$m = L(Y(r^*), r^*)$$

由世界利率和实体经济给出，和汇率、价格无关。

18.2.1 浮动汇率制

货币市场 名义货币需求

$$M^d = PL(Y, r)$$

名义货币供给可以由央行外生决定，从而

$$M^s = PL(Y, r) = eP^*L(Y, r)$$

从而汇率由货币供求决定。

比较静态 央行的货币供给量变大时，由于国外价格和国内外实体经济不受影响，汇率会变大。

国际利率水平提升时，由 17.2.3, 产出也提高，货币需求可能提升也可能降低。一般来说对 GDP 的反应大于对实际利率的反应，货币需求会上升。那么汇率会下降、本币升值；价格水平和汇率同比下降，这时可以增加货币供给。

国外价格水平提升时，若国内货币供给不变，那么国内价格水平也不会变，而汇率会降低。国外通胀不会输入。

18.2.2 固定汇率制

$P = eP^*$, 从而价格水平无法独立决定，从而名义货币供给量无法独立决定。

通货膨胀会被直接输入，并且货币供给量必须增加，否则无法保证 PPP 和货币市场均衡成立。

国际利率提升时，不会影响到本国价格水平。

18.2.3 汇率制选择

国外名义冲击影响更大：浮动汇率更佳，可以保证国内价格水平稳定。

国外实际冲击影响更大：固定汇率更佳，可以保持价格水平稳定。

国内金融系统如果不完善，更适合使用固定汇率以避免套利，有利于出口；完善时，则可以通过期权期货平衡汇率波动风险。

浮动汇率的好处是本国可以独立确定本国货币供给；固定汇率时则不能独立确定货币供给，但是央行承诺因而可信，实际上执行的是挂钩货币国家的货币政策。

18.2.4 资本管制

资本账户 Capital Account KA

资本流入（正）：外国居民购买本国资产。

国际收支平衡 Balance of Payment BP

BP = KA + CA = 0

资本管制：政府对国际资产交易的限制

资本管制会改变本国经济应对冲击的方式。

然而，资本管制导致了世界信贷市场的低效率。

TFP 冲击

无资本管制 假设初始 $CA = 0$, 初始汇率为 e_1. 一个负的 TFP 冲击会导致供给曲线左移而国内需求不变从而 CA 下降，产出下降；从而汇率贬值。

有资本管制 CA 试图下降时 KA 则试图增加，那么会利率会升高，从而只是小幅度贬值。

有资本管制时可以更好的维持固定汇率（需要的外汇储备减少）

18.3 短期情况

18.3.1 框架

短期内 PPP 不成立，P 和 P^* 外生固定。

净出口 $NX(\frac{eP^*}{P}) = NX(\varepsilon)$ 是实际汇率的增函数（汇率升高，我国物价相对外国降低，出口增加）

对于需求端，需求曲线

$$Y = C(Y-T, r) + I(r) + G + NX(\varepsilon)$$

总供给我们认为灵活；对于"供给"端也就是货币市场，有

$$\frac{M}{P} = L(r+\pi^e, Y)$$

这构成了相图中的两条曲线。

18.3.2 浮动汇率和完善的资本流动性

在完善的资本流动性下，利率 r^* 是世界利率、外生给定的。这时，货币供给可以独立决定，被决定的是实际汇率 ε.

那么相图的横坐标是产出，纵坐标是实际汇率。

由于我们认为货币供给外生给定，这时 LS 方程和 MP 方程变为

$$Y = C(Y-T, r^*) + I(r^*) + G + NX(\varepsilon)$$

$$\frac{M}{P} = L(r^*+\pi^e, Y)$$

这时，产出需求曲线是斜向上的（汇率越高产出越高），而货币市场均衡直接决定了产出量。

比较静态时，

$$adY = bd\varepsilon, dM = cdY$$

诸如此类，分析非常简单，因为是上三角阵。

18.3.3 浮动汇率和不完善资本流动性

我们需要外汇市场的均衡，也就是国外买一块钱国内产品，一块钱进入国内而产品进入国外。令 CF 为资产和金融流量，也就是资金"出口"（本国金钱向外流动）

从而

$$-CF + NX = 0$$

不完善资本流动性导致利率会随着金融流量而上升:

$$CF = CF(r - r^*)$$

with $CF' > 0$, 也就是本国利率越高，越多资金希望流出国内。

这时，IS 方程变为

$$Y = C(Y - T, r^*) + I(r^*) + G + NX(\varepsilon)$$

外汇市场均衡导致

$$-CF(r - r^*) + NX(\varepsilon) = 0$$

以及

$$\frac{M}{P} = L(r + \pi^e, Y)$$

为了画在图上，我们消去 NX，

$$Y = C(Y - T, r) + I(r) + G + CF(r - r^*)$$

由于 CF 对利率的反应和国内需求对利率的反应相反；而一般而言国内需求的影响更大，我们认为它让 IS 曲线相对而言变平了。当然，现在的情况意味着这个模型和标准的 IS-LM 模型并无任何在分析层面的区别。

当然，反应过度可能会导致区别，但是我们不太关心。

18.3.4 固定汇率和外汇储备

固定汇率时，我们考察央行需要对外汇储备进行调节。无论是让外汇储备变正或者是变负，都取决于央行。这时，外汇市场均衡变为了

$$-CF(r - r^*) + NX(\varepsilon) = RG$$

其中 RG 是央行存留起来的资金。并且利率 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 也是固定的。

其余应该和 IS LM 模型一样，固定利率的作用和政府购买差不多。当然，新增外汇储备和货币供给不能独立同时决定，而是通过利率链接的。

19 DSGE: 小型开放经济模型

References

Daron Acemoglu. *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press, 2009.

Robert Barro. *Macroeconomics: A modern approach*. Cengage Learning, 2007.

Gary S Becker. *The economic approach to human behavior*. University of Chicago press, 2013.

Guillermo A Calvo. Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of monetary Economics*, 12(3):383–398, 1983.

David Cass. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *The Review of economic studies*, 32(3):233–240, 1965.

Matthias Doepke, Andreas Lehnert, and Andrew W. Sellgren. *Macroeconomics*. Chicago University Press, 1999.

Jordi Galí. *Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework and its applications*. Princeton University Press, 2015.

Matteo Iacoviello. House prices, borrowing constraints, and monetary policy in the business cycle. *American Economic Review*, 2005.

Nobuhiro Kiyotaki and John Moore. Credit cycles. *Journal of Political Economy*, 1997.

Tjalling C Koopmans et al. On the concept of optimal economic growth. Technical report, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, 1963.

Robert Lucas. Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, 1972.

Robert E Lucas. On the mechanics of economic development. *NBER Working Paper*, (R1176), 1989.

N Gregory Mankiw. Macroeconomics, 2003.

Frank Plumpton Ramsey. A mathematical theory of saving. *The economic journal*, 38(152):543–559, 1928.

D Romer. Advanced macroeconomics 3rd edition mcgraw–hill. 2006.

D Romer. Advanced macroeconomics fourth edition, 2011.

Paul M Romer. Endogenous technological change. *Journal of political Economy*, 98(5, Part 2):S71–S102, 1990.

Paul A. Samuelson. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *Journal of Political Economy*, 1958.

Paul A Samuelson and William D Nordhaus. Economics. 19th international edition, 2009.

Robert M Solow. A contribution to the theory of economic growth. *The quarterly journal of economics*, 70(1):65–94, 1956.

Stephen D Williamson. Macroeconomics, 2005.

Tack Yun. Nominal price rigidity, money supply endogeneity, and business cycles. *Journal of monetary Economics*, 37(2):345–370, 1996.