

矩阵及其运算

朝暮

2025 年 12 月 3 日

定义 1 (矩阵). 将 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 排成一个矩形阵列, 称为一个 $m \times n$ 级矩阵。表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

简记作 $(a_{ij})_{m \times n}$.

1. a_{ij} 称为矩阵的第 (i, j) 元素。

- 若 $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$, 称为实矩阵;
- 若 $a_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j$, 称为复矩阵;
- 若 $a_{ij} = 0, \forall i, j$, 称为零矩阵;

2. 设 $(a_{ij})_{m \times n}$ 的行数与列数分别为 m, n , m 与 n 不一定相同。若 $m = n$, 则称其为方阵, 记作 $(a_{ij})_{n \times n}$ 。

3. 讨论一下方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 连成线, 称为 A 的对角线; $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 连成线, 称为 A 的斜对角线;
- 若 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ 称 A 为对角阵;
- 若 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ 且 $a_{ii} = 1, \forall 1 \leq i \leq n$, 称 A 对单位阵¹。

¹之所以将其称为单位阵, 因为其在矩阵乘法运算中起到单位元的作用。

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc} \underline{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underline{a_{nn}} \end{array} \right] \\
\text{对角线}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\
\text{对角阵}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \\
\text{单位阵}
\end{array}$$

- 若 $a_{ij} = 0, \forall i < j$, 称 A 为下三角阵;
- 若 $a_{ij} = 0, \forall i > j$, 称 A 为上三角阵。

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\
\text{上三角阵}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\
\text{下三角阵}
\end{array}$$

定义 2 (矩阵相等). 对于给定的两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times t}$, 则称 $A = B$ 当且仅当 $m = s, n = t, a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

例 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义 3 (向量). 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则

1. 将 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ 称为 A 的第 i 个行向量; 将 $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ 称为 A 的第 j 个列向量。
2. 称 $1 \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 为一个 n 维行向量; 称 $n \times 1$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 为一个 n 维列向量。

记 $M_n(\mathbb{R})$ 为所有 n 阶实方阵构成的集合。即 $M_n(\mathbb{R}) := \{A \mid A \text{ 为实方阵}\}$ ，构成映射

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A| = \det(A). \end{aligned}$$

思考如下两个问题：

- n 阶行列式的值 $|A|$ 能够在多大程度上反应矩阵 A 的性质？
- 映射 \det 具体怎样的性质？

定义 4 (矩阵的加、减法). 对于给定的两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 定义

$$A \pm B := (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}.$$

例 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 3.

$$A_{m \times n} + O_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

定义 5 (矩阵的数乘). 对于给定的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 给定的常数 c , 定义

$$c \cdot A := (c \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

基于矩阵的数乘运算, 可以定义负矩阵。

定义 6 (负矩阵). 对于给定的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 定义其负矩阵

$$-A := (-1) \cdot A.$$

例 4.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

下面讨论上述矩阵运算的性质。

定理 1 (矩阵加法、数乘运算的性质).

1. 加法性质: 对于给定的矩阵 A, B, C , 有以下性质

- (a) 交换律: $A + B = B + A$.
- (b) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- (c) 零矩阵: $A + O = A$.
- (d) 负矩阵: $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

2. 数乘性质: 对于给定的矩阵 A, B , 数 c, d , 有以下性质

- (a) 关于数的分配律: $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$.
- (b) 关于矩阵的分配律: $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$.
- (c) 结合律: $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$.
- (d) 数乘零元: $0 \cdot A = O$.

定义 7 (矩阵乘法). 对于给定的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times k}$, $B = (b_{ij})_{k \times n}$, 定义矩阵的乘积为 $C = A \cdot B$ 为 $m \times n$ 矩阵。其元素满足

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}.$$

1. 显然, 矩阵 A 与 B 的乘积有意义时, A 的列数必须等于 B 的行数, 且 $A \cdot B = C$ 的行数等于 A 的行数, 列数等于 B 的列数。

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

2. 显然, $A \cdot B$ 的第 (i, j) 元素为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和。

3. 需要特别注意的是，矩阵乘法一般不满足交换律。而且即使 $A \cdot B$ 与 $B \cdot A$ 均有意义，二者也不见得是相等的。

例 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 6. 给定两个矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 分别求解 $A \cdot B$ 、 $B \cdot A$.

求解.

$$A \cdot B = [1], B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A.$$

□

例 7. 给定两个矩阵² $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 分别求解 $A \cdot B$ 、 $B \cdot A$.

求解.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A.$$

□

²可以看到，两个非零矩阵相乘，结果可能是零矩阵。

定理 2 (矩阵乘法的性质). 对于给定的矩阵 A, B, C , 常数 k , 有以下性质

1. 结合律: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. 左分配律: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
3. 右分配律: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
4. 乘法对数乘的相容性:

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B),$$

5. 单位元:

$$I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}, A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}.$$

证明.

1. 结合律。一般地, 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{n \times p}, C = (c_{ij})_{p \times q}$. 要证明 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, 只需证明

$$((AB)C)(i, j) = (A(BC))(i, j), \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q.$$

显然, 一方面有

$$\begin{aligned} (AB)C(i, j) &= \sum_{r=1}^p (AB)(i, r)C(r, j) = \sum_{r=1}^p (AB)(i, r)c_{rj}, \\ (AB)(i, r) &= \sum_{s=1}^n A(i, s)B(s, r) = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sr}. \end{aligned}$$

于是, 有

$$(AB)C(i, j) = \sum_{r=1}^p \left(\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sr} \right) c_{rj}.$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} (A(BC))(i, j) &= \sum_{s=1}^n A(i, s)(BC)(s, j) = \sum_{s=1}^n a_{is}(BC)(s, j), \\ (BC)(s, j) &= \sum_{r=1}^p B(s, r)C(r, j) = \sum_{r=1}^p b_{sr}c_{rj}. \end{aligned}$$

于是，有

$$A(BC)(i, j) = \sum_{s=1}^n a_{is} \left(\sum_{r=1}^p b_{sr} c_{rj} \right).$$

显然

$$\sum_{r=1}^p \left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sr} \right) c_{rj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \left(\sum_{r=1}^p b_{sr} c_{rj} \right),$$

亦即 $(AB)C = A(BC)$.

□

关于矩阵乘法的性质，作以下补充说明：

1. 结合律

- (a) 基于乘法的结合律， $(AB)C = A(BC)$ ，可以直接记作“ ABC ”，无所谓括号，且其 (i, j) 元素为

$$\sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sr} c_{rj}.$$

- (b) 推广至有限多个矩阵相乘：对于 A_1, A_2, \dots, A_n 而言，有乘积

$$A_1 A_2 \cdots A_n.$$

定义 8 (乘方).

1. 设 A 为 n 级方阵，定义 $A^2 := A \cdot A$;

2. $\forall k \geq 1$ ，定义 $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 个}}$.

定理 3 (乘方的性质).

1. $A^r \cdot A^s = A^{r+s}$;

2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

关于矩阵的乘方，作以下补充说明：设 A, B, C 均为 n 级方阵，则

1. 一般而言，

$$(AB)^r = \underbrace{(AB)(AB) \cdots (AB)}_{r \text{ 个}} \neq A^r B^r.$$

2. 矩阵乘法不普遍地满足交换律，但存在满足交换律的特例：

$$(a) A \cdot A = A \cdot A = A^2, A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

(b) 对于任一常数 c 与 n 级单位阵 I_n , 可定义纯量阵: $c \cdot I_n$, 显然 A 与 $c \cdot I_n$ 满足交换律:

$$A \cdot (c \cdot I_n) = (c \cdot I_n) \cdot A = c \cdot A.$$

进一步地, 有二项式定理

$$(c \cdot I_n + A)^m = c^m I_n + C_m^1 c^{m-1} A + C_m^2 c^{m-2} A^2 + \cdots + C_m^m A^m.$$

3. 若 $AB = BA$, 即满足交换律, 则 $(AB)^r = A^r B^r$. 特别地有二项式定理

$$(A + B)^m = C_m^0 A^m + C_m^1 A^{m-1} B + C_m^2 A^{m-2} B^2 + \cdots + C_m^m B^m.$$

4. 矩阵乘法不普遍地满足消去律。即 $AB = AC, A \neq 0 \Rightarrow B = C$. 因为整性³不成立。

定义 9 (转置). 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则定义 A 的转置为 $n \times m$ 矩阵, 记作 A^T 或 A' , 且有 $A' = (b_{ij})_{n \times m}$, 其中 $b_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

关于矩阵的转置, 做以下补充说明:

1. 矩阵 A 的第 i 行, 即为 A' 的第 j 列; 矩阵 A 的第 j 列, 即为 A' 的第 i 行。
2. 若 $A' = A$, 显然 A 与 A' 均为方阵, 称 A 为对称阵;
3. 若 $A' = -A$, 显然 A 与 A' 均为方阵, 称 A 为斜对称阵, 或反对称阵;

³ $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$.

定理 4 (矩阵转置的性质).

1. $(A')' = A.$
2. $(A + B)' = A' + B'.$
3. $(c \cdot A)' = c \cdot A'.$
4. $(AB)' = B'A'.$

例 8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = A,$ 所以 A 是对称阵。

例 9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A,$ 所以 A 是斜对称阵。

定义 10 (复矩阵的共轭矩阵). 一般地, 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为复矩阵, 则定义其共轭矩阵为 $\bar{A} = (b_{ij})_{m \times n}$, 且有 $b_{ij} = \overline{a_{ij}}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$

定理 5 (共轭矩阵的性质).

1. $\bar{\bar{A}} = A.$

2. $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}.$

3. $\overline{c \cdot A} = \bar{c} \cdot \bar{A}.$

4. $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}.$

5. $(\bar{A})' = \bar{A}'.$