# 引言：高等代数的研究对象

朝暮

2025 年 12 月 2 日

作为高等代数的第一节课，需要先搞清楚一件事情——我们可以从这门课程中学到什么。换言之，高等代数在研究什么？

我们在中学阶段就已经开始接触“代数”了，对“代数”的第一印象就是所谓的“用字母表示数”。

实际问题中常含有一些“已知量”与“未知量”。

* **未知量**：通常用 $x, y, z, \cdots$ 等字母来表示；
* **已知量**：如果是具体的问题，已知量通常是具体的数字；如果是抽象问题，已知量一般用 $a, b, c, \cdots$ 来表示。

基于实际问题，可以找出等量关系，进而列出含有未知量的等式，这就是**方程**。

**一元一次方程**　在初中一年级，我们首先接触到的就是一元一次方程，即形如

$$ax + b = c$$

的方程。

*证明.* 当 $a \neq 0$ 时，可以简单地通过四则运算，得到方程的解：

$$x = \frac{c-b}{a}.$$

□

值得注意的是，上述一元一次方程的解是一个“未知量在左边”的等式，这被称为一元一次方程的**求根公式**。

**一元二次方程** 在初中三年级，我们又接触了一元二次方程，即形如

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的方程。

*证明.* 显然，一元二次方程也存在求根公式。

- 若$a > 0$ 且判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$，方程有两个解，可以用如下的求根公式来表示：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- 若 $a \neq 0$ 且判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$，方程有唯一解。
- 若 $a = 0$，方程**退化** 为一元一次方程。

□

**一元高次方程** 我们将方程中非零项的最高次数称为该方程的**次数**，抓住方程“次数”的特征，自然而然地可以将其推广至一元三次方程、一元四次方程等。方便起见，我们将次数高于 2 的方程统称为**一元高次方程**。

一元高次方程是否有根？这是经典代数学的中心问题。具体来说，需要关心这样一些事情：

- 一元高次方程是否存在根？
- 如果存在根，是否可求？如果可求，是否存在统一的求根公式？

前面的内容是通过抓住方程“次数”的特征，从一次方程推广到高次方程，进而引出经典代数学的中心问题。然而实际问题往往复杂得多，比如方程所涉及到的未知量常常不止一个，下面我们就抓住方程未知量的个数，也就是“元”的特征进行推广。

**二元一次方程** 含有两个未知量，且每个未知量都是一次的，称这样方程为**二元一次方程**。如

$$ax + by + c = 0.$$

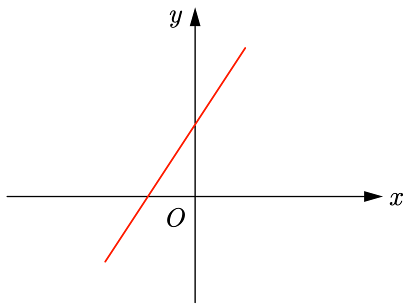
**三元一次方程** 含有三个未知量，且每个未知量都是一次的，称这样的方程为**三元一次方程**。如

$$ax + by + cd + e = 0.$$

**一元$n$次方程** 一般地，若方程含有$n$个未知量，且每个未知量都是一次的，则称这样的方程为**一元 $n$ 次方程**。

可以考虑一元$n$次方程的几何意义。联想中学阶段学习过的平面解析几何知识：一个二元一次方程可以对应到平面直角坐标系中的一条直线，

**例 1.** *考虑一元二次方程 $3x + 2y = 1$ 在平面直角坐标系中的图像。*




可以借用几何直观，通常可将$n$元一次方程称作$n$**元线性方程**。

显然，方程的未知量个数变多后，仅凭一个方程是无法求解出来未知量的，需要多个方程，进而组成了所谓的“方程组”。

**二元一次方程组** 有两个一元二次方程构成的方程组。如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

**三元一次方程组** 有三个一元二次方程构成的方程组。如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

以上是我们在中学阶段所熟知的关于一元二次、三次方程组的形式。需要特别指出的是，方程组中所含方程的个数与方程未知量的个数并无必要

联系。如三元一次方程组，可以包含三个方程、也可以包含四个，或者更多。

**例 2.**

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=9 \\ -x_1-5x_2+4x_3=10 \\ 2x_1+7x_2+x_3=1 \end{cases}$$

自然而然地，可以抓住方程组"元"的特征，将其推广到任意多个未知量的情形。

**n元一次方程组** 一般地，由若干个一元$n$次方程构成的方程组称为$n$元一次方程组。借用几何直观，可将其称作$n$元线性方程组。其一般形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

其中，$a_{ij}$（$1\le i\le s, 1\le j\le n$）称为方程组（1）的**系数**；$b_j$（$1\le j\le n$）称为其**常数项**。

如何对$n$元线性方程组进行求解呢？在中学阶段，我们已经学习过如何对二元、三元线性方程组进行求解，常使用的方法是：代入消元法、加减消元法。可以肯定的是，这两种方法对于一般的$n$元线性方程组依然有效。为了使其更加规范、乃至可以使用现代计算机进行求解，后续将引入所谓的"矩阵消元法"。

**注** 计算机的发展，也极大地推动了线性方程组理论的发展。许多过去难解的、乃至解不了的方程组，如今凭借计算机可以方便得进行求解。

回顾对二元、三元线性方程组的求解过程，有以下的共同点：

1. 仅仅对系数项以及常数项进行了运算；

2. 由字母表示的未知量并未参与运算。

为了简化书写，可以将方程组的所有系数“抽离”出来。

**例 3.** *将例2方程组的所有系数抽离出来，按照原有次序，可以排列成如下的数表。*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对于一般的$n$元线性方程组，可以按照同样的操作，将其所有的系数项按原有次序排列成一张数表，这就是“矩阵”。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \xrightarrow{\text{抽离系数}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

**矩阵**　由$s \times n$个数排列成的$s$行、$n$列的数表称为矩阵，通常用大写字母$A$、$B$、$C$、$\cdots$来表示一个矩阵，如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

**例 4.** *称*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

*为方程组（1）的**系数矩阵**。*

**例 5.** 称

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix} \tag{3}$$

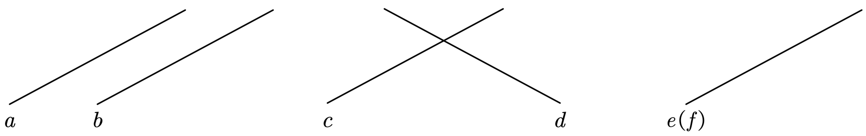
为方程组（*1*）的**增广矩阵**。

高等代数的出发点之一，就是$n$元线性方程组的求解问题。而研究$n$元线性方程组的解法，可以归结为对矩阵的研究。

然而，仅仅了解了一般的$n$元线性方程组如何求解是远远不够的。面对一个具体的线性方程组，我们期望可以在求解之前，就能预先对其解的情况做一定的判断：是否有解？若有解，有多少解？特别是无解的方程组，解了半天才发现解不存在，就太浪费时间了。

如何在实际求解前，就能得知方程组解的情况呢？可以借助于几何直观。

**例 6.** 在平面几何中，二元一次方程可以表示一条直线，由两个二元一次方程构成的方程组就对应两条直线。由几何关系可知：平面内的两条直线可以平行；可以相交；可以重合。如果直线相交，则交点正是该方程组的解。




借助于几何直观，可以猜测，对于一般的$n$元线性方程组，其至少存在三种解的情况：有唯一解；有无穷多解；无解。原则上来讲，是否存在其它解的情况是需要进一步分析讨论的。比如恰好有两个解；恰好有三个解等等。

如何建立这种方程组解的情况判别方法呢？要想找到一种统一的、普遍的判别方法，就不能拘泥于某些特例，而要从所有方程组的共通点着手。显而易见，方程组的系数项以及常数项可以作为突破点。而出于简化的目的，结合前面的讨论，我们的任务又可归结为研究方程组的系数矩阵以及增广矩阵。

方程组的系数矩阵以及增广矩阵均由若干行构成，每一行又由若干个、按照一定次序排列的数构成。这里出现了“若干个数字的有序排列”，而类

似的结构并不陌生。例如：平面坐标$(x, y)$；空间坐标$(x, y, z)$；物理时空坐标$(z, y, z, t)$……

综合这些示例，可以抽象出“$n$元有序数组”的概念。

**n维向量空间** 考虑由所有$n$元有序组构成的集合，并且类比几何空间，可在其上引入加法、数量乘法两种运算，进而得到$n$**维向量空间**。

进一步的分析表明，研究线性方程组解的判别方法，可以促使我们研究$n$维向量空间，这将在第3章展开细致讨论。

此外，若$n$元线性方程组有无穷多解，则还可以通过研究$n$维向量空间的结构，来研究解集的结构。

对于几何空间、$n$维向量空间，仍可抓住共同特征，抽象出“线性空间”的概念。

既然已经通过$n$维向量空间解决了线性方程组的求解问题，为什么还要继续抽象出所谓的“线性空间”的概念呢？这就是数学的一大特点，当解决了某一类问题之后，应当沿着某一思路继续探索，以期得到新的理论，使其能够处理更广泛的问题。