矩阵及其运算

朝暮

2025 年 12 月 3 日

定理 1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 多项式). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x \in O(x_0)$，存在 ξ 介于 x 与 x_0 之间，使得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x).$$

其中，$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 *Lagrange* 余项。

证明.

1. 先介绍一种构造性的证明。见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》、陈纪修《数学分析》等。

   固定 $x_0 \in O(x_0)$，构造辅助函数

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f'(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(t)}}{n!}(x-t)^n \right) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k. \end{aligned}$$

$$H(t) = (x-t)^{n+1}.$$

□