DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen Januar 2012 Opg. 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$
$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. *f er injektiv, hvis $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$*

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x-værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x-værdier ikke kan dele en y-værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x-værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$
$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 &= x_2^2 + x_2 + 1 && \text{Funktionsværdien indsættes} \\
\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 &= x_2^2 + x_2 && \text{1 går ud på begge sider} \\
\Leftrightarrow x_1^2 &= x_2^2 + x_2 - x_1 && x_1 \text{ trækkes fra på begge sider} \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1} \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{k} && , k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Da det hurtigt viser sig at $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$, må det betyde, at x_1 kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra x_1) i definitonsmængden ($Dm(f) = \mathbb{R}$), og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\ f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02 \end{aligned}$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

Svar: En funktion f har en invers, hvis og kun hvis f er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at f ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at f ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

c) Angiv $f + g$.

Svar: To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \Rightarrow (f+g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && \text{f og g indsættes på deres pladser} \\ &= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Ophævning af + parentes} \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

d) Angiv $g \circ f$.

Svar: Den sammensatte funktion $f \circ g$ beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man f i g fås:

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) = g(x^2 + x + 1) & \\
= 2 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 & \qquad \text{udtrykket indsættes i g} \\
= 2x^2 + 2x + 2 - 2 & \qquad \text{Parentesen udregnes} \\
= 2x^2 + 2x &
\end{aligned}
$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.

2 Reeksamen Februar 2015 Opg. 1 - Thomas

Opgave 1 (12%)

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ være universet (universal set). Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

Opgave a og b

Vi starter med at betragte de 2 mængder A og B.

$$
\begin{array}{cc}
A = \{2n | n \in S\} & B = \{3n + 2 | n \in S\} \\
A = 2 * 1 = 2, & B = 3 * 1 + 2 = 5, \\
A = 2 * 2 = 4, & B = 3 * 2 + 2 = 8, \\
A = 2 * 3 = 6, & B = 3 * 3 + 2 = 11, \\
A = 2 * 4 = 8, & B = 3 * 4 + 2 = 14,
\end{array}
$$

derfor er

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \qquad B = \{5, 8, 11, 14\}$$

Opgave c

Angiv samtlige element for $A \cap B$

Fællesmængden er de elementer, som A og B har til fælles:

Så derfor er

$$A \cap B = \{8\}$$

Opgave d

Angiv samtlige element for $A \cup B$

Foreningsmængden er de elementer, som både findes i A og B:

Så derfor er

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$$

Opgave e

Angiv samtlige element for $A - B$

A fraregnet B betyder de elementer, som findes i mængden A minus de elementer, som er i B:

Så derfor er

$$A - B = \{2, 4, 6\}$$

Opgave f

Angiv samtlige element for $\bar{A}$

Komplementet af $\bar{A}$ er alle de elementer, som findes i universet, undtagen dem som findes i A:

Så derfor er

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

3 Eksamen Januar 2009 Opg. 3 - Philip

Opgven tager udgangspunkt i opgave 3 fra eksamensættet 2009, samt en ekstra opgave (gengivet som opgave c i det nedenstående). Eksamen januar 2009, opgave 3. Opskriv desuden matricen, der repræsenterer relationen R, dog hvor S reduceret til S = {1,2,...,6}

4 - Sean

5 Eksamen Februar 2015 Opg. 3 - Alle

- Reeksamen februar 2015 opgave 3. Opskriv desuden matricerne, der repræsenterer de tre relationer R, S og T.

Lad R, S og T være binære relationer på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$.

5.1 Underopgave a)

a) Lad $R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,4)\}$.
Er R en partiel ordning?

Hvis en relation, R, skal være en partiel ordning, skal relationen være *refleksiv, anti-symmetrisk* og *transitiv*. Mangler den blot én af disse egenskaber, kan relationen ikke være en partiel ordning. Først kontrolleres den refleksive egenskab.

Sætning 2. *En relation, R, på mængden A er refleksiv hvis* $\forall a \in A : (a, a) \in R$

Fordi R er en relation på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$ kræves det, at elementerne (1,1), (2,2), (3,3) og (4,4) er indeholdt i R. Dette er tilfældet, og R er derfor refleksiv. Næste egenskab er den anti-symmetriske egenskab.

Sætning 3. *En relation, R, på mængden A er anti-symmetrisk hvis* $\forall a, b \in A :$ $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \vee a = b$

Vi ser allerede at de refleksive elementer findes i R. Derudover ses:

- (2,1) men ikke (1,2)
- (2,4) men ikke (4,2)
- (3,1) men ikke (1,3)
- (3,4) men ikke (4,3)
- (4,1) men ikke (1,4)

Af den grund er R også anti-symmetrisk. Derfor kontrolleres den transitive egenskab som den sidste:

Sætning 4. *En relation, R, på mængden A er transitiv hvis* $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Eksempelvis skal (2,1) også findes i R hvis (2,4) og (4,1) eksisterer i R, hvilket også er tilfældet. Elementerne gennemgås slavisk:

- Da (1,1) er det eneste element med tallet 1 som første element i et par, er der ikke nogen transitivitet at gennemskue. Af den grund kan vi også se bort fra alle elementer i R, hvor 1 indgår. Generelt undgår vi at undersøge mulige transitive elementer ved refleksive elementer, da de altid giver det element, de bliver sammenlignet med i sidste ende.
- (2,4) og (4,1) medfører $(2, 1) \in R$ ✓
- (2,4) og (4,4) medfører $(2, 4) \in R$ ✓
- (3,4) og (4,1) medfører $(3, 1) \in R$ ✓

Alle de transitive elementer findes i R, og R er derfor også transitiv.

Deraf kan det konkluderes, at R er en partiel ordning.

5.2 Underopgave b)

b) Lad $S = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$.
Angiv den transitive lukning af S.

Den transitive lukning af en relation R, er givet ved:

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

hvor R^i er den i'te potens af R således at:

$$R^1 = R$$

$$R^{i+1} = R \circ R^i$$

Omvendt kan det siges, at R^i indeholder de elementer, (a,b), hvor man kan gå på en sti af længe i fra a til b i en orienteret graf for relationen. Først findes S^2, og derefter arbejdes mod S^3 indtil der ikke opstår nye elementer i den sammensatte relation. Når man sammensætter to relationer, S og R, vil $S \circ R$ indeholde de elementer, (a,c), der opstår, når man går fra (a,b) i R til (b,c) i S.

$$S^2 = S \circ S = \{(1,3),(1,4),(2,2),(4,4)\}$$
$$S^3 = S \circ S^2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2))\}$$

Det ses her at $S^3 = S$, og der dannes derfor ikke flere par. Derfor er den transitive lukning af S:

$$S^* = S \cup S^2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(4,4)\}$$

Følger man samme procedure med at kontrollere de transitive elementer fra opgave a), vil man se, at dette er den transitive lukning.

5.3 Underopgave c)

c) Lad $T = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$.
Bemærk, at T er en ækvivalens-relation.

Angiv T's ækvivalens-klasser.

Sætning 5. *En ækvivalensklasse,* $[a]_R = \{b \in R | aRb\}$

Sagt på en anden måde er ækvivalensklassen for et element, a, i R alle de elementer, som a er relateret til. Vi opskriver derfor:

$$[1]_R = \{1,3\}$$
$$[2]_R = \{2,4\}$$
$$[3]_R = [1]_R$$
$$[4]_R = [2]_R$$

På grund af refleksivitet vil et element altid have sig selv i sin ækvivalensklasse, og symmetrien medfører at to elementer altid vil have hinanden i sine ækvivalensklasser, hvis de er relateret til hinanden. Grundet transitiviteten vil to elementer altid være i hinandens ækvivalensklasse, hvis et tredje element er relateret til dem begge. Det ses desuden at ækvivalænsklasserne udgør en partitionering af mængden C, som T er en relationen på.

5.4 Underopgave fra Take-Home-Eksamen

Opskriv desuden matricerne, der repræsenterer de tre relationer *R, S* og *T*.

R, S og T er alle binære relationer. Hver række, i, i matricen, M, beskriver et element, a, og hvis der står et 1-tal på plads M_i, j, betyder det, at a er relateret til b, som er beskrevet i kolonnen j. Ellers står der et 0.

$$R_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$