DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen DM527 Opg 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$
$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. *f er injektiv, hvis $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$*

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x-værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x-værdier ikke kan dele en y-værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x-værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$
$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) && \\
\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 &= x_2^2 + x_2 + 1 && \text{Funktionsværdien indsættes} \\
\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 &= x_2^2 + x_2 && \text{1 går ud på begge sider} \\
\Leftrightarrow x_1^2 &= x_2^2 + x_2 - x_1 && x_1 \text{ trækkes fra på begge sider} \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1} && \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{k} && , k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Da det hurtigt viser sig at $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$, må det betyde, at x_1 kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra x_1) i definitonsmængden ($Dm(f) = \mathbb{R}$), og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\
f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02
\end{aligned}
$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

Svar: En funktion f har en invers, hvis og kun hvis f er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at f ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at f ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

c) Angiv $f + g$.

Svar: To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
\Rightarrow (f+g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && \text{f og g indsættes på deres pladser} \\
&= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Parentser fjernes, da der kun indgår + mellem dem} \\
&= x^2 + 3x - 1
\end{aligned}
$$

d) Angiv $g \circ f$.

Svar: Den sammensatte funktion $f \circ g$ beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man f i g fås:

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^2 + x + 1) \\
&= 2 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 && \text{udtrykket indsættes i g} \\
&= 2x^2 + 2x + 2 - 2 && \text{Parentesen udregnes} \\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.

2 Reeksamen Februar 2015 Opg. 1 - Thomas

Opgave 1 (12%)

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ være universet (universal set). Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

Opgave a og b

Vi starter med at betragte de 2 mængder A og B.

$$
\begin{array}{cc}
A = \{2n|n \in S\} & B = \{3n + 2|n \in S\} \\
A = 2 * 1 = 2, & B = 3 * 1 + 2 = 5, \\
A = 2 * 2 = 4, & B = 3 * 2 + 2 = 8, \\
A = 2 * 3 = 6, & B = 3 * 3 + 2 = 11, \\
A = 2 * 4 = 8, & B = 3 * 4 + 2 = 14,
\end{array}
$$

derfor er

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \qquad B = \{5, 8, 11, 14\}$$

Opgave c

Angiv samtlige element for $A \cap B$

Fællesmængden er de elementer, som A og B har til fælles:

Så derfor er

$$A \cap B = \{8\}$$

Opgave d

Angiv samtlige element for $A \cup B$

Foreningsmængden er de elementer, som både findes i A og B:

Så derfor er

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$$

Opgave e

Angiv samtlige element for $A - B$

A fraregnet B betyder de elementer, som findes i mængden A minus de elementer, som er i B:

Så derfor er

$$A - B = \{2, 4, 6\}$$

Opgave f

Angiv samtlige element for $\bar{A}$

Komplementet af $\bar{A}$ er alle de elementer, som findes i universet, undtagen dem som findes i A:

Så derfor er

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

3 - Philip

Opgven tager udgangspunkt i opgave 3 fra eksamensættet 2009, samt en ekstra opgave (gengivet som opgave c i det nedenstående). Eksamen januar 2009, opgave 3. Opskriv desuden matricen, der repræsenterer relationen R, dog hvor S reduceret til S = {1,2,...,6}

4 - Sean