DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen Januar 2012 Opg. 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$
$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. *f er injektiv, hvis* $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x-værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x-værdier ikke kan dele en y-værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x-værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$
$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) & \\
\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 &= x_2^2 + x_2 + 1 & \text{Funktionsværdien indsættes} \\
\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 &= x_2^2 + x_2 & \text{1 går ud på begge sider} \\
\Leftrightarrow x_1^2 &= x_2^2 + x_2 - x_1 & x_1 \text{ trækkes fra på begge sider} \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1} & \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{k} & , k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Da det hurtigt viser sig at $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$, må det betyde, at x_1 kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra x_1) i definitonsmængden ($Dm(f) = \mathbb{R}$), og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\
f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02
\end{aligned}
$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

Svar: En funktion f har en invers, hvis og kun hvis f er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at f ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at f ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

c) Angiv $f + g$.

Svar: To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
\Rightarrow (f+g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && \text{f og g indsættes på deres pladser} \\
&= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Ophævning af + parentes} \\
&= x^2 + 3x - 1
\end{aligned}
$$

d) Angiv $g \circ f$.

Svar: Den sammensatte funktion $f \circ g$ beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man f i g fås:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2+x+1) \\ &= 2\cdot(x^2+x+1)-2 && \text{udtrykket indsættes i g} \\ &= 2x^2+2x+2-2 && \text{Parentesen udregnes} \\ &= 2x^2+2x \end{aligned}$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.

2 Reeksamen Februar 2015 Opg. 1 - Thomas

Opgave 1 (12%)

I det følgende lader vi $U = \{1,2,3,\ldots,15\}$ være universet (universal set). Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n+2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1,2,3,4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

Opgave a og b

Vi starter med at betragte de 2 mængder A og B.

$$A = \{2n|n \in S\} \qquad B = \{3n+2|n \in S\}$$

$$\begin{array}{cc} A = 2*1 = 2, & B = 3*1+2 = 5, \\ A = 2*2 = 4, & B = 3*2+2 = 8, \\ A = 2*3 = 6, & B = 3*3+2 = 11, \\ A = 2*4 = 8, & B = 3*4+2 = 14, \end{array}$$

derfor er

$$A = \{2,4,6,8\} \qquad B = \{5,8,11,14\}$$

Opgave c

Angiv samtlige element for $A \cap B$

Fællesmængden er de elementer, som A og B har til fælles:

Så derfor er

$$A \cap B = \{8\}$$

Opgave d

Angiv samtlige element for $A \cup B$

Foreningsmængden er de elementer, som både findes i A og B:

Så derfor er

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$$

Opgave e

Angiv samtlige element for $A - B$

A fraregnet B betyder de elementer, som findes i mængden A minus de elementer, som er i B:

Så derfor er

$$A - B = \{2, 4, 6\}$$

Opgave f

Angiv samtlige element for $\bar{A}$

Komplementet af $\bar{A}$ er alle de elementer, som findes i universet, undtagen dem som findes i A:

Så derfor er

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

3 Philip

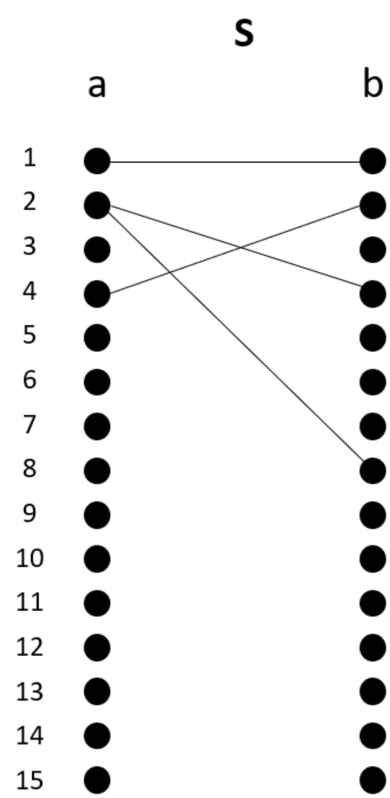
Opgaven tager udgangspunkt i opgave 3 fra eksamensæt 2009, samt en ekstra opgave (gengivet som opgave c i det nedenstående). Eksamen januar 2009, opgave 3. Opskriv desuden matricen, der repræsenterer relationen R, dog hvor S reduceret til $S = \{1, 2, ..., 6\}$

Lad $S = \{1, 2, ..., 15\}$

a) Hvilke af nedenstående par tilhører R? Hvilke tilhører R^2?

(1,1) , (2,4) , (4,2) , (3,5) , (2,8)

Vi skal her finde ud af, hvilke par som indeholdeles i R, hvor R er givet, som $R = \{(a,b)|b = 2a\}$. For at finde ud af hvilke par, som indeholdes i R opstiller vi relationerne for (a,b) og ser, hvorvidt disse par indgår i S for $R = \{(a,b)|b = 2a\}$.



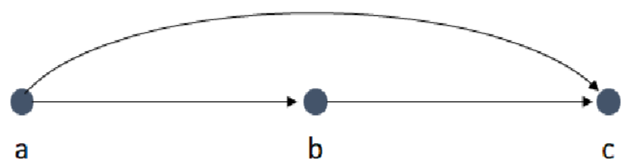
Af ovenstående figur ses det, at (2,4) er det eneste, som indgår i S.

Vi ser nu på, hvilke par som indgår i R^2.
R^2 betegner det forhold, at

$$R^1 = R \text{ og } R^{n+1} = R^n \circ\ R$$

Vi finder derfor, at (2,8) indgår i R^2, som det eneste par.

b) Opskriv all par i den transitative lukning af R. Vi skal i denne opgave finde den transitative lukning for ovenstående par. Den transitative lukning kan betegnes som en form for "genvej"mellem relationer således, jf. også nedenstående figur.



Dette kan vi også skrive, som:

$$a \geq b \text{ , } b \geq c \text{ og derfor gælder der, at } a \geq c$$

Vi skal derfor finde de par, som gør at ovenstående forhold om transitivitet gælder. Vi finder derfor, at:

$$(1{,}1) \text{ , } (2{,}2) \text{ , } (2{,}4) \text{ , } (2{,}8) \text{ , } (3{,}5) \text{ , } (4{,}2) \text{ , } (4{,}4) \text{ , } (4{,}8)$$

c) Opskriv matricen, der repræsenterer relationen R, dog hvor S reduceret til $S = \{1, 2, ..., 6\}$

R udgør en binær-relation, og vi opskriver derfor matricen, som viser forholdet for $R = \{(a, b)|b = 2a\}$ i 6x6-matricen.

$$R_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Reeksamen Februar 2015 Opg 3 - Sean

5 Opgave 3

Lad R, S og T være binære relationer på mængden 1, 2, 3, 4.

5.1 Opgave A

Lad

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

Er R en partiel ordning?

Svar: En partiel ordning er en *relation*, R, på en mængde, hvor R er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv. Det bedømmes hvorvidt R besidder disse egenskaber:

5.1.1 Refleksivitet:

Da sætningen

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

betyder at en refleksiv ordning skal relatere enhver værdi til sig selv og da denne er opfyldt kan første krav til en partiel ordning krydses af.

5.1.2 Antisymmetri:

Hvis en ordning skal være antisymmetrisk gælder at:

$$\forall a, b \in A \wedge a \neq b : aRb \Rightarrow a \not\mathrm{R} b$$

Her forstås at Hvis a er relateret til b kan b ikke være relateret til a, medmindre a = b En anden måde at se om en mængde er antisymmetrisk er ved hjælp af en matrice.
Matrice for R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sammenligner man værdierne diagonalt og man har en forskellig værdi. Gælder dog ikke to ens 0-værdier, da de i så fald ikke er relateret til hinanden på nogen vis, er relationen antisymmetrisk.

Her kan man se at R altså er antisymmetrisk.

5.1.3 Transitivitet

Her gælder at

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R, \ \forall a, b, c \in A$$

Her har vi en binær relation med mængden 1, 2, 3, 4 hvilken betyder at hvis relationen skal være transitiv, skal alle mægnde værdier være i relation med hinanden. Den transitive lukning ser således ud for relationen

$$t(R) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\} \cup \{(2, 3)\}$$

Her kan vi se relationen forenet med en ny relation, nemlig (2,3), er den transitive lukning af R. Af den grund var R ikke transitiv til at starte med, da elementet (2,3) manglede. Da denne ikke er en del a relationen R kan den ikke kaldes transitiv, og dermed er den ikke en partiel ordning.

5.2 Opgave B

Lad

$$S = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$$

Angiv den transitive lukning af S?
Svar:

Som tidligere forklaret er den transitive lukning, samlingen af relationer som der kræves for at relatere enhver værdi med enhver anden. Altså

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R, \ \forall a, b, c \in A$$

Altså er lukningen også beksrevet som

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$$

Er der en vej fra den oprindelige relation, kommer der en direkte vej i lukningen.

Har T n elementer kan man skrive

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} S^4 = t(S) = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}. \cup \{(1, 3), (1, 4), \} \cup \{(3, 4)\}$$

Matrice for S:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 Opgave C

Lad

$$T = (1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)$$

Bemærk, at T er en ækvivalens-relation. Angiv T's ækvivalens-klasser.

Ækvivalens relationer er relationer der er både symmetriske, transitive og refleksive.

Ækvivalens-klasserne for T som følger

$$[a] = \{b|(a,b) \in R\}$$

$$[1] = \{1,3\}$$

$$[2] = \{2,4\}$$

og da

$$[1] = [3], [2] = [4]$$

fordi

$$a \subseteq b$$

$$c \in [a] \Rightarrow aRc \Rightarrow bRc \Rightarrow c \in [b]$$

indgår disse i samme klasse.

Matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6 Eksamen Februar 2015 Opg. 3 - Alle

Lad R, S og T være binære relationer på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.1 Underopgave a)

a) Lad $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$.
Er R en partiel ordning?

Hvis en relation, R, skal være en partiel ordning, skal relationen være *refleksiv, anti-symmetrisk* og *transitiv*. Mangler den blot én af disse egenskaber, kan relationen ikke være en partiel ordning. Først kontrolleres den refleksive egenskab.

Sætning 2. *En relation, R, på mængden A er refleksiv hvis* $\forall a \in A : (a, a) \in R$

Fordi R er en relation på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$ kræves det, at elementerne (1,1), (2,2), (3,3) og (4,4) er indeholdt i R. Dette er tilfældet, og R er derfor refleksiv. Næste egenskab er den anti-symmetriske egenskab.

Sætning 3. *En relation, R, på mængden A er anti-symmetrisk hvis* $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \vee a = b$

Vi ser allerede at de refleksive elementer findes i R. Derudover ses:

- (2,1) men ikke (1,2)
- (2,4) men ikke (4,2)
- (3,1) men ikke (1,3)
- (3,4) men ikke (4,3)
- (4,1) men ikke (1,4)

Af den grund er R også anti-symmetrisk. Derfor kontrolleres den transitive egenskab som den sidste:

Sætning 4. *En relation, R, på mængden A er transitiv hvis* $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Eksempelvis skal (2,1) også findes i R hvis (2,4) og (4,1) eksisterer i R, hvilket også er tilfældet. Elementerne gennemgås slavisk:

- Da (1,1) er det eneste element med tallet 1 som første element i et par, er der ikke nogen transitivitet at gennemskue. Af den grund kan vi også se bort fra alle elementer i R, hvor 1 indgår. Generelt undgår vi at undersøge mulige transitive elementer ved refleksive elementer, da de altid giver det element, de bliver sammenlignet med i sidste ende.
- (2,4) og (4,1) medfører $(2,1) \in R$ ✓
- (2,4) og (4,4) medfører $(2,4) \in R$ ✓
- (3,4) og (4,1) medfører $(3,1) \in R$ ✓

Alle de transitive elementer findes i R, og R er derfor også transitiv.

Deraf kan det konkluderes, at R er en partiel ordning.

6.2 Underopgave b)

b) Lad $S = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2)\}$.
Angiv den transitive lukning af S.

Den transitive lukning af en relation R, er givet ved:

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

hvor R^i er den i'te potens af R således at:

$$R^1 = R$$

$$R^{i+1} = R \circ R^i$$

Omvendt kan det siges, at R^i indeholder de elementer, (a,b), hvor man kan gå på en sti af længe i fra a til b i en orienteret graf for relationen. Først findes S^2, og derefter arbejdes mod S^3 indtil der ikke opstår nye elementer i den sammensatte relation. Når man sammensætter to relationer, S og R, vil $S \circ R$ indeholde de elementer, (a,c), der opstår, når man går fra (a,b) i R til (b,c) i S.

$$S^2 = S \circ S = \{(1,3),(1,4),(2,2),(4,4)\}$$
$$S^3 = S \circ S^2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2))\}$$

Det ses her at $S^3 = S$, og der dannes derfor ikke flere par. Derfor er den transitive lukning af S:

$$S^* = S \cup S^2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(4,4)\}$$

Følger man samme procedure med at kontrollere de transitive elementer fra opgave a), vil man se, at dette er den transitive lukning.

6.3 Underopgave c)

c) Lad $T = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$.
Bemærk, at T er en ækvivalens-relation.

Angiv T's ækvivalens-klasser.

Sætning 5. *En ækvivalensklasse,* $[a]_R = \{b \in R | aRb\}$

Sagt på en anden måde er ækvivalensklassen for et element, a, i R alle de elementer, som a er relateret til. Vi opskriver derfor:

$$[1]_T = \{1,3\}$$
$$[2]_T = \{2,4\}$$
$$[3]_T = [1]_T$$
$$[4]_T = [2]_T$$

På grund af refleksivitet vil et element altid have sig selv i sin ækvivalensklasse, og symmetrien medfører at to elementer altid vil have hinanden i sine ækvivalensklasser, hvis de er relateret til hinanden. Grundet transitiviteten vil to elementer altid være i hinandens ækvivalensklasse, hvis et tredje element er relateret til dem begge. Det ses desuden at ækvivalænsklasserne udgør en partitionering af mængden C, som T er en relationen på.

6.4 Underopgave fra Take-Home-Eksamen

Opskriv desuden matricerne, der repræsenterer de tre relationer *R, S* og *T*.

R, S og T er alle binære relationer. Hver række, i, i matricen, M, beskriver et element, a, og hvis der står et 1-tal på plads M_i, j, betyder det, at a er relateret til b, som er beskrevet i kolonnen j. Ellers står der et 0.

$$R_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$