

DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen DM527 Opg 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$

$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \rightarrow B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. f er injektiv, hvis $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x -værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x -værdier ikke kan dele en y -værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x -værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$

$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 + x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{k}$$

Funktionsværdien indsættes

1 går ud på begge sider

x_1 trækkes fra på begge sider

, $k \in \mathbb{R}$

Da det hurtigt viser sig at $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$, må det betyde, at x_1 kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra x_1) i definitionsmængden ($Dm(f) = \mathbb{R}$), og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\ f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02 \end{aligned}$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

En funktion f har en invers, hvis og kun hvis f er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at f ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at f ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

c) Angiv $f + g$.

To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \Rightarrow (f + g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && f \text{ og } g \text{ indsættes på deres pladser} \\ &= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Parentser fjernes, da der kun indgår } + \text{ mellem dem} \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

d) Angiv $g \circ f$.

Den sammensatte funktion $f \circ g$ beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man f i g fås:

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^2 + x + 1) \\
&= 2 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 && \text{udtrykket indsættes i g} \\
&= 2x^2 + 2x + 2 - 2 && \text{Parentesen udregnes} \\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.

2 Reeksamen Februar 2015 Opg. 1 - Thomas

Opgave 1 (12%)

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ være universet (universal set).
 Betragt de to mængder

$$A = \{2n \mid n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 \mid n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

Opgave a og b

Vi starter med at betragte de 2 mængder A og B .

$$\begin{array}{ll}
A = \{2n \mid n \in S\} & B = \{3n + 2 \mid n \in S\} \\
A = 2 * 1 = 2, & B = 3 * 1 + 2 = 5, \\
A = 2 * 2 = 4, & B = 3 * 2 + 2 = 8, \\
A = 2 * 3 = 6, & B = 3 * 3 + 2 = 11, \\
A = 2 * 4 = 8, & B = 3 * 4 + 2 = 14,
\end{array}$$

derfor er

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad B = \{5, 8, 11, 14\}$$

Opgave c

Angiv samtlige element for $A \cap B$

Fællesmængden er de elementer, som A og B har til fælles:

Så derfor er

$$A \cap B = \{8\}$$

Opgave d

Angiv samtlige element for $A \cup B$

Foreningsmængden er de elementer, som både findes i A og B :

Så derfor er

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$$

Opgave e

Angiv samtlige element for $A - B$

A fraregnet B betyder de elementer, som findes i mængden A minus de elementer, som er i B :

Så derfor er

$$A - B = \{2, 4, 6\}$$

Opgave f

Angiv samtlige element for \bar{A}

Komplementet af \bar{A} er alle de elementer, som findes i universet, undtagen dem som findes i A :

Så derfor er

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

3 - Phillip

4 - Sean