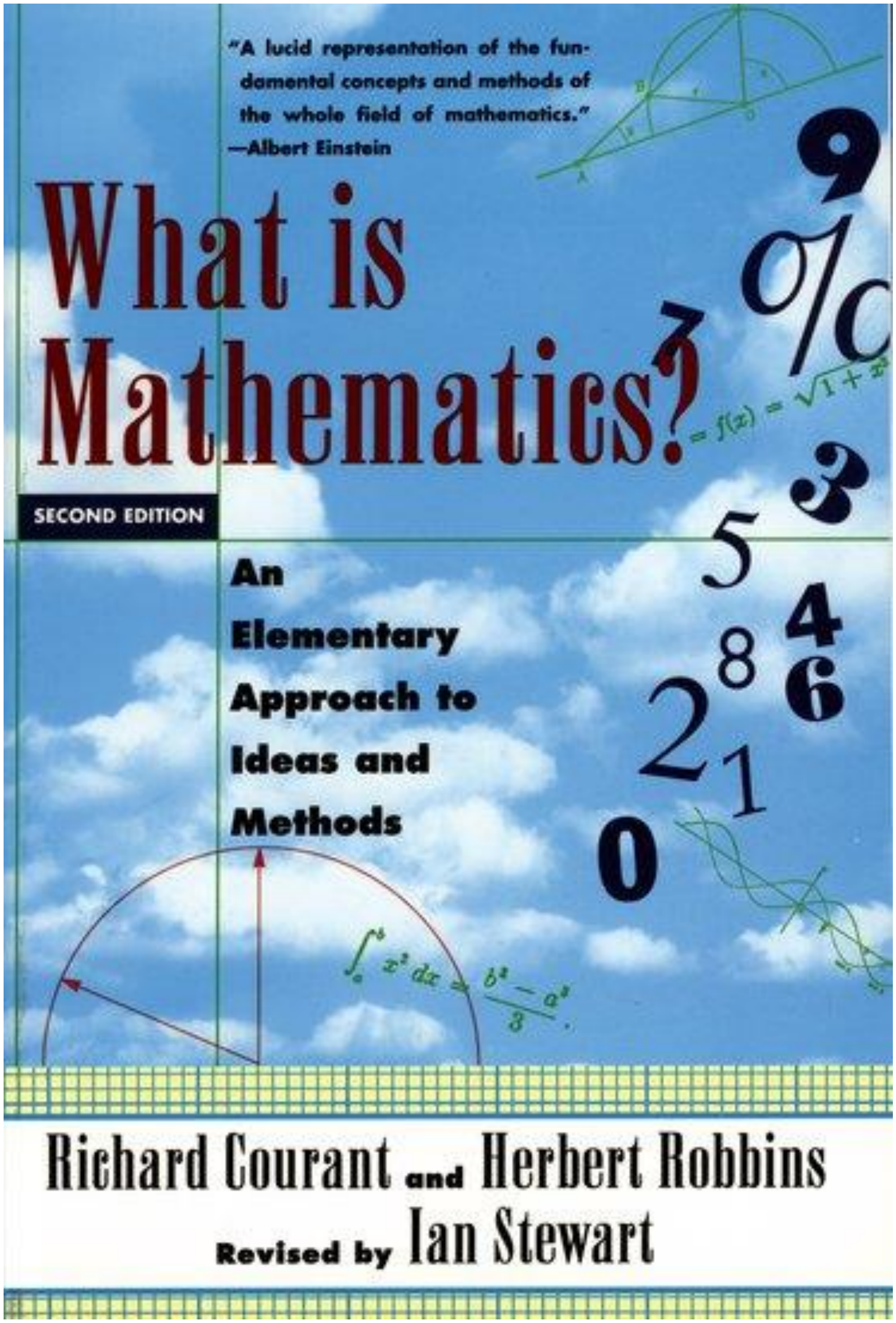
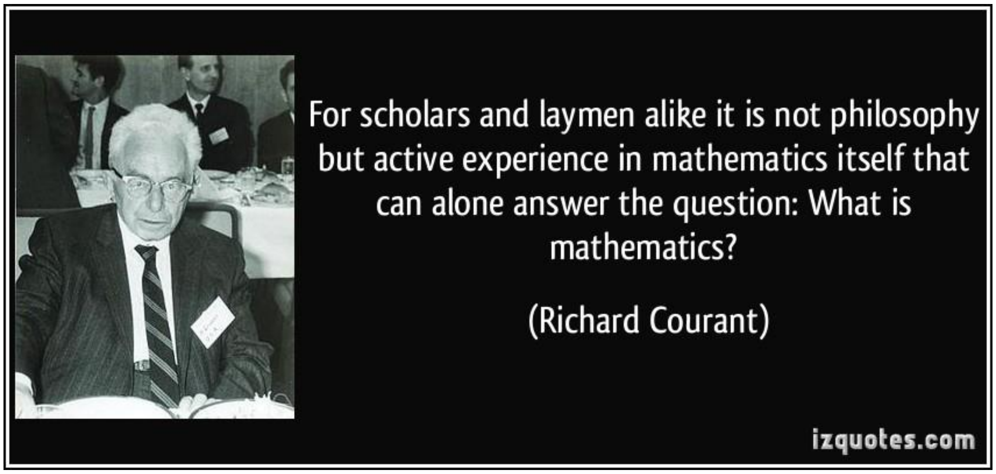

"A lucid representation of the fundamental concepts and methods of the whole field of mathematics."
—Albert Einstein
What is Mathematics?
SECOND EDITION
An Elementary Approach to Ideas and Methods
$= f(x) = \sqrt{1+x^2}$
$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.
Richard Courant and Herbert Robbins
Revised by Ian Stewart



Tên sách: Toán học là gì? – Tập 1

Tác giả: R. Courant, H. Robbins

Nhà xuất bản: Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật

Năm xuất bản: 1984

Số trang: 161

Giá tiền: 8đ

Khổ: 13 x 19

Đánh máy: dqskiu, phanllq, protoss26, haxuan07, hanh_nguyen_bg, kaøerin, saccauvong

Sửa chính tả: dqskiu

Chuyển sang ebook: dqskiu

Ngày hoàn thành: 11–08–2011

http://www.e–thuvien.com

Sửa chữa và bổ sung các ***Bài tập*** : sannyas60/Duong Aph

LỜI TỰA CHO LẦN XUẤT BẢN ĐẦU TIÊN

Trong suốt khoảng thời gian hơn hai nghìn năm, việc nắm được một số kiến thức không quá hời hợt trong phạm vi toán học đã là một bộ phận cần thiết trong vốn liếng trí tuệ của mỗi người có học vấn. Ngày nay, một mối nguy cơ lớn đang đe doạ truyền thống đó của giá trị giáo dưỡng của toán học. Tiếc rằng, trong vấn đề này những đại biểu có uy tín của khoa học toán học còn tỏ ra thiếu trách nhiệm. Việc giảng dạy toán thường thường còn mang tính chất những bài tập khuôn sáo có thể dẫn đến sự phát triển những kỹ năng hình thức nào đó mà không thâm nhập sâu sắc vào đang nghiên cứu và không thực sự giúp cho sự phát triển tự do của tư tưởng. Các công trình nghiên cứu khoa học đã có xu hướng trừu tượng hoá và chuyên biệt hoá cao độ. Những ứng dụng và những mối quan hệ tương hỗ đã không được chú ý đầy đủ. Và mọi điều kiện tiên quyết kém thuận lợi đó hoàn toàn không thể biện minh cho một chính sách đầu hàng về quan điểm. Ngược lại những ai hiểu được giá trị của văn hoá trí tuệ không thể không đứng lên và đã đứng lên đấu tranh bảo vệ nó. Các thày giáo, học sinh và tất cả những người có học vấn không có liên hệ với nhà trưởng đều không muốn đi theo con đường ít chông gai nhất, đã không hạ vũ khí mà đã bắt chúng tay vào công cuộc cải cách giảng dạy. Mục tiêu là sự thông hiểu đầy đủ bản chất của toán học xem như một cơ thể toàn vẹn và xem toán học như cơ sở của tư duy khoa học và mẫu phong cách hoạt động.

Một số cuốn sách nổi tiếng có nội dung lịch sử và tiểu sử và những bài diễn văn chính luận đã làm thức tỉnh nhiều người dường như thờ ơ với toàn học, nhưng thực ra không bao giờ ngừng quan tâm đến nó. Song không thể dạy được tri thức mà chỉ nhờ vào các phương tiện gián tiếp. Không thể đạt được sự thông hiểu toán học chỉ bằng những phương pháp giải trí nhẹ nhàng, cũng như không thể hiểu biết âm nhạc bằng cách đọc các bài báo (dù chúng được viết rõ đến mức nào), nếu như không học nghe một cách chú ý và tập trung. Không thể tránh khỏi sự tiếp xúc thực sự với bản thân nội dung của khoa học toán học sinh động. Mặt khác, khi trình bày toán học thoát khỏi tinh thần lạc hậu của nhà trường và tránh chủ nghĩa giáo điều cứng nhắc, từ chối những nguyên cớ và những chỉ dẫn về mục đích, cần phải tránh tất cả những gì quá cồng kềnh và giả tạo của chủ nghĩa giáo điều, đó chính là một trở ngại đáng ghét đối với mọi sự cố gắng chân thật. Chẳng lẽ không thể được nếu bắt đầu từ những yếu tố và đi theo con đường trực tiếp để đạt tới những điểm cao mà từ đó có thể nhìn rõ cái bản chất nhất và những động lực của toán học hiện đại.

Cuốn sách này định thử làm một công việc như vậy. Vì nó không đòi hỏi những hiểu biết gì mới ngoài những điều đã được trình bày trong một giáo trình tốt ở nhà trường, cho nên có thể gọi nó là một cuốn sách phổ cập. Song nó không theo một xu hướng nguy hiểm là thủ tiêu mọi sự cố gắng suy nghĩ, mọi sự luyện tập. Nó đòi hỏi một mức độ trưởng thành nhất định về trí tuệ và một trình độ tiếp thu các lập luận được trình bày. Cuốn sách được viết cho những người bắt đầu học và cho những cán bộ khoa học, cho học sinh và thày giáo, cho các nhà triết học và các kỹ sư, nó có thể được dùng làm sách giáo khoa để tự học. Có lẽ, ý định phục vụ cho một lớp rộng rãi bạn đọc như thế là quá đỗi can đảm và tự tin. Phải thừa nhận rằng, do áp lực của một tác phẩm khác mà khi cho cuốn sách này ra mắt bạn đọc, chúng buộc phải đi đến một sự thoả hiệp: công việc chuẩn bị đã được tiến hành nhiều năm nhưng chưa thực sự kết thúc. Chúng tôi rất vui mừng chờ đón những lời phê bình và sẵn sàng đón nghe những ý kiến đóng góp của các bạn.

Nếu như trách nhiệm về ý định và nội dung triết học của cuốn sách này thuộc về người ký tên dưới đây thì tôi xin chia sẻ công lao xứng đáng về giá trị của cuốn sách (nếu có) với Herbert Robbinx. Ông đã dành cho tác phẩm này một sự chú ý đặc biệt như chính công trình của bản thân mình ngay từ khi tiếp xúc với nó dưới dạng sơ thảo và sự cộng tác của ông đã có vai trò quyết định làm cho cuốn sách này được như ngày nay. Cuối cùng tôi xin biểu thị lòng cảm ơn sâu sắc trước sự giúp đỡ của nhiều bè bạn. Các cuộc toạ đàm với Niels Bohr, Kurt Friedrichs và Otto Neugebauer đã có ảnh hưởng đến một số quan điểm của tôi về các vấn đề có tính chất triết học và lịch sử. Edna Kramer đã cho nhiều ý kiến phê bình xây dựng về mặt sư phạm. Đavid Hilbark đã viết những bài giảng, sau đó đã là cơ sở cho cuốn sách. Ernest Courant, Norman Davids, Charles de Prima, Alfred Horn, Herbert Mintzer, Wonlfgang Wasow và những người khác đã đóng góp rất nhiều công sức sữa chữa và đánh máy bản thảo. Donald Flenders đã cho nhiều ý kiến quý báo và sửa chữa cẩn thận bản thảo. John Knudsen, Hertha von Gumpenberg, Irving Ritter, và Otto Neugebauer đã chuẩn bị cho các hình vẽ v.v… Tôi cũng xin cảm tạ nhà xuất bản Waverly Press, đặc biệt ngài Grover C. Orth, cho chúng ta về sự làm việc có chất lượng rất cao và cảm tạ nhà xuất bản Oxford University Press, đặc biệt ngài W. Oman và Phillip Vaudrin Vodren về sáng kiến và sự ủng hộ.

R. Courant

Niw Rochelle, (New York)

22 tháng 8 năm 1941

LỜI TỰA CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ HAI, THỨ BA VÀ THỨ TƯ

Trong những năm gần đây, nhu cầu thông tin toán học và tài liệu chỉ dẫn tương ứng ngày càng tăng. Hơn lúc nào hết, hiện nay có nguy cơ của sự chán ngán, nếu như học sinh (và giáo viên) không nhận ra và nắm được bản chất và nội dung của toán học đằng sau các công thức và các biến đổi. Đối với những ai đã nhìn thấy sâu hơn những điều đã viết trong cuốn sách này và bình phẩm đối với lần xuất bản thứ nhất đã củng cố trong các tác giả niềm tin rằng cuốn sách có bổ ích.

Chúng tôi xin cảm tạ những bạn đọc mà những lời phê bình đã giúp chúng tôi đính chính lại và hoàn thiện thêm trong những lần xuất bản sau. Để chuẩn bị cho lần in thứ tư, bà Natascha Artin đã đóng góp rất nhiều, chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

R. Courant

New Rochelle, N.Y.

18–3–1943

10–10–1945

28–10–1947

CÁCH DÙNG SÁCH

Trật tự trình bày trong sách là có hệ thống, nhưng điều này hoàn toàn không có nghĩa bắt buộc bạn đọc phải xem lần lượt trang này sang trang khác, chương nọ tiếp chương kia. Về căn bản, các chương độc lập với nhau. Thông thường thì phần đầu chương là dễ hiểu, nhưng sau đó con đường đi sẽ từ từ leo dốc, đến cuối chương và phần phụ lục của nó thì càng dốc hơn. Bởi thế, bạn đọc nào cần sớm có một thông tin tổng quát, hơn là việc lĩnh hội những kiến thức chuyên ngành thì có thể đọc theo nguyên tắc bỏ qua những khảo sát chi tiết.

Học sinh có trình độ toán học hạn chế thì nên lựa chọn theo sở thích của mình. Các dấu sao và dòng in chữ nhỏ đánh dấu những phần có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên mà không phương hại gì nghiêm trọng cho việc nhận thức phần tiếp sau. Hơn thế nữa, nếu trong khi đọc sách mà bạn đọc tự giới hạn ở những phần hoặc những chương mà mình quan tâm đến nhiều nhất thì cũng không có trở ngại gì.

Các thầy giáo trường phổ thông sẽ tìm thấy, trong những chương dành cho các phép dựng hình học và cực đại, cực tiểu, tài liệu để hoạt động ngoại khoá và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách có thể phục vụ cho học sinh các lớp khác nhau ở trường phổ thông và cho những người thuộc ngành nghề khác nhau thực sự quan tâm đến các vấn đề kiến thức chính xác. Nó có thể làm cơ sở cho các giáo trình tự chọn về các khái niệm toán học cơ bản trong các trường phổ thông. Các chương III, IV, V phù hợp với giáo trình hình học, các VI và VIII gộp lại trình bày trọng vẹn các cơ sở của giải tích với mục đích thông hiểu nhiều hơn là đạt tới sự hoàn thiện về kỹ thuật. Các thày giáo có thể sử dụng chúng làm bài mở đầu để bổ sung giáo trình cho phù hợp với các nhu cầu riêng biệt nào đó và làm cho giáo trình phong phú thêm bởi những thí dụ nhiều loại khác nhau.

Chúng tôi hy vọng rằng cả những chuyên gia cũng sẽ thấy được một số chi tiết và một số lập luận sơ cấp đáng lưu ý chứa đựng trong bản thân chúng mầm mống của những tư tưởng rộng lớn hơn.

TOÁN HỌC LÀ GÌ?

Toán học chứa đựng trong bản thân nó những đặc điểm của hoạt động lý trí, của lập luận trừu tượng và hướng tới sự hoàn thiện về thẩm mỹ. Những yếu tố cơ bản và đối lập lẫn nhau của nó là logic và trực giác, giải tích và phép dựng hình, tính khái quát và tính cụ thể. Với mọi quan điểm khác nhau bắt nguồn từ những truyền thống này hay truyền thống khác, sự tác động đồng thời của những thái cực đó và sự đấu tranh để tổng hợp chúng lại sẽ đảm bảo cho sức sống, sự bổ ích và giá trị cao của khoa học toán học.

Không nghi ngờ gì nữa, sự tiến lên trong phạm vi toán học được qui định bởi sự phát sinh những nhu cầu có tính chất thực tiễn nhất định. Nhưng, tất yếu phải có một cái đà nội tại vượt ra ngoài giới hạn của lợi ích trực tiếp. Sự biến đổi từ một khoa học ứng dụng sang một khoa học lý thuyết như vậy đã diễn ra trong lịch sử xa xưa, song ngày nay cũng vẫn còn như thế: chỉ cần để ý đến sự đóng góp của các kỹ sư và các nhà vật lý trong toán học hiện đại cũng đủ rõ. Những phong cách tư duy toán học cổ xưa nhất đã xuất hiện ở phương Đông khoảng hai nghìn năm trước công nguyên: người Babilon đã tập hợp được chất liệu phong phú, cái mà ngày nay chúng ta có xu hướng xếp vào đại số sơ cấp. Nhưng, từ "toán học" được xem như một khoa học theo ý nghĩa hiện nay, đã phát sinh chậm hơn ở trên mảnh đất Hy Lạp vào khoảng thế kỷ thứ tư và thứ năm trước công nguyên. Mọi sự tiếp xúc ngày càng tăng giữa Phương Đông và Hy Lạp bắt đầu từ đế quốc Ba Tư và đạt tới tột đỉnh trong thời kỳ tiếp ngay sau cuộc du lịch của Alexander đã đảm bảo cho người Hy Lạp đuổi kịp những thành tựu của người Babilon trong lĩnh vực toán học và thiên văn học. Toán học đã nhanh chóng trở thành đối tượng của các cuộc thảo luận về triết học thông thường tại các Nhà nước – thành phố Hy Lạp. Như vậy, các nhà tư tưởng Hy Lạp đã nhận thức được những khó khăn đặc biệt có liên quan với các khái niệm toán học cơ bản – sự liên tục, sự chuyển động, cái vô hạn – và với bài toán đo các đại lượng tuỳ ý bằng các đơn vị cho trước. Nhưng đã có quyết tâm vượt khó khăn: nảy sinh do kết quả của một sự cố gắng tuyệt vời của tư tưởng Eudoxus, lý tuyết continuum hình học là một thành tựu có thể sánh ngang hàng với lý thuyết số vô tỉ hiện đại. Phương hướng tiên đề suy diễn trong toán học, bắt đầu từ Eudoxus, đã được thể hiện rất rõ trong tác phẩm "Elements" của Euclid.

Mặc dầu xu hướng tiên đề – lý thuyết vẫn là một trong những đặc điểm nổi bật nhất của toán học Hy Lạp và tự nó đã ảnh hưởng lớn đến sự phát triển sau này của khoa học nhưng cũng cần phải kiên quyết chỉ rõ rằng vai trò của các nhu cầu thực tiễn và mối liên hệ với thực tại vật lý không hề bị hạ thấp chút nào trong việc sáng tạo ra toán học cổ xưa và rằng việc trình bày toán học không theo phong cách chặt chẽ của Euclid vẫn được ưa thích hơn.

Sự phát hiện quá sớm những khó khăn có liên quan tới các đại lượng "vô tỷ" đã cản trở những người Hy Lạp phát triển nghệ thuật tính toán bằng số mà trong những thời kỳ trước đấy đã tạo ra những thành tựu đáng kể ở Phương Đông. Thay thế vào đó, họ đi tìm những con đường trong rừng rậm của hình học tiên đề thuần tuý. Thế là bắt đầu một trong những cuộc phiêu lưu lạ lùng trong lịch sử khoa học mà trong đó có thể bỏ lỡ những khả năng sáng lạn. Gần như trong suốt hai nghìn năm, sự thống trị của truyền thống hình học Hy Lạp đã ngăn cản sự tiến hoá của tư tưởng về số và của phép tính bằng chữ mà sau này đã được đặt làm cơ sở của các khoa học chính xác.

Sau một thời kỳ tập trung sức lực chậm chạp, một thời kỳ cách mạng bão táp trong sự phát triển của toán học và vật lý học đã được mở ra cùng với sự nảy sinh hình học giải tích và phép tính vi tích phân trong thế kỷ XVII. Trong các thế kỷ XVII và XVIII, lý tưởng kết tinh tiên đề hoá và suy diễn hệ thống đã tàn lụi đi và đã mất ảnh hưởng, tuy rằng hình học cổ xưa vẫn tiếp tục được đánh giá cao. Sự tư duy logic hoàn hảo xuất phát từ những định nghĩa rành mạch và từ những tiên đề “hiển nhiên” không mâu thuẫn với nhau đã không còn làm vừa lòng những người khai phá kiến thức toán học mới. Đắm mình trong những dự đoán trực giác, bằng cách pha trộn những kết luận hiển nhiên với những khẳng định huyền bí phi lý, bằng cách tin tưởng mù quáng vào lực lượng siêu đẳng của các qui trình hình thức, họ đã phát hiện ra một thế giới toán học mới vô cùng phong phú. Song dần dà, trạng thái phấn chấn cao độ của tư tưởng được cổ vũ bởi những thắng lợi oanh liệt, đã nhường chỗ cho thái độ thận trọng và ý thức phê bình. Trong thế kỷ XIX, ý thức về sự cần thiết phải củng cố khoa học, đặc biệt có liên quan tới những nhu cầu của giáo dục cao đẳng, được phát triển rộng rãi sau cách mạng Pháp, đã dẫn tới sự xét lại cơ sở của toán học mới. Họ đã đặc biệt chú ý tới phép tính vi tích phân và việc làm sáng tỏ khái niệm giới hạn. Như vậy, thế kỷ XIX không những đã trở nên một kỷ nguyên của những thắng lợi mới mà còn được đánh dấu bởi sự quay trở lại có kết quả lý tưởng cổ điển về sự chính xác và chặt chẽ của các chứng minh. Về mặt này thì khuôn mẫu Hy Lạp đã bị vượt qua. Một lần nữa, con lắc đã nghiêng về phía sự hoàn hảo lôgic và trừu tượng. Hiện nay, chúng chúng ta còn chưa vượt ra khỏi thời kỳ đó, dẫu rằng có cơ sở để hy vọng sự gián đoạn đáng buồn được tạo nên giữa toán học thuần tuý và những ứng dụng sinh động của nó có thể được thay thế bởi sự thống nhất chặt chẽ hơn trong thời kỳ xét lại có phê phán. Ngày nay, một khối lượng những lực nội tại sáng tạo và sự đơn giản hoá cao độ đạt được trên cơ sở của sự thấu hiểu đã cho phép chúng ta sử dụng một lý thuyết toán học sao cho những ứng dụng không bị bỏ qua. Việc thiết lập lại mối liên hệ hữu cơ giữa tri thức thuần tuý và tri thức ứng dụng, sự cân bằng lành mạnh giữa tính khái quát trừu tượng và tính cụ thể phong phú chính là nhiệm vụ của toán học trong một tương lai gần đây.

Ở đây, chúng ta không có điều kiện phân tích học về mặt triết học hoặc tâm lý học một cách tỉ mỉ. Chỉ muốn nhấn mạnh vào một số thời điểm. Theo tôi, việc nhấn mạnh quá đáng tính chất tiên đề – suy diễn của toán học là nguy hiểm. Tất nhiên cái khởi đầu của sự sáng tạo có tính chất kiến thiết. Khó ai có thể chứa chất trong các diễn đạt triết học cái khởi đầu trực giác – là nguồn gốc của các tư tưởng của chúng chúng ta và những luận cứ của chúng chúng ta; tuy nhiên cái khởi đầu đó lại là bản chất thực sự của mọi phát minh toán học, kể cả khi nó thuộc và những lĩnh vực trừu tượng nhất. Nếu một hình thức suy diễn rành mạch là mục đích thì động lực của toán học phải là trực giác và kiến thiết. Trong giả thiết cho rằng, toán học là một hệ thống các hệ quả rút ra từ các định nghĩa và tiên đề chỉ cần tương tích với nhau, bộ phận còn lại là sản phẩm của sự tưởng tượng tự do của nhà toán học, chứ trong nó mối đe doạ nghiệm trọng đối với bản thân sự tồn tại của khoa học. Nếu thực sự như vậy thì toán học sẽ làm một việc không xứng đáng của con người biết suy nghĩ. Nó chỉ là một trò chơi với các định nghĩa, qui tắc và phép chúng tam đoạn luật mà không có nguyên nhân, không có mục đích. Biểu tượng theo đó trí tuệ con người có thể sáng tạo ra những hệ tiên đề đã mất mọi ý nghĩa, sẽ là một sự lừa dối. Chỉ có thể thu được những kết quả có giá trị khoa học nếu thấy rõ trách nhiệm nặng nề trước thiên nhiên và tuân theo một nhu cầu nội tại nào đó.

Tuy xu hướng giải tích logic suy tưởng chưa phải là toàn bộ toán học nhưng nó cũng giúp chúng chúng ta nhận thức sâu sắc hơn những sự kiện toán học và những sự phụ thuộc lẫn nhau giữa chúng và giúp chúng ta nắm vững hơn bản chất các khái niệm toán học. Chính từ xu hướng đó đã nảy sinh ra một quan điểm hiện đại đối với toán học xem như mẫu mực của một phương pháp khoa học được áp dụng vạn năng.

Dù chúng ta đứng trên một quan điểm triết học nào thì mọi nhiệm vụ nghiên cứu khoa học đều được quy về thái độ của chúng ta đối với các sự vật được cảm thụ và đối với các công cụ nghiên cứu. Tất nhiên, bản thân sự cảm thu chưa phải là tri thức, chưa phải là sự thông hiểu; còn phải phù hợp chúng với nhau và cắt nghĩa bằng thuật ngữ một số nội dung cơ bản đằng sau chúng. "Vật tự thân" không phải là đối tượng trực tiếp của một nghiên cứu vật lý mà thuộc về lĩnh vực siêu hình. Nhưng đối với một phương pháp khoa học thì điều quan trọng là sự từ bỏ các suy luận siêu hình, chung qui là sự biểu thị mọi sự kiện quan sát được dưới dạng các khái niệm và các phép dựng. Sự từ bỏ tham vọng nhận thức bản chất của "vật tự thân", nhận thức tính chân lý cuối cùng cũng như sự giải đáp bản chất nội tại của thế giới, có thể sẽ là một gánh nặng về tâm lý đối với những người nhiệt tâm ngây thơ; nhưng sự từ bỏ đó lại có hiệu quả cao đối với sự phát triển của tư tưởng khoa học hiện đại.

Một số phát minh vĩ đại nhất về vật lý đã buộc chúng ta phải tuân theo nguyên tắc thủ tiêu duy tâm siêu hình. Khi Einstein định đưa khái niệm "những sự kiện đồng thời, phát sinh từ những địa điểm khác nhau" vào số những hiện tượng quan sát và khi ông hiểu rằng niềm tin bản thân khái niệm này tất phải có một ý nghĩa chính xác nào đó mới chỉ là một tiên đoán siêu hình thì trong phát minh đó đã chứa đựng mầm mống của lý thuyết tương đối của ông. Khi Niels Bohr và các học trò của ông cân nhắc kỹ sự kiện một quan sát vật lý học tuỳ ý có liên quan đến tác dụng tương hỗ giữa dụng cụ và vật được quan sát thì ông đã thấy rõ rằng không thể có một định nghĩa vị trí và vận tốc của phần tử đồng thời chính xác theo nghĩa mà nó được hiểu trong vật lý. Những hệ quả xa hơn của phát minh này đã tạo nên hệ thống cơ lượng tử hiện đại mà ngày nay mỗi nhà vật lý học đều biết. Trong thế kỷ XIX đã có một tư tưởng thống trị, đó là tư tưởng cho rằng các lực cơ học và sự chuyển động của các phần tử trong không gian là các vật tự thân; còn điện, ánh sáng và từ có thể qui về các hiện tượng cơ học (hoặc "giải thích" bằng thuật ngữ cơ học) tương tự như đã làm đối với lý thuyết nhiệt. Khái niệm về một môi trường có tính chất giả định – gọi là môi trường ether– đã đề xuất cho thích hợp với những chuyển động cơ học không hoàn toàn chính đáng mà chúng ta coi là ánh sáng và điện. Dần dà đã thấy rõ ether này không quan sát được, tức là khái niệm này thuộc về siêu hình nhiều hơn là thuộc về vật lý. Sau đó thì tư tưởng giải thích một cách cơ học các hiện tượng điện và ánh sáng và cùng với nó khái niệm về ether đã bị dứt khoát loại bỏ.

Trong toán học cũng có một tình huống tương tự như thế, thậm chí còn rõ ràng hơn. Trong nhiều thế kỷ, các nhà toán học đã xem những sự vật mà họ quan tâm – số, đường thẳng v.v… như là vật tự thân. Song, vì những bản thể đó không thích hợp với những ý định mô tả chính xác nào về bản chất của chúng, trong các nhà toán học thế kỷ XIX đã hình thành một tư tưởng cho rằng vấn đề về giá trị của những khái niệm đó xem như những thực thể trong phạm vi toán học (và cả ở bất kỳ đâu) cũng đều không có ý nghĩa. Những khẳng định toán học mà những thuật ngữ đó thâm nhập vào hoàn toàn không thuộc về thực tại vật lý; chúng chỉ thiết lập mối liên hệ tương hỗ giữa các "sự vật không xác định" và những qui tắc thao tác với những sự vật ấy. Không thể và không nên thảo luận trong toán học vấn đề điểm, đường thẳng và số, thực chất là gì. Điều thực sự quan trọng và có liên quan trực tiếp với các sự kiện "được khảo sát" là cấu trúc và mối liên hệ tương hỗ giữa các sự vật đó: hai điểm thì xác định một đường thẳng; theo những qui tắc nhất định thì từ các số này chúng ta suy ra được các số khác v.v…

Nhận thức được một cách rõ ràng sự cần thiết phải từ bỏ quan niệm cho rằng các khái niệm toán học cơ bản như là những sự vật có thực là một trong những chiến công quan trọng nhất của sự phát triển tiên đề hoá hiện nay của toán học.

May mắn thay, tư tưởng sáng tạo đang lãng quên đi những tín ngưỡng triết học giáo điều ngay khi mà những phát minh có tính chất kiến thiết còn quyến luyến chúng. Và, đối với các chuyên gia cũng như đối với những người yêu thích toán học thì không phải triết học mà chỉ có sự tận tuỵ nghiên cứu bản thân toán học mới có thể trả lời được câu hỏi. Toán học là gì?

CHƯƠNG I : SỐ TỰ NHIÊN

MỞ ĐẦU

Số là khái niệm cơ bản của toán học hiện đại. Nhưng số là gì? Nếu chúng ta nói rằng ½+½=1, ½.½=¼ hoặc (−1).(−1)=1 thì những điều khẳng định này có ý nghĩa gì ? Trong nhà trường, chúng ta nghiên cứu kỹ thuật tính toán với các phân số và với các số âm, tuy nhiên, muốn hiểu thực sự xây dựng một hệ thống số mà chỉ giới hạn trong phạm vi những kiến thức sơ cấp thì không đủ, mà phải đi xa hơn một chút nữa. Người Hy Lạp thời cổ đã dùng các khái niệm hình học điểm và đường thẳng làm cơ sở cho toán học của mình ; nhưng xét cho cùng thì việc qui mọi khẳng định về các khẳng định đối với các số tự nhiên 1, 2, 3,… đã trở thành nguyên tắc chủ đạo của toán học hiện đại. "Thượng đế tạo ra số tự nhiên, còn mọi cái khác là công trình sáng tạo của con người." Với câu nói đó Leopold Kronecker (1823–1891) đã xác định nền móng vững chắc của tòa nhà toán học.

Số dùng để đếm các vật thể có trong những tập hợp này hay tập hợp khác. Số dứt khoát không có liên hệ gì với đặc điểm cá thể của vật được đếm. Chẳng hạn, số sáu là kết quả của sự trừu tượng hóa nảy sinh ra khi xem xét các loại tập hợp gồm có sáu đối tượng : nó hoàn toàn không phụ thuộc vào các thuộc tính đặc thù của những vật thể đó, cũng không phụ thuộc và các ký hiệu được dùng đến. Tuy nhiên tính chất trừu tượng của các tư tưởng về số chỉ trở nên sáng tỏ trên một mức độ phát triển rất cao về trí tuệ. Dưới con mắt của đứa trẻ thì các con số luôn luôn liên kết với các vật thể có thể sờ mó được như những ngón chúng tay hoặc những hòn sỏi ; trong ngôn ngữ của nhân dân thì các con số cũng được hiểu một cách cụ thể. Đó là các tổ hợp khác nhau về số lượng được dùng để biểu thị các vật thể khác nhau.

Chúng chúng ta lợi dụng một điều là, nhà toán học (tự bản thân mình) không bắt buộc phải nghiên cứu vấn đề triết học của sự chuyển từ những tập hợp đối tượng cụ thể đến khái niệm số trừu tượng. Bởi thế, chúng chúng ta coi các số tự nhiên như là những số cho trước cùng với hai phép toán cơ bản được thực hiện trên các số đó : phép cộng và phép nhân.

§ I. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ TỰ NHIÊN

1. Các định luật số học.

Số học là một lý thuyết toán học của các số tự nhiên (hoặc các số nguyên dương). Lý thuyết này dựa trên một sự kiện là, phép cộng và phép nhân các số nguyên tuân theo những định luật nào đó. Muốn diễn đạt những định luật đó một cách khái quát thì không thể dùng các ký hiệu kiểu 1, 2, 3 có liên quan đến những số cụ thể xác định. Khẳng định : $1 + 2 = 2 + 1$ chỉ là trường hợp riêng của một định luật tổng quát, nội dung của nó là, tổng của hai số không phụ thuộc vào thứ tự mà xét chúng. Nếu chúng ta muốn biểu thị một tư tưởng là, có một hệ thức giữa các số nguyên, dù các số được xem xét như thế nào, thì chúng ta biểu thị chúng bằng ký hiệu, chẳng hạn bằng các chữ a, b, c,… Nếu như sự thỏa thuận như vậy được thừa nhận thì việc diễn đạt năm định luật cơ bản của số học là dễ dàng và quen thuộc với bạn đọc :

1) $a + b = b + a$ 2) $ab = ba$

3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ 4) $a (bc) = (ab)c$

5) $a(b+c) = ab + ac$

Hai định luật đầu tiên – định luật giao hoán của phép cộng và định luật giao hoán của phép nhân – chỉ rằng, khi cộng và nhân có thể thay đổi thứ tự của các số mà trên đó chúng ta thực hiện phép toán. Định luật thứ ba – định luật kết hợp của phép cộng – chỉ rằng, khi cộng ba số chúng ta được cùng một kết quả như nhau mà không phụ thuộc vào việc chúng ta cộng tổng của số thứ hai và số thứ ba vào số thứ nhất hay cộng số thư ba và tổng của số thứ nhất và số thư hai. Định luật thứ tư là định luật kết hợp của phép nhân. Định luật cuối cùng là định luật phân phối xác nhận rằng, khi nhân một tổng với một số nguyên nào đó có thể nhân mỗi số hạng của tổng với số đó và cộng các tích tìm được lại.

Các định luật số học này rất đơn giản và thậm chí có vẻ hiển nhiên. Song cần lưu ý rằng chúng có thể không áp dụng được với các đối tượng khác không phải là số tự nhiên. Chẳng hạn, nếu a và b không biểu thị các số mà biểu thị các chất hóa học và nếu phép cộng được hiểu theo nghĩa thông thường thì dễ thấy rằng định luật giao hoán của phép cộng không phải bao giờ cũng đúng. Thực vậy, nếu đổ axit sunfuric vào nước thì được dung dịch axit loãng nhưng nếu đổ nước vào axit sunfuric thì có thể gây chúng tai họa cho người thí nghiệm. Những minh họa kiểu như vậy có thể chứng tỏ rằng trong số học hóa học có khi các định luật kết hợp và phân phối của phép cộng bị loại trừ. Như vậy, có thể hình dung ra những loại hệ thống số học mà trong đó một hoặc một số các đinh luật 1),..., mất hiệu lực.

Những hệ thống số học như vậy đã được thực sự nghiên cứu trong toán học hiện đại. Cơ sở của các định luật 1),… 5) là một mô hình cụ thể của khái niệm số nguyên trìu tượng. Đáng lẽ dùng các ký hiệu thông thường 1, 2, 3 vv… thì chúng ta biều thị số các đối tượng trong một tập hợp cho trước (thí dụ số quả táo trên một cây) bằng một hệ thống điểm trong hộp sao cho mỗi điểm tương ứng với một đối tượng. Trong khi thao tác với những hộp đó, chúng ta có thể nghiên cứu các định luật của số học các số nguyên. Muốn cộng hai số nguyên a và b chúng ta đẩy hai hộp tương ứng sát vào nhau rồi bỏ vách ngăn đi.

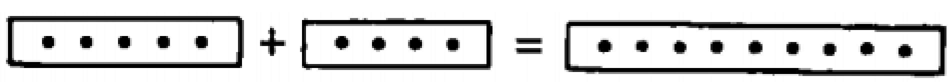


Fig. 1. Addition.

Muốn nhân a với b chúng ta xếp các điểm trong hai hộp thành hàng rồi lập một hộp mới mà trong đó các điểm được sắp xếp thành a hàng ngang và b hàng dọc. Bây giờ, chúng ta thấy rõ rằng các qui tắc 1),..., 5)

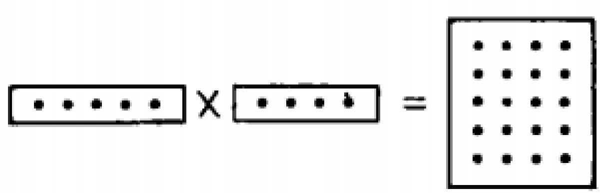


Fig. 2. Multiplication.

biểu thị các tính chất trực giác hiển nhiên của các phép toán với các ngăn kéo mà chúng ta đã đưa vào.

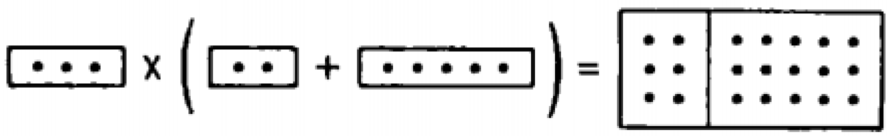


Fig. 3. The Distributive Law.

Dựa vào định nghĩa phép cộng hai số nguyên, đến đây có thể đưa ra định nghĩa bất đẳng thức. Mỗi khẳng định tương đương a<b (a nhỏ hơn b) và b>a (b lớn hơn a) biểu thị rằng có thể thu được hộp b từ hộp a bằng cách thêm vào một hộp thứ ba c thích hợp sao cho b = a + c. Nếu vậy, chúng ta có thể viết :

$$c = b - a$$

và phép toán trừ cũng được định nghĩa.

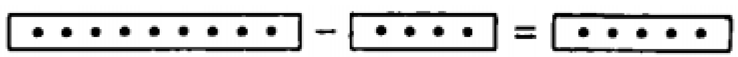


Fig. 4. Subtraction.

Phép cộng và phép trừ là các phép toán ngược nhau, chẳng hạn, nếu cộng số d vào số a rồi lấy kết quả tìm được trừ đi d thì lại được số a :

$$(a + d) - d = a$$

Cần lưu ý rằng số b − a chỉ được xác định với điều kiện b > a. Ý nghĩa của ký hiệu b −a như là số nguyên âm với điều kiện b < a sẽ được xét đến sau này. Ký hiệu b ≥ a (b lớn hơn hoặc bằng a) hoặc a ≤ b (a nhỏ hơn hoặc bằng b) (a không vượt quá b) thường được dung với ý nghĩa là cái phủ định của a > b. Cho nên có thể biết 2 ≥ 2 và cũng có thể viết 3 ≥ 2.

Chúng ta còn có thể mở rộng thêm một chút phạm vi các số nguyên dương mà chúng ta đã biểu diễn bằng các hộp điểm. Chúng ta đưa vào số nguyên « không » được biểu diễn bởi ngăn kéo hoàn toàn rỗng : chúng ta qui ước biểu thị ngăn kéo rỗng bằng ký hiệu 0 thông thường. Vậy thì theo định nghĩa phép cộng và phép nhân, với mọi số a chúng ta có các hệ thức :

$$a + 0 = a$$

$$a.0 = 0$$

Thực vậy, a + 0 biểu thị sự thêm một ngăn kéo rỗng vào ngăn kéo a, còn a.0 biểu thị một ngăn kéo trong đó hoàn toàn không có hàng dọc nào, tức là ngăn kéo rỗng. Như vậy thì việc mở rộng định nghĩa phép từ là hoàn toàn tự nhiên nếu giả thiết

$$a - a = 0$$

với mọi a. Đó là những tính chất số học đặc trưng của số không.

Các mô hình hình học như kiểu ngăn kéo điểm được áp dụng rộng rãi trong tính toán số học cho đến cuối thời kỳ Trung cổ và chỉ sau đó mới dần dần nhường chỗ cho các phương pháp ký hiệu hoàn hơn hơn nhiều dựa vào hệ thập phân.

2. Biểu diễn các số nguyên bằng các ký hiệu (phép viết số)

Cần phân biệt rất thận trọng số nguyên với ký hiệu (thí dụ 5, V, vv…) được dùng để tái tạo nó bằng cách viết. Trong hệ thập phân của chúng ta thì số không và chín số tự nhiên đầu tiên được ký hiệu bởi các chữ 0, 1, 2, 3, …, 9. Số lớn hơn, chẳng hạn « ba trăm bảy mươi hai » được viết dưới dạng :

$$300 + 70 + 2 = 3.102 + 7.10 + 2$$

và trong hệ thập phân nó được viết bằng ký hiệu 372. Trong trường hợp này thì điều quan trọng là, giá trị của mỗi số 3, 7, 2 phụ thuộc vào vị trí của nó – phụ thuộc và chỗ nó có đứng ở vị trí hằng đơn vị, hàng chục hoặc hàng trăm hay không. Dùng « giá trị theo vị trí » của các chữ số (nguyên tắc vị trí), chúng ta có thể biểu diễn một số tự nhiên tùy ý mà chỉ cần đến mười chữ số trong các tổ hợp khác nhau của chúng. Quy tắc chung của phép biểu diễn như vậy được thể hiện bằng sơ đồ, được minh họa qua thí dụ :

$$Z = a.103 + b.102 + c.10 + d$$

trong đó a, b, c, d là các số nguyên từ số không đén số chín. Lúc này số Z được biểu diễn vắn tắt bằng ký hiệu abcd.

Tiện thể, chúng ta lưu ý thêm rằng các hệ số d, c, b, a chẳng qua là các số dư trong phép chia liên tiếp số Z cho 10. Chẳng hạn:

10)372	Remainder
10)37	2
10)3	7
0	3

Dựa vào cách viết số Z ở trên, chúng ta chỉ biểu thị được những số nhỏ hơn mười nghìn. Muốn biểu thị các số lớn hơn mười nghìn cần năm chữ số hoặc nhiều hơn thế nữa. Nếu Z là số bao hàm giữa mười nghìn và một trăm nghìn thì chúng ta có thể biểu diễn nó dưới dạng :

$$Z = a.104 + b.103 + c.102 + d.10 + e$$

và ký hiệu là *abcde*.

Một khẳng định tương tự cũng đúng đối với những số bao hàm giữa một trăm nghìn và một triệu vv… Điều cực kỳ quan trọng ở đây là tìm phương pháp diễn đạt một cách tổng quát kết quả mà chúng ta đã thu được bằng một công thức duy nhất.

Có thể đạt được mục đích này nếu chúng ta biểu thị các hệ số khác nhau e, d, c,… bằng cũng với một chữ a với các chỉ số khác nhau a_0, a_1, a_2,… Vì lũy thừa 10 có thể lớn tùy ý cho nên chúng ta không biểu diễn lũy thừa bậc cao của 10 là 10^3 hoặc 10^4 như trong các thí dụ trên mà viết là 10^n với n là số tự nhiên tùy ý. Bây giờ thì một số nguyên Z bất kỳ trong hệ thập phân sẽ được biểu thị dưới dạng :

$$Z = a^n.10^n + a^{n-1}.10^{n-1} + \dots + a^1.10 + a^0$$

và được ký hiện là

$$a_n a_{n-a} a_{n-2} \dots a_1 a_0$$

Cũng như trong thí dụ đã xét ở trên, chúng ta nhận thấy a_0, a_1, a_2… a_n là các số dư trong phép chia liên tiếp Z cho 10.

Trong hệ thập phân thì số « mười » đóng vai trò đặc biệt như là « cơ số » của hệ. Người bình thường có thể không nhận ra việc lựa chọn số « mười » như vậy là không thực tế và một bất kỳ số nguyên tùy ý lớn hơn đơn vị cũng đều có thể đóng vai trò cơ số. Chẳng hạn, hoàn toàn có thể có hệ bảy với cơ số bảy. Trong hệ thống này một số nguyên được biểu thị dưới dạng

$$b^n.7^n + b^{n-1}.7^{n-1} + \dots + b^1.7^1 + b^0.7^0$$

trong đó các hệ số b biểu thị các số nguyên trong phạm vi từ số không đến sáu. Số đó được viết là:

$$b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

Chẳng hạn số « một trăm linh chín » trong hệ bảy được viết là 214, vì

$$109 = 2.7^2 + 1.7 + 4.$$

Để luyện tập, bạn đọc có thể rút ra qui tắc chung để chuyển từ cơ số 10 sang cơ số B bất kỳ: cần chia liên tiếp số Z cho B, các số dư sẽ là « các chữ số » của số đó trong hệ cơ số B. Thí dụ :

```
7)109   Remainder
 7)15    4
  7)2    1
    0    2
```

109 (hệ thập phân) = 214 (hệ bảy)

Tất nhiên nảy ra vấn đề : có thể chọn một số nào đó thật vừa ý là cơ số của hệ đếm không ? Sau này chúng ta sẽ thấy rằng một cơ số quá nhỏ sẽ dẫn đến một số điều không thuận lợi ; mặt khác một cơ số quá lớn đòi hỏi chúng ta phải thuộc nhiều chữ số và phải nhớ bảng nhân quá phức tạp. Có những ý kiến ủng hộ hệ cơ số mười hai với lý do mười hai chia hết cho 2, cho 3, cho 4 và cho 6, do đó mà các phép dinh liên quan với phép chia và với phân số đơn giản hơn một chút. Nhưng muốn viết một số tùy ý trong hệ mười hai cần có thêm hai chữ số để biểu thị các số « mười » và « mười một ». Giả thử ɑ biểu thị « số mười », β biểu thị số « mười một ». Như vậy, trong hệ mười hai thì « mười hai » được viết là 10, « hai mươi hai » là 1ɑ, « hai mươi ba » là 1β, còn « một trăm ba mươi mốt » là ɑβ.

Việc phát minh ra cách viết theo vị trí dựa vào giá trị tùy theo vị trí các chữ số được người Babilon khởi xướng. Cách viết số như vậy được người Ấn Độ phát triển, nó có tác dụng vô cùng quí báu trong lịch sử văn minh nhân loại. Các hệ thống viết số cổ hơn được xây dựng trên nguyên tắc cộng[1]. Chẳng hạn, trong cách viết số La Mã thì CXVIII biểu thị « một trăm + một chục + năm + một + một + một ». Các hệ thống Ai Cập, Do Thái và Hy Lạp cũng ở trình độ đó. Sự bất tiện của hệ thống cộng đơn thuần là ở chỗ số ký hiệu mới đưa vào là vô hạn. Nhưng nhược điểm chủ yếu của hệ thống cổ (loại La Mã) là qui trình tính toán rất khó : chỉ những chuyên gia mới có thể giải được những bài toán đơn giản nhất. Đối với hệ « vị trí » Ấn Độ đang được phổ biến hiện nay thì tình thế hoàn toàn khác. Nó xuất hiện ở Châu Âu thời Trung cổ thông qua các thương nhân người Ichúng talia và cuối cùng thì người theo đạo Hồi làm chủ được nó. Hệ vị trí có một tính chất đặc biệt thuận lợi là mọi số từ nhỏ đến lớn đều được viết một số ít ký hiệu khác nhau : trong hệ thập phân thì đó là chữ số Ả Rập « 0, 1, 2, …, 9 ». Việc tính toán dễ dàng trong hệ này cũng có ý nghĩa không nhỏ. Các qui tắc tính toán với các số viết theo nguyên tắc vị trí có thể tóm tắt được dưới dạng bảng cộng và nhân và có thể nhớ mãi được. Phương pháo tính toán cổ mà trước kia chỉ một số ít người trong giới thượng lưu nắm được thì nay đã được đem dạy trong các trường cấp một. Trong lịch sử văn hóa, ít có những thí dụ mà sự tiến bộ khoa học lại ảnh hưởng sâu sắc, nhẹ nhàng đến đời sống thực tiễn như thế.

3. Các phép tính toán số học trong các hệ đếm không thập phân.

Vai trò của « một chục » đã bắt nguồn từ nền văn minh và chắc chắn có liên quan đến việc đếm theo ngón của hai bàn chúng tay. Nhưng chữ số của ngôn ngữ khác lại cho thấy nhiều cơ số khác đã được dùng tới, như cơ số 20 và 12. Trong tiếng Đức và tiếng Anh thì các từ biểu thị 11 và 12 không hình thành theo « nguyên tắc thập phân » kết hợp một chục với các đơn vị :chúng độc lập về ngôn ngữ với các từ biểu thị số 10. Trong tiếng Pháp, các từ "vingt" và "quatre–vingt" là 20 và 80 cho phép chúng ta giả thiết sự tồn tại của hệ cơ số 20 đã được dùng cho những nhu cầu nào đó. Trong tiếng Đan Mạch thì từ halvfirsinds–tyve biểu thị cho số 70 có nghĩa là « nửa đoạn đường từ ba lần hai mươi đến bốn lần hai mươi ». Các nhà thiên văn Babilon đã dùng hệ cơ số 60, nhờ sự kiện này mà chúng ta giải thích được tại sao giờ và độ được chia thành 60 phút. Tất nhiên trong các hệ đếm không thập phân thì các qui tắc số học cũng giống như trong hệ thập phân nhưng bảng cộng và nhân các số đó có một chữ số thì lại khác. Do đã quen với hệ thập phân và đã gắn bó với các danh số trong ngôn ngữ của chúng chúng ta, do đó lúc đầu chúng ta sẽ vấp phải khó khăn đáng kể nếu chúng ta định tính toán theo những hệ thống khác. Chúng ta hãy thử tập là tính nhân theo hệ bảy.

Trước khi bắt chúng tay vào việc, cần viết hai bảng tính nhỏ mà chúng ta sẽ dùng đến.

Addition

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

Multiplication

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Bây giờ chúng ta nhân 265 với 24, những số này đều được viết trong hệ bảy (Trong hệ thập phân thì viết là : nhân 145 với 18). Đầu tiên, nhân 5 với 4 chúng ta được 26 (xem bảng nhân).

$$\begin{array}{r} 265 \\ 24 \\ \hline 1456 \\ 563 \\ \hline 10416 \end{array}$$

Chúng ta viết ở hàng đơn vị nhớ 2 sang hàng sau. Tiếp tục, chúng ta được 4.6=33 và 33+2=35. Viết số 5 vào hàng chục rồi cứ thế cho đến hết. Cộng các số 1456 và 5630 chúng ta được 6+0=6 ở hàng 'đơn vị', sau đó ở hàng 'bảy' chúng ta được 5+3=11. Chúng ta viết 1 và nhớ 1 sang hàng 'bốn mươi chín', ở hàng này chúng ta có 1+6+4=14. Kết quả cuối cùng là 265.24=14016.

Để thử lại chúng ta làm phép tính đó trong hệ thập phân. Muốn viết số 10416 theo hệ thập phân chúng ta tìm lũy thừa của 7 cho đến bậc bốn : 72=49, 73=343, 74=2401. Từ đó suy ra 10416 = 2401 +4.49+7+6, trong đó vế phải của đẳng thức này đã được viết theo hệ thập phân. Cộng các số ở vế phải, chúng ta thấy số 10416 trong hệ bẩy bằng số 2610 trong hệ thập phân. Bây giờ chúng ta nhân 145 với 18 trong hệ thập phân :kết quả cũng bằng 2610.

<u>Bài tập:</u> 1) Thử tạo ra bảng công và nhân trong hệ cơ số 20 và thử với vài bài tập đơn giản.

2) Biểu diễn 'ba mươi' và 'một tram ba mươi ba' trong hệ thống cơ số 5, 7, 11, 12.

3) Biểu diễn 111111 và 21212 có nghĩa trong những hệ thống nào?

4) Lập bảng phép cộng và nhân cho cơ số 5, 11, 13.

Về quan điểm lý thuyết thì một hệ thống cơ số 2 xây dựng theo nguyên tắc vị trí nổi bật ở khía cạnh đó là hệ có cơ số nhỏ nhất trong các cơ số có thể có được. Trong hệ nhị phân này chỉ có hai chữ số 0 và 1; mọi số khác đều được viết bằng các tổ hợp của những ký hiệu đó. Các bảng cộng và nhân được qui về hai qui tắc : 1+1=10 và 1.1=1. Nhưng tính không thực tiễn của hệ thống này là khá hiển nhiên: muốn biểu thị các số không lớn lắm đã phải dùng đến những biểu thức khá dài. Chẳng hạn, số bảy mươi chín được biểu thị dưới dạng 1.26+0.25+0.24+1.23+1.22+1.2+1 và được viết trong hệ nhị phân là 1001111.

Để minh họa sự đơn giản của phép nhân trong hệ nhị phân, chúng ta nhân số bảy với năm viết dưới dạng 111 và 101. Để ý rằng trong hệ này thì 1+1=10, chúng ta viết

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 100011 \end{array} = 2^5 + 2 + 1,$$

Kết quả chúng ta được ba mươi lăm như đã biết.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716), một trong những người thông thái nhất thời bây giờ đã đánh giá rất cao hệ nhị phân, Laplace đã nói về điều này như sau : « Leibnitz đã thấy mẫu mực cảu sự sáng tạo trong số học nhị phân của mình, ông cho rằng đơn vị là khởi điểm thần bí, còn số không là cõi không vô tận, thượng đế tạo ra muôn loài từ sự không tồn tại y như đơn vị và số không biểu thị cho mọi con số trong hệ của ông ».

§ II. SỰ VÔ HẠN CỦA HỆ THỐNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN. NGUYÊN LÝ QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Nguyên lý qui nạp toán học.

Dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4… không có số tận cùng : thực vậy, nếu có một số tự nhiên n nào đó, thì ngay sau nó đã có thể viết số tự nhiên n+1. Để gọi tên tính chất như vậy của dãy số tự nhiên, chúng ta nói rằng nó là một tập hợp vô hạn. Dãy số tự nhiên là một thí dụ đơn giản nhất và tự nhiên nhất của sự vô hạn (với ý nghĩa toán học) đóng vai trò chủ đạo trong toán học hiện đại. Trong cuốn sách này có nhiều chỗ đề cập đến tập hợp vô hạn các sự vật, chẳng hạn như tập hợp điểm trên đường thẳng hoặc tập hợp chúng tam giác trong mặt phẳng. Nhưng, dãy vô hạn số tự nhiên chắc chắn là một thí dụ đơn giản nhất của tập hợp vô hạn.

Việc chuyển từng bước liên tiếp từ n đến n+1 để sinh ra dãy số tự nhiên vô hạn là cơ sở của một trong những lập luận quan trọng nhất và điển hình nhất của toán học – nguyên lý qui nạp toán học. « Quy nạp thực nghiệm » thường được sử dụng trong các ngành khoa học tự nhiên, căn cứ vào một loạt các quan sát riêng rẽ về một hiện tượng nào đó mà đi đến sự thừa nhận một qui luật chung mà hiện tượng ấy phải tuân theo dưới mọi hình thức khác nhau của nó. Mức độ tin cậy của một qui luật được xác lập theo cách thức như vậy phụ thuộc vào số các quan sát riêng biệt và phụ thuộc vào những kết luận rút ra từ đó. Thông thường thì những lập luận qui nạp loại tương tự là hoàn toàn đáng tin cậy ; khẳng định rằng ngày mai Mặt Trời mọc từ hướng đông là hiển nhiên đến nỗi điều đó nói chung sẽ xảy ra, nhưng trong trường hợp này thì tính chất của sự xác nhận hoàn toàn khác với trường hợp một định lý được chứng minh bằng những lập luận logic chặt chẽ tức là bằng những lập luận toán học.

Phép qui nạp toán học được áp dụng với một phương pháp khác biệt có mục đích xác lập tính chân lý của các định lý toán học tại một dãy vô hạn các trường hợp (trường hợp thứ nhất, thứ hai, thứ ba v.v…, không có ngoại lệ). Chúng ta biểu thị A là một khẳng định nào đó đối với một số tự nhiên n bất kỳ. Giả sử A là khẳng định : « Tổng các góc trong một đa giác lồi n+2 cạnh bằng $180^o.n$ ». Hoặc biểu thị A′ là khẳng định « n đường thẳng trên mặt phẳng không thể chia mặt phẳng đó ra nhiều hơn 2n phần ». Muốn chứng minh một định lý như vậy đối với một giá trị tùy ý của n thì chứng minh nó đối với 10, 100 hoặc thậm chí 1000 giá trị đầu tiên của n cũng là chưa đủ. Đó chính là nguyên tắc của qui nạp thực nghiệm. Thay thế vào đó chúng ta sẽ dùng một lập luận toán học chặt chẽ hoàn toàn không có tính chất thực nghiệm, chúng ta sẽ làm sáng tỏ những đặc điểm của nó thông qua các thí dụ về chứng minh các mệnh đề A và A′. Chúng ta xét mệnh đề A. Nếu n=1 thì mệnh đề đó nói về hình chúng tam giác, trong hình học sơ cấp chúng ta đã biết rằng, tổng các góc trong của chúng tam giác bằng $180^o.1$. Trong trường hợp hình tứ giác (n=2), chúng ta vẽ đường chéo phân chia tứ giác thành hai chúng tam giác, bây giờ thì đã rõ ràng tổng các góc của tứ giác bằng tổng các góc của hai chúng tam giác, tức là bằng $180^o+180^o=180^o.2$. Cũng bằng cách như trên chúng ta phân chia ngũ giác thành một tứ giác và môt chúng tam giác. Vì tứ giác có tổng các góc là $180^o.2$ và chúng tam giác có tổng các góc là $180^o.1$, nên tổng các góc của ngũ giác là $180^o.3$. Bây giờ thì rõ ràng lập luận có thể tiếp tục mãi theo các hoàn toàn tương tự. Chúng ta chứng minh định lý cho trường hợp n = 4, sau đó cho trường hợp n = 5 v.v… Mỗi kết luận tiếp sau được suy ra từ kết luận trước nó và định lý A được thừa nhận đối với giá trị n bất kỳ.

Tình hình cũng xảy ra như vậy đối với mệnh đề A′. Khi n = thì dĩ nhiên là nó đúng vì mọi đường thẳng đều chi mặt phẳng ra làm 2 phần. chúng ta vẽ một đường thẳng thứ hai. Nó chia mỗi phần trước làm hai phần với điều kiện đường thẳng thứ hai không song song với đường thẳng thứ nhất. Nhưng, dùng thế nào chẳng nữa thì trong trường hợp n = 2 có không nhiều hơn $4 = 2^2$ phần. Chúng ta lại vẽ thêm đường thẳng thứ ba. Mỗi phần đã có hoặc bị chia làm hai phần, hoặc không bị chia. Do đó số phần mới không vượt quá $2^2.2=2^3$. Thừa nhận điều này, chúng ta sẽ giải quyết được trường hợp tiếp theo v.v… quá trình này không bao giờ kết thúc.

Bản chất của lập luận trên là ở chỗ, khi muốn chứng minh sự đúng đắn của một định lý A tổng quát nào đó đối với mọi giá trị của n, chúng ta chứng minh định lý đó cho một dãy vô hạn liên tiếp các trường hợp riêng A_1, A_2… Tính khả hiện của lập luận đó dựa trên hai tiền đề :

a) Có một phương pháp chung để chứng minh rằng nếu A_r đúng thì khẳng định tiếp theo A_{r+1} cũng đúng.

b) Đã biết khẳng định thứ nhất A_1 là đúng cơ sở để cho hai điều kiện đó là đủ đảm bảo cho mọi khẳng đinh A_1, A_2, A_3,… cũng đúng là một nguyên lý logic mà nó mang một ý nghĩa nền tảng trong toán học giống như những qui tắc cổ điển của lôgic Aristotelian .

Chúng ta phát biểu nguyên lý đó như sau . Giả thử phải xác lập sự đúng đắn của một dãy vô hạn các mệnh đề toán học A_1, A_2, A_3… mà toàn thể hợp thành mộ mệnh đề tổng quát A. Giả thiết rằng :

a) Thực hiện được một lập luận toán học chứng tỏ rằng nếu A_r đúng thì A_{r+1} cũng đúng với mọi số tự nhiên r và

b) Xác nhận được rằng A_1 đúng. Lúc này thì mọi mệnh đề A được chứng minh. Chúng ta chấp nhận nguyên lý qui nạp mà không hòai nghi gì (cũng như chúng ta đã chấp nhận mọi qui tắc của logic thông thường) và xem nó là nguyên lý cơ sở của chứng minh toán học. Thực ra, chúng ta có thể xác lập sự đúng đắn của mỗi khẳng định A_n bằng cách xuất phát từ giả thết b) cho rằng A_1 là đúng và áp dụng nhiều lần giả thiết a) chứng minh liên tiếp sự đúng đắn của các khẳng định A_2, A_3, A_4… cho đến A_n. Nguyên lý qui nạp toán học được suy ra từ một sự kiện là sau bất kì số nguyên r có một số tiếp theo r+1 và bắt đầu từ số tự nhiên 1 có thể đạt tới số tự nhiên n sau một số hữu hạn bước như vậy.

Thường thường chúng ta áp dụng nguyên lý qui nạp toán học mà không nêu rõ sự lặp lại đó hoặc nguyên lý này được ẩn sau công thức « và cứ như thế mãi ». Dạng ẩn này của việc áp dụng nguyên lý qui nạp là đặc điểm của giảng dạy toán học sơ cấp. Nhưng khi chứng minh các định lý khác sâu sắc hơn, tế nhị hơn không thể không vận dụng nguyên lý đó một cách tường minh. Chúng ta nêu ra ở đây một số thí dụ đơn giản nhưng dẫu sao cũng không phải là hoàn toàn tầm thường.

2. Cấp số cộng

Tổng 1 + 2 + 3 + … n của n số tự nhiên đầu tiên bằng $\frac{n(n+1)}{2}$ với mọi n.

Muốn chứng minh định lý này bằng qui nạp toán học chúng ta phải xác lập sự đúng đắn của các hệ thức A_n với mọi n :

(1) $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a) Nếu r là một số tự nhiên nào đó và nếu khẳng định A_r là đúng, tức là nếu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$$

Cộng r+1 vào hai vế của đẳng thức, chúng ta được

$$1 + 2 + 3 + \cdots + r + (r+1) = \frac{r(r+1)}{2} + (r+1)$$

$$= \frac{r(r+1) + 2(r+1)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2},$$

đó chính là khẳng định A_{r+1}

b) Khẳng định A1 hiển nhiên là đúng vì $1 = \frac{1.2}{2}$ Như vậy, theo nguyên lý quy nạp toán học thì khẳng định A_n là đúng với mọi n, đó là điều phải chứng minh. Người chúng ta còn thường chứng minh định lý này bằng cách khác. Chúng ta viết tổng 1 + 2 + 3 + … + n dưới hai dạng:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$

Chúng ta thấy các số nằm trên một hàng dọc cộng lại bằng n+1. Vì có tất cả n hàng dọc, chúng ta suy ra :

$$2S_n = n\,(n + 1)$$

Và bây giờ chỉ còn phải chia cho 2 là xong

Từ công thức (1) chúng ta có thể tính ngay được tổng của (n+1) số đầu tiên.

(2) $$P_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

Thực vậy,

$$P_n = (n + 1)a + d(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (n + 1)a + d\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

Trong trường hợp a = 0, d = 1, hệ thức sau cùng này trở thành hệ thức (1)

3. Cấp số nhân.

Cũng có thể nghiên cứu cấp số nhân (dưới dạng tổng quát) bằng cách như trên. Chúng ta sẽ chứng minh rằng với mọi n thì :

$$(3) \qquad G_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

(chúng ta giả thiết q ≠ 1 vì nếu không, vế phải của (3) không có nghĩa).

Tất nhiên khẳng định của chúng ta đúng với n=1, vì trong trường hợp này thì

$$G_1 = a + aq = \frac{a(1-q^2)}{1-q} = \frac{a(1+q)(1-q)}{(1-q)} = a(1+q).$$

và nếu chúng ta giả định rằng

$$G_r = a + aq + \cdots + aq^r = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q},$$

thì suy ra ngay

$$G_{r+1} = (a + aq + \cdots + aq^r) + aq^{r+1} = G_r + aq^{r+1} = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q} + aq^{r+1}$$

$$= a\frac{(1-q^{r+1}) + q^{r+1}(1-q)}{1-q} = a\frac{1-q^{r+1}+q^{r+1}-q^{r+2}}{1-q} = a\frac{1-q^{r+2}}{1-q}.$$

Mà đó là khẳng định (3) khi n = r+1. Chứng minh kết thúc.

Trong các sách giáo khoa có nêu cách chứng minh khác. Chúng ta đặt:

$$G_n = a + aq + \cdots + aq^n,$$

Nhân hai vế với q:

$$qG_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n+1}.$$

Trừ 2 vế của 2 đẳng thức trên:

$$G_n - qG_n = a - aq^{n+1},$$

$$(1-q)G_n = a(1-q^{n+1}),$$

$$G_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Tổng n bình phương đầu tiên

Đối với tổng n bình phương đầu tiên chúng ta có ứng dụng thú vị của nguyên lý quy nạp toán học. Sau khi thử với một số các giá trị không lớn của n, chúng ta thấy:

$$(4) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

Sau đó chúng ta dự đoán công thức đúng với mọi số nguyên dương n. Muốn khẳng định, chúng ta áp dụng nguyên lý quy nạp toán học. Trước hết chúng ta giả sử (4) đúng với n = r:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

Sau khi thêm vào hai vế $(r+1)^2$ thì:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 + (r+1)^2 &= \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + (r+1)^2 \\ &= \frac{r(r+1)(2r+1) + 6(r+1)^2}{6} = \frac{(r+1)[r(2r+1) + 6(r+1)]}{6} \\ &= \frac{(r+1)(2r^2 + 7r + 6)}{6} = \frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6}, \end{aligned}$$

Đó là khẳng định với n = r+1. Để kết thúc chứng minh, chúng ta cần khẳng định A_1 đúng, trong trường hợp này:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Như vậy, (4) đúng với mọi n.

Chúng ta có thể áp dụng các phép quy nạp tương tự với các luỹ thừa cao hơn, $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, tổng quát hơn với tổng các luỹ thừa bậc k nguyên dương tuỳ ý. Bạn đọc có thể chứng minh bằng quy nạp công thức sau:

$$(5) \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Để kết luận cần lưu ý rằng, mặc dù nguyên lý quy nạp toán học hoàn toàn đủ để chứng minh công thức (5) nhưng chứng minh đó không nêu ra được những chỉ dẫn quan trọng nào đó để đi đến bản chất công thức đó: tại sao dự đoán tổng của n lập phương đầu tiên bằng $[\frac{n(n+1)}{2}]^2$ mà không phải là một biểu thức nào khác như $[\frac{n(n+1)}{3}]^3$ hay … Sự lựa chọn là quá lớn! Vấn đề áp dụng những quy tắc logic đơn giản nào đó để chứng minh định lý không mảy may ảnh hưởng đến nguồn gốc của nó là sự lựa chọn trong một tập hợp vô hạn các khả năng sinh ra. Vấn để giả thiết (5) được đặt ra như thế nào phục thuộc vào một phạm vi không có quy tắc chung nào cả; ở đây người chúng ta tiến hành phép thử nghiệm, phép tương tự và phép quy nạp kiến thiết. Nếu như một giả thiết đúng đã được hình thành thì nguyên lý quy nạp toán học thường là đủ để chứng minh định lý. Nhưng, vì bản thân chứng minh ấy không có ảnh hưởng gì đến con đường phát hiện thì tốt hơn nên gọi là một sự kiểm tra lại.

5. Một bất đẳng thức quan trọng

Trong chương sau chúng ta sẽ cần đến bất đẳng thức:

(6) $$(1+p)^n \geq 1 + p.n$$

Với mọi p thoả mãn điều kiện $p \geq -1$ và với mọi n nguyên dương (ở đây chúng ta dự đoán p là số bất kỳ lớn hơn -1 tức là với cả p âm và không nguyên. Chứng minh là như nhau, không phụ thuộc vào p). Chúng ta áp dụng quy nạp toán học.

a) Nếu $(1+p)^r \geq 1 + p.r$, thì nhân 2 vế với số dương (1+p), chúng ta được:

$(1+p)^{r+1} \geq 1 + p.r + p + rp^2 \geq 1 + p(r+1)$ (do số hạng rp^2 không âm)

Kết quả thu được chứng tỏ (6) đúng cả khi n = r+1.

b) Hoàn toàn rõ ràng rằng : $(1+p)^1 \geq 1 + p.1$

Giới hạn $p \geq -1$ là để đảm bảo nếu (1+p) dương vì nếu (1+p) âm thì khi nhân hai vế của bất đẳng thức với số âm thì chiều của nó thay đổi (ví dụ, với $3 > 2$ thì khi nhân với -1, chúng ta có $-3 < -2$).

6. Định lý nhị thức

Thường phải mở ngoặc một luỹ thừa bậc n của nhị thức dạng $(a+b)^n$. Phép tính trực tiếp cho:

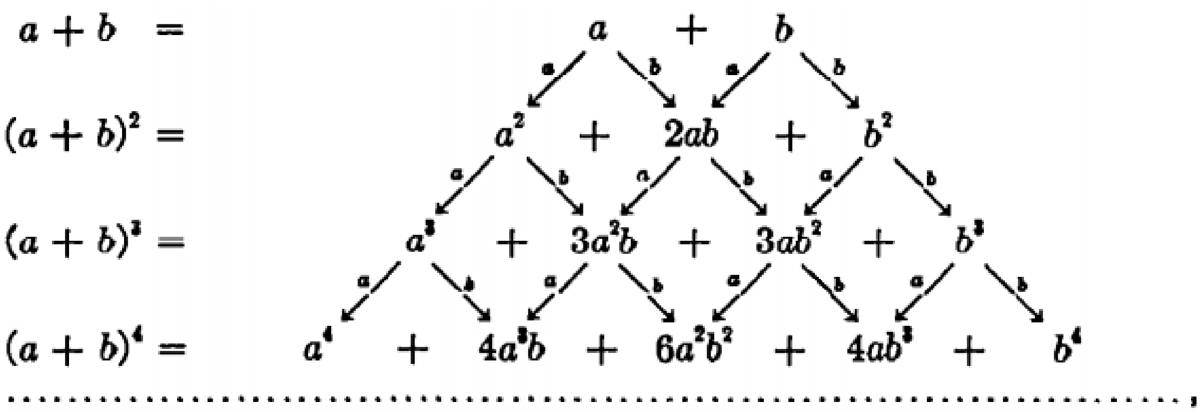
n = 1: $(a+b)^1 = a+b$

n = 2: $(a+b)^2 = a(a+b)+b(a+b) = a^2+2ab+b^2$

n = 3: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

và cứ như thế mãi.

Nhưng dưới cụm từ “cứ như thế mãi” có quy luật chung nào không? Chúng ta phân tích quá trình tính $(a+b)^2$. Vì $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ cho nên chúng ta thu được biểu thức cho $(a+b)^2$ bằng cách nhân mỗi số hạng của biểu thức (a+b) với a, sau đó với b rồi cộng các kết quả lại. Cũng áp dụng như thế với $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, …Chúng ta tính được $(a+b)^n$ bằng cách nhân a rồi b với $(a+b)^{n-1}$, sau đó cộng các kết quả lại. Chúng ta có sơ đồ:



Giúp chúng ta phát hiện quy luật chung về cấu tạo các hệ số trong phân tích $(a+b)^n$. Chúng ta sẽ xây dựng một sơ đồ hình chúng tam giác gồm các số tự nhiên bắt đầu từ các hệ số 1,1 của nhị thức a+b sao cho mỗi số trong chúng tam giác là tổng 2 số đứng trên nó trong hàng trước(bên trái và bên phải). Sơ đồ này đã nổi tiếng với tên gọi chúng tam giác Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

Các hệ số trong phân tích $(a+b)^n$ theo luỹ thừa giảm của a và luỹ thừa tăng của b nằm ở dòng thứ n của sơ đồ này.

Chẳng hạn như.

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Nhờ các ký hiệu có dùng chỉ số trên và chỉ số dưới ngắn gọn, chúng ta viết những số ở dòng thứ n của chúng tam giác Pascal như sau:

$$C_0^n = 1, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \cdots, C_{n-1}^n, C_n^n = 1.$$

Như vậy công thức tổng quát của phân tích $(a+b)^n$ có dạng như sau:

$$(7) \quad (a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n.$$

Theo quy luật cơ sở cho cấu trúc của chúng tam giác Pascal, chúng ta có hệ thức:

$$(8) \qquad C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}.$$

Bạn đọc đã có kinh nghiệm áp dụng phương pháp quy nạp toán học, có thể áp dụng nguyên lý đó (và $C_0^1 = C_1^1 = 1$) để chứng minh công thức tổng quát :

$$(9) \qquad C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

(Với n dương thì ký hiệu n! đọc là "n giai thừa" biểu thị tích của n số nguyên dương đầu tiên: n! = 1.2…n. Để thuận tiện, chúng ta định nghĩa 0! = 1 để công thức (9) có hiệu lực với k=0 và k=n. Việc suy ra công thức các hệ sộ của phân thức nhị thức còn có tên là định lý về nhị thức.(xem trang 475)

Bài tập: Chứng minh bằng quy nạp toán học

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}.$

*3) $1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$

*4) $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}) = \dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$

Tìm tổng của chuỗi sau:

5) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{(1+x^2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(1+x^2)^n}.$

6) $1 + \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}.$

7) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^n.$

Dùng 4) và 5) chứng minh:

*8) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

*9) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

7. Nhắc lại thêm về nguyên lý quy nạp toán học.

Một lần nữa chúng ta nhấn mạnh rằng nguyên lý quy nạp toán học khác hẳn với quy nạp thực nghiệm dùng trong khoa học tự nhiên. Sự thừa nhận một quy luật chung cho một số hữu hạn các trường hợp (dù rằng rất lớn) tuyệt nhiên không phải là một chứng minh theo ý nghĩa toán học ngay cả khi biết rằng không có một trường hợp ngoại lệ nào. Trong hoàn cảnh đó thì “khẳng định” hoặc “quy luật” được xem như không khác gì một “giả thuyết” của lý trí, có thể thay đổi đi do kết quả của những thí nghiệm về sau này. Trong toán học, “quy luật” được coi như chứng minh khi và chỉ khi nó được xem như hệ quả logic tất yếu của những tiền đề được thừa nhận là đúng. Có không ít ví dụ về những khẳng định toán học đã được kiểm chứng và tỏ ra đúng đối với tất cả đúng đối với tất cả những trường hợp riêng trước tới nay, nhưng đến giờ vẫn chưa chứng minh được một cách tổng quát. Nếu một định lý được khẳng định là đúng với một số lớn các ví dụ thì vẫn có thể nghi ngờ sự đúng đắn của nó trong trường hợp tổng quát, đó là cơ sở của ý định chứng minh nó bằng quy nạp toán học. Nếu ý định đó thành công thì vấn đề đúng hay sai của định lý, được xác nhận, nếu ngược lại vấn đề đúng hay sai của định lý vẫn chưa được giải quyết, định lý có thể được chứng minh hoặc bị bác bỏ bởi một trong những phương pháp trong tương lai.

Khi vận dụng nguyên lý quy nạp toán học chúng ta nên thường xuyên theo dõi một cách thận trọng các giả thiết a) và b)có thực sự được thực hiện hay không. Nếu không có thể dẫn đến vô lý.

Chúng tôi đề nghị bạn đọc phát hiện lỗi sai trong nghịch lý sau: Chúng ta sẽ chứng minh *hai số nguyên dương bất kỳ đều bằng nhau*:

Chúng ta bắt đầu từ định nghĩa: nếu a và b là 2 số nguyên dương không bằng nhau thì chúng ta biểu thị max(a,b) là số lớn hơn trong 2 số đó; nếu a=b thì max(a,b) = a = b. Chẳng hạn, max(3,5) = max(5,3) , max(4,4) = 4. Chúng ta ký hiệu A_n là khẳng định sau: *“Nếu a và b là 2 số nguyên dương sao cho max(a,b) = n thì a = b”.*

a) Giả thiết A_r đúng. Giả sử a và b là 2 số nguyên dương sao cho max(a,b) = r+1.

Xét các số:

$$\alpha = a - 1$$

$$\beta = b - 1$$

suy ra max(α, β) = r. Trong trường hợp này, $\alpha = \beta$ vì A_r đúng. Nhưng từ đó suy ra a = b, tức A_{r+1} đúng.

b) A_1 dĩ nhiên đúng vì nếu max(a,b) = 1 thì mỗi số a và b (theo giả thiết các số nguyên dương) phải bằng 1.

đúng với mọi n theo nguyên lý quy nạp toán học.

Bây giờ, giả sử a và b là 2 số nguyên dương bất kỳ, chúng ta đặt max(a,b) = r. Đã chứng minh được An đúng với mọi n, thì riêng Ar cũng đúng. Do đó a = b.

BỔ SUNG CHƯƠNG I: Lý thuyết số

Mở đầu

Những quan niệm mê tín dị đoan và thần bí đầu tiên về các số nguyên dần dần bị phai mờ đi, nhưng đối với các nhà toán học thì sự quan tâm đến các con số không hề giảm bớt. Như chúng ta đã biết, Euclid (khoảng năm 300 trước công nguyên), người mà vinh quang đã được xác nhận qua một phần tập "The elements" của ông dành cho cơ sở hình học (trong nhà trường), đã có những phát minh quan trọng trong phạm vi lý thuyết số, trong khi hình học của ông, về cơ bản chỉ là sự tập hợp của những kết quả thu được trước đó. Alexandre Diophante (275 trước công nguyên), một trong những nhà đại số đầu tiên cũng để lại các công trình về lý thuyết số. Pierre de Fermat(1601–1665) sống ở Toulouse, làm luật sư đồng thời là nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó, đã đặt nền móng cho những phát minh đầu tiên về lý thuyết số hiện đại. Euler (1707–1783), nhà toán học có nhiều phát minh tuyệt vời nhất, thường đi sâu vào lý thuyết số trong các công trình của mình. Cũng nên kể thêm những tên tuổi nổi tiếng khác trong toán học: Lagrange, Dirichlet, Riemann, Gauss… là những nhà toán học nổi tiếng nhất thời cận đại đã chú ý đến nhiều ngành toán học khác nhau, đã xác định được quan hệ của mình với lý thuyết số qua câu nói: "Toán học là nữ hoàng của khoa học, lý thuyết số là nữ hoàng của toán học".

§1. SỐ NGUYÊN TỐ

1. Những sự kiện cơ bản

Nhiều khẳng định trong phạm vi lý thuyết số cũng như trong toán học nói chung đều không thuộc về các sự vật riêng biệt mà thuộc về một lớp các sự vật có một tính chất nào đó, ví dụ như lớp các số chẵn

$$2 , 4 , 6 , 8 \ldots$$

hay lớp các số chia hết cho 3:

$$3 , 6 , 9 , 12 \ldots$$

hay lớp các bình phương của số nguyên

$$1 , 4 , 9 , 16 \ldots$$

Lớp các số nguyên tố có vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết số. Rất nhiều số có thể phân tích thành các thừa số nhỏ hơn: 10 = 2.5, 111 = 3.37, 144 = 2.2.2.2.3.3,… Những số không thể phân tích được như vậy gọi là số nguyên tố. Chính xác hơn, các số nguyên tố là số nguyên p lớn hơn 1 và không có thừa số dương nào khác là 1 và chính nó (số a là thừa số hoặc ước số của b nếu có một số nguyên c sao cho b = ac). Các số 2,3,5,7,11,… được gọi là các số nguyên tố, các số không nguyên tố khác 0 và 1 gọi là hợp số. Ý nghĩa của lớp các số nguyên tố là mỗi số đều có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố: nếu mỗi số cho trước không nguyên tố thì chúng ta có thể liên tiếp phân tích nó thành thừa số cho đến khi mọi thừa số đều nguyên tố, chẳng hạn 360 = 3.120 = 3.20.4 = 3.3.10.2.2 = 23.32.5. Số không nguyên tố khác 0 và 1 được gọi là hợp số.

Một trong các câu hỏi đầu tiên nảy ra khi nghiên cứu lớp các số nguyên tố: chỉ có một số hữu hạn hay có vô hạn các số nguyên tố khác nhau tương tự như lớp các số nguyên mà nó là một bộ phận. Câu trả lời như sau: *có vô hạn số nguyên tố.*

Chứng minh sự tồn tại tập hợp vô hạn số nguyên tố do Euclid nêu ra là điển hình của một lập luận toán học. Cơ sở của nó là "phương pháp gián tiếp" (chứng minh phản chứng, dẫn đến sự vô lý). Chúng ta giả thiết mệnh đề đang xét là sai. Điều đó có nghĩa là chỉ tồn tại một số hữu hạn các số nguyên tố, mặc dù có thể có rất nhiều, một tỉ chẳng hạn. Chúng ta giả sử số lượng đo là n. Gọi tập tất cả các số nguyên tố là p_1, p_2, …, p_n. Mọi số khác là hợp số và chia hết cho ít nhất một trong các số nguyên tố p_1, p_2, …, p_n. Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng một số A khác với tất cả các số này và không chia hết cho bất kì số nào trong số chúng. Đó là:

$$A = p_1.p_2 \ldots p_n + 1$$

Số này lớn hơn tất cả các số p_1, p_2, …, p_n nên nó là hợp số, và khi chia cho các số này đều có số dư là 1 nên không chia hết cho bất kì số nguyên tố nào . Điều đó dẫn đến mâu thuẫn, như vậy giả thiết là sai. Suy ra cái đối lập với nó là đúng. Định lý được chứng minh.

Dù rằng chứng minh có tính chất "gián tiếp", nhưng ít nhất cũng dẫn đến, về mặt lý thuyết một phương pháp xây dựng dựng vô hạn các số nguyên tố. Giả sử bắt đầu từ số nguyên tố nào đó, như p_1 = 2, chúng ta sẽ tìm được n số nguyên tố p_1, p_2, …, p_n nữa. Sau đó chúng ta lại tìm được số A = $p_1.p_2 \ldots p_{n+1}$ là nguyên tố khác với những số tìm được. Vì một thừa số như vậy bao giờ cũng có thể tìm được (bằng thử trực tiếp), cho nên rút cục chúng ta luôn tìm được ít nhất một số nguyên tố mới p_{n+1}; cứ tiếp tục quá trình đó, chúng ta thấy dãy số nguyên tố, mà chúng ta có thể xây dựng được thực sự, không có số tận cùng.

<u>Bài tập</u>: Xây dựng một tập số nguyên tố dựa trên cấu trúc trên. Bắt đầu với p_1=2 và p_2=3.

Nếu một số nào đó được biểu thị dưới dạng tích các thừa số nguyên tố thì những thừa số đó tất nhiên có thể sắp xếp theo một thứ tự thích hợp nào đó. Khi phân tích các số thành thừa số nguyên tố, chúng ta nhanh chóng đi tới kết luận rằng sự phân tích một số N bất kỳ thành thừa số nguyên tố là duy nhất nếu không kể đến thứ tự: mỗi số tự nhiên N lớn hơn 1 chỉ có thể phân tích thành thừa số nguyên tố một cách duy nhất. Khẳng định này có vẻ hiển nhiên đến nỗi người không có chuyên môn về toán học đã có ý định bác bỏ sự cần thiết phải chứng minh nó. Mệnh đề đang xét không phải tầm thường, mặc dù chứng minh của nó hoàn toàn sơ cấp nhưng sẽ đòi hỏi những lập luận khá tế nhị. Chứng minh cổ điển của “định lý cơ bản về số học” do Euclid nêu ra dựa trên thuật toán (algorithm) tìm ước só chung lớn nhất của 2 số. Ở đây chúng ta sẽ dẫn ra chứng minh mới ngắn hơn chứng minh của Euclid một chút và có tính chất suy diễn hơn. Nó cũng là một điển hình của lập luận “gián tiếp”. Chúng ta sẽ giả thiết rằng có một số nào đó có thể phân tích thành thừa số nguyên tố bằng 2 phương pháp khác hẳn nhau, giả thiết này sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Sự nảy sinh mâu thuẫn chứng tỏ rằng giả thiết về sự tồn tại một số có 2 phân tích khác nhau là không có căn cứ; từ đó chúng ta kết luận việc phân tích các số thành thừa số nguyên tố có tính duy nhất.

Nếu có những số có 2 phân tích thừa số nguyên tố khác hẳn nhau thì tất có số nguyên nhỏ nhất:

(1) $$m = p_1p_2 \ldots p_n = q_1q_2 \ldots q_n$$

trong đó p và q biểu thị các số nguyên tố. Với thể giả thiết rằng:

$$p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n,\ q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_n$$

Lưu ý rằng p_1 khác q_1 vì nếu không thì khi chia đẳng thức (1) cho thừa số nguyên tố chung, chúng ta sẽ được một số nhỏ hơn m có 2 phân tích thừa số khác hẳn nhau, điều này mâu thuẫn với giả thiết m là số nhỏ nhất có tính chất này. Do đó, hoặc $p_1 < q_1$ hay $p_1 > q_1$. Giả sử $p_1 < q_1$. Chúng ta xét số nguyên:

(2) $$m' = m - (p_1q_1q_2 \ldots q_s)$$

thay m bởi (1):

(3) $$m' = p_1p_2 \ldots p_n - p_1q_1q_2 \ldots q_s = p_1(p_2 \ldots p_n - q_1q_2 \ldots q_s)$$

(4) $$m' = q_1q_2 \ldots q_n - p_1q_1q_2 \ldots q_s = (q_1 - p_1)q_1q_2 \ldots q_s$$

Từ (4) suy ra *m'* là số dương vì p1< q1, từ (2) suy ra m' < m. Do đó m' phải phân tích được thành thừa số một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số). Từ (3) chúng ta thấy thêm rằng p1 là thừa số của *m'* ; nghĩa làm trong trường hợp này thì từ (4) có thể kết luận p1 là thừa số của q1 – p1, hoặc của q2q3...qn. (Điều này được suy ra từ sự duy nhất của phân tích *m′* thành thừa số nguyên tố). Nhưng điều sau là không thể được vì mọi qi đều lớn hơn p1. Vì thế pr phải là thừa số của q1 − p1, tức là q1 − p1 chia hết cho p1. Nói cách khác, có một số h

$$q_1 - p_1 = p_1.h \text{ hoặc } q_1 = p_1(h+1)$$

điều này có nghĩa q1 chia hết cho p1, trái giả thiết q1 là số nguyên tố. Mâu thuẫn mà chúng ta đi tới chứng tỏ sự không đúng của giả thiết nêu ra đầu tiên. Chứng minh định lý cơ bản về số học kết thúc ở đây.

Sau đây là một hệ quả quan trọng của định lý cơ bản. *Nếu số nguyên tố p là thừa số của tích ab thì nó phải là thừa số của a hoặc b*. Thực vậy, nếu p không phải là thừa số của cả a và b thì phân tích của ab không chứa thừa số p. Mặt khác, do giả thiết p là thừa số của ab thì có một số nguyên t sao cho

$$ab = pt$$

Bởi thế, khi nhân p với phân tích thừa số nguyên tố của t, chúng ta được phân tích thừa số nguyên tố của ab có chứa p. Cho nên chúng ta đi đến thừa nhận có 2 phân tích thừa số nguyên tố khác nhau của số ab, điều này mâu thuẫn với định lý cơ bản.

Ví dụ: nếu chúng ta xác nhận được 2652 chia hết cho 13 và 2652 = 6.442 thì có thể kết luận 442 chia hết cho 13. Mặt khác, 240 chia hết cho 6 và 240 = 15.16 nhưng cả 15 và 16 đều không chia hết cho 6. Điều đó chứng tỏ giả thiết p là số nguyên tố trong định lý cơ bản. 6 không phải là số nguyên tố nhưng 13 là là một số nguyên tố.

2. Sự phân bố các số nguyên tố

Có thể lập bảng liệt kê tất cả các số nguyên tố không vượt quá một số N cho trước bằng cách sau đây. Viết các số tự nhiên từ 2 đến N theo thứ tự, sau đó xoá tất cả các số là bội của 2(trừ 2), rồi đến các số là bội của 3 … cho đến khi xoá hết tất cả các hợp số. Quá trình đó nổi tiếng với tên gọi “sàng Eratosthenes” cho phép giữ lại tất cả các số nguyên tố. Đến nay chúng ta đã lập được những bảng số nguyên tố cho đến 10000000 do cải tiến phương pháp này. Những bảng này cho chúng ta tài liệu thực nghiệm phong phú nhất để nghiên cứu sự phân bố và các tính chất của số nguyên tố. Dựa trên các bảng đó, chúng ta có thể nêu một loạt các giả thiết có lý đến nỗi dường như lý thuyết số là một khoa học thực nghiệm. Việc chứng minh những giả thuyết đó thường rất khó.

a. Các công thức cho số nguyên tố

Người chúng ta đã có nhiều cố gắng tìm những công thức cho ra các số nguyên tố, dù rằng không yêu cầu phải cho tất cả các số nguyên tố. Fermat đã cho rằng (không khẳng định) tất cả các số có dạng:

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

là số nguyên tố. Thật vậy, với n =1,2,3,4 chúng ta được

$F(1) = 2^{2^1} + 1 = 5$

$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1= 65537$

là số nguyên tố. Nhưng đến năm 1732, Euler đã phân tích được $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 641 . 6700417$, nên F(5) không là số nguyên tố. Sau này, chúng ta còn phát hiện được nhiều hợp số khác trong "các số Fermat" đó. Do những khó khăn không vượt qua được có liên quan với các phép thử trực tiếp mà nhiều phương pháp lý thuyết số sâu sắc đã được hình thành.

Sau đây là một biểu thức đơn giản và đáng chú ý khác cũng cho được nhiều số nguyên tố:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

Với n =1,2,…,40 thì f(n) là số nguyên tố; nhưng với n = 41 thì $f(41) = 41^2$ không là số nguyên tố.

Biểu thức

$$n^2 - 79n + 1601$$

cho các số nguyên tố cho đến n=79, khi n = 80 chúng ta được hợp số. Tóm lại, chúng ta có thể nói việc tìm kiếm các công thức sơ cấp cho ra các nguyên tố là uổng công vô ích.

b. Số nguyên tố trong các cấp số cộng

Nếu chứng minh của vấn đề trong dãy số tự nhiên 1,2,3,4,… có vô số số nguyên tố là hoàn toàn có tính chất sơ cấp thì việc làm như thế đối với những dãy số như 1,4,7,10,13,… hoặc 3, 7, 11, 15, 19… hoặc nói chung đối với một cấp số cộng bất kỳ a, a + d, a + 2d, …, a + nd, … (với a và d không có thừa số chung) gặp khó khăn lớn. Mọi sự quan sát chỉ khẳng định một sự kiện là trong một cấp số như thế có vô số số nguyên tố cũng như trong một cấp số cộng đơn giản 1,2,3, … đã có nhiều cố gắng lớn lao để chứng minh định lý tổng quát này. Lejeune Dirichlet (1805–1859) là một nhà toán học của thế kỷ 19 đã đi đến kết quả. Trong khi chứng minh ông đã áp dụng những phương tiện hoàn hảo của giải tích toán học thời đó. Những công trình nổi tiếng của ông trong phạm vi này vẫn là tuyệt đỉnh đối với cả thời nay. Một trăm năm đã qua nhưng vẫn không thể đơn giản hoá chứng minh của Dirichlet để những người chưa nắm vững đầy đủ công cụ giải tích toán học và lý thuyết số có thể hiểu được.

Ở đây, chúng chúng ta không có ý định chứng minh định lý tổng quát của Dirichlet mà chỉ giới hạn trong một bài toán dễ hơn: mở rộng chứng minh của Euclid về sự tồn tại của vô số số nguyên tố sao cho nó bao gồm được một cấp số đặc biệt như 4n+3 hay 6n+5 chẳng hạn. Chúng ta xét cấp số thứ nhất. Trước hết, chúng ta lưu ý rằng mọi số nguyên lớn hơn 2 đều phải lẻ (nếu không thì nó chia hết cho 2 do đó có dạng 4n+1 hay 4n+3 (với n nguyên). Tích của các số dạng 4n+1 cũng là một số có dạng như thế bởi vì:

$$(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 = 4(4ab + a + b) + 1$$

Bây giờ chúng ta thử rằng chỉ có một số hữu hạn số nguyên tố dạng 4n+3, chúng ta biểu thị chúng là p1, p2, …, p_n và xét số:

$$N = 4(p_1p_2 \ldots p_n) - 1 = 4(p_1p_2 \ldots p_n - 1) + 3$$

Hoặc N nguyên tố, hoặc phân tích được thành tích các số nguyên tố, nhưng trong phân tích đó không thể có thừa số nào là một trong các số p_1, p_2,… p_n , bởi vì những số như thế chia cho N dư −1.

Bây giờ chúng ta lưu ý rằng mọi thừa số có trong N không thể có dạng 4n+1 bởi bản thân N không có dạng đó mà tích các số có dạng 4n+1 là những số cũng có dạng như thế. Như thế thì ít nhất một thừa số có trong N phải có dạng 4n+3. Điều này có thể xảy ra vì không có số p nào là thừa số của N và tất cả các số nguyên tố có dạng 4n+3 đã được sử dụng hết, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số các số nguyên tố như thế là vô hạn.

c. Định lý về sự phân bố các số nguyên tố

Trong các công trình nghiên cứu có liên quan đến luật phân bố các số nguyên tố thì bước quyết định chỉ đạt được khi nhà toán học từ bỏ ý định vô ích đi tìm công thức toán học sơ cấp cho tất cả các số nguyên tố hoặc tìm con số chính xác các số nguyên tố có trong n số tự nhiên đầu tiên mà tập trung chú ý vào sự phân bố trung bình các số nguyên tố trong các số tự nhiên.

Với mỗi số nguyên *n*, chúng ta biểu thị số các số nguyên tố từ 1 đến *n* là A_n. Nếu chúng ta chúng tách trong các số đầu tiên của dãy số tự nhiên:

$$1\ \underline{2}\ \underline{3}\ 4\ \underline{5}\ 6\ \underline{7}\ 8\ 9\ 10\ \underline{11}\ 12\ \underline{13}\ 14\ 15\ 16\ \underline{17}\ 18\ \underline{19}$$

những số nguyên tố thì chúng ta đếm được ngay một loạt các giá trị A_n:

$A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = A_4 = 2$, $A_5 = A_5 = 3$, $A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = 4$, $A_{11} = A_{12} = 5$, $A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = 6$, $A_{17} = A_{18} = 7$, $A_{19} = 8$, …

Bây giờ chúng ta lấy một dãy giá trị *n* bất kỳ tăng vô hạn, ví dụ:

$$n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots,$$

Khí đó dãy giá trị A_n tương ứng

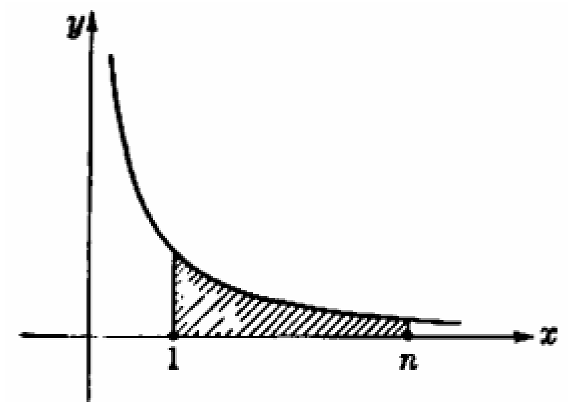
$$A_{10}, A_{10^2}, A_{10^3}, A_{10^4}, \ldots,$$

cũng sẽ tăng vô hạn (tuy có chậm hơn). Thực vậy, tập hợp số nguyên tố là vô hạn, cho nên giá trị A_n sớm hay muộn sẽ trở nên lớn hơn một số bất kỳ cho trước. "Mật độ" phân bố các số nguyên tố trong *n* số nguyên đầu tiên của dãy số tự nhiên được cho bởi tỷ lệ $\frac{An}{n}$. Nhờ bảng số nguyên tố chúng ta tính được một cách dễ dàng các giá trị với n đủ lớn:

n	A_n/n
10^3	0.168
10^6	0.078498
10^9	0.050847478
...	....

Dòng cuối cùng của bảng trên cho chúng ta xác suất để lấy ra từ 10^9 số tự nhiên đầu tiên là số nguyên tố; từ 10^9 lựa chọn, có A_{10^9} số nguyên tố.

Sự phân bố các số nguyên tố riêng biệt có tính chất rất không đều. Nhưng sự không đều đó sẽ biến mất nếu chúng ta chú ý đến sự phân bố "trung bình" được cho bởi tỷ lệ $\frac{An}{n}$. Qui luật đơn giản mà sự biến thiên của tỉ số này phải tuân theo cần được liệt vào trong số những phát minh nổi tiếng nhất trong toàn bộ cơ sở toán học. Muốn phát biểu định lý về sự phân bố các số nguyên tố trước hết cần giải thích "logarithm tự nhiên" của n là gì. Muốn thế chúng ta lấy 2 trục vuông góc với nhau trên mặt phẳng và xét quỹ tích những điểm trên mặt phẳng có tích các khoảng cách x và y đến 2 trục bằng đơn vị. Với ngôn ngữ toạ độ thì quỹ tích đó là một hyperbol dạng xy = 1. Chúng ta định nghĩa log(x) là diện tích của hình giới hạn bởi hyperbol và 2 đường thẳng vuông góc x = 1 và x = n(logarith và tính chất của nó sẽ được xét kỹ hơn trong chương VIII).



Hình 5: Diện tích phần gạch chéo dưới đường hyperbola định nghĩa log n.

Hoàn toàn ngẫu nhiên mà thông qua việc nghiên cứu bảng số nguyên tố, Gauss đã thấy tỉ số $\frac{An}{n}$ gần bằng $\frac{1}{\log n}$ và độ chính xác sẽ tăng khi *n* tăng. Căn cứ vào giá trị của tỉ số $\frac{An}{n}$ / $\frac{1}{\log n}$, khi n = 1000, 1000000, 1000000000 trong bảng sau đây để thấy sự xấp xỉ đó là có thể chấp nhận được:

n	A_n/n	$1/\log n$	$\frac{A_n/n}{1/\log n}$
10^3	0.168	0.145	1.159
10^6	0.078498	0.072382	1.084
10^9	0.050847478	0.048254942	1.053
...	....	....	.....

Dựa trên tính hiển nhiên thực nghiệm kiểu đó, Gauss đã phát biểu rằng tỉ số $\frac{An}{n}$ xấp xỉ bằng $\frac{1}{\log n}$. Ý nghĩa của khẳng định này như sau: nếu chúng ta lấy một dãy các giá trị n càng ngày càng lớn, chẳng hạn

$$10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \ldots$$

(như đã làm ở trên) thì tỉ số $\frac{An}{n}$ / $\frac{1}{\log n}$

tính theo giá trị của *n,* sẽ trở nên càng gần bằng 1, tức là khoảng cách giữa tỉ số này với 1 sẽ nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn. Một hệ thức kiểu đó được ký hiệu bằng **~** :

$\frac{An}{n} \sim \frac{1}{\log n}$ *nghĩa là* $\frac{An}{n}$ / $\frac{1}{\log n}$ *dần tiến đến 1 khi n tăng.*

Việc không thay dấu **~** bằng dấu **=** thông thường là rõ ràng vì A_n luôn luôn là số nguyên, trong khi đó *log n* thì không nguyên.

Chúng ta không thể ngạc nhiên trước vấn đề sự phân bố các số nguyên tố được mô tả rất tốt bằng hàm số logarit, bởi vì ở đây có sự kết hợp chặt chẽ giữa 2 khái niệm toán học không có liên quan đến nhau.

Dù rằng không có khó khăn đáng kể để nắm được nội dung mệnh đề Gauss nêu lên, song ở thời Gauss thì việc chứng minh chặt chẽ về mặt toán học mệnh đề đó lại vượt ra ngoài khả năng của một nhà khoa học toán học. Muốn chứng minh định lý về sự phân bố các số nguyên tố – một định lý nói về các khái niệm toán học sơ cấp nhất – đã phải dùng đến những phương pháp có hiệu lực nhất của toán học hiện đại. Phải gần 100 năm sau, khi mà giải tích đã phát triển vì Hadamard(1896) ở Paris và Vallé–Poussin(1896) mới chứng minh được định lý về sự phân bố các số nguyên tố. Sau đó Mangoldt và E.Landau đã đơn giản hoá đi và có những bổ sung quan trọng. Trước Hadamard đã lâu, trong tác phẩm nổi tiếng của mình về đường lối chiến lược của những cuộc tấn công sắp tới, Riemann (1828 – 1866) đã có một bước tiến quan trọng trong phạm vi nói trên. Gần đây nhà toán học Mỹ Norbert Wiener đã thay đổi chứng minh để không phải áp dụng số phức trong những khâu chủ yếu của các lập luận dẫn ra. Tuy nhiên, chứng minh vẫn còn rất phức tạp đối với những người mới bắt đầu làm toán. Chúng chúng ta sẽ quay lại chủ đề này một lần nữa.

d) Còn hai bài toán về số nguyên tố chưa được giải

Trong khi vấn đề phân bố các số nguyên tố ("trung bình") đã giải đáp xong thì sự đúng đắn của một loạt các giả thuyết khác hoàn toàn hiển nhiên đối với thực nghiệm vẫn chưa được chứng minh.

Trước hết; giả thuyết nổi tiếng của Goldbach thuộc loại đó. Goldbach (1960 – 1764) không để lại một công trình nào trong lịch sử toán học: ông chỉ nổi tiếng về bài toán mà ông nêu trong bức thư gửi cho Euler năm 1942. Ông lưu ý đến một sự kiện là bao giờ cũng có thể biểu thị một số chẵn bất kỳ (ngoài số 2 là số nguyên tố) dưới dạng tổng của hai số nguyên tố. Thí dụ: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, 10 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7, 16 = 13+ 3, 18 = 11 + 7, 20 = 13 + 7, … 48 = 29 + 39,… 100 = 97 + 3 v.v…

Goldbach hỏi rằng liệu có thể chứng minh điều đó đối với mọi số chẵn hoặc có thể chỉ ra một thí dụ bác bỏ giả thuyết đó hay không. Euler đã không giải đáp được, sau này cũng chưa có ai giải đáp được. Tính hiển nhiên về mặt thực nghiệm của giả thuyết Goldbach là hoàn toàn tin cậy được qua phép thử. Nguồn gốc của những khó khăn ở đây là ở chỗ khái niệm số nguyên tố được định nghĩa qua thuật ngữ nhân, trong khi đó thì bài toán đề cập đến phép cộng. Cách đây không lâu thì việc chứng minh giả thuyết của Goldbach còn là một bài toán rất hiểm hóc. Ngày nay thì tình hình đã không còn như thế nữa. Trong năm 1931, nhà toán học Nga trẻ tuổi nổi tiếng thời bấy giờ Schnirelmann (1905 – 1938) đã đạt được một kết quả đáng kể bất ngờ và kỳ lạ đối với mọi chuyên gia về vấn đề này. Ông đã chứng minh được rằng mọi số nguyên dương đều có thể viết dưới dạng tổng của không quá 300 000 số nguyên tố. Dẫu rằng hai kết quả này có phần nào tính chất khôi hài (so với mục đích chứng minh giả thuyết Gôlbakh đề ra ban đầu) nhưng nó là bước đầu trên con đường phải đi. Chứng minh của Schnirelmann là trực tiếp và mang tính chất kiến thiết, dù rằng nó không bảo đảm một phương pháp thực tiễn để biểu thị một số nguyên tùy ý dưới dạng tổng các số nguyên tố. Sau này, nhà toán học Nga Vinogradoff áp dụng các dụng các phương pháp của Hardy, Littlewood và của người cộng tác vĩ đại của họ người Ấn Độ Ramanuøan đã giảm các số hạng từ 300 000 xuống 4. Điều này đã rất gần với lời giải bài toán của Goldbach. Nhưng giữa các kết quả của Schnirelmann và của Vinogradoff có sự khác nhau rất rõ rệt, còn rõ hơn là sự khác biệt giữa các số 300 000 và 4. Định lý của Vinogradoff đã được chứng minh chỉ đối với mọi số “đã lớn”; nói chính xác hơn thì Vinogradoff đã xác nhận sự tồn tại một số N để cho mọi số nguyên n > N có thể biểu thị dưới dạng tổng của bốn số nguyên tố. Phương pháp của Vin Vinogradoff ôgrađôv không cho phán đoán gì về đại. Trái ngược với phương pháp của Schnirelmann, nó thực sự “gián tiếp” và không kiến thiết. Vinogradoff đã chứng minh như sau: nếu giả thử rằng có một tập hợp vô hạn số không biểu thị được dưới dạng tổng của bốn (hoặc ít hơn) số nguyên tố thì có thể đi đến mâu thuẫn. Ở đây, chúng ta có một thí dụ tuyệt đẹp chứng tỏ sự khác biệt sâu sắc giữa hai kiểu chứng minh trực tiếp và gián tiếp.

Bài toán thứ hai còn thú vị hơn bài toán của Goldbach, cho đến nay chưa ai đi gần tới lời giải của nó cả. Người chúng ta để ý thấy không ít những cặp số nguyên tố dạng p và p+2. Chẳng hạn 3 và 5, 11 và 13, 29 và 31 v.v… Giả thuyết về sự tồn tại một tập hợp vô hạn những "kẻ láng giềng" như vậy xem ra rất có lý, nhưng cho đến nay chưa có ai đi gần đến chứng minh của nó cả.

§2. SỰ ĐỒNG DƯ

1. Khái niệm chung.

Mỗi lần phải nói đến tính chia hết của các số nguyên cho một số nhất định nào đó thì mọi lập luận sẽ trở nên đơn giản và sáng rõ hơn nếu chúng ta dùng quan hệ đồng dư do Gauss đưa ra cùng với những ký hiệu tương ứng. Để đưa khái niệm đồng dư vào chúng ta hãy xét các số dư có được khi chia những số khác nhau cho 5 chẳng hạn. Chúng ta có:

$$
\begin{array}{lll}
0 = 0 \cdot 5 + 0 & 7 = 1 \cdot 5 + 2 & -1 = -1 \cdot 5 + 4 \\
1 = 0 \cdot 5 + 1 & 8 = 1 \cdot 5 + 3 & -2 = -1 \cdot 5 + 3 \\
2 = 0 \cdot 5 + 2 & 9 = 1 \cdot 5 + 4 & -3 = -1 \cdot 5 + 2 \\
3 = 0 \cdot 5 + 3 & 10 = 2 \cdot 5 + 0 & -4 = -1 \cdot 5 + 1 \\
4 = 0 \cdot 5 + 4 & 11 = 2 \cdot 5 + 1 & -5 = -1 \cdot 5 + 0 \\
5 = 1 \cdot 5 + 0 & 12 = 2 \cdot 5 + 2 & -6 = -2 \cdot 5 + 4 \\
6 = 1 \cdot 5 + 1 & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Chúng ta để ý rằng số dư trong phép chia cho 5 chỉ có thể là một trong các số 0, 1, 2, 3, 4. Chúng ta nói rằng hai số a và b đồng dư theo modulo 5 nếu chúng có cùng một số dư khi chia chúng cho 5. Chẳng hạn các số 2, 7, 12, 17, 22, …, −3, −8, −13, −18,… là đồng dư theo modulo 5 bởi vì khi chia cho 5 chúng đều cho dư 2. Tổng quát, chúng ta nói rằng hai số a và b đồng dư theo modulo d (d là một số nguyên nào đó) nếu khi chia cho d chúng cho cùng một số dư, hay nói cách khác, nếu có một số nguyên *n* thì a – b = nd. Thí dụ, 27 và 15 đồng dư theo modulo 4 bởi vì

$$27 = 6 . 4 + 3, \quad 15 = 3 . 4 + 3.$$

Đối với quan hệ đồng dư chúng ta đưa vào ký hiệu cho nó: nếu a và b đồng dư theo modulo d thì ra viết

$$a \equiv b \ (mod\ d).$$

[Nếu a không đồng dư với b theo modulo d thì chúng ta viết: $a \not\equiv b$ (mod d)]. Nếu đã rõ là modulo nào thì chúng ta có thể bỏ "mod d" đi.

Sự đồng dư thường được gặp trong đời sống sinh hoạt hằng ngày. Thí dụ, kim giờ chỉ thời gian theo modulo 12, đồng hồ ô tô ghi quãng đường đi được theo modulo 100 000 (hải lý hoặc km).

Trước khi xét kỹ hơn phép đồng dư và các tính chất, đề nghị bạn đọc kiểm tra lại xem các mệnh đề sau đây có tương đương không:

1. a đồng dư với b theo modulo d.

2. a = b + nd, n nguyên.

3. a – b chia hết cho d.

Ký hiệu của phép đồng dư do Gauss đưa ra nhằm nhấn mạnh một sự kiện là đồng dư thức có nhiều tính chất của các đẳng thức thông thường. Chúng ta nhắc lại những tính chất đó:

1) Luôn luôn có a = a

2) Nếu a = b thì b = a

3) Nếu a = b và b = c thì a = c.

Ngoài ra nếu a = a′ và b = b′, thì

4) a + b = a′ + b′

5) a – b = a′ – b′

6) ab = a′b′

Những tính chất này được bảo toàn nếu quan hệ bằng nhau a = b được thay thế bằng quan hệ đồng dư a ≡ b (mod d). Tức là:

1′) Luôn luôn có a ≡ a (mod d).

2′) Nếu a ≡ b (mod d) thì b ≡ a (mod d).

3′) Nếu a ≡ b (mod d) và b ≡ c (mod d) thì a ≡ c (mod d).

(Bạn đọc hãy thử lại xem! – điều này không khó)

Cũng vậy, nếu a ≡ a′ (mod d) và b ≡ b′ (mod d) thì:

4′) a + b ≡ a′ + b′ (mod d)

5′) a – b ≡ a′ – b′ (mod d)

6′) ab ≡ a′b′ (mod d).

Cho nên chúng ta có thể cộng, trừ và nhân các đồng dư thức theo cùng một modulo. Thực vậy, từ:

$$a = a' + rd, \qquad b = b' + sd$$

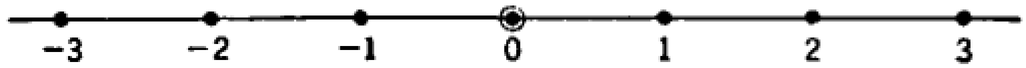
suy ra:

$$a + b = a' + b' + (r + s)\, d$$

$$a - b = a' - b' + (r - s)\, d$$

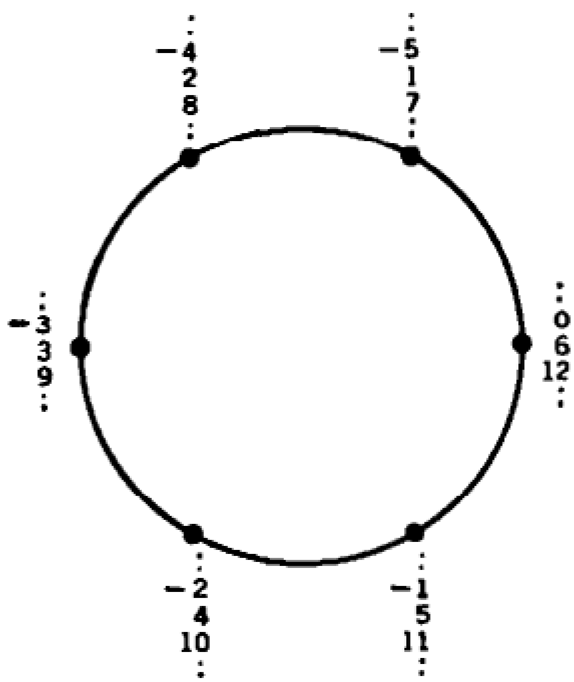
$$ab = a'b' + (a's + b'r + rsd)\, d$$

những đẳng thức này sẽ dẫn đến các kết luận cần thiết. Phép đồng dư cũng thừa nhận một biểu diễn hình học tuyệt diệu. Nếu chúng ta muốn cho các số nguyên một biểu diễn hình học thì chúng ta chọn một đoạn thẳng có độ dài đơn vị rồi đặt những đoạn là bội của đơn vị về cả hai phía. Như thế, mỗi số nguyên có một điểm tương ứng trên đường thẳng – trục số (H.6). Nhưng, nếu



H.6. Biểu diễn hình học các số nguyên

Nhưng, nếu chúng ta xét các số nguyên theo một modulo d cho trước thì hai số đồng dư được xem như không có gì phân biệt vì chúng cho cùng một số dư trong phép chia cho d. Muốn biểu diễn bằng hình học những điều trên chúng ta chia một đường tròn thành d phần bằng nhau. Mọi số nguyên khi chia cho d cho số dư là một trong các số 0, 1, 2 …, d −1 : những số này được phân bố trên đường tròn với những khoảng bằng nhau. Mỗi số đều đồng dư với một trong các số nói trên theo modulo d, do đó sẽ được biểu diễn bởi điểm tương ứng; hai số là đồng dư nếu chúng được diễn bởi cùng một điểm. Trường hợp d = 6 được biểu thị trên hình 7. Mặt đồng hồ cũng có thể coi là một mô hình như thế.



Để làm thí dụ cho việc áp dụng tính chất nhân của phép đồng dư (tính chất 6′), chúng ta sẽ xác định dư trong phép chia các lũy thừa liên tiếp của 10 cho cùng một số. Vì 10 = −1 + 11 cho nên

$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

Nhân nhiều lần đồng dư thức đó với nhau chúng ta được:

$$10^2 \equiv (-1)(-1) = 1 \pmod{11}$$

$$10^3 \equiv -1 \qquad\qquad (\text{mod } 11)$$

$$10^4 \equiv 1 \qquad\qquad (\text{mod } 11)$$

v…v

Một số nguyên viết trong hệ thập phân có dạng:

$$Z = a_0 + a_1 \,.\, 10 + a_2 \,.\, 10^2 + \ldots + a_n \,.\, 10^n$$

Thay các 10^n bằng các số dư của nó khi chia cho 11, chúng ta được:

$$t = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$$

Thực vậy, chúng ta có

$$Z - t = a_1.11 + a_2\,(10^2 - 1) + a_3\,(10^3 + 1) + a_4\,(10^4 - 1) + \ldots$$

Vì mọi biểu thức 11, $10^2 - 1$, $10^2 + 1$,… đồng dư với 0 theo modulo 11 nên Z – t cũng đồng dư với 0, vì thế khi chia cho 11 thì Z và t có cùng đồng dư. Nói riêng, một số chia hết cho 11, tức là số dư 0 khi chia cho 11, khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó với dấu xen kẽ chia hết cho 11. Thí dụ, số z = 3162819 chia hết cho 11 vì 3 – 1 + 6 – 2 + 8 – 1 + 9 = 22 chia hết cho 11. Cũng bằng cách như vậy thì việc tìm qui tắc chia hết cho 3 hoặc cho 9 còn đơn giản hơn bởi vì $10^n \equiv 1$ (mod 3 và 9), cho nên $10^n - 1$ (mod 3 và 9) với mọi *n*. Do đó, Z chia hết cho 3 và cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó

$$S = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n$$

chia hết cho 3 và cho 9.

Nếu lấy modulo là 7 thì chúng ta có:

$10 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv -1$, $10^4 \equiv -3$, $10^5 \equiv -2$, $106 \equiv 1$…

Những số dư tiếp theo được lặp lại. Vì thế Z chia hết cho 7 khi và chỉ khi biểu thức

$$R = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + \ldots$$

chia hết cho 7.

Bài tập: Tìm quy luật tương tự cho tính chia hết cho 13

Khi chúng ta cộng và nhân các đồng dư thức theo một modulo nhất định, chẳng hạn d = 5, muốn cho các số không quá lớn, có thể thay số đã cho bằng một trong các số

0, 1, 2, 3, 4

đồng dư với nó. Thí dụ, khi tính tổng và tích theo modulo 5 của những số khác nhau chỉ cần dùng bảng cộng và bảng nhân sau đây:

$a + b$

	$b \equiv 0$	1	2	3	4
$a \equiv 0$	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$a \cdot b$

	$b \equiv 0$	1	2	3	4
$a \equiv 0$	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Qua bảng thứ hai chúng ta thấy rằng tích ab đồng dư với 0 theo modulo 5 khi và chỉ khi a hoặc b ≡ 0 (mod 5). Điều này gợi chúng ta suy nghĩ về sự tồn tại định luật tổng quát sau:

7) *ab ≡ 0 (mod d) chỉ khi a ≡ 0 hoặc b ≡ 0 (mod d).*

là sự mở rộng tính chất của phép nhân thông thường rất quen biết ab = 0 chỉ khi a = 0 hoặc b = 0. Luật 7) chỉ đúng với điều kiện modulo d là số nguyên tố. Thực vậy, đồng dư thức

$$ab \equiv 0 \pmod{d}$$

có nghĩa là ab chia hết cho d, mà chúng ta đã biết rằng tích ab chia hết cho số nguyên tố d khi và chỉ khi một trong các thừa số a hoặc b chia hết cho d tức là nếu:

$$a \equiv 0 \pmod{d} \text{ hoặc } b \equiv 0 \pmod{d}$$

Mặt khác, định luật sẽ không còn đúng khi d là hợp số; lúc đó có thể viết d = r .s trong đó cả hai thừa số r và s nhỏ hơn d và

$$r \not\equiv 0 \pmod{d} \qquad s \not\equiv 0 \pmod{d}$$

nhưng

$$rs = d \equiv 0 \pmod{d}.$$

Thí dụ, 2 ≢ 0 (mod 6) và 3 ≢ 0 (mod 6), nhưng 2 . 3 = 6 ≡ 0 (mod 6) .

<u>Bài tập:</u> 1) Chứng minh luật sau, với một modulo nguyên tố chúng ta có

$$ab \equiv ab \text{ và } a \not\equiv 0, \text{ thì } b \equiv c.$$

2) Cái số nào giữa 0 và 6 là đồng dư với tích 11.18.2322.13.19 modulo 7.

3) Số nào giữa 0 và 12 là đồng dư với tích 3.7.11.17.19.23.29.113 modulo 13.

4) Số nào giữa 0 và 4 là đồng dư với tổng $1+2+2^2+\ldots+2^{13}$ modulo 5.

2. Định lý Fermat.

Trong thế kỷ 17, Fermat người sáng lập lý thuyết số hiện đại đã phát hiện một định lý cực kỳ quan trọng. Nếu p là số nguyên tố không chia hết số nguyên a thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod } p)$$

Nói cách khác, lũy thừa bậc (p − 1) của a chia cho p dư 1.

Một số tính toán mà chúng ta đã thực hiện ở trên đã xác nhận định lý này: chẳng hạn chúng ta thấy rằng $10^6 \equiv 1$ (mod 7); $10^2 \equiv 1$ (mod 3) và $10^{13} \equiv 1$ (mod 13). Cũng vậy dễ dàng thử lại rằng $2^{12} \equiv 1$ (mod 13) và $5^{10} \equiv 1$ (mod 11). Để kiểm tra chúng ta không cần tính lũy thừa bậc cao của các số đã cho, chỉ cần dùng tính chất nhân của các đồng dư thức:

$2^4 = 16 \equiv 3$ (mod 13)

$2^8 = 32 \equiv 9 \equiv -4$ (mod 13)

$2^{12} \equiv -4 \,.\, 3 = -12 \equiv 1$ (mod 13)

$5^2 \equiv 3$ (mod 11)

$5^4 \equiv -2$ (mod 11)

$5^8 \equiv 4$ (mod 11)

$5^{10} \equiv 3 \,.\, 4 = 12 \equiv 1$ (mod 11)

Để chứng minh định lý Fermat chúng ta hãy xét các số là bội của a:

$$m_1 = a,\ m_2 = 2a,\ m_3 = 3a, \ldots\ m_{p-1} = (p-1)a.$$

Không có bất kỳ hai số nào trong đó có thể đồng dư với nhau theo modulo p, nếu không p phải là ước của hiệu $m_r - m_s = (r - s)a$, trong đó r và s là cặp số nguyên nằm trong giới hạn $1 \leq r < s \leq (p - 1)$. Nhưng từ định luật 7), chúng ta thấy rằng điều đó không thể xảy ra: vì r − s nhỏ hơn p, nên r − s không chia hết cho p; mặt khác, theo giả thiết p không chia hết a. Hơn nữa, chúng ta thấy không một số *m* nào đồng dư với 0 cả. *(ý phần trên là không có hai số nào chia cho p mà được cùng số dư => các số dư phải khác nhau, chúng* *ta có ý phần sau)* . Từ đó suy ra các số m_1, m_2, … m_{p-1} tương ứng đồng dư với các số 1, 2, …, p − 1 (có thể sắp xếp theo cách khác). Điều đó dẫn đến:

$$m_1 m_2 \ldots m_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \quad (mod\ p)$$

hoặc để cho gọn: đặt $K \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$, chúng ta có

$$K(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \ (mod\ p).$$

Số K không chia hết cho p vì không có thừa số nào chia hết cho p; nghĩa là theo định luật 7) thì $(a^{p-1} - 1)$ phải chia hết cho p hay

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (mod\ p).$$

Đó là định lý Fermat

Chúng ta thử lại định lý này một lần nữa. Chúng ta lấy p = 23 và a = 5. Như vậy theo modulo 23 thì $5^2 \equiv 2$, $5^4 \equiv 4$, $5^8 \equiv 16 \equiv -7$, $5^{16} \equiv 49 \equiv 3$, $5^{20} \equiv 12$, $5^{22} \equiv 24 \equiv 1$. Nếu chúng ta lấy a = 4 thay cho 5 thì theo modulo 23, chúng ta sẽ có $4^2 \equiv -7$, $4^3 \equiv -28 \equiv -5$, $4^4 \equiv -20 \equiv 3$, $4^8 \equiv 9$, $4^{11} \equiv -45 \equiv 1$, $4^{22} \equiv 1$. Trong thí dụ a = 4, p = 23 (cũng như trong nhiều thí dụ khác), cần chú ý rằng không những chỉ lũy thừa bậc (p − 1) mà cả lũy thừa bậc thấp hơn nữa của a cũng đã đồng dư với đơn vị. Trong thí dụ của chúng ta thì lũy thừa nhỏ nhất đó là 11, là ước số của p − 1.

Bài tập: 1) Tương tự như trên, tính: $2^6 \equiv 1$ (mod 17); $3^2 \equiv -1$ (mod 17); $3^{14} \equiv -1$ (mod 29); $2^{14} \equiv -1$ (mod 29); $4^{14} \equiv 1$ (mod 29); $5^{14} \equiv 1$ (mod 29).

2) Kiểm tra định lý Fermat cho p = 5, 7, 11, 17 và 23 với các giá trị khác nhau của *a*.

3) Chứng minh định lý tổng quát sau: Số dương *e* nhỏ nhất, sao cho $a^e \equiv 1$ (mod p), phải là ước của p − 1. *(Gợi ý: chia p − 1 cho e, được*

$$p - 1 = ke + r,$$

ở đây $0 \le r < e$, và sử dụng thêm $a^{p-1} \equiv a^e \equiv 1$ (mod p).)

3. Thặng dư bình phương.

Trở lại các thí dụ minh họa định lý Fermat , chúng ta thấy không chỉ $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p) đúng, mà (vì giả thiết p là nguyên tố khác 2, tức là p lẻ và có dạng $p = 2p' + 1$) $a^{p'} \equiv a^{(p-1)/2} \equiv 1$ (mod p) cũng đúng . Tình hình đó làm nảy sinh một loạt giả thiết thú vị. Định lý có thể viết dưới dạng sau:

$$a^{p-1} - 1 = a^{2p'} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1) \equiv 0 \qquad (mod\ p)$$

Vì một tích số chỉ chia hết cho p khi một trong các thừa số chia hết cho p, nghĩa là một trong các số $a^{p'} - 1$ hoặc $a^{p'} + 1$ phải chia hết cho p, cho nên với mọi số nguyên tố p > 2 và với mọi a không chia hết cho p tất phải có:

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \text{ hoặc } a^{(p-1)/2} \equiv -1 \qquad (\text{mod } p)$$

Ngay từ lúc phát sinh lý thuyết số hiện đại, các nhà toán học đã bị thu hút vào việc giải quyết vấn đề: với những số a nào thì đồng dư thức thứ nhất đúng, với những số a nào thì đồng dư thức thứ hai đúng? Chúng ta giả thử rằng a đồng dư mod p với bình phương của một số x nào đó:

$$a \equiv x^2 \qquad (\text{mod } p)$$

Suy ra, $a^{(p-1)/2} \equiv x^{p-1}$, cái mà theo định lý Fermat đồng dư với 1. Số a (không phải là bội của p) đồng dư với bình phương của một số nào đó như thế được gọi là *thặng dư bình phương* của p; ngược lại, một số b không phải là bội của p không đồng dư với một bình phương nào theo modulo p được gọi là *phi thặng dư bình phương* của p. Chúng ta vừa thấy rằng mọi thặng dư bình phương a của số p thỏa mãn đồng dư thức $a^{(p-1)/2} \equiv 1$ (mod p). Khó thấy rằng mọi phi thặng dư b của số p thỏa mãn đồng dư thức $b^{(p-1)/2} \equiv -1$ (mod p). Hơn nữa, chúng ta sẽ chứng minh rằng (về sau này) rằng trong các số 1, 2, 3,…, p − 1 có (p−1)/2 là thặng dư bình phương và phi thặng dư bình phương.

Tuy dựa vào cách tính trực tiếp chúng ta đã có thể thu thập được một số không ít các dữ kiện thực nghiệm, nhưng việc phát hiện ra những qui luật chung chi phối cách phân bố các thặng dư bình phương không phải dễ. Một tính chất sâu sắc đầu tiên của hai thặng dư đó đã được Legendre (1752 – 1833) phát hiện; sau mày Gauss gọi nó là định luật đối ngẫu. Định luật đó nói về quan hệ tương hỗ giữa hai số nguyên tố p và q khác nhau. Nó như sau: q là thặng dư bình phương của p khi và chỉ khi p là thặng dư của q, kèm theo tích $(\frac{p-1}{2}).(\frac{q-1}{2})$ là chẵn. Ngược lại, nếu lẻ, thì tình hình đã thay đổi hẳn: p là thặng dư bình phương của q khi và chỉ khi q là phi thặng dư của p. Một trong những thành tựu từ thời trẻ của Gauss, là đưa ra chứng minh một cách chặt chẽ cho định lý đáng chú ý này, cái mà một thời gian dài đã thử thách các nhà toàn học. Chứng minh của Gauss hoàn toàn không thể coi là tầm thường, đến ngày nay thì việc chứng minh định luật đối ngẫu vẫn còn là một công việc đáng kể, dẫu rằng một số lớn chứng minh khác đã được công bố. Ý nghĩa thực sự của định luật đối ngẫu đến thời gian gần đây mới được phát hiện – nó có liên quan đến sự phát triển mới nhất của lý thuyết đại số về số học.

Để làm thí dụ minh họa cho sự phân bố của các thặng dư bình phương, chúng ta chọn p = 7. Thì:

$0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 2$, $4^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$

và vì các bình phương tiếp theo lặp lại dãy đó, cho nên thặng dư bình phương của 7 là các số đồng dư với 1, 2 và 4, còn các phi thặng dư là những số đồng dư với 3, 5 và 6. Tổng quát thì các thặng dư bình phương của p gồm các số đồng dư với các số 1^2, 2^2, …, $(p - 1)^2$. Nhưng những số này từng cặp đồng dư với nhau vì:

$$x^2 \equiv (p - x)^2 \pmod p \quad (\text{thí dụ } 2^2 \equiv 5^2 \pmod 7)$$

Thực vậy, $(p - x)^2 = p^2 - 2px + x^2 \equiv x^2 \pmod p$. Nghĩa là một nửa các số 1, 2, …, p − 1 thặng dư bình phương của p, còn nửa kia là các phi thặng dư. Muốn cho một minh họa của định luật đối ngẫu, chúng ta đặt p = 5, q = 11. Vì 11 ≡ 12 (mod 5), cho nên 11 là thặng dư bình phương theo modulo 4, và vì tích . là chẵn cho nên theo định luật đối luật đối ngẫu thì 5 cũng phải là thặng dư bình phương theo modulo 11; thực vậy, chúng ta thấy rằng $5 \equiv 4^2$ (mod 11). Mặt khác, chúng ta đặt p = 7, q = 11. Lúc này tích . là lẻ, 11 là thặng dư theo modulo 7 (vì 11 ≡ 22 (modulo 7), còn 7 là phi thặng dư theo modulo 11.

§3. SỐ PITAGO VÀ ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

Định lý Pichúng tago có liên quan đến một vấn đề thú vị trong lý thuyết số. Người Hi Lạp đã biết một chúng tam giác với các cạnh 3, 4, 5 là chúng tam giác vuông. Định lý đó, như đã biết được biểu thị một cách đại số bằng đẳng thức:

(1) $$a^2 = b^2 + c^2$$

trong đó a và b là độ dài các cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền. Vấn đề tìm tất cả các chúng tam giác vuông, mà các cạnh của chúng được biểu thị bằng các số nguyên tương đương với vấn đề tìm tất cả các nghiệm nguyên (a, b, c) của phương trình (1). Mỗi bộ ba số nguyên (a, b, c) thỏa mãn phương trình đó có tên là bộ ba Pichúng tago.

Có thể tìm mọi bộ ba Pichúng tago một cách khá đơn giản. Giả thử các số nguyên a, b, c lập thành một bộ ba Pichúng tago, tức là có hệ thức $a^2 + b^2 = c^2$. Để cho gọn chúng ta đặt a/c = x, b/c = y. Như thế x và y là các số hữu tỷ sao cho $x^2 + y^2 = 1$. Từ đó suy ra: $y^2 = (1 - x)(1 + x)$ hoặc $y/(1+x) = (1-x)/y$. Giá trị chung của hai tỉ số này là số t, số này có thể biểu thị như tỉ số của hai số nguyên u/v . Chúng chúng ta có thể viết y = t(1 + x) và (1 − x) = ty hoặc:

$$tx - y = -t, \qquad x + ty = 1$$

Từ hệ phương trình này suy ra ngay rằng:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Thay x, y, và t vào chúng ta được:

$$\frac{a}{c} = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{2uv}{v^2 + u^2}$$

Từ đó suy ra:

$$a = (v^2 - u^2)r$$

2) $$b = 2uvr$$

$$c = (v^2 + u^2)r$$

trong đó r là một thừa số hữu tỉ nào đó. Như vậy, nếu các số (a, b, c) lập thành một bộ ba Pichúng tago thì chúng tương ứng tỷ lệ với các số có dạng $v^2 - u^2$, 2uv, $u^2 + v^2$. Đảo lại, dễ dàng thử lại rằng mọi bộ ba số (a, b, c) được xác định bởi các đẳng thức có dạng (2) sẽ lập thành bộ ba Pichúng tago bởi vì từ các đẳng thức (2) chúng ta suy ra:

$$a^2 = (u^4 - 2u^2v^2 + v^4)\, r^2$$

$$b^2 = (4u^2v^2)\, r^2$$

$$c^2 = (u^4 + 2u^2v^2 + v^4)\, r^2$$

do đó mà $a^2 + b^2 = c^2$

Kết quả này có thể đơn giản đi một chút. Từ một bộ ba Pichúng tago nào đó (a, b, c) suy ra dễ dàng một tập hợp vô hạn các bộ ba Pichúng tago khác (sa, sb, sc) với mọi số nguyên dương s. Chẳng hạn, từ (3, 4, 5) chúng ta được (6, 8, 10), (9, 12, 15) vv… Những bộ ba như vậy không khác nhau cơ bản vì chúng tương ứng với những chúng tam giác đồng dạng.Chúng chúng ta quy ước nói về bộ ba Pichúng tago nguyên thủy nếu các số a, b và c không có thừa số chung. Có thể chứng minh rằng các công thức:

$$a = v^2 - u^2$$

$$b = 2uv$$

$$c = u^2 + v^2$$

trong đó u và v là những số nguyên dương bất kỳ (v > u) không có thừa số chung và không đồng thời cùng lẻ sẽ cho chúng chúng ta tất cả các bộ ba Pichúng tago nguyên thủy.

Đây là những thí dụ về bộ ba Pitago nguyên thủy:

$v = 2$, $u = 1$: (3, 4, 5), $v = 4$, $u = 3$: (7, 24, 25), $v = 3$, $u = 2$: (5, 12, 13), $v = 10$, $u = 7$: (51, 140, 149) v.v…

Trong khi nghiên cứu những số Pichúng tago thì tất nhiên nảy ra vấn đề về khả năng mở rộng sau đây của bài toán. Có thể tìm được những số nguyên dương a, b, c thỏa mãn phương trình $a^2 + b^2 = c^2$ hoặc phương trình $a^4 + b^4 = c^4$, hoặc tổng quát, phương trình:

$$a^n + b^n = c^n \tag{3}$$

trong đó n là số nguyên lớn hơn 2 hay không? Bằng con đường tự biện Fermat đã cho câu giải đáp. Fermat đã nghiên cứu công trình của Diophantus – nhà toàn học nổi tiếng thời cổ nghiên cứu về lý thuyết số – và có thói quen ghi chú trên lề sách. Mặc dù ông không có ý định dẫn ra ở đó chứng minh của nhiều định lý mà ông đã đề xuất – tất cả những định lý ấy sau này đã được chứng minh dần – chỉ trừ một trường hợp ngoại lệ rất đặc biệt. Nhân vấn đề số Pichúng tago, Fermat đã ghi chú rằng *phương trình (3) không giải được trong phạm vi số nguyên nếu n > 2*, nhưng vì chứng minh mà ông tìm được quá dài nên không thể ghi vào lề cuốn sách đó được.

Chưa có ai và chưa bao giờ chứng minh dưới dạng tổng quát hoặc bác bỏ khẳng định này của Fermat mặc dù có sự cố gắng của nhiều nhà toán học lớn. Định lý đã được chứng minh cho rất nhiều giá trị của n, nói riêng đối với $n < 619$, nhưng chưa phải đối với mọi giá trị có thể được của n; đồng thời cũng chưa có ai nêu ra được một thí dụ nào để bác bỏ định lý. Tuy định lý này bản thân nó không có ý nghĩa lớn về mặt toán học, nhưng ý định chứng minh nó đã là nguồn gốc của nhiều công trình nghiên cứu quan trọng nhất trong phạm vi lý thuyết số. Bài toán đã gây nên sự quan tâm rộng rãi, một phần là nhờ giải thưởng 100.000 mác tặng cho người đầu tiên giải được nó, nhất là giải thưởng này lại được Viện hàn lâm Gottingen trao tặng. Hằng năm vẫn có một số lớn "bài giải" có sai lầm được gửi tới cho đến khi giải thưởng này không còn giá trị bằng tiền do nạn lạm phát sau chiến thắng ở nước Đức. Ngay cả những chuyên gia toán học cũng nhiều lần vội vã công bố những chứng minh mà sau đó đã bị bác bỏ vì phát hiện ra những sơ hở rất tầm thường. Bài toán của Fermat bị lắng xuống một ít từ khi giảm giá đồng mác. Tuy nhiên báo chí vẫn luôn luôn loan tin rằng lời giải bài toán đã được một "thiên tài" mới xuất hiện nào đó tìm ra.

§4. THUẬT TOÁN EUCLID

1. Lý thuyết tổng quát.

Bạn đọc đã làm quen với quá trình thông thường của phép chia "kéo dài" một số nguyên a cho một số nguyên khác b và biết rằng có thể kéo dài quá trình cho đến khi số dư chưa nhỏ hơn số chia. Thí dụ, nếu a = 648 và b = 7 thì chúng ta được thương số q = 92 và số dư r = 4.

$$\begin{array}{r|l} & \overline{\;\;92} \\ 7 & 648 \\ & \underline{63} \\ & \;\;18 \\ & \;\;\underline{14} \\ & \;\;\;\;4 \end{array} \qquad\qquad 648 = 7 \cdot 92 + 4.$$

Nhân vấn đề này chúng ta có thể phát biểu một định lý tổng quát sau đây: *nếu a và b là những số nguyên trong đó b khác 0 thì bao giờ cũng có một số nguyên q sao cho:*

(1) $$a = bq + r$$

trong đó r là một số nguyên thỏa mãn bất đẳng thức $0 < r < b$.

Chúng ta sẽ chứng minh định lý này một cách độc lập với qui trình của phép chia kéo dài. Chỉ cần lưu ý rằng số a là bội của số b

$$a = bq$$

hoặc nằm giữa hai bội liên tiếp của b:

$$bq < a < b\,(q + 1) = bq + b$$

Trong trường hợp thứ nhất, đẳng thức (1) đúng với r = 0. Trong trường hợp thứ hai thì từ bất đẳng thức thứ nhất chúng ta suy ra:

$$a - bq = r > 0$$

và từ bất đẳng thức thứ hai thì:

$$a - bq = r < b$$

vì vậy $0 < r < b$, như yêu cầu của định lý (1).

Từ đó chúng ta có thể rút ra một số lớn các hệ quả quan trọng khác nhau. Hệ quả thứ nhất là phương pháp để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên.

Giả sử a và b là hai số nguyên nào đó không đồng thời bằng 0. Chúng ta xét tập hợp các số nguyên dương là ước số của cả a và b. Tất nhiên tập hợp này hữu hạn vì, nếu $a \neq 0$ chẳng hạn, thì một số nào đó lớn hơn a không thể là ước số của a. Từ đó suy ra số các ước số chung của a và b là hữu hạn; giả thử d là số lớn nhất trong những số đó. Số d được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b, chúng ta viết là d = (a, b). Chẳng hạn, nếu a = 8, b = 12 thì phép thử trực tiếp chứng tỏ rằng (8, 12) = 4; nếu a = 5, b = 9 thì cũng bằng cách thử như vậy chúng ta được (5, 9) = 1. Nếu a và b là những số khá lớn chẳng hạn a = 1804, b = 328 thì việc thử trực tiếp để tìm ước số chung lớn nhất sẽ rất vất vả. Một phương pháp ngắn gọn hơn và hoàn toàn có hiệu lực là thuật toán Euclid (thuật toán là mọi phương pháp tính đã được hệ thống hóa). Nó dựa trên sự kiện là từ hệ thức có dạng

$$a = bq + r \tag{2}$$

suy ra được

$$(a, b) = (b, r) \tag{3}$$

Với bất kì số *u* là ước số của cả a và b:

$$a = su, \qquad b = tu$$

cũng là ước số của *r* vì r = a – bq = su – qtu = (s – qt) u, và đảo lại, một số *v* là ước số chung của *b* và *r*:

$$b = s'v, \qquad r = t'v$$

cũng là ước số của a vì a = bq + r = s′vq + t′v = (s′q + t′) v. Nghĩa là mỗi ước số chung của a và b đồng thời là ước số chung của b và r và ngược lại. Nếu tập hợp các ước số chung của *a* và *b* trùng với tập hợp các ước số chung của *b* và *r* thì rõ ràng ước số chung lớn nhất của a và b phải trùng với ước số chung lớn nhất của *b* và *r*. Điều này được biểu thị bởi đẳng thức (3). Bây giờ chúng ta sẽ thấy rõ ích lợi của sự kiện vừa được xác nhận.

Muốn vậy, chúng ta trở lại thí dụ tìm ước số chung lớn nhất của các số 1803 và 328. Phép chia thông thường:

$$\begin{array}{r|r} & 5 \\ \hline 328 & 1804 \\ & \underline{1640} \\ & 164 \end{array}$$

đưa chúng ta kết luận rằng:

$$1804 = 5.328 + 164$$

Từ (3) suy ra:

$$(1804, 328) = (328, 164)$$

Chúng ta để ý rằng bài toán tính ước số chung lớn nhất của (1804, 328) được thay thế bằng một bài toán tương tự nhưng với những số nhỏ hơn. Có thể kéo dài quá trình đó. Vì:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ 164 & 328 \\ & \underline{328} \\ & \;\;\mathbf{0}, \end{array}$$

cho nên: 328 = 2.164 + 0, vì thế (328, 164) = (164, 0) = 164. Nghĩa là (1804, 328) = (328, 164) = (164, 0) = 164.

Quá trình tìm ước số chung lớn nhất của hai số được đưa ra dưới dạng hình học trong quyển "the Elements" của Euclid. Chúng chúng ta sẽ mô tả tổng quát qui trình đó dưới dạng số học với các số nguyên tùy ý a và b không đồng thời bằng 0.

Giả thiết b ≠ 0, vì (a, 0) = a. Phép chia liên tiếp dẫn chúng ta đến dây chuyền đẳng thức:

$$(4) \qquad \begin{array}{rll} a &= bq_1 + r_1 & (0 < r_1 < b) \\ b &= r_1q_2 + r_2 & (0 < r_2 < r_1) \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 & (0 < r_3 < r_2) \\ r_2 &= r_3q_4 + r_4 & (0 < r_4 < r_3) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Phép chia được tiếp tục cho đến khi một số dư bất kỳ trong các số dư r_1, r_2, r_3, … bằng 0. Khi xem xét các bất đẳng thức viết ở bên phải, chúng ta thấy rằng các số dư liên tiếp tìm được lập thành một dãy các số dương giảm dần

$$(5) \qquad b < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \ldots <0$$

Rõ ràng là sau nhiều nhất là *b* bước (nhưng thường ít hơn nhiều vì hiệu số giữa các r kề nhau thường lớn hơn đơn vị), số dư bằng 0 phải xuất hiện:

$$r_{n-2} = r_{n-1} \,.\, q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n\, q_{n+1} + 0$$

Nếu thế chúng ta có thể kết luận rằng

$$(a, b)=r_n.$$

Nói cách khác, ước số chung lớn nhất (a,b) bằng số dư cuối cùng trong dãy (5). Điều này được suy ra từ sự áp dụng có lặp lại đẳng thức (3) vào hệ thức (4). Thực vậy, từ những hệ thức đó suy ra:

$(a, b) = (b, r_1)$, $(b, r_1) = (r_1, r_2)$, $(r_1, r_2) = (r_2, r_3)$, $(r_2, r_3) = (r_3, r_4)$,…, $(r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n$

<u>Bài tập:</u> Dùng thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất của các cặp số: (187,77), (105,385), (245,193)

Từ các đẳng thức (4) chúng ta có thể rút ra một tính chất cực kỳ quan trọng của ước số chung lớn nhất (a,b): Nếu d=(a,b) thì có thể tìm được những số dương hoặc âm k và l sao cho

(6) $$d = ka + lb$$

Để khẳng định điều này, chúng ta hãy xét các số dư liên tiếp (5). Cái thứ nhất trong các đẳng thức (4) cho chúng ta:

$$r_1 = a - q_1 b$$

như vậy r_1 có thể viết dưới dạng $k_1a + l_1b$ (trong trường hợp này thì $k_1 = 1$, $l_1 = -q_1$). Từ đẳng thức tiếp theo, chúng ta có:

$$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2(k_1 a + l_1 b) = (-q_2 k_1)a + (1 - q_2 l_1)b = k_2 a + l_2 b$$

Tất nhiên có thể áp dụng lập luận như vậy đối với mọi số dư $r_3, r_4, \ldots$, cho đến khi đi tới biểu thức mà chúng ta muốn tìm :

$$r_n = k.a + l.b$$

Thí dụ, chúng ta hãy xét thuật toán Euclid trong việc tìm (61,24); ước chung lớn nhất là 1:

61 = 2.24+13, 24 = 1.13+11, 13 = 1.11+2, 11 = 5.2+1, 2 = 2.1+0

Đẳng thức thứ nhất trong số này cho :

$$13 = 61 - 2.24$$

Đẳng thức thứ hai cho:

$$11 = 24 - 13 = 24 - (61 - 2.24) = -61 + 3.24$$

Đẳng thức thứ ba cho:

$$2 = 13 - 11 = (61 - 2.24) - (-61 + 3.23) = 2.61 - 5.24$$

Và cuối cùng đẳng thức thứ tư cho

$$1 = 11 - 5.2 = (-61 + 3.24) - 5(2.61 - 5.24) = -11.61 + 28.24$$

2. Áp dụng vào định lý cơ bản của số học

Sự kiện d = (a, b) bao giờ cũng có thể viết dưới dạng d = ka+lb, cho phép chúng ta đưa ra một chứng minh của định lý số học cơ bản, khác với chứng minh đã trình bày ở trên. Đầu tiên chúng ta chứng minh một hệ quả làm bổ đề sau đó chúng ta sẽ suy ra định lý. Bây giờ thì cách suy nghĩ ngược lại so với trước.

Bổ đề : nếu tích ab chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc a hoặc b chia hết cho p.

Nếu a không chia hết cho p, như thế (a,p) = 1 vì p chỉ có hai ước số là p và 1. Trong trường hợp này có thể tìm được những số nguyên k và l sao cho:

$$1 = ka + lp$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với b, chúng ta được:

$$b = kab + lpb$$

vì *ab* chia hết cho *p*, nên có thể viết :

$$ab = pr$$

nên

$$b = kpr + lpb = p(kr + lb)$$

và rõ ràng rằng *b* chia hết cho *p*. Bởi vậy, chúng ta khẳng định rằng nếu *ab* chia hết cho *p* mà *a* không chia hết cho *p* thì *b* sẽ phải chia hết cho *p*; nghĩa là trong mọi trường hợp hoặc *a* hoặc *b* chia hết cho *p* nếu *ab* chia hết cho *p*. Sự mở rộng cho trường hợp tích của ba hay nhiều thừa số không có khó khăn gì. Thí dụ, nếu abc chia hết cho p thì áp dụng hai lần bổ đề chúng ta kết luận được ít nhất một trong ba thừa số *a, b, c* chia hết cho *p*.

Từ kết quả vừa thu được suy ra ngay định lý cơ bản của số học. Giả thử có hai phân tích thành thừa số nguyên tố của số nguyên N:

$$N = p_1p_2 \ldots p_r = q_1q_2 \ldots q_s$$

Vì p_1 là ước số của vế trái đẳng thức, cho nên nó phải là ước số của vế phải, tức là ước số của một trong các thừa số q_k. Nhưng q_k là số nguyên tố, vậy p_1 phải bằng q_k. Sau khi chia đẳng thức cho thừa số chung $p_1 = q_k$ thì cũng bằng cách như trên chúng ta thấy rằng thừa số p_2 bằng một q_t nào đó. Rút gọn cho

$p_2 = q_t$ rồi tiếp tục chuyển sang thừa số p_3….. Cuối cùng, tất cả các thừa số được rút gọn hết và vế trái chỉ còn lại số 1. Như vậy các số *p* và *q* bằng nhau từng đôi không kể thứ tự, tức hai phân tích là đồng nhất.

3. Hàm số Euler φ. Một lần nữa nói về định lý Fermat.

Chúng ta nói rằng hai số nguyên a và b là nguyên tố cùng nhau nếu ước số chung lớn nhất của chúng bằng 1:

$$(a, b) = 1$$

Thí dụ, các số 24 và 35 nguyên tố cùng nhau, nhưng các số 12 và 18 không nguyên tố cùng nhau.

Nếu a và b là các số nguyên tố cùng nhau thì có thể chọn được các số *k* và *l* sao cho :

$$ka + lb = 1$$

Điều này được suy ra từ tính chất của (a,b) ở phần trên.

<u>Bài tập:</u> Chứng minh định lý: Nếu số nguyên *r* là ước số của tích *ab* và *a* và *r* nguyên tố cùng nhau, thì *r* phải là ước số của *b*. (Gợi ý: nếu *r* nguyên tố cùng với *a* thì tìm được số *k* và *l* sao cho

$$ka + lr = 1$$

nhân cả hai vế của phương trình với *b*.) Định lý này được bao gồm trong bổ đề trên như một trường hợp đặc biệt.

Giả sử n là số nguyên dương tùy ý, gọi φ(n) là số những số nguyên tố cùng nhau với n trong phạm vi từ 1 đến n. Biểu thức φ(n) do Euler đưa ra đầu tiên là một hàm số rất quan trọng trong lý thuyết số. Dễ dàng tính được giá trị φ(n) đối với một số giá trị đầu tiên của n:

φ(1) = 1	vì 1 nguyên tố cùng nhau với 1
φ(2) = 1	vì 1 nguyên tố cùng nhau với 2
φ(3) = 2	vì 1 và 2 nguyên tố cùng nhau với 3
φ(4)= 2	vì 1 và 3 nguyên tố cùng nhau với 4
φ(5) = 4	vì 1,2,3,4 nguyên tố cùng nhau với 5
φ(6) = 2	vì 1, 5 nguyên tố cùng nhau với 6
φ(7) = 6	vì 1, 2, 3, 4, 5, 6 nguyên tố cùng nhau với 7

φ(8) = 4 vì 1, 3, 5, 7 nguyên tố cùng nhau với 8

φ(9) = 6 vì 1, 2, 4, 5, 7, 8 nguyên tố cùng nhau với 9

φ(10) = 4 vì 1, 3, 7, 9 nguyên tố cùng nhau với 10

v.v….

Chúng ta để ý thấy rằng φ(p) = p − 1 nếu p là số nguyên tố; thực vậy số p không có ước số nào ngoài 1 và p, cho nên mọi số 1, 2, …, p − 1 là nguyên tố cùng nhau với p. Nếu n là hợp số mà phân tích thành thừa số nguyên tố có dạng

$$n = p_1^{a1} p_2^{a2} \dots p_r^{ar}$$

trong đó các số p biểu thị các thừa số nguyên tố khác nhau được nâng lên một lũy thừa nào đó thì

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Chẳng hạn, từ phân tích 12 = 2^2.3

$$\varphi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = 4$$

điều này có thể dễ dàng thử trực tiếp được. Chứng minh của định lý trên là hoàn toàn sơ cấp chúng ta không trình bày ở đây.

Bài tập: Dùng hàm số Euler và định lý Fermat chứng minh: Nếu *n* là số nguyên bất kì và *n* nguyên tố cùng nhau với *a*, thì

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \qquad (\text{mod } n).$$

4. Phân số liên tục. Phương trình Điôphăng Algôrit của Euclid

Thuật toán Euclid để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên còn dẫn đến một phương pháp quan trọng biểu thị tỷ số của hai số nguyên dưới dạng một phân số phức tạp có dạng đặc biệt.

Áp dụng vào các số 840 và 611, Thuật toán Euclid cho chúng ta một dãy đẳng thức:

840 = 1.611+ 229, 611 = 2.229 + 153

229 = 1.153 + 76, 153 = 2.76 +1

Những đẳng thức này chứng tỏ rằng (840, 611) =1

Nhưng mặt khác, từ những đẳng thức đó chúng ta thu được

$$\frac{840}{611} = 1 + \frac{229}{611} = 1 + \frac{1}{611/229},$$

$$\frac{611}{229} = 2 + \frac{153}{229} = 2 + \frac{1}{229/153},$$

$$\frac{229}{153} = 1 + \frac{76}{153} = 1 + \frac{1}{153/76},$$

$$\frac{153}{76} = 2 + \frac{1}{76}.$$

Kết hợp các đẳng thức sau này với nhau, chúng ta có phân tích sau đây của số :

$$\frac{840}{611} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{76}}}}.$$

Một biểu thức có dạng:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

ở đây số a là nguyên dương, được gọi là phân số liên tục. Thuật toàn Euclid đã cho chúng ta phương pháp biểu thị một số hữu tỷ tùy ý dưới dạng một phân số liên tục như vậy.

<u>Bài tập:</u> Tìm phân số liên tục của: $\frac{2}{5}, \frac{43}{30}, \frac{169}{70}$

Phân số liên tục đóng vai trò quan trọng trong một ngành của số học cao cấp được gọi là giải tích Diophantine. Phương trình Diophantine là phương trình đại số có một hay nhiều ẩn số mà mọi hệ số đều là số nguyên và chỉ yêu cầu tìm các nghiệm nguyên của nó thôi. Một phương trình như vậy có thể hoàn toàn không có nghiệm hoặc có một số hữu hạn nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Trường hợp đơn giản nhất của phương trình Diophantine là phương trình tuyến tính có hai ẩn:

$$ax + by = c \tag{8}$$

trong đó a, b, c là các số nguyên cho trước. Cần phải tìm các nghiệm nguyên x và y. Có thể tìm được lời giải đầy đủ của các phương trình loại này nhờ thuật toán Euclid.

Trước hết, thuật toán Euclid giúp chúng ta xác định d = (a, b). Sau đó, có thể chọn được các số nguyên k và l thỏa mãn đẳng thức :

$$ak + bl = d \tag{9}$$

như vậy, trong trường hợp c = d phương trình (8) có nghiệm riêng x=k, y=l. Tổng quát, nếu c là bội của d (c = dq) thì từ đẳng thức (9) chúng ta suy ra:

$$a(kq) + b\,(lq) = dq = c$$

do đó trong trường hợp này phương trình (8) có nghiệm riêng $x = x^* = kq$, $y = y^* = lq$. Đảo lại, nếu phương trình (8) với c cho trước có một nghiệm x, y thì c phải là bội của d = (a, b); thực vậy, d là ước số của cho a và b, do đó d phải là ước số của c. Như vậy, chúng chúng ta đã chứng minh rằng phương trình (8) có (ít nhất một) nghiệm khi và chỉ khi c là bội của (a, b).

Bây giờ chúng ta xét xem nếu biết một nghiệm x = x′, y = y′ của phương trình (8) thì làm thế nào để xác định được tất cả các nghiệm khác. Giả sử x = x′, y = y′ là một nghiệm tùy ý khác: như thế thì $x = x' - x^*$, $y = y' - y^*$ là một nghiệm của phương trình đồng nhất

$$ax + by = 0 \tag{10}$$

trừ các phương trình

$$ax' + by' = c \text{ và } ax^* + by^* = c$$

cho nhau, chúng ta được :

$$a\,(x' - x^*) + b\,(y' - y^*) = 0$$

Bây giờ để ý đến phương trình (10) chúng ta thấy rằng nghiệm tổng quát của nó có dạng x = rb/(a,b), y = ra/(a,b) trong đó r là số nguyên tùy ý (Đề nghị bạn đọc tự chứng minh điều này để luyện tập). Sau đó chúng ta sẽ được nghiệm tổng quát của phương trình (8) :

$$x = x^* + rb/(a,b), \qquad y= y^* - ra/(a,b)$$

Chúng ta đi đến kết luận: phương trình Diophantine tuyến tính ax+by = c trong đó a, b, c là các số nguyên, có nghiệm nguyên khi và chỉ khi c là bội của (a, b). Trong trường hợp này, chúng ta tìm được nghiệm riêng $x = x^*$, $y = y^*$ nhờ thuật toán Euclid, còn nghiệm tổng quát có dạng là :

$$x = x^* + rb/(a,b), \qquad y= y^* - ra/(a,b)$$

trong đó r là số nguyên tùy ý.

Thí dụ : phương trình 3x + 6y = 22 không có nghiệm nguyên vì (3,6)=3 không là ước số của 22.

Phương trình 7x + 11y = 13 có nghiệm riêng x = –39, y = 26 được tìm ra nhờ các tính toán sau đây :

11 = 1.7 +4, 7 = 1.4 +3, 4 = 1.3 + 1, (7.11) = 1

1 = 4 – 3 = 4 – (7 – 4) = 2.4 – 7 = 2(11 – 7) – 7= 2.11 – 3.7

Từ đó suy ra :

$$7.(- 3) + 11.(2) = 1$$

$$7.(- 39) + 11.(26) = 13$$

Những nghiệm còn lại được cho bằng các công thức :

$$x = - 39 + 11r, \; y = 26 - 7r$$

trong đó r là số nguyên tùy ý.

Bài tập: Giải các phương trình Diophantine sau: a) 3x – 4y = 29. b)11x – 12y = 58. c)53x – 34y = 51.

CHƯƠNG II: HỆ THỐNG SỐ CỦA TOÁN HỌC

GIỚI THIỆU

Về sau này chúng ta phải mở rộng khái niệm số ở một số mức độ rất cao bắt đầu từ dãy số tự nhiên, nhằm xây dựng một công cụ mạnh mẽ nhằm thoả mãn nhu cầu của cả thực tiễn và lý thuyết. Về mặt lịch sử, trong quá trình tiến hoá lâu dài và chập chững, số 0, số nguyên âm và phân số hữu tỷ đã dần dần có quyền bình đẳng với các số trong dãy số tự nhiên. Ngày nay một học sinh trung bình cũng đã nắm vững được quy tắc của các phép tính đối với tất cả những số đó. Nhưng muốn nắm được hoàn toàn các phép toán đại số thì cần phải đi xa hơn nữa và cần nắm vững được khái niệm mở rộng của số hữu tỷ và số phức . Mặc dầu những sự mở rộng đó của khái niệm về số đã có cách đây hơn một thế kỷ và toàn bộ toán học hiện đại đã dựa vào chúng làm cơ sở, nhưng nền móng logic vững chắc của chúng cũng mới chỉ có cách đây không lâu. Trong chương này chúng ta sẽ phác ra những thời kỳ cơ bản của sự phát triển đó.

§1. SỐ HỮU TỶ

1. Số hữu tỷ là phương tiện của việc đo lường.

Số tự nhiên nảy sinh do sự trừu tượng hoá trong quá trình đếm các sự vật trong tập hợp hữu hạn. Nhưng trong đời sống hàng ngày không những chúng ta chỉ đếm các sự vật tách rời nhau mà còn phải đo các đại lượng, chẳng hạn như độ dài, diện tích, trọng lượng, thời gian. Nếu chúng ta muốn làm toán với các kết quả của phéo đo các đại lượng có thể chia thành vô hạn các phần nhỏ như vậy thì không thể giới hạn trong phạm vi dãy số tự nhiên mà không phải mở rộng giới hạn của số học ra một thế giới mới của các số. Bước đầu tiên là quy vấn đề đo về vấn đề đếm. Trước hết chúng ta chọn một cách hoàn toàn tuỳ ý một đơn vị đo – foot, yard, inch, pound, gam – những cái chúng chúng ta quy ước là 1 đơn vị đo. Rồi chúng ta đếm số các đơn vị như vậy có trong đại lượng cần đo. Có thể xảy ra trường hợp miếng kẽm nặng đúng bằng 54 gam. Nhưng trong trường hợp tổng quát thì quá trình đếm thường không được tròn. Đại lượng cần đo không thể đo được tuyệt đối chính xác bằng các đơn vị đã chọn, không phải là bội của nó. Trong trường hợp này chúng ta chỉ có thể nói rằng đại lượng đó bao hàm giữa hai bội số liên tiếp của đơn vị đó, chúng ta giả thử rằng giữa 53 và 54 gam. Nếu vậy, chúng ta đưa vào những đơn vị mới bằng đơn vị ban đầu chia ra làm n phần bằng nhau. Về mặt ngôn ngữ, những đơn vị nhỏ mới này có những tên gọi khác: chẳng hạn, foot chia thành 12 inch, mét chia thành 100 centimet, pound chia thành 16 ounces, giờ thành 60 phút, phút thành 60 giây v.v… Song, trong ký hiệu toán học tổng quát thì một đơn vị nhỏ tạo ra được khi chia đơn vị ban đầu ra n phần sẽ được hiển thị bằng ký hiệu $\frac{1}{n}$. Nếu đại lượng đang xét chứa đúng m đơn vị nhỏ đó thì số đo của nó là $\frac{m}{n}$. Ký hiệu này được gọi là phân số hoặc tỉ số (còn viết là m : n). Bước tiếp theo và quyết định đã được thực hiện một cách có ý thức sau nhiều thế kỷ tập hợp những cố gắng riêng rẽ. Ký hiệu $\frac{m}{n}$ đã thoát khỏi mối liên hệ cụ thể với quá trình đo và được xem như một như số có bản chất độc lập, bình đẳng với số tự nhiên. Khi m và n là các số tự nhiên, thì ký hiệu $\frac{m}{n}$ được gọi là số hữu tỷ.

Việc dùng thuật ngữ "số" (lúc đầu chúng ta hiểu "số" chỉ là số tự nhiên) đối với các ký hiệu mới, vì phép cộng và phép nhân đối với các ký hiệu này cũng có những quy luật giống như những phép toán tương ứng đối với các số tự nhiên. Muốn xác nhận điều này, trước hết phải định nghĩa phép cộng và phép nhân các số hữu tỷ và định nghĩa số hữu tỷ bằng nhau. Những định nghĩa đó như chúng ta đã biết, là như sau:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$(1) \qquad \frac{a}{a}=1, \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ if } ad=bc,$$

for any integers a, b, c, d. For example:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot5+3\cdot4}{3\cdot5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}, \qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15},$$

$$\frac{3}{3}=1, \qquad \frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Chúng ta buộc phải thừa nhận những định nghĩa đó nếu chúng ta nghĩ đến việc dùng các số hữu tỷ để đo chiều dài, diện tích v.v… Nhưng với quan điểm logic chặt chẽ hơn thì những quy tắc cộng và nhân và việc giải thích như vậy về sự bằng nhau của những ký hiệu mới được xác lập một cách độc lập về định nghĩa, không chịu một điều kiện nào khác ngoài sự tương thích lẫn nhau (tính phi mâu thuẫn) và sự tiện lợi đối với những ứng dụng thực tiễn. Xuất phát từ các định nghĩa (1) có thể chứng tỏ rằng những định luật cơ bản của số học các số tự nhiên vẫn tiếp tục được bảo toàn trong số hữu tỷ:

p + q = q + p (định luật giao hoán của phép cộng)

p + (q + r) = (q + p) + r (định luật kết hợp của phép cộng)

pq = qp (định luật giao hoán của phép nhân)

p (qr) = (qp) r (định luật kết hợp của phép nhân)

p (q + r) = pq + pr (định luật phân phối)

Chẳng hạn việc chứng minh định luật giao hoán của phép cộng phân số được thể hiện qua những đẳng thức sau đây:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

ở đây đẳng thức đầu tiên và đẳng thức cuối cùng được xác định bởi định nghĩa phép cộng (1) còn đẳng thức ở giữa là hệ quả của các định luật giao hoán của phép cộng và phép nhân các số tự nhiên. Bằng cách này bạn đọc có thể kiểm tra bốn định luật còn lại nếu thấy cần thiết.

Để thực sự hiểu những định luật này, phải nhấn mạnh thêm một lần nữa rằng những số hữu tỷ sáng tạo của chúng chúng ta, và rằng những luật như (1) là áp đặt của ý nghĩ con người. Chúng chúng ta có thể thay đổi luật của phép cộng, như là $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b+d}$, trong trường hợp cụ thể sẽ cho $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, một điều vô lý theo cách nhìn của việc đo lường.

2. Sự nảy sinh nhu cầu về số hữu tỷ bên trong bản thân toán học.

Độc lập đối với cơ sở "thực tiễn" của việc đưa vào số hữu tỷ còn có một cơ sở sâu sắc hơn và có tính bắt buộc hơn. Ở đây chúng ta sẽ xét khía cạnh đó của vấn đề một cách hoàn toàn độc lập với những lập luận đã nêu ở trên. Trong số học tự nhiên thông thường, chúng ta luôn thực hiện được các phép toán thuận cơ bản: phép cộng và phép nhân. Nhưng các phép toán ngược – phép trừ và phép chia thì không phải bao giờ cũng thực hiện được. Hiệu b – a của hai số tự nhiên a và b, theo định nghĩa, là một số tự nhiên c sao cho a + c = b, tức là nghiệm của phương trình a + x = b. Nhưng, trong phạm vi số tự nhiên thì ký hiệu b – a chỉ có nghĩa khi b > a, bởi vì chỉ trong điều kiện đó thì phương trình a + x = b mới có nghiệm. Khi đưa ký hiệu 0 vào để biểu thị a – a, chúng ta đã có một bước tiến quan trọng trên con đường xóa bỏ giới hạn đó. Nhưng việc đưa vào ký hiệu – 1; –2; –3;... cùng với định nghĩa (b – a) = – (a – b) đối với trường hợp b < a, còn là một thành công quan trọng hơn, sau đó đã có thể khẳng định rằng phép trừ là thực hiện được vô hạn trong phạm vi số nguyên – số dương và số âm. Khi đưa vào các ký hiệu mới – 1; –2; – 3;...tức là mở rộng phạm vi số; thì tất nhiên chúng chúng ta phải định nghĩa các phép toán với những số mới đưa vào sao cho những quy tắc ban đầu của các phép toán số học không bị xóa bỏ, chẳng hạn quy tắc:

(3) $$(-1)\,.\,(-1) = 1$$

là cơ sở cho phép nhân các số âm, được hình thành do ý định bảo toàn định luật phân phối a(b+c)=ab+ac. Thực vậy nếu, chẳng hạn chúng ta cho rằng (–1).(–1) = –1 thì khi đặt a = –1, b = 1, c = –1 chúng ta có –1(1–1)= –1 –1= –2 nhưng thực ra thì –1(1 –1)= –1.0 = 0.

Phải mất không ít thời gian để các nhà toán học nhận thức được rõ rằng "quy tắc của ký hiệu" (3) và mọi định nghĩa khác thuộc về các số âm cũng như các số hữu tỷ là không thể "chứng minh được". Chúng được hình thành với mục đích bảo đảm được các phép toán mà không xóa bỏ những định luật số học cơ bản. Cái có thể và phải chứng minh để các định nghĩa đó được thừa nhận chính là bảo toàn các định luật cơ bản của số học: định luật giao hoán, kết hợp và phân phối. Chính Euler vĩ đại đã dùng một chứng cớ hoàn toàn chưa có tính thuyết phục để chứng tỏ rằng $(-1).(-1)$ "phải" bằng $+1$. Ông nói: "Tích số đang xét chỉ có thể bằng $+1$ hoặc -1, và không thể bằng (-1), bởi vì $-1= (+1).(-1)$"

Việc đưa phân số vào để xóa bỏ những trở ngại trong khi thực hiện phép chia cũng hoàn toàn tương tự như việc đưa số 0 và số nguyên âm vào để chuẩn bị cho sự thực hiện không giới hạn của phép trừ. Tỷ số hoặc thương số $x = b/a$ của hai số nguyên là nghiệm số của phương trình:

$$ax = b \tag{4}$$

Tỷ số đó là số nguyên khi a là ước số của b. Nhưng nếu điều đó không xảy ra khi $a= 2$; $b= 3$. Chúng ta sẽ đưa vào một ký hiệu mới b/a, gọi là phân số thỏa mãn điều kiện $a(b/a) = a$ là nghiệm của (4) "theo định nghĩa". Sự sáng tạo ra phân số với tư cách là những ký hiệu mới đã bảo đảm cho sự thực hiện không có giới hạn của phép chia, trừ phép chia cho 0. Các biểu thức $1/0$, $3/0$, $0/0$, v.v… là những ký hiệu vô nghĩa đối với chúng chúng ta. Nếu như thừa nhận phép chia cho 0 thì từ đẳng thức $0.1= 0.2$ sẽ suy ra một hệ quả sai $1 = 2$. Có khi chúng ta thể hiện những biểu thức đó bằng ký hiệu ∞, nhưng với điều kiện không được xử lý ký hiệu này như là nó đã tuân theo các định luật số học thông thường

Bây giờ thì chúng ta đã hiểu rõ những nguyên tắc xây dựng hệ thống tất cả các số hữu tỷ – số nguyên và phân số, số dương và số âm. Trong phạm vi mở rộng đó thì không những định luật hình thức – định luật kết hợp, giao hoán và phân phối – là đúng, mà các phương trình $a+x=b$ và $ax=b$ luôn có nghiệm duy nhất $x = b-a$ và $x = b/a (a \neq 0)$. Nói cách khác trong phạm vi số hữu tỷ, các phép toán với số hữu tỷ – phép cộng, trừ, nhân và chia được thực hiện không giới hạn và không vượt ra ngoài phạm vi đó. Những phạm vi số đóng kín như vậy được gọi là những trường số. Chúng ta sẽ gặp lại những thí dụ về trường số sau này, ở chương này và chương III.

Sự mở rộng phạm vi bằng cách đưa ra những ký hiệu mới được tiến hành sao cho định luật của phạm vi ban đầu vẫn còn được bảo toàn trong phạm vi đã mở rộng. Đó là một thí dụ điển hình của nguyên lý suy rộng.

Sự mở rộng từ số tự nhiên đến số hữu tỷ không những thỏa mãn được nhu cầu loại trừ tính giới hạn của việc thực hiện các phép chia, mà còn thỏa mãn được nhu cầu thực tiễn về việc ghi lại kết quả đo đạc một cách thuận tiện. Chính sự kiện số hữu tỷ thỏa mãn đồng thời những nhu cầu về thực tiễn và lý thuyết đã làm cho chúng có tầm quan trọng đặc biệt. Chúng ta thấy việc mở rộng các số được thực hiện bằng cách đưa vào những ký hiệu mới và trừu tượng như 0, –2, hoặc ¾. Ngày nay chúng chúng ta xử lý những ký hiệu đó một cách thông thạo và tự tin không cần nghĩ đến bản chất của chúng. Và cũng khó tưởng tượng được rằng trong thế kỷ XVII, chúng còn được rất ít tín nhiệm so với số tự nhiên, nếu như chúng được sử dụng thì mức độ hoài nghi rất lớn. Bản chất cố hữu của ý thức con người có xu hướng bám vào "cái cụ thể" được thể hiện trong dãy số tự nhiên, là nguyên nhân gây ra sự chậm trễ của quá trình tiến hóa tất yếu. Chắc chắn có thể xây dựng một hệ thống số học hoàn hảo về logic bằng sự trừu tượng hóa xuất cái thực tại.

3. Biểu diễn hình học các số hữu tỷ.

Có thể thu được một biểu diễn hình học hệ thống số hữu tỷ bằng cách như sau:

Trên một đường thẳng nào đó (trục số) chúng ta đánh dấu một đoạn thẳng từ 0 đến 1 (hình 8). Nói chung, có thể chọn một cách tùy ý, độ dài đoạn thẳng đơn vị. Các số nguyên dương và nguyên âm được biểu diễn bởi tập hợp những điểm cách đều nhau trên trục số, các số dương được ghi ở bên phải, các số âm được ghi ở bên trái số 0.

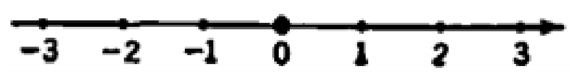


Fig. 8. The number axis.

Muốn biểu diễn các số có mẫu số là *n*, chúng ta chia mỗi đoạn có độ dài đơn vị ra *n* phần bằng nhau, các điểm chia biểu thị các phân số có mẫu số *n*. Nếu chúng ta làm như thế với những giá trị *n* tương ứng với mọi số tự nhiên, thì mỗi số hữu tỷ sẽ được biểu diễn bởi một điểm nào đó của trục số. Chúng ta quy ước gọi những điểm đó là những "điểm hữu tỷ", nói chung thì các thuật ngữ "số hữu tỷ" và "điểm hữu tỷ" được gọi là đồng nghĩa.

Trong §1, chương I, chúng chúng ta đã định nghĩa quan hệ A < B đối với số tự nhiên. Quan hệ đó được thể hiện trên trục số như sau: nếu số tự nhiên A nhỏ hơn số tự nhiên B thì số tự nhiên A ở bên trái số tự nhiên B. Vì quan hệ hình học nêu trên được thiết lập cho mọi cặp điểm hữu tỷ, cho nên chúng ta phải mở rộng quan hệ bất đẳng thức số học để bảo toàn thứ tự hình học đó đối với các điểm đang xét. Điều này có thể đạt được, nếu thừa nhận định nghĩa sau đây: chúng ta nói rằng số hữu tỷ A nhỏ hơn số hữu tỷ B (A < B) hoặc B lớn hơn số A (B > A), nếu hiệu B – A dương. Do đó, những điểm (số) ở giữa A và B (nếu A < B) là những điểm đồng thời > A và < B. Mỗi cặp điểm A và B như vậy cùng với mọi điểm ở giữa chúng được gọi là một đoạn và được ký hiệu là [A, B], còn tập hợp chỉ gồm những điểm ở bên trong được gọi là một khoảng và được ký hiệu là (A, B).

Khoảng cách từ một điểm A bất kỳ đến gốc 0 được xem như là một số dương và được gọi là giá trị tuyệt đối của A với ký hiệu là

$$|A|.$$

nếu A > 0 thì |A| = A, nến A < 0 thì |A| = −A. Rõ ràng nếu A và B cùng dấu thì có đẳng thức |A+B| = |A| + |B|, nếu A và B là khác dấu thì |A+B| < |A| + |B. Kết hợp hai bất đẳng thức đó với nhau chúng ta có bất đẳng thức:

$$|A+B| \leq |A| + |B|$$

đúng với mọi A và B.

Sự kiện có tầm quan trọng nền tảng được hiển thị bằng mệnh đề (định lý) sau đây: các điểm hữu tỷ là trù mật khắp nơi trên trục số. Ý nghĩa của khẳng định này là trong một khoảng bất kỳ, dù nhỏ đến đâu cũng có những điểm hữu tỷ. Muốn chứng minh sự đúng đắn của khẳng định vừa nêu, chỉ cần lấy một số n đủ lớn sao cho khoảng (1, 1/n) nhỏ hơn một khoảng (A, B) cho trước khi đó, có ít nhất một trong những điểm có dạng m/n nằm trong khoảng đã cho. Như vậy không tồn tại một khoảng nào trong trục số (ngay cả khoảng nhỏ nhất mà chúng ta có thể biểu diễn được) mà bên trong nó không có điểm hữu tỷ nào. Từ đó suy ra hệ quả sau: mọi khoảng cách điều chứa một tập hợp vô hạn điểm hữu tỷ. Thực vậy, nếu một khoảng nào đó chỉ chứa một số hữu hạn số hữu tỷ thì, bên trong khoảng tạo bởi hai điểm hữu tỷ kề nhau như thế sẽ không có một điểm hữu tỷ nào cả – điều này mâu thuẫn với sự kiện vừa được chứng minh ở trên.

§2. ĐOẠN THẲNG VÔ TỶ – SỐ VÔ TỶ – GIỚI HẠN

1. Mở đầu

Khi so sánh độ dài 2 đoạn thẳng a và b có thể xảy ra trường hợp a được chứa trong b đúng một số nguyên r lần. Trong trường hợp này độ dài của đoạn b được thể hiện qua độ dài của đoạn a rất đơn giản; độ dài b gấp r lần độ dài a. Có thể xảy ra trường hợp không tồn tại số nguyên r có tính chất như trên, lúc này, nếu chia đoạn thẳng a thành một số phần bằng nhau nào đó, chẳng hạn n phần bằng nhau (mỗi đoạn dài a/n), rồi lấy một số nguyên m lần các phần đó thì được đúng đoạn thẳng b:

(1) $$b = \frac{m}{n} . a$$

Khi có hệ thức (1) thì chúng ta nói rằng hai đoạn a và b thông ước với nhau vì chúng có "một độ đo chung": đó là đoạn thẳng có độ dài a/n được được chứa trong đoạn thẳng b đúng m lần. Một đoạn thẳng b nào đó là thông ước hoặc vô tỷ với đoạn thẳng a tùy thuộc vào việc chọn được hay không hai số tự nhiên m và n (n≠0) sao cho có đẳng thức (1). Để ý đến hình H.9, giả thử chúng ta chọn đoạn thẳng giá trị (0, 1) làm đoạn thẳng a và xét tất cả những đoạn thẳng có thể có được mà một đầu mút trùng với 0. Lúc này chỉ những đoạn thẳng có đầu mút thứ hai trùng với điểm hữu tỷ m/n nào đó là thông ước với đoạn thẳng đơn vị mà thôi.

Fig. 9. Rational points.

Trong thực tiễn đo đạc thì số hữu tỷ là hoàn toàn đủ dùng. Vì các điểm hữu tỷ là trù mật khắp nơi, do đó về mặt lý thuyết có thể cho rằng mọi điểm trên trục số là điểm hữu tỷ không. Nếu thế thì mọi đoạn thẳng đều thông ước với đoạn thẳng đơn vị. Nhưng vấn đề không đơn giản như vậy. Sự xác nhận tình trạng này là một trong những phát minh sáng chói nhất trong toán học ngay từ thời cổ đại (trong trường phái Pichúng tago): tồn tại những đoạn thẳng vô tỷ với nhau hoặc nói cách khác, tồn tại những số vô tỷ. Việc ý thức được sự kiện khoa học có tầm quan trọng lớn lao nhất này mới chỉ là linh cảm. Nó là cơ sở cho cái mà ngày nay chúng chúng ta coi là một phương pháp toán học chặt chẽ và được xem như một cống hiến của các nhà toán học Hy Lạp cho khoa học. Không còn nghi ngờ gì nữa, phát minh tuyệt vời này đã ảnh hưởng sâu sắc đến toàn bộ toán học và ngay cả triết học từ xưa đến nay.

Lý thuyết của đại lượng vô tỷ, được trình bày dưới hình thức hình học trong "the Elements" của Euclid, là một thành tựu tinh vi nhất của toán học Hy Lạp (nó thường được trình bày qua những mẫu kể chuyện của Euclid dùng để giảng dạy ở nhà trường). Mãi đến cuối thế kỷ XX sau những cố gắng của Dedekind, Cantorr và Weierstrass nhằm tạo nên lý thuyết vô tỷ chặt chẽ, thì lý thuyết này mới được đánh giá cao tương ứng với nó. Sau này chúng ta sẽ trình bày lý thuyết đó trên quan điểm số học hiện đại.

Trước hết chúng ta xét: Một đường chéo của hình vuông là vô tỷ với cạnh của nó. Giả thử cạnh hình vuông được chọn làm đơn vị dài. Chúng ta biểu thị độ dài đường chéo của nó là *x*. Theo dịnh lya Pichúng tago, chúng ta có:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

(chúng chúng ta có thể kí hiệu số *x* bằng biểu tượng $\sqrt{2}$). Nếu *x* thông ước với đơn vị thì có thể tìm được hai số nguyên *p* và *q* sao cho x = p/q và chúng ta có đẳng thức

$$p^2 = 2q^2 \tag{2}$$

Có thể giả thiết rằng phân số p/q là tối giản; nếu không thế thì ngay từ đầu chúng ta ước lược cho ước số chung lớn nhất của *p* và *q*. Vế phải có thừa số 2 cho nên p^2 là số chẵn, tức *p* cũng là số chẵn, bởi vì bình phương của một số lẻ cũng là một số lẻ. Bây giờ có thể đặt p = 2r. Khi đó đẳng thức (2) sẽ có dạng:

$$4r^2 = 2q^2 \quad hay \quad 2r^2 = q^2$$

Vì vế trái có thừa số 2 cho nên q^2 chẵn và do đó q cũng chẵn. Như vậy, p và q là các số chẵn, tức là chúng chia hết cho 2, điều này mâu thuẫn với giả thiết phân số tối giản. Như vậy không thể có đẳng thức (2) và *x* không thể là số hữu tỷ.

Có thể phát biểu kết quả này một cách là không có số hữu tỷ nào bằng $\sqrt{2}$

Lập luận vừa nêu đưa một phép dựng hình học đơn giản nhất sẽ dẫn tới một đoạn thẳng vô tỷ với đơn vị. Nếu một đoạn thẳng như vậy được đặt bằng compa từ điểm 0 trên trục số thì điểm dựng được (điểm mút cuối của đoạn thẳng) sẽ không trùng với một số hữu tỷ nào.

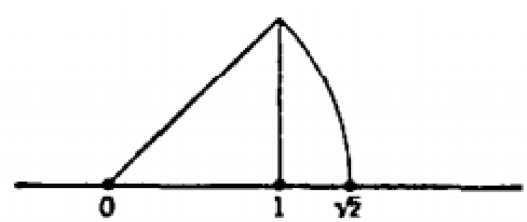


Fig. 10. Construction of $\sqrt{2}$.

Như vậy hệ thống các điểm hữu tỷ (dù rằng trù mật khắp nơi) vẫn không phủ toàn bộ trục số. Tất nhiên, một tập hợp điểm hữu tỷ trù mật khắp nơi mà không phủ được toàn bộ đường thẳng thì thật là lạ lùng và kỳ dị đối với sự nhận thức ngây thơ. Không có một "trực giác" nào giúp chúng ta "thấy được" các điểm vô tỷ và phân biệt chúng với các điểm hữu tỷ. Không lấy gì làm lạ rằng sự phát hiện ra một đoạn thẳng vô tỷ đã làm xôn xao các nhà toán học và các nhà tư tưởng Hy lạp. Sự tồn tại đoạn thẳng vô tỷ đến nay vẫn còn gây ấn tượng mạnh mẽ cho những người có xu hướng suy tưởng sâu sắc. Việc dựng theo ý muốn tùy ý một số đoạn thẳng vô tỷ với đơn vị là không có gì khó khăn. Điểm mút của tất cả đoạn thẳng như vậy – với điều kiện đầu của chúng phải trùng với điểm 0 – sẽ tạo thành tập hợp các điểm vô tỷ. Lưu ý rằng khi đưa số hữu tỷ vào, chúng ta có một nguyên tắc chủ đạo là: đảm bảo đo được độ dài các đoạn thẳng bằng các số, và nguyên tắc này tiếp tục chỉ đạo chúng chúng ta khi xét đến các đoạn thẳng vô tỷ. Nếu chúng ta muốn có một tương ứng hai chiều giữa một bên là các số và một bên là các điểm trên trục số thì không thể tránh khỏi phải đưa số vô tỷ vào.

Để tóm lại những điều đã nói cho đến bây giờ, chúng ta kết luận rằng số vô tỷ biểu thị cho độ dài của đoạn thẳng vô tỷ với đơn vị. Trong các mục sau, chúng ta phải chính xác hóa một vài định nghĩa thuần túy hình học còn mơ hồ để đi đến một định nghĩa thỏa mãn quan điểm logic chặt chẽ. Khi xem xét vấn đề này chúng ta sẽ bắt đầu từ các phân số thập phân.

Bài tập: 1) Chứng minh $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

2) Chứng minh $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, và $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ là số vô tỷ. (gợi ý: giả sử đó là một số hữu tỷ *r* nào đó, đặt $\sqrt{3}$ = r – $\sqrt{2}$, bình phương 2 vế, dẫn đến $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.)

3) Chứng minh $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

2. Phân số thập phân và số thập phân vô hạn.

Muốn phủ trục số bằng một tập hợp điểm trù mật khắp nơi thì không cần phải dùng đến toàn bộ tập hợp số hữu tỷ, chẳng hạn chỉ cần dùng những số hình thành nên do chia đoạn thẳng đơn vị thành 10, 100, 1000, v.v… phần bằng nhau. Các điểm chia thu được sẽ tương ứng với "các số thập phân". Thí dụ điểm 0.12 = 1/10 + 2/100 tương ứng với một điểm nằm ở trong khoảng đơn vị đầu tiên, ở trong "phân khoảng" thứ hai dài 10^{-1}, cụ thể là điểm đầu của "phân khoảng con" thứ ba dài 10^{-2}. Nếu phân số thập phân loại này chứa n số sau dấu phẩy thì nó có dạng:

$$f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \cdots + a_n 10^{-n},$$

trong đó *z* là số nguyên, còn các hệ số *a* là các chỉ số 0, 1, 2,…, 9 biểu thị số phần mười, số phân trăm v.v… Số *f* được viết gọn trong hệ thập phân như sau: z , $a_1a_2a_3…a_n$. Chúng ta thấy ngay rằng các số thập phân loại này có thể hiện thị được dưới dạng tỷ số p/q, trong đó q = 10^n. thí dụ: f = 1.314 = 1 + 3/10 + 1/100 +4/1000 = 1314/1000. Nếu *p* và *q* có thừa số chung thì có thể rút gọn phân số đi, lúc này mẫu số sẽ là một ước số nào đó của 10^n. Mặt khác, một phân số tối giản mà mẫu số không phải là ước số của lũy thừa của 10 thì không thể viết dưới dạng phân số thập phân thuộc loại nói trên. Thí dụ, $\frac{1}{5} = \frac{5}{10}$ = 0.2, $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000}$ = 0.004; nhưng $\frac{1}{3}$ không thể viết thành phân số thập phân. Thực vậy, từ đẳng thức:

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n}$$

suy ra: $10^n = 3b$

Không thể có đẳng thức cuối này vì 3 không phải là thừa số của bất cứ lũy thừa nào của 10.

Bây giờ chúng ta lấy một điểm P tùy ý trên trục số không tương ứng với số thập phân hữu hạn nào cả; chẳng hạn, có thể lấy điểm hữu tỷ $\frac{1}{3}$ hoặc điểm vô tỷ $\sqrt{2}$. Như vậy, điểm P không bao giờ là điểm chia trong quá trình phân chia liên tiếp đoạn thẳng đơn vị thành 10 phần bằng nhau: nó sẽ nằm bên trong các khoảng thập phân mà độ dài của các đoạn này giảm đi vô hạn; các mút của những khoảng này tương ứng với những phân số thập phân hữu hạn và dẫn tới điểm P với độ chính xác tùy ý. Chúng ta hãy xét tỉ mỉ hơn quá trình xấp xỉ này.

Giả thiết rằng P nằm trong khoảng đơn vị thứ nhất. Phân khoảng đó ra 10 phần bằng nhau mỗi phần dài 10^{-1} và giả thiết điểm P rơi vào trong khoảng thứ ba chẳng hạn. Lúc này chúng ta có thể khẳng định rằng P bao hàm giữa các phân số thập phân 0,2 và 0,3. Chúng ta tiếp tục chia khoảng 0,2 và 0,3 ra 10 phần bằng nhau mỗi phần dài 10^{-2} và thấy rằng P rơi vào trong khoảng thứ tư chẳng hạn. Lại chia khoảng này ra 10 phần bằng nhau, chúng ta thấy rằng điểm P rơi vào trong khoảng thứ nhất chẳng hạn có độ dài 10^{-3}. Bây giờ có thể nói rằng điểm P bao hàm giữa 0,230 và 0,231. Quá trình này có thể kéo dài vô hạn và dẫn đến mọi dãy vô hạn các chữ số a_1a_2 …,a_n,… có tính chất như sau: điểm P nằm trong khoảng I_n mà điểm mút đầu bên chúng tay trái là $0,a_1a_2a_3…a_{n-1}a_n$, điểm mút bên chúng tay phải là $0,a_1a_2a_3…a_{n-1}(a_n+1)$ và độ dài I_n bằng 10^{-n}. Nếu xét theo thứ tự n=1,2,3,4,… chúng ta thấy rằng mỗi đoạn I_1 ,I_2 ,I_3 … nằm trong khoảng đứng trước nó, độ dài của những khoảng ấy là 10^{-1}, 10^{-2},10^{-3},... tiến tới 0. Chúng ta nói vắn tắt hơn là: điểm P nằm trong một dãy thập phân thắt lại . Thí dụ, nếu điểm P là điểm hữu tỷ $\frac{1}{3}$ thì mọi chữ số a_1,a_2,a_3… bằng 3 và P nằm trong một khoảng I_n tùy ý từ 0,333…33 đến 0,333…34 tức là lớn hơn 0,333…33 và nhỏ hơn 0,333…34 với số chữ số tùy ý sau dấu phẩy. Trong trường hợp này chúng ta nói rằng số thập phân *n* chữ số 0,333…33 "dần tới" $\frac{1}{3}$ khi *n* tăng lên vô hạn. Chúng chúng ta viết là:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

các dấu chấm có nghĩa là phân số có thể kéo dài "đến vô hạn".

Điểm vô tỷ $\sqrt{2}$ được xem xét ở mục 1 cũng dẫn tới một số thập phân vô hạn. Nhưng trong trường hợp này thì quy luật của các chữ số liên tiếp trong dạng thập phân đó đã không rõ ràng. Khó mà chỉ ra một công thức cho chúng ta chữ số đứng ở vị trí *n,* mặc dù có thể tính được tùy ý bao nhiêu chữ số:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$
$$(1.4)^2 = 1.96 < 2 < (1.5)^2 = 2.25$$
$$(1.41)^2 = 1.9881 < 2 < (1.42)^2 = 2.0264$$
$$(1.414)^2 = 1.999396 < 2 < (1.415)^2 = 2.002225$$
$$(1.4142)^2 = 1.99996164 < 2 < (1.4143)^2 = 2.00024449, \text{ etc.}$$

Để định nghĩa tổng quát, chúng ta nói rằng một điểm P không biểu diễn được dưới dạng số thập phân với một số hữu hạn các chữ số thập phân được biểu diễn dưới dạng một số thập phân tuần hoàn $z,a_1a_2a_3\ldots$ nếu điểm ấy nằm trong khoảng có độ dài 10^{-n} với $z,a_1a_2a_3\ldots, a_n$ là điểm mút đầu.

Như vậy chúng ta đã thiết lập sự tương ứng giữa tất cả các điểm của trục số và tất cả các phân số thập phân (hữu hạn và vô hạn). Bây giờ chúng ta đưa ra một định nghĩa mở đầu: "số" là một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn. Những số thập phân vô hạn không hiển thị cho số hữu tỷ được gọi là những số vô tỷ.

Cho đến giữa thế kỷ XIX những lý giải tương tự như những lý giải như trên vẫn được coi là đủ để xây dựng hệ thống số hữu tỷ và vô tỷ, sự liên tục của số. Những thành tựu phi thường của toán học bắt đầu từ thế kỷ XVII, đặc biệt sự phát triển của hình học giải tích và phép tính vi phân, đã dựa hẳn trên quan niệm như thế về hệ thống số. Tuy nhiên khi xem xét lại một cách có phê phán các nguyên tắc và củng cố lại các kết quả, người chúng ta cảm thấy ngày càng phân tích rõ ràng, chính xác và sâu sắc hơn khái niệm số vô tỷ. Nhưng trước khi phác họa lý thuyết về số liên tục hiện đại, chúng ta cần xem xét và làm rõ – một phần nào đó dựa trên cơ sở trực giác – một trong những khái niệm toán học cơ bản – khái niệm giới hạn.

3. Giới hạn. Cấp số nhân vô hạn.

Như đã biết trong mục trước, có khi một số hữu tỷ *s* nào đó được xấp xỉ bằng một dãy các số hữu tỷ khác s_n, trong đó chỉ số *n* nhận tất cả các giá trị

1, 2, 3,… chẳng hạn với: s =1/3, thì s_1 = 0,3 , s_2 =0,33 , s_3=0,333 v.v… Một thí dụ nữa, chúng ta chia khoảng đơn vị ra hai phần bằng nhau, rồi lại chia nửa thứ hai thành hai phần bằng nhau, rồi chia khoảng thứ hai vừa tìm được thành hai phần bằng nhau v.v… cho đến khi khoảng nhỏ nhất tìm được bằng cách như thế bằng 2^{-n}, trong đó n là số cho trước tùy ý lớn, chẳng hạn n = 100, n = 100000 v.v.. sau đó cộng tất cả các khoảng đó lại với nhau (không kể khoảng cuối cùng), chúng ta được độ dài:

(3) $$s_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^n$$

Chúng ta thấy rằng s_n khác 1 một lượng $(1/2)^n$ và sự sai khác đó nhỏ bao nhiêu cũng được, hoặc "dần tới 0" khi *n* tăng vô hạn. Nói rằng hiệu đó bằng 0 khi *n* "vô hạn" là không có nghĩa. Vô hạn trong toán học liên kết với một quá trình nào đó không có cái tận cùng và không khi nào liên hệ với một đại lượng thực tại. Để mô tả sự biến thiên của s_n, chúng ta nói rằng tổng s_n dần tới giới hạn 1 khi *n* dần tới vô hạn, và viết là:

(4) $$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots,$$

trong đó vế phải là một dãy vô hạn. Không nên hiểu đẳng thức sau cùng này theo nghĩa cộng vô hạn các số hạng: đó chỉ là cách viết tắt của sự kiện: 1 là giới hạn của các tổng hữu hạn s_n khi *n* dần tới vô hạn (nhưng không bao giờ bằng vô hạn). Như vậy, đẳng thức (4) có một ý nghĩa chính xác thể hiện qua dãy từ bắt buộc sau đây:

1 bằng giới hạn khi n tiến tới vô hạn của biểu thức:

(5) $$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

và viết ngắn gọn hơn như sau:

(6) $$s_n \to 1 \text{ as } n \to \infty.$$

Khi nói về các giới hạn, chúng ta còn xem xét thêm một thí dụ nữa. Với $-1<q<1$, như q=1/3, q=−4/5, chúng ta có một dãy vô hạn các lũy thừa của *q*:

$$q, q^2, q^3, q^4, \ldots, q^n, \ldots$$

sẽ tiến dần đến 0 khi n tăng. Nếu *q* là số âm thì dấu của xen kẽ nhau: sau + đến − và ngược lại. Bởi thế q^n dẫn tới 0 "từ hai phía". Chẳng hạn nếu q = 1/3 thì q^2 = 1/9, q^3 = 1/27, q^4 = 1/81,…, trong khi nếu q = −1/2 thì q^2 = 1/4, q^3 = −1/27, q^4 = 1/81, … Chúng ta khẳng định rằng: giới hạn của q^n, khi n tiến tới vô hạn, bằng 0 hoặc viết bằng ký hiệu là

$$(7) \qquad q^n \to 0 \text{ as } n \to \infty, \text{ for } -1 < q < 1.$$

(Nếu q > 1 hoặc q < −1 thì q^n không dẫn tới 0, mà tăng lên vô hạn về giá trị tuyệt đối).

Chúng ta nên nêu chứng minh chặt chẽ của khẳng định (7). Ở phần trước chúng ta đã thấy rằng với mọi *n* nguyên dương và p > −1 có bất đẳng thức $(1 + p)^n \geq 1 + np$. Nếu *q* là số bất kì nằm giữa 0 và 1, thí dụ q = 9/10, có thể đặt q = 1/(1+p), trong đó p > 0. Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{q^n} = (1+\mathrm{p})\mathrm{n} \geq 1 + \mathrm{np} \geq \mathrm{np}$$

hay

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{n}.\frac{1}{p}$$

q^n nằm giữa số 0 và số (1/n).(1/p), cái mà nó dần tới 0 khi n tăng vô hạn, ở đây vì p không đổ. Điều này cho thấy $q^n \to 0.$. Nếu q là số âm thì chúng ta đặt q = −1/(1+p), như vậy q^n sẽ nằm giữa số 0 và (1/n).(−1/p), lập luận cũng sẽ được kết thúc như ở trên.

Bây giờ chúng ta xét cấp số nhân:

$$(8) \qquad s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

(Trường hợp q = ½ đã được xét ở trên). Như đã chứng minh ở phần trước, tổng s_n còn có thể được biểu thị dưới dạng đơn giản và ngắn gọn hơn. Nhân s_n với *q* chúng ta được:

$$(8a) \qquad qs_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$

và lấy (8) trừ đi (8a) chúng ta được kết quả là:

$$(1 - q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

sau khi chia cho 1 − q

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

Chúng ta sẽ gặp khái niệm giới hạn nếu cho n tăng lên vô hạn. Chúng ta vừa mới thấy rằng $q^{n+1} = q \,.\, q^n$ dần tới 0 nếu −1 < q < 1, do đó có thể kết luận:

$$(9) \qquad s_n \to \frac{1}{1-q} \text{ as } n \to \infty, \text{ for } -1 < q < 1.$$

Cũng có thể viết được kết quả đó nếu dùng dãy vô hạn:

$$(10) \qquad 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \text{ for } -1 < q < 1.$$

Thí dụ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

tương ứng hoàn toàn với đẳng thức (4); chúng ta cũng có:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots = \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-1/10} = 1,$$

hay nói cách khác 0,9999… = 1. Hoàn toàn tương tự như vậy, số thập phân hữu hạn 0,2374 và số thập phân vô hạn 0,23739999… sẽ được biểu thị cùng một số. Chúng ta sẽ trở lại khái niệm giới hạn trong chương VI khi xem xét vấn đề này với quan điểm hiện đại và chặt chẽ hơn về mặt logic.

<u>Bài tập:</u> 1) Chứng minh $1 - q + q^2 - q^3 - q^4 \ldots = \frac{1}{1+q}$, nếu $|q|<1$

2) Tìm giới hạn của chuỗi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ở đây $a_n = n/(n+1)$?

(gợi ý: viết lại $n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$, thấy rằng số hạng thứ 2 tiến tới 0.)

3) Cái gì là giới hạn của

$$\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

khí n tiến tới ∞.(gợi ý: viết lại dưới dạng

$$\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}})$$

4) Chứng minh, với $|q|<1$ thì $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}$.

5) Cái nào là giới hạn của chuỗi

$$1 - 2q + 3q^2 - 4q^3 + \ldots$$

6) Cái nào là giới hạn của $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$, $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$, và $\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$.

4. Số hữu tỉ và số thập phân tuần hoàn.

Những số hữu tỉ p/q không biểu thị được dưới dạng số thập phân hữu hạn, có thể phân tích được thành những số thập phân vô hạn nhờ phương pháp chia "kéo dài" thông thường. Số dư trong mỗi giai đoạn của quá trình này phải khác 0 vì nếu không thế thì phân số đã là hữu hạn. Những số dư khác nhau chỉ có thể là những số nguyên từ 1 đến q − 1, do đó có tất cả q − 1 khả năng đối với giá trị của các số dư đó. Điều này có nghĩa là sau q phép chia thì một số dư k nào đó sẽ xuất hiện hai lần. Nhưng như thế thì tất cả các số dư tiếp sau cũng sẽ được lặp lại theo thứ tự mà chúng đã xuất hiện sau lần xuất hiện đầu tiên của số dư k. Bởi thế, dạng thập phân của mọi số hữu tỉ đều có tính chất tuần hoàn, sau một số số lẻ thập phân nào đó thì một nhóm các số lẻ thập phân s được lặp lại vô hạn lần. Thí du, 1/6=0.16666666…; 1/7= 0.142857142857142857…; 1/11=0.090909…; 122/1100=0.11090909…; 11/90=0.122222222…vv. (Về những số hữu tỉ được biểu thị dưới dạng số thập phân hữu hạn, chúng ta chú ý rằng sau số lẻ thập phân cuối cùng của nó thì chữ số 0 sẽ được lặp lại vô hạn lần, do đó, những số hữu tỉ loại này cũng không bị loại ra khỏi nhận xét tổng quát nêu trên). Qua những ví dụ đã dẫn chúng ta thấy rằng ở một số dạng thập phân của số hữu tỉ thì "cái đầu" không tuần hoàn đứng trước "cái đuôi" tuần hoàn.

Ngược lại, có thể chứng minh rằng mọi số thập phân tuần hoàn là số hữu tỉ. Chẳng hạn, chúng ta xét phân số thập phân tuần hoàn:

$$p = 0{,}332222\ldots$$

Có thể viết: $p = 33/100 + 2.10^{-3}(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots)$. Biểu thức trong ngoặc là cấp số nhân vô hạn:

$$1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9}$$

Nghĩa là:

$$\mathrm{p} = \frac{33}{100} + 2.10^{-3}.\frac{10}{9} = \frac{2970+20}{9.10^{3}} = \frac{2990}{9000} = \frac{299}{900}$$

Chứng minh cũng được tiến hành như vậy trong trường hợp tổng quát, nhưng đòi hỏi phải đưa vào một số ký hiệu cồng kềnh phức tạp. Chúng ta xét phân số tuần hoàn tổng quát:

$$p = 0.a_1a_2a_3\ldots a_mb_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_n$$

Chúng ta đặt $0.b_1b_2\ldots b_n = B$ là chu kỳ. Bây giờ có thể viết:

$$p = 0.a_1a_2a_3\dots a_m + 10^{-m}.B.(1 + 10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} \dots).$$

Biểu thức trong ngoặc là cấp số nhân vô hạn với $q = 10^{-n}$. Tổng cấp số nhân này theo công thức (10) bằng $\frac{1}{1-10^{-n}}$ và ta có:

$$p = 0.a_1a_2a_3\dots a_m + \frac{10^{-m}.B}{1-10^{-n}}$$

Bài tập: 1) Khai triển các phân số $\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{1}{17}, \frac{2}{17},$ thành phân số thập phân và xác định chu kì.

*2) Số 142,857 có tính chất là khi nhân với bất kì số nào trong các số 2, 3, 4, 5 hoặc 6 chỉ được một hoán vị vòng tròn của chính nó. Khai triển tính chất này, sử dụng khai triển của $\frac{1}{7}$ thành phân số thập phân.

3) Khai triển số hữu tỷ của bài tập 1) từ hệ thập phân sang hệ cơ số 5, 7, và 12.

4) Khai triển một-thứ ba thành một số cặp đôi.

5) Viết .11212121… thành dạng phân số. Tìm giá trị của của số thành nếu nó ở trong hệ thống cơ số 3 hoặc 5.

5. Định nghĩa tổng quát số hữu tỉ bằng các đoạn thẳng

Chúng ta đưa ra định nghĩa sơ bộ ở trang trước là: "Số" là số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn. Chúng ta đã qui ước gọi những số thập phân không hiển thị được bởi phân số là số vô tỉ. Dựa vào những kết quả thu được trong mục trước, chúng ta có thể phát biểu như sau: "số liên tục hoặc hệ thống các số thực (ở đây số "thực" đối lập với số "ảo" hoặc "phức" sẽ giới thiệu ở §5) là toàn bộ các số thập phân vô hạn. (khi viết thêm các số 0 vào thì số thập phân hữu hạn có dạng vô hạn, hoặc có một phương pháp khác thay chữ số cuối cùng *a* của phân số bởi *a – 1* rồi thêm vào đấy một dãy vô hạn số 9. Chẳng hạn 0,999… = 1, xem mục 3). Số hữu tỉ là số thập phân tuần hoàn, số vô tỉ là số thập phân không tuần hoàn. Song, một định nghĩa như vậy là chưa hoàn toàn đầy đủ. Thực vậy, như chúng ta đã thấy trong chương I, hệ thập phân về bản chất không có gì đặc biệt so với các hệ thống khác. Chẳng hạn, chúng ta cũng có thể xử lý hoàn toàn như thế đối với hệ nhị phân. Do đó, việc đưa ra một định nghĩa tổng quát hơn của continuum số, độc lập với việc chọn cơ số 10 hoặc cơ số bất kỳ nào khác, là rất cần thiết. Có lẽ, phương pháp đơn giản nhất để khái quát hóa là như sau:

Chúng ta xét một dãy nào đó các đoạn thẳng $I_1, I_2, I_3, \dots I_n$ với các đầu mút hữu tỉ; chúng ta giả thiết rằng mỗi đoạn tiếp sau đều nằm trong đoạn trước và độ dài đoạn thứ *n* (I_n) dần tới 0 khi *n* tăng vô hạn. Chúng ta gọi dãy các đoạn "lồng" với nhau như vậy là dãy các đoạn thắt. Trong trường hợp thập phân thì độ dài I_n bằng 10^{-n}, nhưng nó có thể bằng 2^{-n}, hoặc chỉ cần nó nhỏ hơn 1/n cũng được. Bây giờ, chúng ta đưa ra một mệnh đề sau đây được xem như một định đề hình học cơ bản với mọi dãy các đoạn thắt: Với mọi dãy các đoạn thắt, tồn tại một và chỉ một điểm trên trục số nằm trong mọi đoạn thẳng đó (Rất rõ ràng rằng không thể tồn tài quá một điểm như vậy vì độ dài các đoạn thẳng dần tới 0, mà hai điểm khác nhau thì không thể ở trong một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy). Điểm đó, theo định nghĩa, được gọi là số thực, nếu không hữu tỉ thì được gọi là vô tỉ. Nhờ định nghĩa này, chúng ta thiết lập được sự tương ứng hoàn toàn giữa các điểm và các số. Ở đây, không có gì hoàn toàn mới: đó chỉ là định nghĩa số như một số thập phân vô hạn dưới dạng tổng quát hơn mà thôi.

Ở đây, hẳn mọi bạn đọc sẽ có những hoài nghi hoàn toàn có cơ sở. Thực ra thì "điểm" trên trục số không tương ứng với số hữu tỉ nằm trong mọi đoạn thắt, là cái gì? Câu trả lời của chúng chúng ta là như sau: sự tồn tại những điểm trên trục số (xem như một hình ảnh hình học) trong mọi đoạn thắt có các mút hữu tỉ là một định đề hình học cơ bản. Không cần qui nó về những mệnh đề toán học khác. Chúng ta thừa nhận nó như đã thừa nhận các tiên đề và định đề khác trong toán học là dựa vào sự có lý về mặt trực giác và dựa vào lợi ích của nó trong việc xây dựng một hệ thống mệnh đề toán học liên tiếp. Một cách thuần túy hình thức chúng ta có thể xuất phát từ một trục số mà chúng ta tưởng tượng chỉ gồm những điểm hữu tỉ rồi sau đó định nghĩa điểm vô tỉ như một ký hiệu biểu thị cho một dãy các đoạn thắt nào đó.

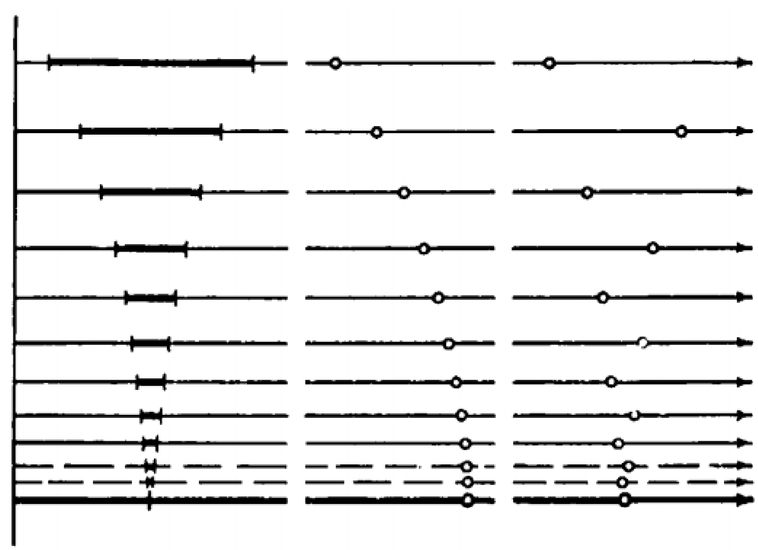


Fig. 11. Nested intervals. Limits of sequences.

Điểm vô tỉ được xác định hoàn toàn bởi một dãy các đoạn thắt mà độ dài dần tới 0. Như thế định đề cơ bản của chúng ta đã thực sự là một định nghĩa. Sau khi dãy các đoạn thắt đã được dựa vào nhờ trực giác nhằm khẳng định "sự tồn tại" của điểm vô tỉ thì, việc thừa nhận một định nghĩa như thế có nghĩa là sự vứt bỏ "cái mạng" trực giác mà lập luận của chúng ta đã dựa vào đó và, đã ý thức được rằng mọi tính chất toán học của các điểm vô tỉ là có thể nhận thức được và biểu diễn được với tư cách các tính chất của dãy các đoạn thắt. Với quan điểm toán học thuần túy thì, điều quan trọng ở đây là, nếu thừa nhận định nghĩa số vô tỉ như dãy các đoạn thắt, chúng ta có thể định nghĩa phép cộng, phép nhân v.v… và quan hệ bất đẳng thức bằng cách mở rộng trực tiếp các định nghĩa tương ứng trong trường số hữu tỉ, do đó bảo toàn cả những định luật cơ bản trong trường số hữu tỉ. Chẳng hạn, muốn tính tổng hai số vô tỉ α và β nhờ hai dãy các đoạn thắt xác định ra các số α và β, chúng ta xây dựng một dãy các đoạn thắt mới bằng cách cộng các điểm đầu và điểm cuối tương ứng của các đoạn thẳng nằm trong các dãy cho trước với nhau. Cũng có thể làm như vậy với tích α β, hiệu α – β và thương . Dựa trên những định nghĩa này còn có thể chứng tỏ rằng các định luật số học đã được xét đến trong 1 của chương này sẽ không bị hủy bỏ khi chuyển sang số vô tỉ. Chúng ta sẽ không trình bày tỉ mỉ vấn đề đó ở đây.

Việc thử lại tất cả các định luật trên là đơn giản và được thực hiện một cách trực tiếp không có khó khăn gì đặc biệt, nhưng nó có thể gây ra sự buồn chán cho những bạn đọc mới bắt đầu còn đang chú ý nhiều đến vấn đề có thể làm gì nhờ vào toán học hơn là việc phân tích các cơ sở logic của nó. Không hiếm có những cuốn giáo khoa mới nhất về toán ngay từ những trang đầu tiên đã cho những lý giải cầu kỳ về hệ thống số thực. Bạn đọc nào đã không để ý đến những trang sách đó có thể yên tâm vì, cho đến tận cuối thế kỷ XIX, tất cả các nhà toán học lớn đều còn phát minh trên cơ sở khái niệm "ngây thơ" về continuum số bằng trực giác.

Cuối cùng, về quan điểm vật lý học thì định nghĩa số vô tỉ thông qua dãy các đoạn thắt phù hợp một cách tự nhiên với sự xác định số một đại lượng nào đó bằng một loạt các phép đo liên tiếp với độ chính xác ngày càng lớn. Mọi thao tác được thực hiện để đo chiều dài của một đoạn thẳng nào đó chẳng hạn, chỉ có ý nghĩa thực tế trong phạm vi sai số cho phép nào đó, độ lớn của sai số này do độ chính xác của dụng cụ quyết định. Vì các số hữu tỉ là trù mật khắp nơi trên trục số, cho nên một thao tác vật lý nào đó, dù chính xác đến đâu cũng không cho phép phân biệt độ dài cho trước là hữu tỉ hay vô tỉ. Vì thế, có thể cho rằng không cần đến số vô tỉ để mô tả các hiện tượng vật lý. Nhưng trong chương VI chúng chúng ta sẽ thấy rõ ưu thế thực sự của việc dùng số vô tỉ để mô tả về mặt toán học các hiện tượng vật lý, thể hiện ở sự đơn giản hóa lạ thường quá trình mô tả nhờ khả năng sử dụng tự do khái niệm giới hạn mà cơ sở của nó là continuum số.

*6. Các phương pháp để xác định số vô tỉ. Lát cắt Dedekind.

Richard Dedekind (1831 – 1916) – một trong những người đặt cơ sở xuất sắc nhất cho việc phân tích các cơ sở của toán học về mặt logic và triết học, đã chọn một con đường khác để định nghĩa số vô tỉ. Bài báo của ông *"Stetigkeit und irrationelle Zahlen"(1872)* (tiếng Đức nghĩa là "sự liên tục và số vô tỉ") và *"Was sind und was sollen die Zahlen" (1877)* (nghĩa là "số là gì và số phải như thế nào") đã có ảnh hưởng sâu sắc đến việc nghiên cứu những nguyên lý cơ bản của toán học. Dedekind đã thích những khái niệm trừu tượng tổng quát hơn là những phép dụng cụ thể kiểu như dãy các đoạn thắt. Qui trình của ông dựa trên tư tưởng "lát cắt". Bây giờ chúng ta sẽ trình bày qui trình đó.

Chúng ta giả thử rằng bằng một cách nào đó chúng ta đã phân chia tập hợp số hữu tỉ thành hai lớp A và B sao cho mọi số b của lớp B lớn hơn mọi số a của lớp A. Mọi sự phân chia như thế gọi là một lát cắt trong phạm vi hữu tỉ. Nếu lát xắt được thực hiện thì phải xảy ra một trong ba khả năng logic sau đây:

1. Tồn tại một phần tử lớn nhất a* trong lớp A. Khả năng này sẽ xảy ra, chẳng hạn trong trường hợp lớp A chứa tất cả số hữu tỉ ≤ 1 và lớp B chưa tất cả số hữu tỉ > 1.

2. Tồn tại một phần tử nhỏ nhất b* trong lớp B. Khả năng này sẽ xảy ra chẳng hạn trong trường hợp lớp A chứa tất cả số hữu tỉ < 1, lớp B chứa tất cả số hữu tỉ ≥ 1.

3. Trong lớp A không có phần tử lớn nhất, trong lớp B không có phần tử nhỏ nhất. Lát cắt loại này xảy ra, chẳng hạn, trong trường hợp lớp A chứa mọi số hữu tỉ mà bình phương của chúng nhỏ hơn 2 còn lớp B chứa mọi số hữu tỉ mà bình phương của chúng lớn hơn 2. Các lớp A và B như vậy đã vét hết mọi số hữu tỉ, bởi vì chúng ta đã chứng minh không có số hữu tỉ nào bình phương lên bằng 2.

Về mặt logic, trường hợp trong lớp A có phần tử lớn nhất a* và trong lớp B có phần tử nhỏ nhất b* sẽ không thể xảy ra, vì số hữu tỉ bao hàm giữa a và b sẽ lớn hơn phần tử lớn nhất trong lớp A và nhỏ hơn phần tử nhỏ nhất trong lớp B; tức là không nằm trong lớp A và cũng không nằm trong lớp B.

Theo Dedekind, trong trường hợp thứ ba – tức là khi không có số hữu tỉ lớn nhất trong lớp A không có số hữu tỉ nhỏ nhất trong lớp B thì lát cắt sẽ là một số vô tỉ nào đó. Dễ dàng thử lại rằng định nghĩa của Dedekind phù hợp với định nghĩa dựa trên cơ sở các đoạn lồng vào nhau: từ một dãy nào đó các đoạn lồng nhau I_1, I_2, I_3,… chúng ta sẽ có một lát cắt nếu chúng ta lấy mọi số hữu tỉ nhỏ hơn mút bên trái của ít nhất một đoạn I_n xếp vào lớp A, còn mọi số hữu tỉ khác xếp vào lớp B.

Về mặt triết học thì định nghĩa số vô tỉ của Dedekind có mức độ trừu tượng cao hơn vì nó không bị giới hạn trong một qui luật toán học xác định các lớp A và B nào. George Cantor (1845 – 1918) đã đề ra một phương pháp khác cụ thể hơn để định nghĩa continuum số thực. Thoạt nhìn thì phương pháp này khác hẳn với phương pháp dùng dãy các đoạn thẳng lồng nhau và phương pháp dùng lát cắt, nhưng nó tương đương với mỗi phương pháp trên ở chỗ, continuum số thu được trên cơ sở ba phương pháp có những tính chất hoàn toàn giống nhau. Tư tưởng của Cantor xuất phát từ: 1) số thực có thể xem như số thập phân vô hạn, 2) số thập phân hữu hạn có thể xem như giới hạn của số thập phân vô hạn. Theo Cantorr, để không phụ thuộc vào số thập phân, chúng ta thừa nhận rằng bất kì dãy a_1, a_2, a_3…các số hữu tỷ là một số thực. Ở đây "sự hội tụ" được hiểu là hiệu "a_m – a_n" giữa hai số hạng của dãy dần tới 0, nếu *m* và *n* đồng thời tăng lên vô hạn độc lập với nhau (các xấp xỉ thập phân liên tiếp có tính chất này vì sau số lẻ thứ *n* hai xấp xỉ bất kỳ sai khác nhau ít hơn). Theo phương pháp của Dedekind thì một số thực có thể được xác định bởi những dãy số hữu tỉ khác nhau, cho nên cần nói thêm rằng, hai dãy a_1, a_2, a_3,… và b_1, b_2, b_3… sẽ xác định cùng một số thực nếu hiệu a_m – a_n dần tới 0 khi n tăng lên vô hạn. Việc định nghĩa phép cộng, phép nhân v.v… theo con đường Dedekind đã vạch ra sẽ không gặp khó khăn gì.

§3. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG PHẠM VI HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

1. Nguyên tắc cơ bản.

Ngay từ đầu thế kỷ XVII, số liên tục đã được thừa nhận như là một cái gì đó đương nhiên hoặc có chịu một sự phê phán qua loa, đã trở thành cơ sở của toán học, đặc biệt của hình học giải tích và phép vi tích phân.

Việc đưa vào số liên tục, cho chúng ta khả năng ứng với mỗi đoạn thẳng xác định một số thực như là "độ dài" của nó. Nhưng còn có thể đi xa hơn nữa. Không chỉ độ dài, mà nói chung, bất kỳ một vật thể hình học nào cũng có ý nghĩa của nó trong thế giới các con số. Bước quyết định theo hướng số học hóa hình học đã được Fermat(1651 – 1665) giải quyết trước năm 1629 và Descartes(1596 – 1650) giải quyết trong năm 1637. Tư tưởng cơ bản của hình học giải tích là việc sử dụng "tọa độ" – những số liên kết với vật thể hình học cho trước và hoàn toàn đặc trưng cho vật thể đó. Phần lớn bạn đọc đã biết tọa độ vuông góc hay tọa độ Đề–cac dùng để xác định vị trí một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Chúng ta sẽ dùng hai đường thẳng vuông góc với nhau trên mặt phẳng: “trục x và trục y”. Những trục này được xem như các đường thẳng số có hướng, chia ra bằng các đơn vị như nhau. Mỗi điểm P (hình 12) được cho tương ứng với hai tọa độ x và y. Những tọa độ này được xác

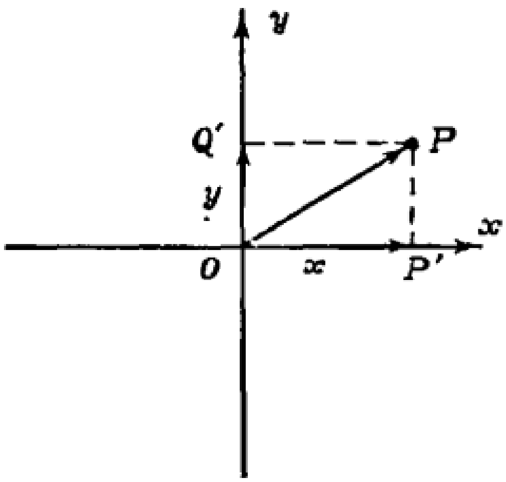


Fig. 12. Rectangular coordinates of a point.

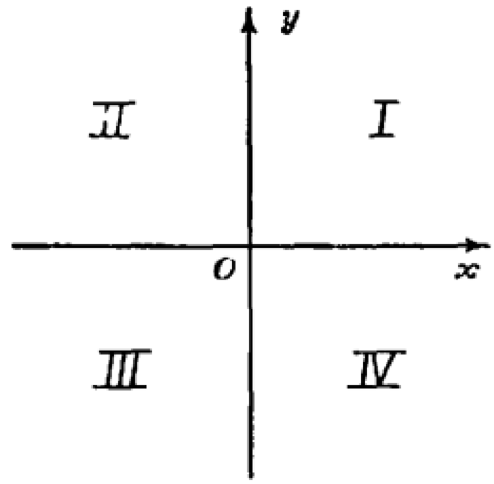


Fig. 13. The four quadrants.

định như sau: chúng ta xét một đoạn thẳng có hướng (vectơ) đi từ “gốc” 0 đến điểm P, rồi chiếu vuông góc vectơ đó xuống cả hai trục, được đoạn chiếu OP′ và OQ′. Với hai số *x* và *y* – là số đo độ dài OP′ và OQ′ được gọi là tọa độ của điểm P. Ngược lại, nếu *x* và *y* là hai số bất kỳ cho trước thì điểm P tương ứng sẽ được xác định duy nhất. Nếu cả hai số *x* và *y* đều dương, thì P nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ (hình 13), nếu *x* và *y* đều âm thì hình P nằm trong góc thứ ba, nếu *x* âm và *y* dương thì điểm P nằm trong góc thứ hai.

Khoảng cách giữa điểm P_1 có tọa độ x_1, y_1 và điểm P_2 có tọa độ x_2, y_2 được cho bởi công thức:

(1) $$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Điều này suy ra ngay từ định lý Pitago (hình 14)

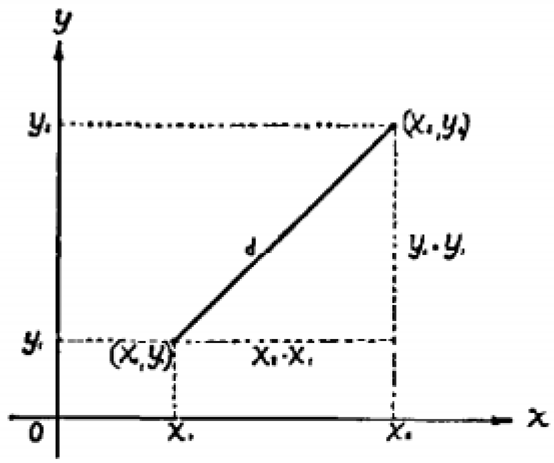


Fig. 14. The distance between two points.

2. Phương trình của đường thẳng và đường cong.

Nếu C là một điểm cố định có tọa độ x = a, y = b thì quỹ tích những điểm P cách C một khoảng *r* cho trước là đường tròn tâm C bán kính *r*. Từ công thức tính khoảng cách giữa hai điểm (1) suy ra những điểm nằm trên đường tròn có tọa độ x,y thỏa mạn phương trình:

(2) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Phương trình này được gọi là phương trình của đường tròn vì nó biểu thị điều kiện cần và đủ để một điểm P tọa độ x, y nằm trên đường tròn tâm C bán kính r.

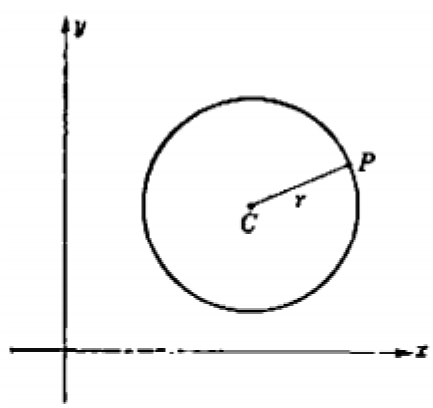


Fig. 15. The circle.

Nếu mở ngoặc, phương trình có dạng:

(3) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k$$

trong đó $k = r^2 - a^2 - b^2$. Đảo lại, nếu cho trước phương trình dạng (3) trong đó a, b và k là những hằng số tùy ý và tổng k + a2 + b2 dương thì nhờ qui trình đại số "bổ sung cho đủ một bình phương" chúng ta có thể viết phương trình đó dưới dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

trong đó $r^2 = k + a^2 + b^2$. Bây giờ thì rõ ràng rằng phương trình (3) xác định một đường tròn bán kính *r* tâm C có tọa độ a, b.

Về hình thức, phương trình của đường thẳng còn đơn giản hơn. Chẳng hạn, phương trình của trục x có dạng y = 0 vì với mọi điểm trên trục này thì tọa độ y bằng 0 và đối với những điểm khác thì không như thế. Cũng vậy, trục y có phương trình x = 0. Các đường thẳng đi qua gốc và chia đôi góc giữa các trục có phương trình là x = y và x = −y. Dễ dàng chứng tỏ rằng mọi đường thẳng đều có phương trình dạng:

(4) $$ax + by = c$$

trong đó a, b, c là những hằng số đặc trưng cho đường thẳng. Cũng như đối với các trường hợp khác, ý nghĩa của phương trình (4) là: một cặp số thực x, y thỏa mãn phương trình là tọa độ của một điểm nào đó trên đường thẳng và ngược lại.

Có thể, khi học ở nhà trường bạn đọc đã biết phương trình dạng:

(5) $$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

biểu thị một elip (h.16). Đường cong này cắt trục x ở các điểm A(p,0) và A′(−p,0) và cắt trục y ở các điểm B(0,q) và B′(0,−q) [Ký hiệu P(x,y) hoặc (x,y) được đưa vào để viết cho gọn, cần hiểu là: "điểm P có tọa độ x và y"]. Nếu p > q thì đoạn AA′ có độ dài 2p được gọi là trục lớn của elip, còn đoạn BB′ có độ dài 2q được gọi là trục nhỏ của elip. Elip là quĩ tích của những điểm P mà tổng các khoảng cách đến các điểm *F* ($\sqrt{p^2 - q^2}$,0) và *F′* ($-\sqrt{p^2 - q^2}$,0) là *2p*. Để luyện tập, bạn đọc có thể thử lại điều đó bằng cách áp dụng công thức (1). Các điểm *F* và *F′* được gọi là tiêu điểm của elip, còn tỉ số $e = \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}$ được gọi là tâm sai.

Phương trình dạng:

(6) $$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$$

biểu thị một hyperbon. Đường cong này gồm hai nhánh cắt trục x ở hai điểm *A*(p,0) và *A′*(−p,0) (h.17). Đoạn *AA′* có độ dài 2p được gọi là trục thực của hyperbon. Hyperbon ra xa vô tận, tiến dần tới hai đường thẳng $qx \pm py = 0$ nhưng không cắt chúng; những đường thẳng đó được gọi là các đường tiệm cận của hyperbon. Hyperbon là quĩ tích những điểm *P′* mà hiệu các khoảng cách đến hai điểm $F(\sqrt{p^2-q^2},0)$ và $F'(-\sqrt{p^2-q^2},0)$ có giá trị tuyệt đối bằng *2p*. Trong trường hợp này, những điểm *F* và *F′* cũng được gọi là các tiêu điểm; tâm sai của hypebon là tỉ số e = $\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}$

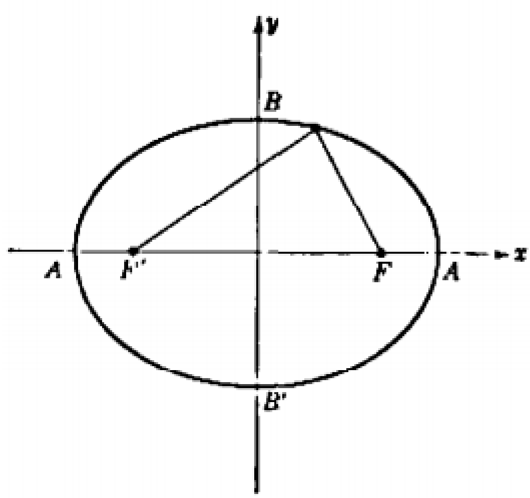


Fig. 16. The ellipse; *F* and *F′* are the foci.

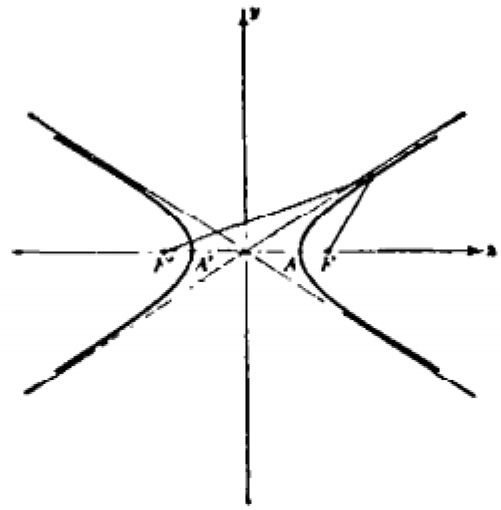


Fig. 17. The hyperbola; *F* and *F′* are the foci.

Phương trình

(7) $$xy = 1$$

cũng xác định một hyperbon, nhưng các đường tiệm cận là hai trục *x* và *y* (h.18). Phương trình của hyperbon "đều" này có ý nghĩa về mặt hình học, là diện tích hình chữ nhật ứng với mọi điểm *P* của đường cong đều bằng 1. Dạng tổng quát hơn của hyperbon đều:

(7a) $$xy = c$$

trong đó *c* là hằng số, chỉ là trường hợp riêng của hyperbon, cũng như đường tròn là trường hợp riêng của elip. Đặc điểm riêng của hyperbon cân là hai tiệm cận của nó (ở đây là hai trục) vuông góc với nhau.

Đối với chúng chúng ta thì tư tưởng chủ đạo sau đây là điều đáng chú ý nhất: có thể hoàn toàn mô tả được các đối tượng hình học dưới hình thức số học hoặc đại số. Đối với các phép toán hình học cũng đúng như vậy. Chẳng hạn, nếu muốn tìm giao điểm của hai đường thẳng, thì chúng ta xét hai phương trình:

(8) $$ax + by = c$$

$$a'x + b'y = c'$$

Muốn tìm các giao điểm của hai đường thẳng này chỉ cần giải hệ (8). Cũng vậy, giao điểm của hai đường cong tùy ý (chẳng hạn, đường tròn $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k$ và đường thẳng $ax + by = c$) được tìm bằng cách giải hệ gồm hai phương trình đó.

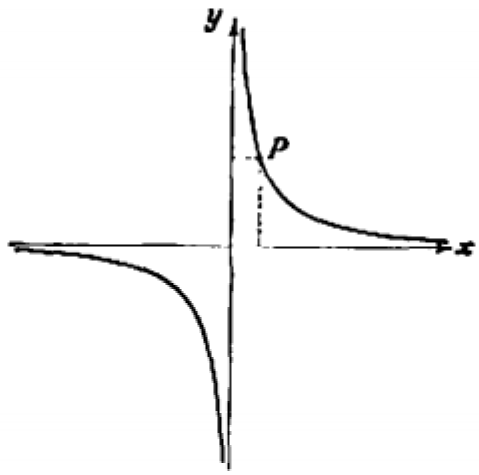


Fig. 18. The equilateral hyperbola $xy = 1$. The area xy of the rectangle determined by the point P (x, y) is equal to 1.

§4. GIẢI TÍCH TOÁN HỌC CÁI VÔ HẠN

1. Các khái niệm cơ bản. Dãy số tự nhiên

Chuỗi số nguyên dương

$$1, 2, 3 \ldots$$

là một thí dụ đầu tiên, quan trọng nhất của tập hợp vô hạn. Không có gì là bí hiểm trong vấn đề xem dãy đó là vô hạn, nó "không có tận cùng": dù số tự nhiên n lớn đến đâu cũng có thể tìm được một số khác $n + 1$ đứng sau nó và lớn hơn nó. Nhưng khi chuyển từ tính ngữ "vô hạn" thực chất có nghĩa là "không có tận cùng" đến danh từ "sự vô hạn" thì không thể đưa vào một giải thiết là: "sự vô hạn" (được ký hiệu ∞) được xem như một con số thông thường. Không thể đưa ký hiệu ∞ vào hệ thống số thực mà không dẫn tới sự hủy bỏ các định luật cơ bản của số học. Hơn nữa, tư tưởng vô hạn còn thâm nhập vào toàn bộ toán học, bởi vì các sự vật toán học thường được nghiên cứu không phải với tư cách các cá thể – riêng biệt từng cái – mà với tư cách các phần tử của những lớp hoặc những tập hợp chứa vô số các phần tử cùng một loại, chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên, số thực hoặc tập hợp các tam giác trong mặt phẳng. Chính vì nguyên nhân này mà cần phân tích chính xác về mặt toán học sự vô hạn. Lý thuyết tập hợp hiện đại do Geog Cantorr và trường phái của ông sáng lập vào cuối thế kỷ XIX, đã giải quyết vấn đề này và đạt được những kết quả đáng kể. Lý thuyết tập hợp của Cantorr đã thâm nhập sâu vào nhiều ngành toán học và đã có ảnh hưởng lớn đến chúng, nó đã có vai trò đặc biệt xuất sắc trong các công trình nghiên cứu có liên quan đến cơ sở logic và triết học của toán. Khái niệm tập hợp là khái niệm cơ bản của lý thuyết Cantorr. Đó chính là một nhóm các sự vật (các phần tử) được xác định theo một qui tắc nào đó cho phép chúng ta có thể phán đoán được rằng một sự vật có thuộc hay không thuộc vào nhóm các sự vật ấy hay không. Có thể dùng tập hợp số tự nhiên, tập hợp các phân số thập phân tuần hoàn, tập hợp các số thực hoặc tập hợp các đường thẳng trong không gian ba chiều làm ví dụ.

Muốn so sánh các tập hợp về mặt "số lượng" các phần tử có trong chúng, cần phải đưa vào trong lý thuyết này khái niệm "sự tương đương" giữa các tập hợp. Nếu có thể cho tương ứng từng đôi các phần tử của hai tập hợp A và B sao cho mỗi phần tử của tập hợp A tương ứng với một và chỉ một phần tử của tập hợp B, mỗi phần tử của tập hợp B cũng tương ứng với một và chỉ một phần tử của tập hợp A thì sự tương ứng như vậy được gọi là *1 – 1*. Chúng ta nói rằng, hai tập hợp A và B tương đương với nhau. Khái niệm tương đương của các tập hợp hữu hạn trùng với khái niệm bằng nhau về số, bởi vì hai tập hợp hữu hạn có tương ứng *1 – 1* khi và chỉ khi chúng có cùng một số phần tử. Cần lưu ý rằng phép đếm cũng dựa trên cơ sở này vì khi chúng ta "đếm" các phần tử của một tập hợp thì quá trình đếm là sự xác định một tương ứng *1 – 1* giữa các phần tử của tập hợp và các số 1, 2, 3…, n.

Muốn thiết lập sự tương đương giữa hai tập hợp hữu hạn, có khi không cần "đếm" các phần tử. Chẳng hạn như không cần đếm cũng biết tập hợp hữu hạn các đường tròn có bán kính đơn vị là tương đương với tập hợp các tâm của chúng.

Ý tưởng của Cantorr là mở rộng khái niệm tương đương tới tập hợp vô hạn, định nghĩa "số học" của vô hạn. Tập hợp các số thực và tập hợp các điểm trên đường thẳng là tương đương, vì sau khi đã chọn gốc và đoạn thẳng đơn vị thì đường thẳng cho trước trở thành "đường thẳng số" và mỗi điểm P của nó tương ứng *1 – 1* với một số thực x như là tọa độ của điểm ấy:

$$P \leftrightarrow x$$

Các số chẵn tạo thành một tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên, còn tất cả các số nguyên lập thành một tập hợp con các số hữu tỉ (khi nói về tập hợp con của một tập hợp S, nghĩa là một tập S' gồm một vài, nhưng không phải tất cả các phần tử của S). Rõ là, nếu một tập hợp hữu hạn, tức là chứa n phần tử, thì không thể tương đương với bất kỳ một tập hợp con nào của nó, bởi vì mọi tập hợp con chứa nhiều nhất $n - 1$ phần tử. Nhưng nếu tập hợp cho trước chứa vô số phần tử thì nó có thể tương đương với một tập hợp con của nó. Ví dụ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

thiết lập sự tương ứng 1 – 1 giữa tập hợp các số tự nhiên và tập hợp các số dương chẵn. Hai tập hợp này là tương đương, tuy rằng tập hợp thứ hai là tập hợp con của tập hợp thứ nhất. Điều này mâu thuẫn với chân lý phổ biến "toàn thể lớn hơn một bộ phận" chứng tỏ có những điều lạ lùng đang chờ đợi chúng chúng ta trong phạm vi "số học vô hạn".

2. Sự đếm được của tập hợp số hữu tỉ và sự không đếm được của continuum.

Một trong những phát minh của Cantorr trong giải tích vô hạn là tập hợp số hữu tỉ (nhận tập hợp vô hạn số tự nhiên làm tập hợp con thì bản thân nó phải vô hạn) tương đương với tập hợp số tự nhiên. Mới nghe thì có vẻ lạ lùng, tập hợp số hữu tỉ ở khắp nơi mà lại không có nhiều phần tử hơn tập hơn số tự nhiên có những phần tử "phân tán" rải rác cách nhau khá xa hay sao. Thực vậy, để bảo toàn thứ tự tăng dần, chúng ta không thể xếp đặc các số hữu tỉ dường như đã có thể làm với các số tự nhiên: số nhỏ nhất a là số đầu tiên, số b tiếp sau nó là số thứ hai v.v…, vấn đề là ở chỗ các số hữu tỉ ở khắp nơi, vì thế không thể chỉ ra một số nào trong chúng là "tiếp theo sau về độ lớn". Nhưng Cantorr đã lưu ý rằng, nếu bỏ yêu cầu "sắp xếp theo độ lớn" thì có khả năng sắp đặt tất cả số hữu tỉ thành một dãy r_1, r_2, r_3, r_4,… tương tự dãy số tự nhiên. Sự sắp xếp các phần tử của một tập hợp nào đó thành dãy thường được gọi là phép đánh số tập hợp đó. Tập hợp có thể đánh số được gọi là tập hợp đếm được. Khi chỉ ra một trong những phương pháp đánh số tập hợp số hữu tỉ và do đó mà thiết lập tính đếm được của nó, Cantorr đã chứng tỏ rằng tập hợp hữu tỉ tương đương với tập hợp số tự nhiên, bởi vì:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_n & \cdots \end{array}$$

tạo nên sự tương ứng đơn trị hai chiều giữa hai tập hợp. Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một phương pháp đánh số tập hợp số hữu tỉ.

Mọi số hữu tỉ được viết dưới dạng *a/b* , trong đó *a* và *b* là các số nguyên, tất cả những số này có thể đặt trong một mảng, với *a/b* trong cột thứ *a* và dòng thứ *b*. Thí dụ 3/4 ở cột thứ 3 và dòng thứ 4 của bảng dưới đây. Tất cả số hữu tỉ bây giờ có thể xắp xếp theo cách như đã chỉ trên hình 19.

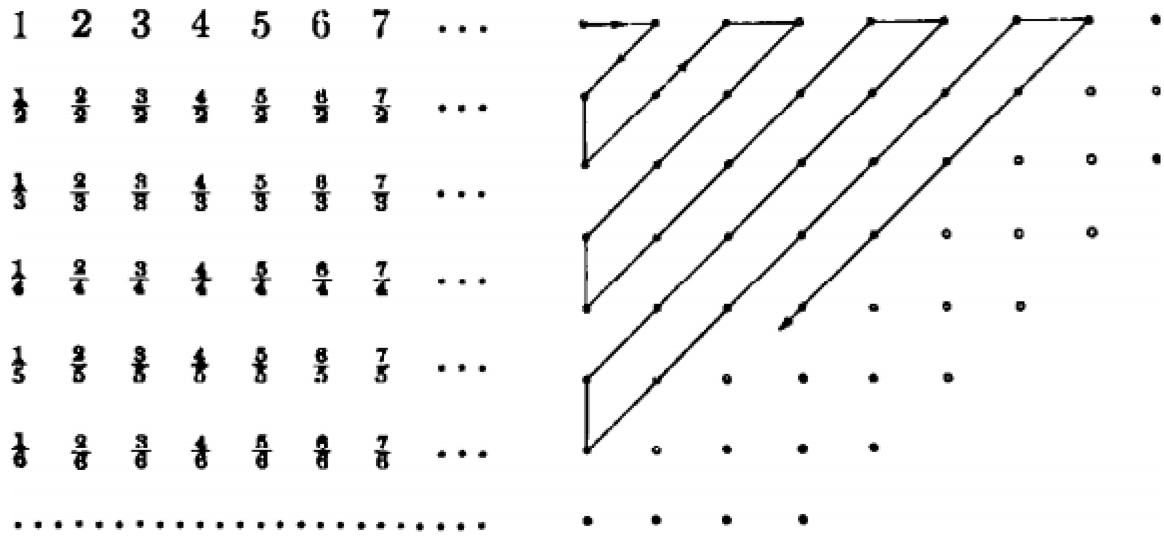


Fig. 19. Denumeration of the rational numbers.

Kết quả chuyển dịch theo đường gấp khúc dẫn chúng ta đến dãy số hữu tỉ: 1, 2, 1/2, 1/3, 2/2, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4 … Bây giờ chúng ta bỏ tất cả các phân số mà tử số và mẫu số có cùng ước chung, vì mỗi số hữu tỉ xuất hiện chính xác một lần và trong dạng tối giản nhất của nó. Vậy chúng ta có chuỗi 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, … chứa tất cả số hữu tỉ dương một và chỉ một lần. Điều này cho thấy tập hợp các số hữu tỉ dương là đếm được. Chú ý rằng các số hữu tỉ tương ứng 1 – 1 với các điểm hữu tỉ trên trục số, cho nên có thể nói rằng tập hợp các điểm hữu tỉ dương trên trục số là đếm được.

<u>Bài tập:</u> 1) Cho thấy tập các số nguyên dương và âm là đếm được. Cho thấy tập các số hữu tỉ dương và âm là đếm được.

2) Cho thấy tập hợp S+P là đếm được nếu S và P là tập hợp đếm được. Tổng quát với 3, 4,… hay *n* tập hợp.

Nếu như tập hợp các số hữu tỉ là đếm được thì phải chăng mọi tập hợp vô hạn cũng đếm được, và như vậy, tất nhiên toàn bộ giải tích của vô hạn sẽ kết thúc. Nhưng hoàn toàn không phải như vậy. Phát hiện sau đây của Cantorr cũng cực kỳ quan trọng: tập hợp số thực (số hữu tỉ và vô tỉ) không đếm được. Nói cách khác, tập hợp số thực là một kiểu "vô hạn" hoàn toàn khác (bậc cao hơn, như chúng ta thường nói) so với tập hợp chỉ gồm toàn số nguyên hoặc chỉ gồm số hữu tỉ. Chứng minh "gián tiếp" độc đáo của Cantorr về sự kiện này là mẫu mực cho nhiều chứng minh khác trong toán học. Tư tưởng lập luận của chúng ta như sau: chúng ta xuất phát từ giả thiết là mọi số thực đều đã đánh số hết và sắp xếp chúng thành dãy, sau đó ra chỉ ra một số không nằm trong dãy trên. Từ đó nảy sinh mâu thuẫn. Vì chúng ta đã giả thiết mọi số thực đều nằm trong dãy trên thì nếu như có ít nhất một số không nằm trong dãy trên thì giả thiết sai. Do đó khẳng định tính đếm được của tập số thực là không đúng. Không còn cách nào khác là phải thừa nhận: tập hợp số thực không đếm được.

Cụ thể lập luận như sau. Giả thiết mọi số thực biểu thị dưới dạng thập phân vô hạn (các số thập phân hữu hạn được viết liền sau bởi vô hạn các số 0) được sắp xếp thành dãy:

Số thứ nhất: $N_1, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$

Số thứ hai: $N_2, b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$

Số thứ ba: $N_3, c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$

....

trong đó *N* biểu diễn phần nguyên, còn các chữ cái *a, b, c,* … biểu diễn phần thập phân. Chúng ta giả thiết dãy số bao gồm mọi số thực. Phần quan trọng của của chứng minh là xây dựng một số mới nhờ "qui trình đường chéo" mà có thể chứng tỏ được số này không có trong dãy của chúng ta. Chúng ta sẽ xây dựng một số như thế. Muốn vậy, chúng ta lấy chữ số a tuỳ ý khác a_1, ngay sau dấu phẩy, khác cả *0* và *9* nữa(để tránh trường hợp kiểu như 0,999… hay 1,000…); sau đó lấy chữ số thứ hai *b* khác b_2*, 0 và 9*; chữ số thứ ba *c* khác c_3, *0 và 9* … (ví dụ, nếu a = 1 thì lấy $a_1 \neq 1$, như là a = 2, tương tự với b, c, d, e …). Bây giờ chúng ta được số thập phân vô hạn:

$$z = 0, abcde \ldots$$

Số mới *z* này không nằm trong dãy của chúng ta. Thực vậy, nó khác số thứ nhất bởi chữ số đầu tiên sau dấu phẩy, số thứ 2 bởi chữ số thứ 2, nói chung là khác số thứ *n* bởi chữ số thứ *n* sau dấu phẩy. Như vậy không có số z trong dãy tất cả các số thực của chúng chúng ta. Vậy tập số thực không đếm được.

Bạn đọc có thể sẽ tưởng rằng sự không đếm được của continum là bởi sự kéo dài vô hạn của đường thẳng, và một đoạn thẳng hữu hạn sẽ chứa một tập hợp vô hạn điểm đếm được. Muốn thấy rõ chỗ sai của mệnh đề trên, chỉ cần xác nhận rằng mọi continum số xét về toàn bộ là tương đương với một khoảng hữu hạn nào đó, chẳng hạn khoảng từ 0 đến 1. Có thể tìm được sự tương ứng 1–1 như vậy nếu bẻ gập khoảng đó ở các điểm 1/3 và 2/3 rồi dùng phép chiếu như đã có trong hình 20. Qua đó, chúng ta thấy một khoảng (và tất nhiên, một đoạn) hữu hạn chứa một tập hợp không đếm được của các điểm.

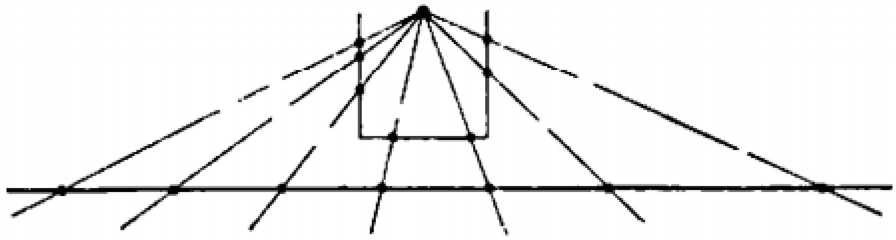


Fig. 20

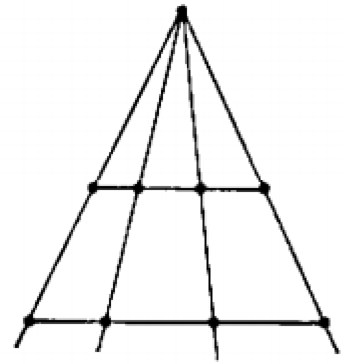


Fig 21

Fig. 20. Biunique correspondence between the points of a bent segment and a whole straight line.
Fig. 21. Biunique correspondence between the points of two segments of different length.

(Biunique correepondence – sự tương ứng)

Còn một chứng minh khác có tính trực giác hơn về sự không đếm được của cotinum. Căn cứ vào mệnh đề sau cùng (H.21) thì chỉ cần tập trung vào những điểm của đoạn đơn vị từ 0 đến 1. Chứng minh cũng là "gián tiếp" như chứng minh trước. Giả thiết tập hợp tất cả các điểm nằm giữa 0 và 1 có thể xếp thành dãy:

(1) $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Chúng ta hãy nhốt điểm có tọa độ a_1 trong khoảng có độ dài 1/10, a_2 bằng khoảng độ dài $1/10^2$, … Nếu mọi điểm giữa 0 và 1 nằm trong dãy (1), thì toàn bộ đơn vị sẽ được phủ bằng một tập hợp vô hạn các khoảng (có thể có phần chồng chéo lên nhau) có độ dài 1/10, $1/10^2$, … Tổng độ dài của các đoạn phủ là:

$$1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \cdots = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{1}{9}.$$

Như vậy, giả thiết dãy (1) chứa tất cả các điểm thực của đoạn đơn vị dẫn đến kết luận là có thể phủ toàn bộ đoạn có độ dài 1 bằng các đoạn thẳng có độ dài tổng cộng 1/9, điều này vô lý. Chúng ta tạm coi lập luận này như là chứng minh mặc dù cần phân tích sâu sắc hơn về mặt logic mới chặt chẽ.

Tiện thể, lập luận vừa dẫn cho phép thiết lập một định lý có giá trị lớn trong lý thuyết độ đo hiện đại. Thay thế những khoảng đã nêu ở trên bằng những khoảng nhỏ hơn có độ dài $e/10^n$, trong đó e là số dương bé tuỳ ý, chúng ta thấy mọi tập hợp điểm đếm được trên đường thẳng có thể phủ bởi một tập hợp các đoạn có độ dài tổng cộng là e/9. Vì e bé tuỳ ý nên số sau cùng cũng bé tuỳ ý. Dùng thuật ngữ của "lý thuyết độ đo" chúng ta nói tập hợp điểm đếm được có độ đo *bằng 0*.

<u>Bài tập:</u> Chứng minh kết quả trên vẫn còn đúng cho tập đếm được của các điểm trên mặt phẳng, thay độ dài đoạn thẳng bằng diện tích hình vuông.

3. "Bản số" của Cantor

Chúng ta tóm tắt kết quả đã thu được. Số các phần tử của một tập hợp hữu hạn A không thể bằng số phần tử của tập hợp hữu hạn khác B nếu A chứa nhiều phần tử B. Nhưng nếu thay thế khái niệm "các tập hợp có cùng một số hữu hạn các phần tử khái niệm tổng quát hơn: "các tập hợp tương đương" thì khẳng định nói trên sẽ không còn đúng đối với các tập hợp vô hạn: tập hợp các số nguyên chứa "nhiều" phần tử hơn tập hợp các số chẵn, còn tập hợp các số hữu tỉ "nhiều" phần tử hơn tập hợp số nguyên, nhưng như chúng ta đã biết, các tập hợp đó tương đương với nhau. Có thể ngờ rằng mọi tập hợp vô hạn là tương đương với nhau, nhưng Cantorr đã bác bỏ ý kiến đó: tồn chúng tại một tập hợp – cotinum các số thực – không tương đương với bất cứ một tập hợp đếm được nào.

Như vậy, có ít nhất hai "kiểu vô hạn" khác nhau: vô hạn đếm được của các số tự nhiên và vô hạn không đếm được của cotinum. Nếu 2 tập hợp A và B (hữu hạn hoạc vô hạn) tương đương với nhau thì chúng ta nói chúng có cùng bản số (hoặc lực lượng). Đối với các tập hợp hữu hạn thì bản số được quy về số tự nhiên thông thường, nhưng khái niệm bản số mang tính chất tổng quát hơn. Hơn nữa, nếu tập hợp A tương đương với một tập hợp con nào đó của tập hợp B, mà B không tương đương với tập hợp A và cũng không tương đương với bất cứ bộ phận nào của nó thì theo Cantorr, chúng ta nói tập hợp B tương đương với bản số lớn hơn tập hợp A. Việc dùng thuật ngữ "số" cũng phù hợp với việc dùng nó thông thường trong trường hợp tập hợp hữu hạn. Tập hợp các số nguyên là tập hợp con của tập hợp các số thực, trong khi đó thì tập hợp các số thực không tương đương với tập hợp các số nguyên và cũng không tương đương với bất cứ tập hợp con nào của nó. Theo định nghĩa đã nêu thì continum số thực tương ứng với một bản số lớn hơn tập hợp số tự nhiên.

Cantor đã chứng minh có thể xây dựng một dãy vô hạn các tập hợp vô hạn tương ứng với những bản số ngày càng lớn. Vì thế có thể xuất phát từ tập hợp các số tự nhiên cho nên chỉ cần chứng minh rằng dù tập hợp A cho trước như thế nào cũng có thể xây dựng một tập hợp B khác có bản số lớn hơn A. Do tính khái quát cao của định lý này cho nên chứng minh của nó không tránh khỏi trừu tượng. Chúng ta xác định tập hợp các phần tử của nó là tập hợp tất cả các tập con có thể có của A. Ở đây, khi nói về các "tập con" của A, chúng ta đề cập đến không những chỉ "những tập con thực sự" của A mà còn kể cả A và tập hợp rỗng (không chứa phần tử nào). Chẳng hạn, nếu A gồm 3 số nguyên 1,2,3 thù B chứa 8 phần tử khác nhau {1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2}, {3} và 0. Mỗi phần tử của B chính là một tập hợp con gồm bộ những phần tử nào đó của A. bây giờ, giả sử B tương đương với A hoặc một tập con của A tức là có một quy tắc tương ứng 1–1 giữa các phần tử của A hoặc một tập con nào đó của A đối với tất cả các phần tử của B:

(2) $$a \leftrightarrow S_a,$$

trong đó S_a biểu thị một tập con của A tương ứng với phần tử a của tập hợp A. Chúng ta sẽ đi đến mâu thuẫn nếu chỉ ra được một phần tử nào đó của B, tức là một tập con T nào đó của tập hợp A mà không tương ứng với một phần tử a nào. Muốn xây dựng tập hợp con T thì trước hết phải chú ý rằng mọi phần tử x của A có 2 khả năng: tập hợp S_x chứa phần tử x hoặc không chứa x. Chúng ta sẽ xác định T như một tập con của A gồm tất cả các phần tử x sao cho S không chứa x. Tập hợp T được xác định như thế sẽ khác với mọi S_a ở ít nhất là phần tử a, bởi nếu S_a chứa a thì T không chứa a và nếu S_a không chứa a thì T chứa a. Như vậy, T không nằm trong tương ứng (2). Điều này cũng chứng minh không thể thiết lập tương ứng 1–1 giữa các phần tử của A (hoặc của một tập con nào đó của A) với các phần tử của B. Nhưng hệ thức

$$a \leftrightarrow \{a\}$$

thiết lập sự tương ứng 1–1 giữa tất cả các phần tử của A và một tập con của B gồm các tập con chứa một phần tử của A. Nghĩa là, tập hợp B tương ứng với một bản số lớn hơn của tập hợp A theo định nghĩa đã dẫn ở trên.

Liệu có thể dễ dàng xây dựng một tập hợp điểm có bản số lớn hơn tập hợp điểm của đoạn thẳng đơn vị hay không? Một hình vuông có cạnh 1 (hình 2 chiều) phải chăng chứa "nhiều" điểm hơn đoạn thẳng "1 chiều"? Nhưng sự thật hoàn toàn khác: bản số của hình vuông đúng bằng bản số của đoạn thẳng. Muốn chứng minh chỉ cần thiết lập tương ứng 1–1 giữa các điểm của hình vuông và các điểm của đoạn thẳng. Chúng ta sẽ cố gắng làm việc đó.

Nếu (x,y) là toạ độ điểm nào đó của hình vuông đơn vị thì có thể biểu thị các toạ độ x và y của nó dưới dạng thập phân:

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \dots$$

$$y = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \dots$$

trong đó đ tránh mọi nghi ngờ, chúng ta quy ước, chẳng hạn 1/4 sẽ được viết dưới dạng 0,25000… , mà không ở dạng 0,24999… Chúng ta sẽ cho tương ứng điểm (x,y) ở trên với điểm z = 0, a1 b1 a2 b2 a3 b3… của đoạn thẳng. Tất nhiên, những điểm khác nhau (x,y) và (x′,y′) của hình vuông sẽ được tương ứng với những điểm khác nhau z và z′ của đoạn thẳng. Điều này có nghĩa là bản số của tập hợp các điểm của hình vuông không vượt quá bản số của tập hợp các điểm của đoạn thẳng.

Thực ra trong trường hợp này, chúng ta chỉ thiết lập được tương ứng 1–1 giữa mọi điểm của hình vuông với tập con các điểm của đoạn thẳng, chẳng hạn, sẽ không có điểm nào của hình vuông tương ứng với điểm 0,214090909… bởi chúng ta quy ước viết 0,25000… chứ không viết 0,24999… song, chúng ta có thể thay đổi cách thiết lập tương ứng để thực hiện sự tương ứng 1−1 giữa tập hợp các điểm của hình vuông và các điểm của đoạn thẳng. Một lập luận tương tự sẽ chứng tỏ rằng bản số của điểm của hình lập phương cũng không vượt quá bản số của các điểm của đoạn thẳng. Mọi kết quả đó dường như mâu thuẫn với quan niệm trực giác về “thứ nguyên”. Nhưng cần lưu ý những tương ứng đã nêu trên không “liên tục”. Khi chúng ta di chuyển theo đoạn thẳng liên tục từ 0 đến 1 thì những điểm tương ứng trong hình vuông không tạo thành một đường cong liên tục mà xuất hiện theo một trật tự hoàn toàn “hỗn độn”. Thứ nguyên của một tập hợp điểm không những chỉ phụ thuộc vào bản số của các điểm mà phụ thuộc vào cách sắp xếp của chúng trong không gian. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề này trong chương V.

4. Phương pháp chứng minh gián tiếp

Lý thuyết bản số chỉ là một trong những quan điểm của lý thuyết tập hợp tổng quát do Cantor xây dựng, bất chấp sự chỉ trích nặng nề của những nhà toán học xuất sắc thời bấy giờ. Nhiều người trong đó có Poincaré và Kronecker đã phản đối tính không xác định của khái niệm tập hợp tổng quát và chống lại tính chất kiến thiết của các lập luận được áp dụng để xác định những tập hợp nào đó.

Trong số những lập luận không kiến thiết, có những chứng minh được gọi là “thực sự gián tiếp”. Bản thân những chứng minh gián tiếp là một yếu tố thông th nhất của tư duy toán học: để xác nhận sự đúng đắn của một mệnh đề A, đầu tiên chúng ta giả sử mệnh đề khác A′ đối lập với A đúng; sau đó, một dây chuyền lập luận sẽ dẫn chúng ta đến khẳng định đối lập với A′, điều này chứng tỏ sự không đúng đắn của A′. Dựa vào nguyên tắc cơ bản “bài trung” của logic thì sự đúng đắn của A được suy ra từ sự sai của A′.

Bạn đọc đã thấy một loạt các thí dụ về chứng minh gián tiếp rải rác trong cuốn sách này. Trong những thí dụ đó thì một chứng minh gián tiếp có thể được chuyển thành một chứng minh trực tiếp dễ dàng, nhưng hình thức “gián tiếp” có ưu thế ở chỗ ngắn gọn và tránh được việc xem xét những chi tiết là thứ yếu đối với mục tiêu gần nhất đề ra. Còn có những định lý mà cho đến nay vẫn không có những chứng minh nào khác ngoài chứng minh gián tiếp. Có thể nói bản chất của chúng là thuận, nhưng không thể có về nguyên tắc, những chứng minh có tính chất kiến thiết cho chúng được. Chẳng hạn đó là định lý nêu ở trang ...(***). Trong lịch sử toán học không ít những trường hợp mà trong khi mọi cố gắng của các nhà toán học nhằm xây dựng ("kiến thiết") lời giải của những bài toán nào đó mà sự giải được của chúng được xác nhận, thì có một người nào đó đã vượt qua được mọi trở ngại nhờ một lập luận "gián tiếp" không kiến thiết.

Khi nói về chứng minh sự tồn tại của một sự vật thuộc một loại nhất định thì có sự khác biệt quan trọng giữa vấn đề xây dựng một mẫu rõ ràng của sự vật với vấn đề chứng minh rằng sự không tồn tại của sự vật có thể đi đến những mâu thuẫn. Trong trường hợp đầu tiên thì một sự vật cụ thể được tạo ra, trong trường hợp thứ 2 thì không có gì khác ngoài sự mâu thuẫn. Cách đây không lâu, một số nhà toán học có công lao lớn đã tuyên bố loại trừ khỏi toán học mọi chứng minh không kiến thiết. Nếu như việc thực hiện kế hoạch đó là cần thiết thì sẽ kéo theo những khó khăn, phức tạp rất lớn trong thời đại chúng chúng ta; thậm chí còn có nguy cơ một bộ phận quan trọng của cơ thể toán học bị phá huỷ trong quá trình chịu tác động của sự chấn động đó. Vì thế không lấy gì làm ngạc nhiên rằng những người theo chủ nghĩa trực giác thừa nhận chương trình đã nêu, đã gặp những chống đối kiên quyết. Chính những người theo chủ nghĩa trực giác thông nhất cũng không thể sống theo chính kiến của mình.

5. Nghịch lý của vô hạn

Dù rằng theo quan điểm của đa số các nhà toán học, lập trường không thoả hiệp của các nhà trực giác chủ nghĩa là quá cực đoan, nhưng dù muốn hay không cũng phải thừa nhận lý thuyết tập hợp vô hạn có chịu sự đe doạ nghiêm trọng từ bên ngoài, đồng thời bên trong cũng phát hiện được những nghịch lý và logic rất rõ ràng. Cần lưu ý ngay, việc vận dụng một cách tự do không hạn độ khái niệm "tập hợp" sẽ không tránh khỏi dẫn đến mâu thuẫn. Chúng ta nêu ra ở đây một trong những nghịch lý như vậy do Bertrand Russell đưa ra.

Về nguyên tắc thì một tập hợp không chứa bản thân nó với tư cách là một phần tử. Thí dụ, tập hợp A gồm các số nguyên chỉ chứa các phần tử là số nguyên, vì bản thân A không phải là số nguyên mà là tập hợp các số nguyên, nên A không chứa bản thân nó với tư cách một phần tử. Chúng ta quy ước những tập hợp như vậy là "bình thường". Tuy nhiên còn có những tập hợp chứa bản thân nó như một phần tử. Chẳng hạn, chúng ta xét tập hợp S xác định như sau: "S chứa các phần tử là tất cả các tập hợp có thể xác định bằng những mệnh đề có ít hơn ba mươi từ". Vì bản thân S được xác định bởi một phần tử của tập hợp S. chúng ta gọi những tập hợp như thế là "dị thường". Dù sao đi nữa thì đa số tập hợp là bình thường. Chúng ta xét một tập hợp các tập hợp bình thường. Chúng ta biểu thị tập hợp này bằng chữ C. Mỗi phần tử của C là một tập hợp bình thường. Một câu hỏi nảy sinh: bản thân C là bình thường hay dị thường? Tất nhiên nó phải là bình thường hoặc dị thường. Nếu C là tập hợp bình thường thì C sẽ chứa bản thân nó như một phần tử, vì C được định nghĩa như một tập hợp của các tập hợp bình thường. Nhưng nếu vậy C lại là một tập hợp dị thường vì theo định nghĩa thì C chứa bản thân nó như một phần tử. Mâu thuẫn đã được phát hiện ra. Như vậy chúng ta thấy rằng chỉ với một giả thiết tồn chúng tại tập hợp C mà nội chúng tại đã mâu thuẫn.

6. Cơ sở của toán học

Những nghịch lý thuộc loại nêu trên đã thức tỉnh Russell và những người khác nghiên cứu một cách có hệ thống cơ sở của toán học và logic. Mục tiêu cuối cùng của những công trình nghiên cứu đó là tạo ra các lập luận toán học có một cơ sở logic mà có thể chứng minh được nó không gặp mâu thuẫn và đủ phong phú để dựa vào đó mà suy diễn ra tất cả những gì được coi là quan trọng trong toán học hoặc ít ra là đa số ều quan trọng đó. Mặc dầu không đạt được (có thể là không thể đạt được) mục tiêu quá tự tin đó, logic toán với tư cách là một đối tượng đặc biệt đã thu hút sự chú ý ngày càng cao của các nhà nghiên cứu. Nhiều bài toán có liên quan đến vấn đề này tuy phát biểu đơn giản nhưng lại cực kỳ khó. Chúng ta nêu ra làm thí dụ: giả thuyết continum khẳng định rằng không tồn tại một tập hợp có bản số lớn hơn bản số của tập hợp số tự nhiên nhưng nhỏ hơn bản số của tập hợp số thực. Từ giả thuyết này có thể suy ra nhiều hệ quả lý thú, nhưng bản thân giả thuyết này cho đến nay vẫn chưa được chứng minh hoặc bị bác bỏ. Vả lại, cách đây không lâu Kurt Gödel đã chứng minh: nếu một hệ tiên đề thông thường nằm trong cơ sở của lý thuyết tập hợp, không chứa mâu thuẫn thì hệ tiên đề mở rộng có được khi thêm vào đó giả thuyết cotinum cũng không chứa mâu thuẫn[9]. Những vấn đề được xem xét trong logic toán, xét cho cùng, dẫn đến một vấn đề cơ bản: hiểu như thế nào về sự tồn tại trong toán học? May mắn là sự tồn tại của bản thân toán học không phụ thuộc vào việc có tìm được câu trả lời đầy đủ của vấn đề đó hay không. Trường phái "chủ nghĩa hình thức" do nhà toán học Hilbert đứng đầu khẳng định trong toán học thì sự tồn tại có nghĩa là "phi mâu thuẫn". Nếu thừa nhận quan điểm đó thì một nhiệm vụ cấp bách cần thiết là xây dựng một hệ tiên đề từ đó có thể suy ra toàn bộ toán học bằng suy diễn logic và chứng minh rằng một chương trình như thế, ít nhất là dưới hình thức mà bản thân Hilbert đã vạch ra, là không thực hiện được. Điều rất có ý nghĩa là lý thuyết xây dựng toán học hình thức hoá lại dựa nhiều vào quá trình trực giác. Dù bằng con đường này hay con đường khác, dưới hình thức bộc lộ hay tiềm ẩn, thậm chí cả khi khoác bộ áo tiên đề, logic, hình thức chủ nghĩa hoàn hảo nhất thì trực giác có tính chất kiến thiết vẫn là yếu tố thiết thân nhất trong toán học.

§5. SỐ PHỨC

1. Nguồn gốc của số phức

Do nhiều nguyên nhân cùng với nhu cầu mở rộng khái niệm tập hợp số, thậm chí vượt ra ngoài phạm vi số thực, dẫn đến việc sử dụng số phức. Cần quan niệm rằng rõ ràng mọi sự mở rộng và đưa vào cái mới tương tự như thế hoàn toàn là kết quả của quá trình tiến hoá dần dần, trong quá trình đó không nên cường điệu vai trò của các cá nhân riêng lẻ. Một trong những nguyên nhân thúc đẩy sự xuất hiện và sử dụng phân số và số âm là sự mong muốn có một sự tự do lớn trong các tính toán. Mãi đến cuối thời Trung cổ, các nhà toán học mới hết băn khoăn và thắc mắc khi xử lý các khái niệm đó, trong khi mà một cảm giác tương tự như vậy không hề có đối với những khái niệm cảm thụ một cách trực giác, cụ thể, như khái niệm số tự nhiên.

Công việc đơn giản nhất cần dùng đến số phức là giải phương trình bậc 2. Chúng ta nhớ lại việc đã xảy ra khi cần phải xác định giá trị của ẩn số x thoả mãn phương trình tuyến tính ax = b. Nghiệm duy nhất x = b/a và việc đưa phân số vào nhằm làm mọi phương trình tuyến tính có hệ số nguyên (a ≠ 0) đều giải được có nghiệm. Phương trình loại:

(1) $$x^2 = 2$$

không có nghiệm trong phạm vi số hữu tỉ, nhưng có nghiệm trong phạm vi số thực đã mở rộng. Nhưng ngay trường hợp số thực cũng chưa đủ để xây dựng một lý thuyết hoàn chỉnh về phương trình bậc 2. Chẳng hạn, một phương trình đơn giản sau đây:

(2) $$x^2 = -1$$

không có nghiệm thực, bởi bình phương của một số thực không thể là số âm.

Hoặc bằng lòng với tình trạng các phương trình như vậy không giải được, hoặc đi theo con đường quen thuộc – mở rộng phạm vi số và đưa vào những số mới mà nhờ đó chúng ta có thể giải được phương trình. Đó chính là điều chúng ta đã làm khi đưa vào ký hiệu mới **i** và định nghĩa $\mathbf{i^2 = -1}$. Nên hiểu rằng "đơn vị ảo" không có gì chung với số – một công cụ của phép đếm. Đó là một ký hiệu trừu tượng chịu sự chi phối của nguyên lý cơ bản $\mathbf{i^2 = -1}$, và giá trị của nó chỉ phụ thuộc vào việc mở rộng hệ thống nhờ việc đưa vào có thực sự có ích hay không.

Vì muốn cộng và nhân với ký hiệu **i** cũng như đối với các số thường, tất nhiên chúng ta phải dùng đến các ký hiệu loại 2i, 3i, –i, 2+3i, nói chung a+bi, trong đó a và b là những số thực. Nếu các ký hiệu này tuân theo các định luật giao hoán, kết hợp và phân phối thì những phép tính sau đây có thể được:

$$(2+3i) + (1+4i) = (2+1) + (3+4)i = 3 + 7i,$$

$$(2+3i).(1+4i) = 2 + 8i + 3i + 12i^2 = (2-12) + (8+3)i = -10 + 11i.$$

Dựa vào những ý kiến đó, chúng ta bắt đầu trình bày lý thuyết số phức một cách có hệ thống từ định nghĩa sau đây: ký hiệu dạng a + bi, trong đó a và b là 2 số thực, được gọi là số phức với phần thực a và phần ảo b. Các phép cộng và nhân trên các số này được thực hiện với quy tắc coi như i là số thực bình thường, song phải thay thế $i^2 = -1$ khi cần. Nói chính xác hơn, phép cộng và phép nhân được xác định theo công thức:

(3) $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) . (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Đặc biệt, chúng ta có:

(4) $$(a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$$

Dựa vào những định nghĩa này, dễ nghiệm lại các định luật giao hoán, kết hợp và phân phối cũng đúng với các số phức. Hơn nữa, không những chỉ có phép nhân mà cả phép trừ và phép chia cũng ứng dụng được vào 2 số phức, cho kết quả là những số phức cũng có dạng **a + bi** sao cho các số phức lập thành một trường:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

(5) $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)}\frac{(c - di)}{(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i.$$

(Đẳng thức thứ 2 sẽ vô nghĩa nếu c+di = 0+0i vì $c^2 + d^2 = 0$. Nghĩa là, chúng ta vẫn loại trừ phép chia cho 0 = 0+0i.) Ví dụ:

$$(2 + 3i) - (1 + 4i) = 1 - i$$

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i}\frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{2 - 8i + 3i + 12}{1 + 16} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

Trường số phức chứa trường số thực như một trường con bởi số phức a+0i cũng với số thực a. Mặt khác, chúng ta lưu ý rằng số phức dạng 0+bi = bi là số thuần ảo.

Bài tập:1) Biến đổi $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$ về dạng a + bi.

2) Biến đổi $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ về dạng a + bi.

3) Biến đổi về dạng a + bi

$$\frac{1+i}{1-i},\frac{1+i}{2-i},\frac{1}{i^5},\frac{1}{(-2+i)(1-3i)},\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$$

4) Tính $\sqrt{5+12i}$. (Gợi ý: Đặt $\sqrt{5+12i}$ = X + Yi, bình phương, nhận được phần thực và phần ảo)

Khi đưa vào ký hiệu i, chúng ta đã mở rộng trường số thực và được một trường các ký hiệu a+bi, trong trường này thì phương trình bậc 2:

$$x^2 = -1$$

có 2 nghiệm x = i và x = –i. Thật vậy, theo định nghĩa thì $i^2 = (-i)^2 = -1$. Cần nói rằng chúng chúng ta đã "lãi" khá nhiều, có thể dễ dàng kiểm tra lại mọi phương trình bậc 2 có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

đã giải được. Thật vậy, nếu thực hiện đẳng thức trên với một loạt các phép biến đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a},\\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}, \qquad (7)\\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Chúng ta lưu ý rằng nếu $b^2 - 4ac \geq 0$ thì $\sqrt{b^2 - 4ac}$ là số thực và các nghiệm của (7) là thực; nếu $b^2 - 4ac < 0$ thì $\sqrt{b^2 - 4ac}$ là số ảo, do đó , như thế (7) có nghiệm là số phức. Chẳng hạn, nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

là $x = (5 \pm \sqrt{25 - 24})/2 = (5 \pm 1)/2 = 2$ hoặc 3. Trong khi đó nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

là $x = (2 \pm \sqrt{4 - 8})/2 = (2 \pm 2i)/2 = 1 + i$ hoặc $1 - i$.

2. Biểu diễn hình học của số phức.

Ngay từ thế kỷ 16, trong các công trình toán học đã xuất hiện căn bậc hai của số âm ở các công thức cho nghiệm của phương trình bậc hai hay bậc ba. Nhưng các nhà toán học thời đó đã gặp khó khăn trong việc giải thích ý nghĩa chính xác của các biểu thức đó, nhìn chúng với một nỗi "kinh hoàng huyền bí". Bản thân thuật ngữ "ảo" cho đến nay vẫn nhắc nhở chúng ta những biểu thức như thế được xem như một cái gì đó nhân tạo, mất ý nghĩa thực tại. Mãi đến đầu thế kỷ 19, khi vai trò của số phức đã được làm sáng tỏ trong các lĩnh vực toán học khác nhau, người ta đã đưa ra giải thích về hình học đơn giản của số phức và các phép toán của chúng. Điều này đã kết thúc mọi nghi ngờ về khả năng sử dụng số phức theo quy luật. Tất nhiên, với quan niệm hiện đại thì các phép toán hình thức với số phức là hoàn toàn có lý trên cơ sở các định nghĩa hình thức, còn việc biểu diễn hình học là không cần thiết về mặt logic. Nhưng một sự biểu diễn như vậy gần như cùng lúc Vessel (1745–1818), Argan (1768–1822) và Gauss, cho phép chúng ta xem xét số phức và các phép toán với chúng như một cái gì đó hoàn toàn tự nhiên về trực giác. Ngoài ra, nó còn có ý nghĩa cực lớn đối với những ứng dụng của số phức trong bản thân toán học và vật lý.

Thể hiện hình học của số phức là một số phức $z = x + yi$ được cho tương ứng với một điểm trên mặt phẳng với các toạ độ (x,y). Cụ thể là phần thực x được coi là hoành độ, phần ảo là tung độ y. Bằng cách như vậy chúng ta đã xác định được tương ứng 1–1 giữa các số phức và các điểm trên mặt phẳng số, tương tự như tương ứng giữa các số thực và các điểm của trục số đã xác lập trước kia (xem §2). Các điểm trên trục x trong mặt phẳng số sẽ tương ứng với các số thực $z = x + 0i$, còn các điểm trên trục y tương ứng với các số thuần ảo $z = 0 + yi$.

Nếu: $$z = x + yi$$

là một số phức bất kỳ, thì số phức

$$\bar{z} = x - yi$$

là số liên hợp của *z*. Điểm $\bar{z}$ suy ra từ điểm *z* bằng phép lấy đối xứng với trục x. nếu chúng ta quy ước:

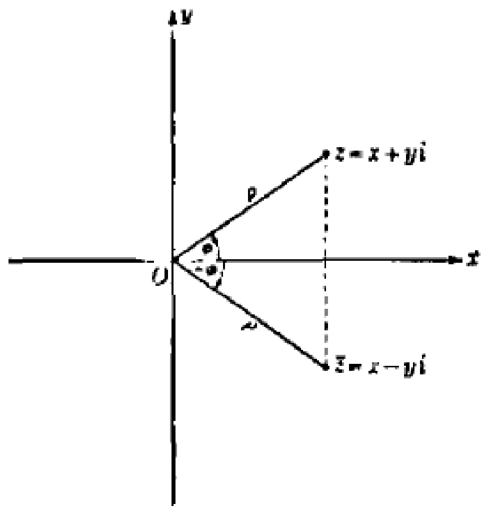


Fig. 22. Geometrical representation of complex numbers. The point z has the rectangular coördinates x, y

biểu thị khoảng cách từ ***z*** đến gốc là ***p,*** thì theo định lý Pythago ta có

$$p^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$$

Số thực p = $\sqrt{x^2+y^2}$ gọi là modulo của ***z,*** và viết là:

$$p = |z|$$

Nếu ***z*** nằm trên trục thực thì module của ***z*** trùng với giá trị tuyệt đối của nó. Các số phức với module 1 được biểu thị bởi những điểm nằm trên "đường tròn đơn vị" có tâm là gốc O và bán kính 1.

Nếu |z| = 0 thì z = 0. Điều này được suy ra từ định nghĩa của |z| là khoảng cách từ điểm z đến gốc. Hơn nữa, modulo của tích 2 số phức bằng tích các modulo:

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$

Điều này là hệ quả của một định lý tổng quát hơn sẽ chứng minh sau.

Bài tập: 1. Chứng minh định lý trên từ định nghĩa tích của 2 số phức , $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = z_1 = x_2 + y_2i$.

3. Từ việc tích của 2 số thực bằng 0 chỉ khi một trong các nhân tử bằng 0, chứng minh định lý này với số phức.

Theo định nghĩa phép cộng 2 số phức, $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = z_1 = x_2 + y_2i$, chúng ta có:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Như vậy điểm $z_1 + z_2$ được biểu thị trên mặt phẳng bởi đỉnh thứ 4 của hình bình hành mà 3 đỉnh đầu tiên là

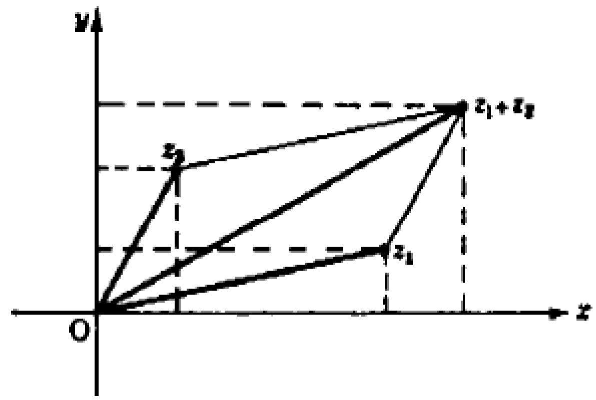


Fig. 23. Parallelogram law of addition of complex numbers.

các điểm 0, z_1 , z_2. Phương pháp dựng tổng của 2 số phức này dẫn đến nhiều hệ quả quan trọng. Từ đó chúng ta đi đến kết luận modulo của tổng 2 số phức không vượt quá tổng của 2 modulo:

$$| z_1 + z_2| \leq | z_1 |+| z_2|$$

Suy ra từ nhận xét chiều dài của một cạnh trong tam giác (có thể suy biến) không lớn hơn tổng độ dài của 2 cạnh còn lại.

<u>Bài tập:</u> Khi nào thì $| z_1 + z_2| = | z_1 |+| z_2|$?

Góc giữa hướng dương của trục ***x*** và đoạn ***Oz*** được gọi là góc của ***z*** và được kí hiệu là ø(Hình 22). Modulo của z và ž có cùng module,

$$|\check{z}| = |z|$$

nhưng góc ž của là số đối góc của z: .

$$\bar{\phi} = -\phi.$$

Tất nhiên, góc của *z* không chỉ có duy nhất một giá trị, bởi vì có thể thêm vào hoặc trừ đi một góc tuỳ ý là bội của 360° và không thay đổi hướng của đoạn *Oz*. như vậy, các góc

$$\emptyset,\ \emptyset + 360°,\ \emptyset + 720°, \emptyset + 1080°, \ldots$$

$$\emptyset - 360°,\ \emptyset - 720°, \emptyset - 1080°, \ldots$$

về mặt đồ thị có cùng góc. Vì theo định nghĩa modulo p và góc ∅, số phức z có thể được viết dưới dạng:

(8) $$z = x + yi = p(\cos\emptyset + i \sin\emptyset)$$

vì theo định nghĩa sin và cosin,

$$x = p \cos\emptyset \ , \ y = p \sin\emptyset$$

Ví dụ:• $z = i$, $p = 1$, $\emptyset=90°$, vậy $i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$;

• $z = 1 + i$, $p = \sqrt{2}$, $\emptyset = 45°$, vậy

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$$

• $z = 1 - i$, $p= \sqrt{2}$, $\emptyset= -45°$, vậy

$$1 - i = \sqrt{2}[\cos(-45°) + i \sin(-45°)]$$

• $z = -1 + \sqrt{3}i$, $p=2$, $\emptyset = 120°$, vậy

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120° + i \sin 120°)$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại bằng cách thay vào đó giá trị bằng số của các hàm lượng giác. Để giải thích ý nghĩa hình học của phép nhân 2 số phức thì các biểu diễn lượng giác (8) rất cần thiết. Nếu:

$$z = p(\cos\emptyset + i \sin\emptyset)$$

và $$z' = p'(\cos\emptyset' + i \sin\emptyset')$$

thì: $$zz' = pp'\{(\cos\emptyset.\cos\emptyset' - \sin\emptyset.\sin\emptyset') + i\,(\cos\emptyset.\sin\emptyset' + \sin\emptyset.\cos\emptyset')\}$$

Nhưng theo định lý cơ bản của sin và cosin thì:

$$\cos\emptyset.\cos\emptyset' - \sin\emptyset.\sin\emptyset' = \cos(\emptyset + \emptyset')$$

$$\cos\emptyset.\sin\emptyset' + \sin\emptyset.\cos\emptyset' = \sin(\emptyset + \emptyset')$$

cho nên:

(9) $$zz' = pp'\{\cos(\emptyset + \emptyset') + i \sin(\emptyset + \emptyset')\}$$

vế phải của đẳng thức là một số phức viết dưới dạng lượng giác với modulo pp' và góc $\emptyset + \emptyset'$. Từ đó chúng ta có thể kết luận: khi nhân 2 số phức chúng ta nhân các modulo với nhau và cộng các góc của chúng (hình 24). Như vậy, chúng ta thấy phép nhân các số phức có liên hệ với phép quay. Để rõ ràng hơn, chúng ta gọi hướng của đoạn thẳng đi từ gốc đến điểm *z* là *vecto z*, lúc đó p = |z| là độ dài của nó. Giả thử *z'* là một điểm bất kỳ của đường tròn đơn vị, tức là p' = 1. Trong trường hợp này, phép nhân *z* với *z'* chỉ đơn giản là phép quay vecto *z* một góc *Ø'*. Nếu p' ≠ 1 thì cùng với phép quay, độ dài vecto phải được nhân với *p'*. Đề nghị bạn đọc tự minh hoạ những sự kiện đó bằng cách nhân các số phức khác nhau với z_1 = i (quay 90°), z_2 = –i (cũng quay 90°, nhưng theo chiều ngược lại), z_3 = 1 + i và z_4 = 1 – i.

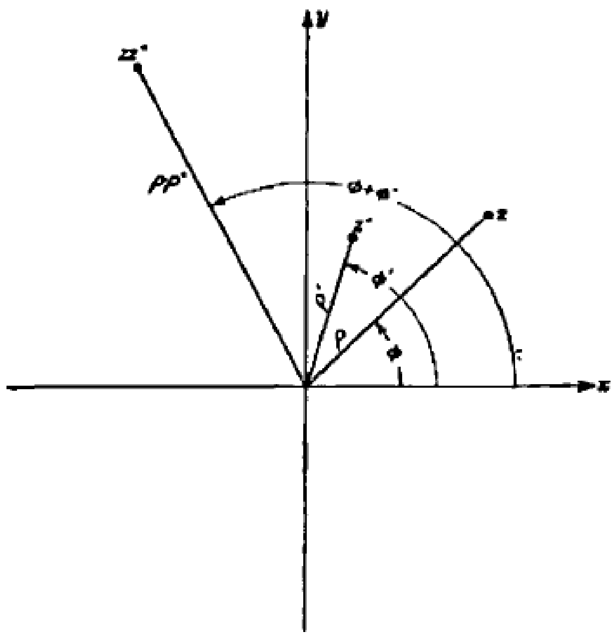


Fig. 24. Multiplication of two complex numbers: the angles are added and the moduli multiplied.

Công thức (9), có trường hợp đặc biệt lý thú nếu z = z', ta có:

$$z^2 = p^2 (\cos 2Ø + i \sin 2Ø)$$

nhân một lần nữa với z, chúng ta có:

$$z^3 = p^3 (\cos 3Ø + i \sin 3Ø)$$

tiếp tục theo cách này, chúng ta có:

(10) $$z^n = p^n (\cos nØ + i \sin nØ)$$

Đặc biệt, nếu điểm z nằm trên đường tròn đơn vị thì p = 1, chúng ta đi đến công thức của nhà toán học Anh A. De Moivre (1667 – 1754)

(11) $$(\cos Ø + i\sin Ø)^n = \cos nØ + i \sin nØ$$

Công thức này là một trong những hệ thức bổ ích và nổi tiếng nhất trong toán học sơ cấp. Chúng ta giải thích điều này bằng thí dụ. Chúng ta lấy n = 3 và phân tích vế trái theo công thức nhị thức,

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

như vậy chúng ta có:

$$\cos 3\phi + i\sin 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi + i(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi)$$

Một đẳng thức phức như thế sẽ tương đương với hai đẳng thức thực. Quả vậy, nếu hai số phức bằng nhau thì phần thực của chúng bằng nhau, phần ảo của chúng bằng nhau. Như vậy chúng ta có thể viết:

$$\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi\ ; \qquad \sin 3\phi = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi$$

dùng quan hệ

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

chúng ta có:

$$\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi(1 - \cos^2\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$$

$$\sin^3\phi = -4\sin^3\phi + 3\sin\phi.$$

Cũng dễ dàng thu được các công thức với *sinn∅* và *cosn∅* qua *sin∅* và *cos∅* với giá trị nguyên *n* tuỳ ý.

Bài tập: 1) Tìm công thức tương ứng cho sin4∅ và cos4∅.

2) Chứng minh rằng, điểm z = cos∅ + i sin∅, nằm trên đường tròn đơn vị, thì 1/z = cos∅ − i sin∅.

3) Chứng minh mà không cần tính (a+bi)(a−bi) luôn có giá trị tuyệt đối là 1.

4) Nếu z1 và z2 là hai số phức, chứng minh rằng góc của z1−z2 bằng góc giữa trục thực và vecto chỉ từ z1 đến z2.

5) Giải thích, góc của số phức (z1−z2)/(z1−z3) nằm trong tam giác có đỉnh là các điểm z1, z2, z3.

6) Chứng minh kết quả khi chia hai số phức có cùng góc là một số thực.

7) Chứng minh rằng, với bốn số phức z_1, z_2, z_3, z_4, góc của $\frac{z^3-z^1}{z^3-z^2}$ và $\frac{z^4-z^1}{z^4-z^2}$ bằng nhau, thì bốn số đó nằm trên một đường tròn, hoặc một đường thẳng, và ngược lại.

8) Chứng minh rằng, bốn điểm z_1, z_2, z_3, z_4 nằm trên một đường tròn hoặc trên một đường thẳng, nếu và chỉ nếu

$$\frac{z^3-z^1}{z^3-z^2} \Big/ \frac{z^4-z^1}{z^4-z^2}$$

là số thực.

3. Công thức De Moivre và các căn của đơn vị

Chúng ta hiểu căn bậc *n* của một số *a* là một số *b* nào đó sao cho $b^n = a$. Nói riêng số 1 có hai căn bậc hai: 1 và −1 bởi vì $1^2 = (-1)^2 = 1$. Số 1 có một căn bậc ba thực, đó là số 1, trong khi nó có bốn căn bậc bốn; hai thực 1 và −1 và hai ảo i và −i. Như vậy ta dự đoán rằng, trong miền phức phải có hai căn bậc ba của 1, vậy thì tất cả sẽ là ba căn bậc ba. Nhờ công thức De Moivre chúng ta sẽ chứng tỏ rằng điều dự đoán này là đúng.

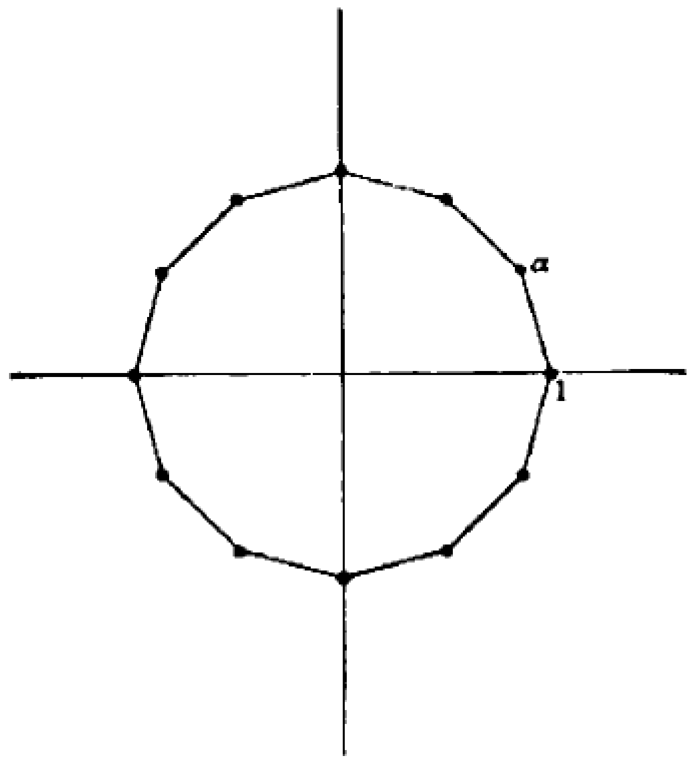


Fig. 25. The twelve twelfth roots of 1.

Chúng ta sẽ thấy rằng trong trường số phức có đúng *n* căn bậc *n* của 1. Những căn đó được biểu thị bằng các đỉnh của đa giác đều *n* cạnh nội tiếp trong hình tròn đơn vị và nhận điểm 1 là một đỉnh. Điều này được thể hiện rõ trên hình 25 (tương ứng với trường hợp n = 12). Đỉnh thứ nhất của đa giác là 1. Đỉnh tiếp sau là:

$$\propto = \cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n} \qquad (12)$$

bởi vì góc của nó phải bằng phần thứ *n* của toàn bộ 360°. Đỉnh tiếp theo là $\propto.\propto=\propto^2$, bởi vì chúng ta thu được nó bằng cách quay vecto ∝ một góc 360°/n. Tiếp theo chúng ta được đỉnh $\propto^3$ v.v…, sau n bước chúng ta quay trở lại đỉnh 1, tức là có được:

$$a^n = 1.$$

Điều này cũng suy được từ công thức (11) vì

$$[cos\frac{360°}{n} + i\ sin\frac{360°}{n}]^n = cos360° + i\ sin360° = 1 + 0i = 1.$$

Như vậy, $\propto^1 = \propto$ là nghiệm của phương trình $x^n = 1$. Đối với các đỉnh tiếp theo cũng đúng: $\propto^2 = \cos\frac{720°}{n} + i \sin\frac{720°}{n}$, chúng ta sẽ thấy nếu viết:

$$(\propto^2)^n = \propto^{2n} = (\propto^n)^2 = 1^2 = 1,$$

hoặc dùng công thức De Moivre:

$$(\propto^2)^n = [cos\frac{720°}{n} + i\ sin\frac{720°}{n}]^n = cos720° + i\ sin720° = 1 + 0i = 1.$$

Theo cùng cách như vậy, chúng ta thấy rằng toàn bộ ***n*** số:

$$1, \propto, \propto^2, \propto^3, \ldots, \propto^{n-1}$$

là các căn bậc *n* của 1. Nếu tăng tiếp tục số mũ hoặc xét các số mũ âm, chúng ta sẽ không thu được căn nào mới. Thực vậy: $\propto^{-1} = 1/\propto = \propto^n/\propto = \propto^{n-1}$, cũng thế $\propto^n = 1$, $\propto^{n+1} = (\propto^n).\propto = 1.\propto = 1$ v.v… các giá trị trước được lặp lại. Coi như bài tập, chứng minh, không có căn bậc *n* nào khác.

Nếu *n* chẵn, thì một trong các đỉnh của đa giác *n* cạnh sẽ rơi vào điểm −1, phù hợp với sự kiện đại số là −1 là căn bậc *n* của 1.

Phương trình thoả mãn các căn bậc n của 1

(13) $$x^n - 1 = 0$$

là phương trình bậc n, nhưng có thể dễ dàng hạ thấp xuống bậc (n−1). Chúng ta dùng công thức đại số:

(14) $$x^{n-1} = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)$$

Vì tích của hai số bằng 0 khi và chỉ khi một trong hai số đó bằng 0. Cho phương trình (14) xảy ra hai trương hợp, hoặc khi x = 1, hoặc khi:

(15) $$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1 = 0$$

Các căn a, a2, a3, …, an−1, thoả mãn phương trình đó. Phương trình này được gọi là phương trình *cyclotomic* (chia đường tròn). Ví dụ, căn bậc ba phức của 1 là:

$$\propto = cos120° + i\ sin120° = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\propto^2 = cos240° + i\ sin240° = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

là các nghiệm của phương trình

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

mà bạn đọc có thể thấy được bằng phép thay giá trị của ∝ vào phương trình. Cũng vậy, các căn bậc năm của 1, ngoàn bản thân 1, thoả mãn phương trình:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \tag{16}$$

Muốn dựng một ngũ giác đều, cần phải giải một phương trình bậc bốn. Bằng một mẹo đại số đơn giản có thể giảm bậc của phương trình, đặt $w=x + 1/x$. Chúng ta chia phương trình (16) cho x^2 và xắp xếp lại:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

với chú ý rằng , $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, chúng ta có:

$$w^2 + w - 1 = 0.$$

Theo công thức (7) mục 1 thì các nghiệm của phương trình bậc hai này sẽ có dạng:

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Như vậy, căn phức bậc năm của 1 là các nghiệm của hai phương trình bậc hai sau đây:

$$x + \frac{1}{x} = w_1, \text{ hoặc } x^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0,$$

và

$$x + \frac{1}{x} = w_2, \text{ hoặc } x^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0,$$

Bạn đọc có thể giải các phương trình này theo công thức (7).

<u>Bài tập:</u> 1) Tìm các căn bậc sáu của 1.

2) Tìm $(1+i)^{11}$.

3) Tìm tất cả những giá trị khác của $\sqrt{1+i}$, $\sqrt[3]{7-4i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[6]{-i}$.

4) Tính $\frac{1}{2}(i^7 - i^{-7})$.

4*. Định lý đại số cơ bản

Không những chỉ có các phương trình dạng $ax^2+bx+c=0$ hoặc $x^n - 1= 0$ là giải được trong trường số phức, mà xa hơn nữa: mọi phương trình đại số bậc ***n*** bất kì, với hệ số thực hoặc phức:

(17) $$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

đều giải được trong trường số phức. Đối với trường hợp phương trình bậc ba và bậc bốn, định lý này đã được xác nhận từ thế kỷ XVI bởi Tartaglia, Cardan, và những người khác: giải bằng các công thức tương tự công thức phương trình bậc hai nhưng phức tạp hơn. Việc nghiên cứu phương trình tổng quát bậc 5 và bậc cao hơn đã được tiến hành kiên trì trong vòng gần hai thế kỷ, nhưng mọi cố gắng giải bằng công thức đều vô ích. Chàng thanh niên Gauss, trong luận văn tiến sĩ của mình (1799) đã lần đầu tiên chứng minh được sự tồn tại các nghiệm. Đó là một thành tựu vĩ đại nhất, dẫu rằng vấn đề về khả năng mở rộng các công thức cổ điển cho các trường hợp có bậc lớn hơn bậc 5 để tìm nghiệm nhờ các phép toán hữu tỉ và khai căn, vẫn còn chưa giải quyết được trong thời đó.

Định lý Gauss khẳng định rằng: với mọi phương trình đại số dạng (17), trong đó n là số nguyên dương, các hệ số $\boldsymbol{\propto}$ là những số thực hoặc số phức, tồn tại ít nhất một số phức $\propto = c + di$ sao cho $f(\propto) = 0$.

Số $\propto$ là nghiệm gốc của phương trình (17). Chứng minh của định lý này sẽ được trình bày ở trang 269. Giả thử định lý đã được chứng minh, chúng ta suy ra từ đó một định lý khác đã được biết với các tên định lý đại số cơ bản (đúng hơn nên gọi nó là định lý cơ bản của hệ thống số phức): Mọi đa thức đại số bậc n

(18) $$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

đều có thể biểu thị dưới dạng tích của đúng n thừa số:

(19) $$f(x) = (x - \propto_1)(x - \propto_2>) \dots (x - \propto_n),$$

trong đó $\propto_1, \propto_2, \dots, \propto_n$ là các nghiệm số phức của phương trình $f(x) = 0$. Ví dụ, đa thức $f(x) = x^4 - 1$ sẽ được phân tích thành các thừa số như sau:

$$f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x + 1)$$

Các số $\propto$, là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, được suy ra từ bản thân phân tích (19) là dĩ nhiên, bởi vì khi $x = \propto$ thì một trong các thừa số của $f(x)$ bằng 0, do đó bản thân $f(x)$ bằng 0.

Trong những trường hợp khác, thì không nhất thiết mọi thừa số $x - \propto_1$, $x - \propto_2, \dots$ của đa thức $f(x)$ bậc ***n***, phải khác nhau, chẳng hạn:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1),$$

chỉ có một nghiệm x = 1, "được tính hai lần" hoặc "bội 2". Trong mọi trường hợp, không thể phân tích một đa thức bậc ***n*** thành tích của quá ***n*** thừa số khác nhau dạng $(x - \propto)$ và phương trình tương ứng không thể có quá ***n*** nghiệm.

Khi chứng minh định lý đại số cơ bản, chúng ta một lần nữa, sẽ dùng hằng đẳng thức đại số:

(20) $$x^k - \propto^k = (x - \propto)(x^{k-1} + \propto x^{k-2} + \propto^2 x^{k-3} + \ldots + \propto^{k-2} x + \propto^{k-1}),$$

nó đã được dùng để tính tổng của cấp số nhân khi $\propto = 1$. Giả thử định lý Gauss đúng, chúng ta có thể lấy $\propto = \propto_1$ là nghiệm của phương trình (17) thì:

$$f(\propto_1) = \propto_1^n + a_{n-1} \propto_1^{n-1} + a_{n-2} \propto_1^{n-2} + \ldots + a_1 \propto_1 + a_0 = 0.$$

Trừ nó vào f(x) và nhóm lại các số hạng, chúng ta được đẳng thức:

(21) $$f(x) = f(x) - f(\propto_1) = (x^n - \propto_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \propto_1^{n-1}) + \ldots + a_1 (x - \propto_1).$$

Bây giờ, dùng công thức (20), chúng ta có thể tách thừa số $(x - \propto_1)$ ra khỏi từng số hạng, đưa nó ra ngoài dấu ngoặc, bậc của đa thức còn lại trong ngoặc sẽ nhỏ đi một đơn vị. Nhóm các số hạng một lần nữa, chúng ta được đồng nhất thức:

$$f(x) = (x - \propto_1) g(x),$$

trong đó $g(x)$ là đa thức bậc $n - 1$

$$g(x) = x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 .$$

(Hoàn toàn không cần thiết phải tính các hệ số b_k.) Áp dụng tiếp tục lập luận đó vào $g(x)$. Theo định lý Gauss, tồn tại một nghiệm $\propto_2$ của phương trình g(x) = 0 tức là:

$$g(x) = (x - \propto_2)\, h(x),$$

trong đó $h(x)$ là đa thức mới bậc $n-2$. Lặp lại lập luận này $n-1$ lần (tất nhiên, dựa trên nguyên lý quy nạp toán học), cuối cùng chúng ta đi đến phân tích:

(22) $$f(x) = (x - \propto_1)(x - \propto_2) \ldots (x - \propto_n) .$$

Từ (22) không những suy ra các số phức $\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n$ là nghiệm của phương trình (17), mà còn suy ra không còn nghiệm nào khác nữa của phương trình (17). Thực vậy, nếu số y là nghiệm của phương trình (17) thì, từ (22) suy ra:

$$f(y) = (y - \propto_1)(y - \propto_2) \ldots (y - \propto_n) = 0.$$

Nhưng chúng ta thấy rằng tích các số phức chỉ bằng 0 khi một trong các thừa số bằng 0. Như thế, một trong các thừa số $(y - \alpha_r)$phải bằng 0, tức là $y = \alpha_r$.

§6. SỐ ĐẠI SỐ VÀ SỐ SIÊU VIỆT

1. Định nghĩa và vấn đề tồn tại

Số đại số là bất kì số x nào, thực hoặc phức, thoả mãn một phương trình đại số có dạng:

(1) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0)$$

trong đó các a_k nguyên. Chẳng hạn, số $\sqrt{2}$ là số đại số vì nó thoả mãn phương trình

$$x^2 - 2 = 0.$$

Tương tự, bất kì nghiệm của một phương trình có hệ số nguyên bậc ba, bậc bốn, bậc năm, hoặc bậc tuỳ ý là một số đại số, nghiệm đó có thể có hoặc không biểu diễn dưới dạng căn thức. Khái niệm số đại số là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm số hữu tỉ, tương ứng với trường hợp riêng $n = 1$.

Không phải mọi số thực đều là số đại số. Điều này suy ra từ định lý sau đây do Cantorr đề xuất, rằng tập hợp số đại số là *đếm được*. Bởi vì tập hợp số thực là không đếm được, cho nên bắt buộc phải tồn tại những số thực không phải là số đại số.

Một phương pháp đánh số tập hợp số đại số sau đây: ứng với mỗi phương trình dạng (1) là một số nguyên dương:

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + n$$

gọi đó là "độ cao" của phương trình. Đối với mỗi giá trị n cố định chỉ có một số hữu hạn các phương trình dạng (1) với độ cao h. Mỗi phương trình như thế có nhiều nhất n nghiệm. Bởi thế, chỉ có một số hữu hạn các số đại số của phương trình có độ cao h; và, chúng ta có thể sắp tất cả các số đại số thành dãy, bắt đầu kể từ những dãy nghiệm của phương trình có độ cao 1, sau đó độ cao 2,…

Chứng minh này về sự đếm được của tập hợp số đại số, xác nhận sự tồn tại các số thực không phải là số đại số. Chúng được gọi là những *số siêu việt*, như Euler đã nói: "chúng vượt qua sức mạnh của các phương pháp đại số."(*They trancend power of the algebraic methods)*.

Chứng minh của Cantorr về sự tồn tại các số siêu việt không có tính chất kiến tạo. Về mặt lý thuyết, thì có thể xây dựng được một số siêu việt bằng cách áp dụng qui trình đường chéo của Cantorr, thực hiện trên bảng liệt kê các nghiệm thập phân của những phương trình đại số; nhưng qui trình đó hoàn toàn không thực tiễn và không đưa đến một số có thể viết dưới dạng số thập phân hoặc bất kỳ một hệ thống nào. Ngoài ra, vấn đề lý thú nhất có liên quan đến số siêu việt nằm ở chỗ chứng minh những số cụ thể xác định như π và e) là số siêu việt.

**2. Định lý Liouville và việc xây dựng các số siêu việt

Chứng minh sự tồn tại của số siêu việt đã được J. Liouville(1809 – 1862) nêu ra trước Cantorr. Nó thực sự cho chúng ta khả năng xây dựng các thí dụ về những số như vậy. Chứng minh của Liouville khó hơn chứng minh của Cantor, điều này không có gì đáng ngạc nhiên, bởi vì việc xây dựng một thí dụ nói chung, khó hơn việc chứng minh sự tồn tại. Khi dẫn ra chứng minh của Liouville dưới đây, chúng tôi chỉ có ý định dành cho bạn đọc đã có một trình độ tương đối, tuy rằng muốn hiểu nó thì chỉ cần những kiến thức toán học sơ cấp đã hoàn toàn đủ. Liouville đã phát hiện được rằng những số đại số vô tỉ có tính chất là không thể xấp xỉ được bởi các số hữu tỉ với độ chính xác rất cao nếu như không chọn mẫu số cực kỳ lớn của các phân số xấp xỉ.

Chúng ta giả thiết số z thoả mãn phương trình đại số với hệ số nguyên:

(2) $$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

nhưng không thoả mãn phương trình loại đó với bậc thấp hơn. Khi đó, chúng ta nói rằng bản thân z là số đại số bậc n. Chẳng hạn số $z = \sqrt{2}$ là số đại số bậc 2, do thoả mãn phương trình $x^2 - 2 = 0$ mà không phải phương trình bậc nhất; số $z = \sqrt{3}$ là số đại số bậc 3 vì nó thoả mãn phương trình $x^3 - 2 = 0$ nhưng không thoả mãn phương trình bậc thấp hơn (như đã chứng minh trong chương III). Số đại số bậc $n > 1$ không thể là số hữu tỉ, bởi vì số hữu tỉ $z = p/q$ thoả mãn phương trình $qx - p = 0$ bậc 1. Mỗi số vô tỉ z đều có thể xấp xỉ với độ chính xác tuỳ ý bằng một số hữu tỉ, có nghĩa là chúng ta có thể tìm ra một dãy số:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$$

hữu tỉ với mẫu số tăng vô hạn mà

$$\frac{p_r}{q_r} \to z$$

Định lý Liouville khẳng định: mọi số đại số *z* bậc $n > 1$ đều có thể với độ chính xác bé hơn $1/q^{n+1}$, nói cách khác:

(3) $$\left|z-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q+1}$$

với mẫu số *q* đủ lớn.

Chúng ta sẽ cố gắng chứng minh định lý này, nhưng trước hết chúng ta sẽ chứng tỏ có thể dùng định lý này để xây dựng những số siêu việt như thế nào. Xét số

$z = a_1.10^{-1!} + a_2.10^{-2!} + a_3.10^{-3!} + \ldots + a_m.10^{-m!}$

$= 0,a_1a_2000a_3000000000000000000a_400\ldots$

trong đó a_i là số đại số tuỳ ý từ 1 đến 9 (đơn giản nhất là cho tất cả a_i bằng 1). Tính chất đặc trưng một số như vậy là độ dài các nhóm số 0 tăng nhanh ngăn cách bởi một chữ số khác 0. Ký hiệu z_m là một số thập phân hữu hạn có được bằng cách lấy các *z* cho đến số và bao gồm cả $a_m.10^{-m!}$. Khi đó

(4) $$|z - z_m| < 10.\ 10^{-(m+1)!}$$

Giả thử z là một số đại số bậc *n*. Khi đó, trong (3) chúng ta hãy đặt $p/q=z_m=p/10^{-m!}$, thì được:

$$|z - z_m| < \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

với *m* đủ lớn. Kết hợp với (4), chúng ta nên có

$$\frac{1}{10^{(n+1)m!}} < \frac{10}{10^{(m+1)!}} = \frac{1}{10^{(n+1)m!}-1},$$

để $(n+1)m! < (m+1)! - 1$ khi *m* đủ lớn. Những điều này sai với những giá trị *m* lớn hơn *n* (đề nghị bạn đọc chứng minh kỹ khẳng định này). Chúng ta đi đến mâu thuẫn. Như vậy, số z là số siêu việt.

Bây giờ chúng ta chứng minh định lý Liouville. Chúng ta giả thiết số z là số đại số bậc $n > 1$ thoả mãn phương trình (1) tức là

(5) $$f(z) = 0.$$

Lấy $z_m = p_m/q_m$ là một dãy số hữu tỉ với $z_m \to z$. Thế thì:

$$f(z_m) = f(z_m) - f(z) = a_1(z_m - z) + a_2(z_m^2 - z^2) + \ldots + a_n(z_m^n - z^n).$$

Chia cả hai vế cho $z_m - z$ và dùng công thức đại số:

$$\frac{u^n-v^n}{u-v} = u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1},$$

chúng ta được

(6) $\frac{f(z_m)}{z_m - z} = a_1 + a_2(z_m + z) + a_3(z_m^2 + z_m z + z^2) + \ldots + a_n(z_m^{n-1} + \cdots + z^{n-1}).$

Vì z_m dần tới z như là giới hạn, nó sẽ khác z ít hơn 1 khi m đủ lớn. Vì thế, có thể đánh giá như sau khi m đủ lớn:

(7) $$\left|\frac{f(z_m)}{z_m - z}\right| < |a_1| + 2|a_2|(|z| + 1) + 3|a_3|(|z| + 1)^2 + \cdots$$

$$+n|a_n|(|z| + 1)^{n-1} = M,$$

là một số không đổi, vì z là không đổi trong suốt quá trình chứng minh. Bây giờ chúng ta chọn m đủ lớn sao cho trong $z_m = \frac{p_m}{q_m}$ mẫu số q_m lớn hơn M, thế thì:

(8) $$|z - z_m| > \frac{|f(z_m)|}{M} > \frac{|f(z_m)|}{q_m}.$$

Để cho gọn, từ đây chúng ta qui ước viết p thay cho p_m, viết q thay cho q_m. Như vậy thì:

(9) $$|f(z_m)| = \frac{a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + \cdots + a_n q^n}{q^n}.$$

Bây giờ số $z_m = p/q$ không thể là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ bởi vì nếu thế thì từ đa thức f(x) có thể tách thừa số $(x - z_m)$, tức là z thoả mãn phương trình bậc thấp hơn n. Vậy, $f(z_m) \neq 0$. Nhưng tỉ số trong vế phải của đẳng thức (9) là một số nguyên cho nên giá trị tuyệt đối của nó ít nhất phải bằng đơn vị. Như vậy, so sánh các hệ thức (8) và (9) suy ra bất đẳng thức:

(10) $$|z - z_m| > \frac{1}{q} . \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}},$$

đó chính là điều phải chứng minh.

Trong vài chục năm gần đây, những nghiên cứu đề cập đến khả năng xấp xỉ các số đại số bởi số hữu tỉ đã tiến rất xa. Chẳng hạn, nhà toán học Nauy A. Thue (1863 – 1922) đã chứng minh rằng trong bất đẳng thức của Liouville (3), có thể thay thế số mũ $n + 1$ bằng số mũ nhỏ hơn $(n/2+1)$. C. L. Siegel đã chứng minh rằng còn có thể chọn số mũ nhỏ hơn $2\sqrt{n}$.

Số siêu việt luôn luôn là một đề tài được các nhà toán học chú ý đến. Nhưng cho đến gần đây, chúng ta mới chỉ biết được một vài số mà tính siêu việt của chúng đã được xác định (trong chương III, chúng ta sẽ nói về tính siêu việt của số π sẽ, từ đó suy ra không thể bình phương tròn bằng thước và compa). Trong báo cáo nổi tiếng đọc tại hội nghị toán học quốc tế ở Paris năm 1900, David Hilbert đã đề xuất ba mươi vấn đề toán có phát biểu đơn giản, một số bài toán có thể phát biểu dễ dàng bằng ngôn ngữ thông thường, nhưng một bài toán nào có thể giải ngay được bằng những kỹ thuật toán học hồi đó. Những "bài toán Hilbert" đó đã có tác dụng thúc đẩy mạnh mẽ toàn bộ thời kỳ phát triển toán học tiếp sau đó. Hầu như tất cả đã được giải được sau đó, và thường thì việc giải chúng đã có liên quan đến những kết quả rõ ràng về mặt chuẩn bị những phương pháp tổng quát hơn và sâu sắc hơn. Một trong những bài toàn dường như không có hy vọng giải được là vấn đề chứng minh rằng

$$2^{\sqrt{2}}$$

số là số siêu việt, hoặc ít ra là số vô tỉ. Trong vòng ba chục năm không có một cách xử lý nào có hy vọng đạt được kết quả. Cuối cùng, Seigel, và độc lập với ông, nhà toán học Nga trẻ tuổi, A. Gelfond đã phát minh những phương pháp mới để chứng minh tính siêu việt của nhiều số có ý nghĩa trong toán học, bao gồm cả số Hilbert số $2^{\sqrt{2}}$ và, tổng quát hơn, bất kì số dạng a^b trong đó a là số đại số ≠0 hoặc ≠1 và b là số đại số vô tỉ.

PHỤ LỤC CHƯƠNG II: ĐẠI SỐ TẬP HỢP

1. Lý thuyết tổng quát.

Khái niệm lớp hoặc tập hợp các sự vật là một trong những khái niệm cơ sở của toán học. Một tập hợp được xác định bởi một tính chất nào đó (thuộc tính) U mà mỗi sự vật đang xét phải có hoặc không có; những sự vật có tính chất U tạo thành một tập hợp A. Chẳng hạn, nếu chúng ta xét các số nguyên và tính chất U là "nguyên tố" thì tập hợp A tương ứng sẽ gồm tất cả các số nguyên tố 1, 2, 3, 5, 7…

Lý thuyết toán học về các tập hợp xuất phát từ chỗ, nhờ các phép toán nhất định, có thể cấu thành những tập hợp mới từ các tập hợp cho trước (tương tự như nhờ các phép toán cộng và nhân thu được các số mới từ các số cho trước). Việc nghiên cứu các phép toán về tập hợp là đối tượng của "đại số tập hợp" có nhiều cái chung với đại số các số bìnhường, dù rằng có điểm khác nhau. Sự kiện có thể áp dụng các phương pháp đại số để nghiên cứu các sự vật không phải là con số mà là các tập hợp đã minh hoạ cho tính khái quát cao của tư tưởng toán học hiện đại. Trong thời gian gần đây, chúng ta thấy đại số tập hợp đã cho ra đời nhiều lĩnh vực toán học, chẳng hạn lý thuyết độ đo và lý thuyết xác suất; nó cũng có ích trong việc hệ thống hoá các khái niệm toán học và làm sáng tỏ mối liên hệ logic giữa các khái niệm đó.

Từ đây, chúng ta sẽ ký hiệu một tập hợp sự vật không đổi nào đó là I mà bản, gọi nó là tập hợp vũ trụ(universe of discourse), và các tập hợp con của nó được ký hiệu là A, B, C… Nếu I là tập hợp số tự nhiên thì A, có thể là tập hợp số chẵn, B là tập hợp số lẻ, C là tập hợp số nguyên tố v.v… Nếu tập hợp I là tập hợp điểm trên mặt phẳng thì A có thể là tập hợp các điểm nằm trong một hình tròn nào đó, B là tập hợp các điểm nằm trong một hình tròn khác v.v… Để thuận tiện, trong số các "tập con" chúng ta kể cả bản thân I, cả tập hợp "rỗng" O không chứa phần tử nào. Sự mở rộng nhân tạo này nhằm mục đích bảo toàn ý kiến là mỗi tính chất U sẽ tương ứng với tập hợp những phân tử nào đó trong I có tính chất ấy. Trường hợp U là một tính chất được thực hiện toàn bộ, có thể dùng tính chất thoả mãn phương trình tầm thường $x = x$, thì tập con tương ứng của I sẽ là bản thân I, vì mỗi phần tử đều có tính chất đó, mặt khác nếu U là một tính chất mâu thuẫn nội tại nào đó như $x \neq x$, thì tập con tương ứng hoàn toàn không chứa phần tử nào, nó là tập hợp "rỗng" và được ký hiệu là 0.

Chúng ta gọi tập hợp A là một tập con của tập hợp B nếu trong tập hợp A không có phần tử nào không nằm trong B. Khi đó chúng ta viết

$$A \subset B \text{ hoặc } B \supset A$$

Thí dụ, tập hợp A các số nguyên chia hết cho 10 là tập con của tập hợp B các số nguyên chia hết cho 5, bởi vì mỗi số chia hết cho 10 cũng chia hết cho 5. Quan hệ $A \subset B$ không loại trừ quan hệ $B \subset A$. Nếu có đồng thời cả hai quan hệ thì chúng ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết

$$A = B.$$

Điều này có nghĩa mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại, tức là các tập hợp A và B chứa những phần tử như nhau.

Quan hệ $A \subset B$ giữa các tập hợp nhắc nhở chúng ta đến quan hệ $a \leq b$ giữa các số thực. Cụ thể, đúng thật như vậy

1) $A \subset A$

2) *Nếu* $A \subset B$ *và* $B \subset A$ *thì* $A = B$

3) *Nếu* $A \subset B$ *và* $B \subset C$ *thì* $A \subset C$

Do đó quan hệ giữa $A \subset B$ còn được gọi là "quan hệ thứ tự". Chỗ khác biệt chủ yếu với quan hệ $a \leq b$ cho số thực là, mọi cặp số a và b bao giờ cũng có ít nhất một quan hệ $a \leq b$ hoặc $b \leq a$, điều này không đúng trong các tập hợp. Thí dụ: nếu A là một tập hợp gồm các số nguyên 1, 2, 3,

$$A = \{1, 2, 3\},$$

còn B là tập hợp gồm các số nguyên 2, 3, 4,

$$B = \{2, 3, 4\},$$

thì không có $A \subset B$ hoặc $B \subset A$. Vì thế, vì thế quan hệ $A \subset B$ của tập hợp I là được sắp thứ tự bộ phận, trong khi quan hệ $a \leq b$ lập thành một tập hợp "có thứ tự tuyến tính".

Ngoài ra, chúng ta lưu ý rằng từ định nghĩa quan hệ $A \subset B$, chúng ta có

4) $O \subset A$ vớ tập hợp A bất kì và

5) $A \subset I$,

ở đây A là tập hợp con của tập hợp toàn bộ I. Tính chất 4) xem ra có vẻ vô lý, nhưng nếu suy nghĩ kỹ thì nó phù hợp với ý nghĩa chính xác của định nghĩa của kí hiệu $\subset$. Hệ thức $O \subset A$ có thể sai nếu tập rỗng O chứa một phần tử không nằm trong A, và vì tập hợp rỗng hoàn toàn không chứa phần tử nào cả, cho nên không thể xảy ra sự vô lý đó với tập hợp A.

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa hai phép toán trên các tập hợp, có nhiều tính chất đại số của phép cộng và phép nhân các số thông thường, mặc dù nội dung bên trong của nó là hoàn toàn khác với các phép toán đó. Giả thử A và B là hai tập hợp bất kì. Hợp hoặc "tổng logic" của A và B là một tập hợp gồm những phần tử nằm trong A hoặc nằm trong B (kể cả phần tử nằm trong cả hai). Tập hợp này được ký hiệu là A + B. "Giao" hoặc "tích logic" của A và B là một tập hợp chứa những phần tử nằm trong cả A và B. Tập hợp này được ký hiệu AB. Chúng ta minh hoạ các phép toán thí dụ. Một lần nữa, chúng ta chọn tập hợp A và B

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 3, 4\},$$

thế thì $$A + B = \{1, 2, 3, 4\}, \ AB = \{2, 3\}$$

Sau đây là những tính chất đại số quan trọng của các phép toán A + B và AB. Dựa vào các định nghĩa của bản thân các phép toán, bạn đọc có thể thử lại các tính chất đó:

6) $A + B = B + A$ 7) $A.B = B.A$

8) $A + (B + C) = (A + B) + C$ 9) $A(BC) = (AB).C$

10) $A + A = A$ 11) $A.A = A$

12) $A (B + C) = AB + AC$ 13) $A + (BC) = (A+B)(A+C)$

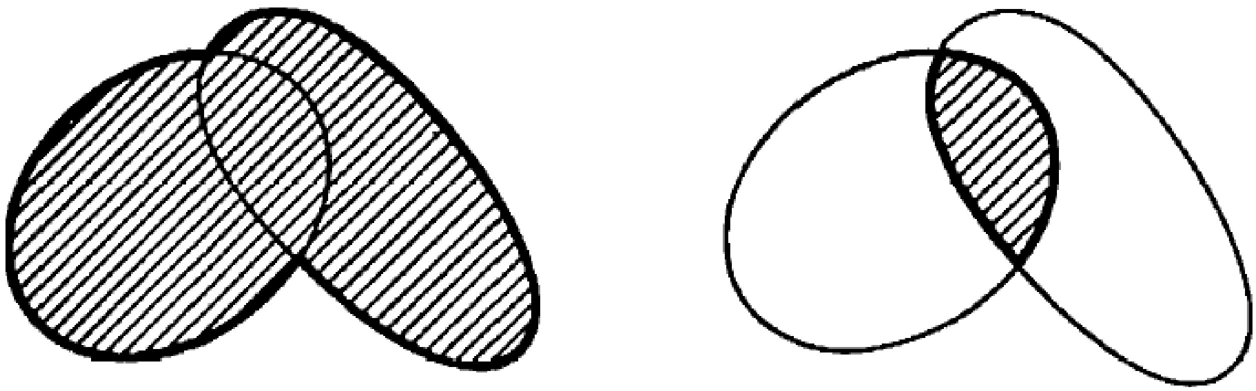
14) $A + O = A$ 15) $A.I = A$

16) $A + I = I$ 17) $A.O = O$

18) Quan hệ $A \subset B$ là tương ứng với một trong hai quan hệ

$$A + B = B, AB = A.$$

Việc thử lại tất cả những định luật đó là việc của bản thân logic sơ cấp. Chẳng hạn, 10) xác nhận rằng tập hợp các phần tử được chứa trong A hoặc trong A chính là tập hợp A, trong khi đó 12) xác nhận rằng tập hợp những phần tử thuộc A đồng thời thuộc B hoặc thuộc C, trùng với tập hợp các phần tử cùng nằm trong A và trong B hoặc cùng nằm trong A và trong C. Những lập luận logic được dùng để chứng minh các định luật này được minh hoạ một cách thuận lợi nếu như chúng ta qui ước biểu thị các tập hợp A, B, C… dưới dạng những hình phẳng nào đó và lưu ý sao cho không bỏ sót một khả năng logic nào có thể xảy ra khi đề cập đến sự có những phần tử chung của hai tập hợp hoặc ngược lại đề cập đến sự có những phần tử trong một tập hợp này nhưng không thuộc tập hợp khác.



$A + B$ $\qquad\qquad$ AB

Fig. 26. Union and intersection of sets.

Bạn đọc cần lưu ý đến các định luật 6), 7), 8), 9), 12) về hình thức giống với các định luật giao hoán, kết hợp và phân phối của đại số học thông thường. Từ đó suy ra mọi qui tắc của đại số học thông thường rút ra từ những định luật đó cũng đúng trong đại số tập hợp. Ngược lại, những định luật 10), 11) và 13) không có những định luật tương tự trong đại số học thông thường, chúng cho đại số tập hợp một cấu trúc đơn giản hơn. Chẳng hạn, công thức nhị thức trong đại số tập hợp dẫn tới một đẳng thức đơn giản:

$$(A + B)^n = (A + B) . (A + B)\ldots (A + B) = A + B$$

điều này suy ra từ định luật 11). Các định luật 14), 15) và 17) nói rằng các tính chất của các tập hợp O và I với các phép toán hợp và giao của các tập hợp là khá giống các tính chất của số 0 và 1 đối với các phép toán cộng và nhân các số thông thường. Nhưng định luật 16) không có cái tương tự trong đại số thông thường.

Nó còn dùng để định nghĩa của một phép tính khác nữa trong đại số tập hợp. Giả thử A là một tập con tuỳ ý của tập hợp toàn bộ I. Phần bù của A trong

I là tập hợp tất cả các phần tử trong I mà không thuộc A. Tập hợp này chúng ta ký hiệu là A′. Chẳng hạn, nếu I là tập hợp các số tự nhiên, A là tập hợp các số nguyên tố, thì tập hợp A′ chứa tất cả các hợp số và số 1. Phép toán chuyển từ A đến A′ không có cái tương tự trong đại số thông thường và có những tính chất sau đây:

19) $A + A' = I$ 20) $A.A' = O$

21) $O' = I$ 22) $I' = O$

23) $A'' = A$

24) *Quan hệ* $A \subset B$ *tương đương với quan hệ* $B' \subset A'$.

25) $(A + B)' = A'B'$ 26) $(AB)' = A' + B'$.

Lần nữa, chúng tôi dành bạn đọc thử lại những tính chất đó.

Các định luật 1 – 26 là cơ sở của đại số tập hợp. Chúng có "tính chất đối ngẫu" đặc biệt sau đây:

Nếu trong một định luật bất kỳ từ 1 – 26 chúng ta thay thế lẫn nhau từng cặp các ký hiệu

$\subset$ và $\supset$

O và I

+ và .

thì kết quả vẫn là một trong những định luật đó.

Chẳng hạn, định luật 6 chuyển thành định luật 7, 12 thành 13, 17 thành 16 v.v… Từ đó suy ra mỗi định lý rút ra từ các định luật 1 – 26 tương ứng với một định lý khác "đối ngẫu" với nó, thu được bằng cách hoán vị các ký hiệu đã nói ở trên. Thực vậy, bởi vì việc chứng minh định lý thứ nhất là việc ứng dụng liên tiếp trong những giai đoạn khác nhau của các lập luận một số định luật 1 – 26 thì việc ứng dụng các định luật "đối ngẫu" trong các giai đoạn tương ứng sẽ tạo nên chứng minh của định lý "đối ngẫu". (cũng tương tự như tính đối ngẫu trong hình học, xem chương IV).

2. Áp dụng vào logic toán.

Sự thử lại các định luật của đại số tập hợp là dựa trên sự phân tích ý nghĩa logic của các quan hệ A ⊂ B và các phép toán A + B, AB và A′. Bây giờ chúng ta có thể xem các định luật 1 – 26 như là cơ sở của "đại số logic". Nói chính xác hơn: phần của logic, tiếp cận các tập hợp hoặc các tính chất của sự vật được xem xét, có thể qui về một hệ thống đại số hình thức dựa trên các định luật 1 – 26. Định nghĩa tập hợp toàn bộ I về mặt logic xác định tập hợp I; mỗi tính chất U xác định một tập hợp A gồm những sự vật trong I có tính chất đó. Quy tắc phiên dịch các thuật ngữ logic thông thường sang ngôn ngữ tập hợp thể hiện trong các thí dụ sau đây:

"A hoặc B"	$A + B$
"A và B"	AB
"Không A"	A'
"Không A, không B"	$(A + B)'$, hoặc tương đương, $A'B'$
"Không phải vừa A vừa B"	$(AB)'$, hoặc tương đương, $A' + B'$
"Tất cả A là B" hoặc "Nếu A, thì B" hoặc "A suy ra B"	$A \subset B$
"Một A nào đó là B"	$AB \neq 0$
"Không có A nào là B"	$AB = 0$
"Một A nào đó không là B"	$AB' \neq 0$
"Không có A nào"	$A = 0$

Trong thuật ngữ của đại số tập hợp, tam đoạn luận "Barbara" nói rằng: "nếu tất cả A là B và tất cả B là C, thì tất cả A là C" sẽ có dạng đơn giản:

3) *Nếu* $A \subset B$ *và* $B \subset C$ *thì* $A \subset C$.

Tương tự "luật mâu thuẫn" khẳng định rằng: "một không thể đồng thời có và không có một tính chất nào đó" được viết dưới dạng:

20) $AA' = 0,$

còn "luật bài trung" nói rằng: "mọi sự vật hoặc có, hoặc không có một tính chất nào đó" trở thành

19) $A + A' = I.$

Bởi thế phần của logic được biểu thị bằng các thuật ngữ của ký hiệu Ì, +, . và (′) có thể được coi như một hệ đại số hình thức tuân theo các định luật 1) – 26). Dựa vào sự hoà hợp của giải tích logic toán học và giải tích toán học logic thì một ngành toán học mới đã được hình thành – logic toán – một ngành mà hiện nay đang phát triển mạnh mẽ.

Với quan điểm tiền đề, chúng ta chú ý đến một sự kiện đặc biệt là các khẳng định 1 – 26 cùng với mọi định lý khác của đại số tập hợp có thể suy ra được một cách logic từ ba đẳng thức sau đây:

$$A + B = B + A$$

27) $$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A' + B')' + (A' + B)' = A$$

Từ đó suy ra có thể xây dựng đại số tập hợp như một lý thuyết suy diễn thuần tuý giống như hình học Euclid, dựa vào ba mệnh đề đó coi như các tiên đề. Nếu các tiên đề đó được thực hiện thì phép toán AB và quan hệ A ⊂ B sẽ được định nghĩa theo thuật ngữ A + B và A′:

AB biểu thị tập hợp (A′ + B′)′

A ⊂ B biểu thị rằng A + B = B.

Một hệ thống toán học gồm tám số 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, trong đó a + b, theo định nghĩa biểu thị bội chung nhỏ nhất của a và b, ab biểu thị ước chung lớn nhất của a và b, a ⊂ b biểu thị khẳng định "b chia hết cho a" và a′ biểu thị số 30/a, thoả mãn mọi định luật hình thức của đại số tập hợp cũng là một thí dụ hoàn toàn khác. Sự tồn tại những thí dụ như vậy kéo theo sự nghiên cứu các hệ thống đại số tổng quát thoả mãn các định luật 27). Những hệ thống như vậy được gọi là "các đại số Boolean" để kỷ niệm George Boole (1815 – 1864), nhà toán học và logic học Anh với cuốn sách của ông "An investigation of the laws of thought" ra đời năm 1854.

3. Một áp dụng vào lý thuyết xác suất

Đại số tập hợp có quan hệ gần gũi nhất với lý thuyết xác suất, cho phép chúng ta nhìn lý thuyết này theo một quan điểm mới. Chúng ta xét một thí dụ đơn giản nhất: chúng ta hình dung một phép thử với một số hữu hạn các kết cục có thể mà chúng ta cho rằng "đồng khả năng". Chẳng hạn, phép thử có thể là việc rút hú hoạ một con bài trong một cỗ bài đã xóc kỹ. Nếu chúng ta biểu thị tập hợp các kết cục là I, còn A biểu thị cho một tập con nào đó của I, thì xác suất để cho kết cục của phép thử thuộc vào tập con A được xác định bởi tỉ số:

$$p(A) = \frac{\textit{số phần tử trong } A}{\textit{số phần tử trong } I}$$

Nếu chúng ta qui ước biểu thị số phần tử của tập hợp A nào đó là n(A) thì đẳng thức trên sẽ có dạng

(1) $$p(A) = \frac{n(A)}{n(A)}$$

Trong thí dụ này, giả thử A là tập hợp các con "nhép" chúng ta có n(A) = 13, n(I) = 52 và p(A) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Các tư tưởng của đại số tập hợp được phát lộ ra trong khi tính xác suất nếu đã biết xác suất của một số tập hợp cần tính xác suất của các tập hợp khác. Thí dụ, biết xác suất p(A), p(B) và p(AB), có thể tính được xác suất p(A+B):

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) \tag{2}$$

chứng minh đơn giản. Chúng ta có:

$$n(A+B) = n(A) + n(B) - n(AB)$$

bởi vì các phần tử được chứa đồng thời trong A và trong B, tức là phần tử trong AB được xét đến hai lần trong khi tính tổng n(A) + n(B), nghĩa là cần trừ n(AB) vào tổng đó để cho việc tính n(A+B) được thực hiện đúng. Sau đó chia cả hai vế của đẳng thức cho n(I) chúng ta được hệ thức (2).

Nếu xét ba tập hợp A, B, C trong I chúng ta được một công thức lý thú hơn. Dùng hệ thức (2) chúng ta có:

$$p(A + B + C) = p[(A+B)+C] = p(A + B) + p(C) - p[(A + B)C].$$

Định luật (12) trong bài trên cho chúng ta (A + B)C = AC +BC. Từ đó suy ra:

$$p[(A + B)C] = p(AC + BC) = p(AC) + p(BC) - p(ABC).$$

Thay vào phương trình trên giá trị của p[(A + B)C] và giá trị của p(A + B) được cho bởi (2), chúng ta có công thức:

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC). \tag{3}$$

Để làm thí dụ, chúng ta xét phép thử sau. Ba chữ số 1, 2, 3 được viết theo một trật tự tuỳ ý. Xác suất để cho ít nhất một trong các chữ số đó nằm ở vị trí đúng của nó (tính theo thứ tự) là bao nhiêu? Giả sử A là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 1 đứng ở vị trí thứ nhất, B là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 2 ở vị trí thứ hai, C là tập hợp các hoán vị trong đó chữ số 3 đứng ở vị trí thứ ba. Chúng ta cần tính p(A + B + C). Rõ ràng:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

thực vậy, nếu một chữ số tuỳ ý đứng ở vị trí đúng của nó thì có hai khả năng hoán vị hai chữ số còn lại trong số 3.2.1 = 6 các hoán vị có thể của ba chữ số. Hơn nữa:

$$p(AB) = p(AC) = p(BC) = \frac{1}{6}$$

và $$p(ABC) = \frac{1}{6},$$

vì chỉ xảy ra một trong các trường hợp đó. Theo công thức (3)

$$p(A+B+C) = 3.\frac{1}{3} - 3.\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0,6666 \ldots$$

Bài tập: Tìm một công thức cho p(A + B + C + D) và áp dụng nó cho trường hợp có 4 kí tự. Kết quả tương ứng là $\frac{5}{8}$ = 0.6250

Công thức chung cho *n* tập hợp là

$$p(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_1 p(A_i) - \sum_2 p(A_iA_j) + \sum_3 p(A_iA_jA_k)$$

(4) $$- \cdots \pm p(A_1A_2 \ldots A_n),$$

ở đây biểu tượng $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$,…, $\sum_{n-1}$ là tổng của việc kết hợp có thể được của các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lấy một, hai, ba, … (n-1) tại một lần. Biểu thức này có thể đưa ra bằng quy nạp toán học theo cùng một cách mà để có được (3) từ (2). Từ (4) chúng ta dễ dàng thấy rằng nếu n kí tự 1, 2, 3, …, n được viết theo thứ tự bất kì, có thể ít nhất một ký tự sẽ ở đúng vị trí của nó.

(5) $$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots \pm \frac{1}{n!},$$

ở đây ký hiệu $\pm$, cộng hoặc trừ, phụ thuộc vào *n* chẵn hoặc lẻ. Cụ thể, cho n = 5 thì xác xuất là

$$p_5 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{19}{30} = 0.63333 \ldots,$$

Chúng ta sẽ thấy ở chương VIII rằng khi n tiến tới vô cùng thì chuỗi

$$S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots \pm \frac{1}{n!}$$

Tiến tới giới hạn, 1/e, giá trị của nó đến năm vị trí thập phân là .36788. Lại theo (5) $p_n = 1 - S_n$, cho thấy rằng khi n tiến tới vô cùng thì

$$p_n \to 1 - 1/e = .63212.$$