ĐỀ LUYỆN TẬP MÔN NHẬP MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(Thời gian làm bài 60 phút)

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 12 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$.

a) Viết hệ phương trình trên dưới dạng ma trận.

b) Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss.

Câu 2.

a) Tìm giá trị của m để ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3m-7 \\ -1 & m^2+m \end{bmatrix}$ là ma trận khả nghịch, với những giá trị .

vừa tìm được hãy xác đinh ma trận nghịch đảo A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X + 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Câu 3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$

a) Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của ma trận A.

b) Tìm số chiều của phần bù trực giao của không gian cột của ma trận A.

Câu 4. Cho biến đổi tuyến tính $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa mãn

$$T\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các số thực c_1, c_2 sao cho $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) Tìm ảnh của véc tơ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ qua biến đổi tuyến tính T.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x \quad + y \quad + z \ = -7 \\ \quad - y \quad + z \ = 8 \\ 3x + y + (m^2 - 4)z = 3 \end{cases}.$$

a) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

b) Giải hệ với giá trị vừa tìm được của m.

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A.

b) Sau đó, tìm ma trận khả nghịch S và ma trận đường chéo Λ sao cho: $A = S\Lambda S^{-1}$ và tìm A^{2022}.

Câu 3. Cho $U = \left\{ \mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Chứng mính rằng là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của U.

Câu 4. Cho tương ứng $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2x - z \\ x - y + 3z \end{bmatrix} \ \textbf{với } \mathbf{v} = (x, y, z).$$

a) Chứng minh rằng T là một phép biến đổi tuyến tính.

b) Tìm ma trận chính tắc của T và xác định $T(\mathbf{v})$ với $\mathbf{v} = (2; -3; 5)$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1. Tìm véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn phương trình:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\5\\10\end{bmatrix}.$$

Câu 2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1 = (2;1;3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0;1;1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (4;2;m)\}$.

a. Tìm m để hệ véc tơ trên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Với $m = 7$, tìm tọa độ của véc tơ $\mathbf{v} = (3;6;7)$ trong cơ sở S.

Câu 3. Tìm một cơ sở và số chiều các không gian con $C(A)$ và $N(A)$ của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Câu 4. Cho phép biến đổi: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-3z\\x+y\end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng f là một phép biến đổi tuyến tính.

b) Xác định ma trận chính tắc của f và tìm $f\begin{pmatrix}-5\\2\\-1\end{pmatrix}$.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -2x + y - z = -2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 6x - 2z = 4 \\ -4x - y + 3z = -2 \end{cases}$.

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 2x \\ x & x & 1 & 4 \\ 1 & 3 & x & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ với $x \in \mathbb{R}$.

a) Tính $\det A$.

b) Giải phương trình $\det A = 0$.

Câu 3. Cho $U = \left\{ \mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Chứng minh rằng là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của $U^{\perp}$.

Câu 4. Cho ánh xạ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$T(x, y) = y\mathbf{u_1} + x\mathbf{u_2} + (x - y)\mathbf{u_3}$$

trong đó $\mathbf{u_1} = (1;1;0)$, $\mathbf{u_2} = (1;1;1)$, $\mathbf{u_3} = (1;0;0)$.

Chứng minh rằng T là một biến đổi tuyến tính. Tìm ma trận chính tắc của T.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

a) Viết hệ dưới dạng ma trận.

b) Giải hệ phương trình.

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} bằng phương pháp phần phụ đại số

b) Tìm ma trận X thỏa mãn: $XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Câu 3. Chứng tỏ tập vecto L được xác định sau đây là không gian con của $\mathbb{R}^3$, tìm một cơ sở và số chiều của chúng.

$$L = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2 \right\}.$$

Câu 4. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm x và y sao cho $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Tìm ma trận chính tắc của f.