Bài 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 17 tháng 3 năm 2020

Giới thiệu môn học-tài liệu

- Tên môn học: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
- Thời gian học: 45 tiết:
- Tài liệu:
  - Tài liệu chính: Giáo trình: Nhập môn Đại số tuyến tính. Sách dịch. Đại học Thuỷ lợi. 2010
  - Tài liệu tham khảo:
    [1] Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp tập 1, Nhà xuất bản GD, 2007.
    [2] Nguyễn Đình Trí, Bài tập Toán học cao cấp tập 1, Nhà xuất bản GD, 2007.
    [3] Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập Lê Tuấn Hoa, Viện toán học

I. GIỚI THIỆU VÉC TƠ
1. Khái niệm

a. Véc tơ hình học

Véc tơ hình học là một đoạn thẳng được định hướng.
Trong môn học này, ta thường quan tâm tới việc biểu diễn các véc tơ dưới dạng tọa độ.

b. Véc tơ cột n chiều

Véc tơ cột n chiều: $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Đôi khi ta viết gọn $u = (x_1; x_2; \dots; x_n)$

2. Các phép toán véc tơ

Cho $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

a) **Cộng hai véc tơ** :

$$u \pm v = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}$$

b) **Nhân một véc tơ với một số**:

$$cu = \begin{bmatrix} c.x_1 \\ \vdots \\ c.x_n \end{bmatrix}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

c) **Tổ hợp tuyến tính của các véc tơ** $v_1, v_2, \dots .v_n$ là:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n,$$

với $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$.
d) **Tích vô hướng:** $u.v = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \cdots + x_n.y_n$.
e) **Độ dài của véc tơ (chuẩn Euclid):** $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$.
f) **Véc tơ đơn vị:** Là véc tơ có độ dài bằng 1. Véc tơ đơn vị cùng hướng với $u \neq 0$ là $\dfrac{u}{\|u\|}$.

VD:

Cho các véc tơ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Hãy tính

(a) $u + v - 3w = ?$

(b) $u \cdot v = ?$

(c) $\|u\| = ?$

(d) Tìm véc tơ đơn vị của u?

Nhận xét:

Trong không gian 3 chiều:

- Khi véc tơ $v \neq 0$, tập hợp tất cả các tổ hợp cv lấp đầy một đường thẳng.
- Khi các véc tơ v_1, v_2 không cùng phương thì tất cả các tổ hợp $c_1v_1 + c_2v_2$ lấp đầy một mặt phẳng.
- Khi các véc tơ v_1, v_2, v_3 không đồng phẳng thì tất cả các tổ hợp

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$$

lấp đầy không gian.

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa

- Một phương trình tuyến tính n ẩn là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$; $x_1, ..., x_n$ là n ẩn cần tìm.

- Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

trong đó $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$; $x_1, ..., x_n$ là n ẩn cần tìm.

Dạng hệ PTTT như định nghĩa trên gọi là dạng hàng

a) **Dạng phương trình véc tơ (dạng cột)** Kí hiệu

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, .., n, \text{ và véc tơ tự do } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình trở thành

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b$$

Nhận xét: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ b là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ v_j

b) Dạng phương trình ma trận (dạng ma trận)

Ma trận hệ số: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Hệ dạng ma trận $Ax = b$.

Ở đó

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \dots \\ h_mx \end{bmatrix}$$

với các véc tơ hàng của A: $h_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = \overline{1, m}$.

Chú ý: Hệ $Ax = b$ gọi là là hệ tuyến tính thuần nhất khi $b = 0$, tức là hệ $Ax = 0$.

Chú ý: Ma trận mở rộng.

Xét hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$.

Ta gọi bảng số $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ là ma trận mở rộng của hệ đó.

VD:

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_4 & = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = 3 \end{cases}$$

Tìm ma trận hệ số, ma trận mở rộng; b; x và tìm các dạng biểu diễn khác của hệ trên.

III. Phương pháp giải: Phép khử Gauss
1. Một số hệ tuyến tính đặc biệt

a) Hệ dạng tam giác:

Hệ dạng tam giác là hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

trong đó các hệ số $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$.

Cách giải: Giải hệ bằng phương pháp thế ngược từ dưới lên:

- $x_n = b_n.{a_{nn}}^{-1}$,
- thay x_{nn} vào phương trình thứ $n-1 \Longrightarrow x_{n-1}$, ...

VD:

Giải hệ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 - x_3 & = 2 \\ 3x_3 & = 6 \end{cases}$$

b) Hệ dạng bậc thang

Ma trận bậc thang

Định nghĩa

- Ma trận bậc thang là ma trận hệ số thỏa mãn:
  -) Số các số 0 đứng đầu hàng $k+1$ phải lớn hơn số các số 0 đứng đầu hàng k.
  -) Nếu có hàng gồm toàn số 0 thì chúng nằm dưới cùng.
- Trụ là phần tử khác không đầu tiên trong một hàng của ma trận bậc thang.
- Cột chứa phần tử trụ gọi là cột trụ.

VD:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Là các ma trận bậc thang. Đâu là trụ? Đâu là cột trụ.

Hệ dạng bậc thang

Hệ dạng bậc thang là hệ mà ma trận hệ số là ma trận bậc thang.
Ẩn có hệ số là trụ gọi là biến trụ, các ẩn còn lại gọi là biến tự do.
VD:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ \quad -x_2 + 4x_3 - x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 & = -1 \end{cases}$$

Là hệ bậc thang. Đâu là biến trụ, đâu là biến tự do.

Cách giải:

+) Nếu hệ chứa phương trình dạng $0 = b_i \neq 0$: hệ vô nghiệm.
+) Trường hợp còn lại: Chuyển biến tự do sang phải rồi tìm biến trụ theo các biến trụ theo các biến tự do như giải hệ tam giác.

VD:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Nhận xét: Hệ dạng tam giác là trường hợp đặc biệt của hệ dạng bậc thang.

2. Giải hệ phương trình tuyến tính bất kỳ

- Xét hệ $Ax = b$. Biến đổi $[A|b] \xrightarrow{\text{Khử Gauss}} [U|b']$, với U là ma trận bậc thang.
- Khi đó khôi phục hệ: $Ax = b \Leftrightarrow Ux = b'$ (dạng hệ bậc thang).

Phép Khử Gauss:

1. Đổi chỗ hai hàng của hệ
2. Lấy một hàng trừ đi bội của các hàng khác
3. Nhân một hàng với một số khác 0.

Chú ý:

- Trong quá trình thực hiện phép khử, nếu xuất hiện phương trình dạng $0 = 0$ thì có thể loại ra khỏi hệ.
- Nếu xuất hiện phương trình $0 = b,\ b \neq 0$, thì kết luận ngay hệ vô nghiệm.

VD:

Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = 2 \\ -x_1 - x_3 + x_4 & = 2 \\ 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 & = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = -2 \end{cases}$$

Chú ý:

$+)$ Hệ phương trình thuần nhất có dạng $Ax = 0$, tức $b = 0$, vì thế khi sử dụng phương pháp khử Gauss ta chỉ cần biến đổi trên ma trận hệ số A.
$+)$ Hệ thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm $x = (0; 0; ...; 0)$, gọi là nghiệm tầm thường.

VD:

a. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 11x_3 & = 0 \end{cases}$$

b. Giải và biện luận theo λ hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 & = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 & = \lambda^2 \end{cases}$$

ĐS:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \end{array} \right. \text{HỆ VÔ NGHIỆM}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 3 \end{array} \right. \text{HỆ CÓ NGHIỆM DUY NHẤT} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\lambda^2+2\lambda-2}{\lambda(3-\lambda)} \\ \\ x_2 = \frac{2\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda(3-\lambda)} \\ x_3 = \frac{\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1}{\lambda(3-\lambda)} \end{array} \right.$$

Một số Ví dụ thêm

a. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 & = 9 \end{cases}$$

b. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 & = 0 \end{cases}$$

Bài 2: MA TRẬN

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 11 tháng 5 năm 2020

1. Khái niệm ma trận

- Ma trận $m \times n$ là một bảng hình chữ nhật có m hàng, n cột:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Kí hiệu gọn $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Với $m \times n$ gọi là cỡ (hay cấp) của ma trận, a_{ij} - phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j của ma trận. $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots a_{in}]$ - hàng thứ i.
$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ - cột thứ j

2. Một số ma trận đặc biệt

+) Ma trận vuông cấp n là ma trận cấp $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{ii}, i = \overline{1, n}$ đường chéo chính.

+) Ma trận tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tức là: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ với $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

+) Ma trận tam giác dưới

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tức là: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ với $a_{ij} = 0 \; \forall i < j$.

+) Ma trận đường chéo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tức là $A = (a_{ij})_{n \times n}$ với $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

+) Ma trận đơn vị cấp n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma trận đơn vị cấp 2.

+) Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0. Ma trận không thường ký hiệu là O.

+) Ma trận đối xứng: $A = (a_{ij})_{n\times n}$ mà $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

+) Ma trận đối của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là $A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

+) Ma trận cột là ma trận chỉ gồm một cột. Đó chính là véc tơ cột.

Ví dụ: $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

+) Hai ma trận trận bằng nhau:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = B = (b_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$$

II. CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

1. Phép toán cộng ma trận

Định nghĩa: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} =$$

Chú ý:

- Phép cộng các ma trận chỉ thực hiện được khi các ma trận là cùng cấp.
- Phép toán trừ ma trận: $A - B = A + (-B)$

2. Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow cA_{m\times n} = c(a_{ij})_{m\times n} = (ca_{ij})_{m\times n}$$

Ví dụ:

Tìm $3A - B$ với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 18 \\ -2 & 10 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Phép nhân 2 ma trận

Định nghĩa:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n};\ B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p} \Rightarrow AB = C = \left(c_{ij}\right)_{m\times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{in}.b_{nj}$$

Phần tử c_{ij} của ma trận C được xác định bằng cách lấy hàng i của ma trận A nhân vô hướng với cột j của ma trận B.

Luỹ thừa của ma trận vuông A:

$$A^k = A.A...A, k \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tìm AB. Tìm B^2. Có nhân BA được không?

Ví dụ:

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Hãy tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

$$AX = XA$$

b. Tìm ma trận X thỏa mãn

$$A^2X - 2I_2 = O$$

Nhận xét:

- Hai ma trận chỉ nhân được với nhau nếu số cột của ma trận đứng trước bằng số hàng của ma trận đứng sau.
- Phép nhân 2 ma trận không có tính chất giao hoán.
- Từ $AB = 0$ không suy ra $A = 0$ hoặc $B = 0$.

4. Tính chất của các phép toán ma trận

Định lí: Với $x, y \in \mathbb{R}$, A, B, C là các ma trận bất kì để các phép toán dưới đây được xác định:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $x(A + B) = xA + xB$
6. $(x + y)A = xA + yA$
7. $A(BC) = (AB)C$
8. $A(B + C) = AB + AC; \quad (A + B)C = AC + BC.$
9. $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}; \quad I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
10. $A_{m\times n}O_{n\times p} = O_{m\times p}; \quad O_{p\times m}A_{m\times n} = O_{p\times n}$ ($A_{m\times n}$ ý nói ma trận cấp $m \times n$).

III. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là ma trận khả nghịch (hay không suy biến) nếu tồn tại một ma trận, kí hiệu là A^{-1} sao cho $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Khi đó A^{-1} gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Ví dụ:

a. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ khả nghịch $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$. Và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

2. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss

Phương pháp:

$[A|I] \xrightarrow{\text{Khử Gauss}} [I|A^{-1}]$

Trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

Phép biến đổi Gauss:

1) Đổi chỗ hai hai hàng

2) Lấy một hàng trừ đi bội của các hàng khác khác

3) Nhân một hàng với một số khác 0.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tìm A^{-1}.

Tính chất liên quan đến ma trận nghịch đảo

Định lí:

A, B là 2 ma trận vuông cấp n, khả nghịch. Khi đó

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}, \ \forall c \neq 0$.

Chú ý:

1. Mở rộng với tích k ma trận khả nghịch:

$$(A_1.A_2....A_k)^{-1} = {A_k}^{-1}.{A_{k-1}}^{-1}....{A_1}^{-1}$$

2. Hệ $Ax = 0$ có nghiệm $x \neq 0$ khi và chỉ khi A không khả nghịch.
3. A khả nghịch, khi đó hệ $Ax = b$ có nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$.

V. MA TRẬN CHUYỂN VỊ

1. Định nghĩa:

Giả sử A là ma trận cấp $m \times n$. Ma trận chuyển vị của A, ký hiệu là A^T có được bằng cách đổi hàng thành cột.
Tức là $A = (a_{ij})_{m\times n}$ thì $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Nhận xét:
Nếu A là ma trận $m \times n$, thì A^T là ma trận $n \times m$.
Ma trận A đối xứng nếu và chỉ nếu $A^T = A$.
Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Tính chất:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(cA)^T = cA^T \forall c \in \mathbb{R}$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$

IV. Phép nhân Hadamard (hay element-wise). Tích Hadamard của hai ma trận cùng cỡ

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cấp $m \times n$: $A = (a_{ij})_{m\times n}; B = (b_{ij})_{m\times n}$. Khi đó tích Hadamard của A và B kí hiệu: $A \circ B$ là

$$A \circ B = C = (c_{ij})_{m\times n}, \quad \text{với } c_{ij} = a_{ij} b_{ij}. \tag{1}$$

VD: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow A \circ B = \begin{bmatrix} 0.(-2) & 2.0 & 1.2 \\ -1.1 & 1.0 & 3.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Giới thiệu khái niệm ma trận chuyển vị liên hợp

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Khi đó chuyển vị liên hợp của A là

$$A^H = (\overline{a_{ji}})_{n\times m}.$$

Bài 3: ĐỊNH THỨC

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 25 tháng 3 năm 2020

1. Định thức cấp 2

a) **Định nghĩa:** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Định thức của A, kí hiệu là $|A|$ hay $\det A$, là một số:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

b) **Quy tắc tính:** Tích hai phần tử trên đường chéo chính trừ đi tích hai phần tử trên đường chéo phụ.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2.7 - (-3)\,.4 = 26$$

a) Định nghĩa:

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Định thức của A, kí hiệu là $|A|$ hay $\det A$, là một số được tính theo công thức

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

b) Quy tắc tính:

Định thức cấp 3 được tính bằng tổng 6 số hạng với 3 dấu cộng và 3 dấu trừ:

Ví dụ

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (-2).(-1).2 + 4.5.0 + 1.1.0 \\ &- 0.0.(-1) - 1.4.2 - (-2).1.5 \\ &= 6\end{aligned}$$

Ví dụ:

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 10 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

c) Tính chất

1. Đổi chỗ hai hàng, định thức đổi dấu

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Một hàng có thừa số chung thì đưa ra bên ngoài:

$$\begin{vmatrix} ta_1 & \mathbf{t}a_2 & ta_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$$

Hệ quả 1: Nhân 1 hàng với 1 số $t \neq 0$ định thức tăng t lần.
Hệ quả 2: Định thức có 1 hàng gồm toàn số 0 thì bằng 0.

3. Định thức có 2 hàng giống nhau thì bằng 0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hệ quả: Định thức có 2 hàng tỷ lệ thì bằng 0.

4. Định thức là hàm tuyến tính với mỗi hàng khi cố định các hàng còn lại.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 & a_3 + a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Hệ quả:

Định thức không đổi khi cộng vào một hàng bởi bội của hàng khác.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ta_1 & b_2 + ta_2 & b_3 + ta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. $\det A^T = \det A$

Hệ quả: Mọi tính chất định thức đúng với hàng thì đều đúng với cột.

3. Định thức cấp n

a) Định nghĩa:

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$
Định thức của A, kí hiệu là $|A|$ hay $\det A$, là một số bằng tổng của $n!$ số hạng, trong đó mỗi số hạng là tích của n phần tử của A trên n hàng và n cột khác nhau. Có $n!/2$ số hạng mang dấu $-$ và $n!/2$ số hạng mang dấu $+$.

Chú ý: Các tính chất của định thức cấp 3 vẫn đúng với định thức cấp n.

Ví dụ: Tính

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 4 & a & x \\ 1+2b & -5 & b & x \\ 1+2c & 6 & c & x \\ 1+2d & 2 & d & x \end{vmatrix}$$

b) Công thức phần phụ đại số

Định nghĩa: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Ma trận M_{ij} cấp $(n-1)\times(n-1)$ là ma trận có được bằng cách bỏ đi hàng i, cột j của ma trận A.
Ta gọi số $C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ là phần phụ đại số của a_{ij}.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm phần phụ đại số của a_{23} của A

Tính định thức cấp n bằng "Công thức phần phụ đại số":

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó:

- (khai triển theo cột j)

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$$

- (khai triển theo hàng i)

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$$

Các công thức này còn được gọi là khai triển Laplace theo hàng hoặc theo cột.

Ví dụ: Tính định thức của $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ theo công thức khai triển Laplace

Hệ quả:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}\dots a_{nn}$$

c) Quy tắc tính định thức cấp n bất kỳ:

+) Dựa vào khai triển Laplace theo hàng hoặc cột có nhiều số 0 nhất.
+) Sử dụng các tính chất của đinh thức biến đổi ma trận về dạng tam giác, định thức bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.
Chú ý: Đôi khi phải kết hợp cả hai quy tắc trên để việc tính toán đạt hiệu quả.

Ví dụ:

Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ví dụ:

Tính

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 1 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

- $|I| = 1$
- $|tA| = t^n|A|$ với A cấp n.
- $|AB| = |A||B|$ với mọi A, B vuông cùng cấp.
- Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$; $|A^k| = (|A|)^k$.
- A là ma trận khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
- Chú ý: $|A + B| \neq |A| + |B|$.

Ví dụ: Cho ma trận A có $|A| = 7$.
a) Tìm cấp của A biết rằng $|2A| = 56$. **Giải:** Có $|2A| = 2^n|A| = 2^n.7$. Do đó $2^n = 8 \Leftrightarrow n = 3$.
b) Tính $|3A|$. **Giải:** $|3A| = 3^3|A| = 27.7$.
c) Tính $|(-5A)^{-1}|$. **Giải:** $|(-5A)^{-1}| = 1/((-5)^3|A|) = -1/(7.5^3)$.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính $\det(A^{100})|$. **Giải**: $\det(A^{100}) = (\det(A))^{100}$. Có $\det A = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \det(A^{100}) = 5^{100}$.

Bài 4: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 27 tháng 3 năm 2020

1. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phần phụ đại số

Định lí:

A là ma trận khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

Với C là ma trận phần phụ đại số của A: $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$.

ở đó: $C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$.

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ theo công thức phần phụ đại số.

Giải: Có $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 3 - 0 - 0 - 2 = -2 \neq 0.$

Do đó tồn tại $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} C^T$. Tìm $C = (C_{ij})_{3\times 3}$. Có

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1;$ $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9;$ $C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3;$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$ $C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$

Vậy $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -9 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Giải hệ phương trình tuyến tính

Quy tắc Cramer: Cho hệ phương trình $Ax = b$, $A_{n\times n}$. Nếu $\det A \neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det B_n}{\det A}$$

Trong đó B_j là các ma trận có được bằng cách thay b vào cột thứ j của ma trận A.

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

Giải:

Có $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 92 \neq 0.$

Do đó hệ có duy nhất nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det B_2}{\det A} \\ x_3 = \dfrac{\det B_3}{\det A} \end{cases}$.

Với $\det B_1 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 32$; $\det B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$;

$\det B_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -66.$

Vậy nghiệm duy nhất hệ đã cho là $x = (32/92; -10/92; -66/92)$.

Bài 5: KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ KHÔNG GIAN CON

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 1 tháng 4 năm 2020

Không gian véc tơ V là tập hợp các véc tơ với hai phép toán: cộng hai véc tơ và nhân véc tơ với vô hướng, cùng 8 tính chất tương ứng.
- 2 phép toán $\forall c \in \mathbb{R}; u, v \in V,\ u + v \in V, cv \in V.$
- 8 tính chất

1. $u + v = v + u$ (giao hoán)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (kết hợp)
3. $\exists$ vecto không 0 sao cho $v + 0 = v$
4. $\exists$ vecto đối $-v$ thỏa mãn $v + (-v) = 0$
5. $1.v = v$
6. $(c_1c_2)\,v = c_1\,(c_2v)$ (kết hợp)
7. $c\,(u + v) = cu + cv$ (phân phối)
8. $(c_1 + c_2)\,v = c_1v + c_2v$ (phân phối)

Ví dụ

Ví dụ 1:

Không gian véc tơ thực n chiều

$$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \middle| \quad x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

với hai phép toán: cộng hai véc tơ cột, nhân một số với một với tơ. Phần tử không là véc tơ 0.

Ví dụ:

Ví dụ 2:

Tập hợp các ma trận thực cấp $m \times n$

$$Mat\,(m \times n; \mathbb{R}) = \left\{A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} \quad \middle| \quad a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$$

Là một không gian véc tơ với hai phép toán là cộng hai ma trận và nhân một số với một ma trận.
Phần tử không là ma trận không O

Ví dụ:

Ví dụ 3:

Tập hợp các đa thức hệ số thực với bậc không vượt quá n

$$P_n[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad | \quad a_i \in \mathbb{R}\}$$

Là một không gian véc tơ với hai phép toán
- Cộng hai đa thức:
Nếu

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \text{ và } g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

Thì

$$f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

- Phép nhân một số với một đa thức
$cf(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_nx^n$

II. KHÔNG GIAN CON

1. Định nghĩa

Cho W là một tập con (chứa véc tơ không) của không gian véc tơ V thỏa mãn 2 điều kiện sau:

1. $\forall u, v \in \mathrm{W} \Rightarrow u + v \in \mathrm{W}$
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathrm{W} \Rightarrow cv \in \mathrm{W}$

Khi đó W được gọi là không gian con của V

2. Ví dụ

a) Dưới đây liệt kê toàn bộ các không gian con của $\mathbb{R}^3$
   - Đường thẳng bất kỳ đi qua (0, 0, 0)
   - Mặt phẳng bất kỳ đi qua (0, 0, 0)
   - $\mathbb{R}^3$
   - $Z = \{O = (0, 0, 0)\}$

b) Cho $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$. M có phải là không gian con của $\mathbb{R}^2$?

c) Cho $W = \{(-2, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. M có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$?

d) Cho $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. M có phải là không gian con của không gian các ma trận thực vuông cấp 2 $Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$ không?

III. BỐN KHÔNG GIAN CON CỦA MA TRẬN A
1. Không gian cột của ma trận A

Định nghĩa:

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, có các véc tơ cột là $c_j, (j = \overline{1, n})$. Ta gọi tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cột là không gian cột của A, kí hiệu $C(A)$

$$C(A) = \{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n \mid x_j \in \mathbb{R}\}$$

Chú ý:

+) Ta có thể viết $C(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

+) Hệ $Ax = b$ có nghiệm $\Leftrightarrow b \in C(A)$

+) Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $C(A)$ là không gian con của $\mathbb{R}^m$.

Ví dụ:

Mô tả không gian cột của các ma trận sau đây

$$a)I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Không gian nghiệm của ma trận A

Định nghĩa:

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Tập các nghiệm của $Ax = 0$ được gọi là không gian nghiệm của ma trận A, kí hiệu $N(A)$.

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Chú ý: Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $N(A)$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ:

Mô tả không gian nghiệm của các ma trận sau

$$a) I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad c) B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Không gian hàng và không gian nghiệm trái của A

Định nghĩa:

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Tập hợp $C\left(A^T\right), N\left(A^T\right)$ lần lượt gọi là không gian hàng, và không gian nghiệm trái của ma trận A.
Chú ý: A là ma trận $m \times n$ thì $C\left(A^T\right)$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$, $N\left(A^T\right)$ là không gian con của $\mathbb{R}^m$.

Ví dụ:

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mô tả 4 không gian con của ma trận A.

Bài 6 : HẠNG CỦA MA TRẬN VÀ NGHIỆM ĐẦY ĐỦ CỦA HỆ $Ax = b$

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 3 tháng 4 năm 2020

I. HẠNG CỦA MA TRẬN
1. Định nghĩa

Cho ma trận $A \in Mat(m \times n; \mathbb{R})$,

$$A \xrightarrow{\text{biến đổi Gauss}} U$$

Khi đó số các trụ của ma trận U chính là hạng của ma trận A, kí hiệu là $r(A)$ (hay $rank(A)$).

Chú ý:

- $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$.
- $r(A) = r\left(A^T\right)$, có thể dùng Gauss trên cột để tìm hạng.
- Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $r(A) \leq \min\{m, n\}$.
- Nếu A là ma trận vuông cấp n, khi đó

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n.$$

Ví dụ 1

Cho

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Tìm hạng của ma trận.

b) Ma trận A có khả nghịch không? Kết luận gì về nghiệm của hệ $Ax = 0$?

Ví dụ 2:

Biện luận hạng của ma trận A theo a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & -2a & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{bmatrix}$$

2. Hạng hàng đầy, hạng cột đầy:

Định nghĩa:

- A có hạng hàng đầy nếu mọi hàng của A đều chứa trụ, tức là $r(A) = m$.
- A có hạng cột đầy nếu mọi cột của A đều chứa trụ, tức là $r(A) = n$.
- Cột chứa trụ gọi là cột trụ.
- Hàng chứa trụ gọi là hàng trụ.

Ví dụ:

Đâu là ma trận hạng hàng đầy? đâu là hạng cột đầy?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chú ý:

+) Nếu A có hạng cột đầy thì hệ $Ax = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

+) Nếu A có hạng hàng đầy và $m < n$ thì hệ $Ax = 0$ có vô số nghiệm.

3. Tiêu chuẩn có nghiệm của hệ $Ax = b$

Định lí Cronecker - Capelli:

Hệ $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r\left([A|b]\right).$$

Định lí:

Giả sử hệ $Ax = b$ có nghiệm, tức là
$r(A) = r([A|b]) = r \leq n$
Khi đó
$+$ Nếu $r = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
$+$ Nếu $r < n$ thì hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 1:

Tìm điều kiện của a, b, c để hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, vô số nghiệm?

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ 2x + y - 8z = c \end{cases}$$

Ví dụ 2:

Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = m - 12 \\ x + 5y - 2mz = 2 \end{cases}$$

Chú ý : Mối liên hệ giữa hạng của ma trận và số nghiệm của hệ phương trình:

- $r(A) = m = n$: hệ $Ax = b$ có nghiệm duy nhất.
- $r(A) = m < n$: hệ có vô số nghiệm.
- $r(A) = n < m$: hệ có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.
- $r(A) < \min\{m, n\}$: hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Cách tìm nghiệm đặc biệt, nghiệm đầy đủ của $Ax = 0$

- Bước 1: Sử dụng biến đổi Gauss chuyển A về U.
- Bước 2: Tìm r biến trụ, $n - r$ biến tự do.
- Bước 3: Lần lượt cho một biến tự do bằng 1, các biến tự do còn lại bằng 0 $\Rightarrow n - r$ nghiệm đặc biệt: $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$.
- Bước 4: Nghiệm đầy đủ của $Ax = 0$ là:
  $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots. + c_{n-r} s_{n-r}, (c_1, \ldots, c_{n-r} \in \mathbb{R})$

Ví dụ:

Tìm các nghiệm đặc biệt, nghiệm đầy đủ của hệ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Nghiệm riêng:

Một nghiệm bất kỳ của hệ $Ax = b$ gọi là một nghiệm riêng của hệ, kí hiệu x_p, tức là $Ax_p = b$.

Chú ý:

- Có nhiều nghiệm riêng.
- Nghiệm riêng không chứa biến tự do.

2. Nghiệm đầy đủ:

Định lí: Nếu hệ $Ax = b$ có 1 nghiệm riêng x_p, hệ $Ax = 0$ có nghiệm đầy đủ x_n, thì nghiệm đầy đủ (hay nghiệm tổng quát) của hệ $Ax = b$ là $x = x_n + x_p$

3. Cách tìm nghiệm đầy đủ của $Ax = b$

- Bước 1: Biến đổi Gauss trên hàng đưa $[A|b]$ về $[U|b']$.
- Bước 2: Tìm r biến trụ, $n - r$ biến tự do.
- Bước 3: Tìm nghiệm đặc biệt $s_1, s_2, ..., s_{n-r}$ của hệ $Ax = 0 \iff Ux = 0$. Tìm nghiệm đầy đủ của hệ $Ax = 0$

$$x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + ... + c_{n-r} s_{n-r}, (c_1, ..., c_{n-r} \in \mathbb{R})$$

- Bước 4: Tìm nghiệm riêng x_p của $Ax = b \iff Ux = b'$, suy ra nghiệm đầy đủ của $Ax = b$:

$$x = x_n + x_p.$$

Ví dụ:

Tìm nghiệm của hệ sau dưới dạng $x = x_p + x_n$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

4. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm ma trận A sao cho hệ $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ có nghiệm đầy đủ là

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm đầy đủ của hệ $Ax = b$ biết rằng b bằng tổng các cột của ma trận A cấp 3×4, với A đưa được về dạng bậc thang như sau :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 7: CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉCTO

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 8 tháng 4 năm 2020

I. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, CƠ SỞ, SỐ CHIỀU

1. Độc lập tuyến tính

a) Định nghĩa:

- Hệ véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong không gian véc tơ V được gọi là độc lập tuyến tính nếu từ
$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- Hệ véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu chúng không độc lập tuyến tính, tức là tồn tại ít nhất một số $x_j \neq 0$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$.

Ví dụ: Hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

b) Minh họa hình học

c) Chú ý:

1. Các véc tơ cột của ma trận A là độc lập tuyến tính nếu hệ $Ax = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.
2. Hệ véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ trong $\mathbb{R}^m$ độc lập tuyến tính

$$\iff r([v_1 v_2 .... v_n]) = n.$$

   Tức là: các véc tơ cột của ma trận A cấp $m \times n$ độc lập tuyến tính nếu $r(A) = n$.
3. Nếu $n > m$ thì mọi hệ gồm n véc tơ trong $\mathbb{R}^m$ đều phụ thuộc tuyến tính.
4. Các cột của ma trận A vuông cấp n là độc lập tuyến tính

$$\iff |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n.$$

Các cách kiểm tra một hệ véc tơ là độc lập tuyến tính:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa
Cách 2: Nếu xét trong $\mathbb{R}^n$: Xét $A = [v_1 v_2 .... v_n]$
$r(A) = n$: hệ độc lập tuyến tính
$r(A) < n$:: hệ phụ thuộc tuyến tính
Cách 3: Nếu $A = [v_1 v_2 .... v_n]$ là ma trận vuông
$|A| \neq 0$: hệ độc lập tuyến tính
$|A| = 0$: hệ phụ thuộc tuyến tính
Ví dụ: Kiểm tra tính độc lập tuyến tính của hệ véc tơ

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Định lí:

- Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ trong kgvt V, kí hiệu span$(v_1, ..., v_n)$ là kgvt con của V.
- Không gian Span $(v_1, v_2, ..., v_n)$ được sinh bởi (căng bởi) $v_1, v_2, ..., v_n$.

  b) Định nghĩa: Tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gọi là tập sinh của không gian V

$$\Leftrightarrow \forall v \in V \text{ luôn có } x_j \in \mathbb{R} \text{ sao cho } v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Ví dụ:

- Chứng minh hệ véc tơ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^2$.
- Tập các véc tơ cột của ma trận A là tập sinh của không gian cột $C(A)$.
  Tập các véc tơ hàng là tập sinh của không gian hàng $C\left(A^T\right)$.
- Tập $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ là tập sinh của không gian các đa thức $P_n[x]$.
- Tập hợp các ma trận $\{E_{ij}\}, i = 1, 2;\ j = 1, 2$ trong $\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mà có phần tử thứ (i, j) là 1, các phần tử khác bằng 0, là một tập sinh của không gian $\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) Định nghĩa:

Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ được gọi là một cơ sở của không gian véc tơ V nếu thỏa mãn hai tính chất :

1. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là tập sinh của V.
2. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ: $+)$ $$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.

$+)$ Tập hợp các ma trận trong $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mà có một phần tử là 1, các phần tử khác bằng 0, là cơ sở của không gian $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

$+)$ Tập $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ là cơ sở chính tắc của $P_n[x]$.

Nhận xét

- Nếu không gian véc tơ V có 1 cơ sở là $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, khi đó $v_j \neq 0$, và $\{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_k\}, \lambda \neq 0$ cũng là cơ sở của V, $\Longrightarrow$ có vô số cơ sở của một kgvt V.
- Số lượng các véc tơ trong các cơ sở là bằng nhau.

b) Định nghĩa: Số chiều của không gian véc tơ V là số véc tơ trong hệ cơ sở của V. Kí hiệu : $\dim V$.

Ví dụ:

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$;
- $\dim(Mat(m \times n; \mathbb{R})) = m.n$;
- $\dim(P_n[x]) = n + 1$
- $\dim V = 0 \Longleftrightarrow V = \{0\}$

Chú ý:

Tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi nó độc lập tuyến tính, tức là khi $r([v_1 \; v_2 ... v_n]) = n$ hay $\det [v_1 \; v_2 ... v_n] \neq 0$.

Ví dụ: Kiểm tra xem hệ véc tơ sau có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ: Tìm điều kiện a để hệ véc tơ sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

II . Cơ sở, số chiều của bốn không gian con của ma trận

1. Định lí cơ bản của Đại số tuyến tính (Phần 1)

Cho ma trận A cấp $m \times n$ có hạng bằng r. Khi đó:

- $\dim C(A) = \dim C\left(A^T\right) = r$.
- $\dim N(A) = n - r$.
- $\dim N\left(A^T\right) = m - r$.

2. Cách tìm một cơ sở của bốn không gian con của ma trận

$A \longrightarrow U$ bằng biến đổi Gauss trên hàng (không nên đổi hàng)

- Một cơ sở của $C(A)$ là các cột trụ của ma trận A.
- Một cơ sở của $C\left(A^T\right)$ là các hàng trụ của ma trận A.
- Một cơ sở của $N(A)$ là các nghiệm đặc biệt của $Ax = 0$.
- Một cơ sở của $N\left(A^T\right)$ là các nghiệm đặc biệt của $A^T y = 0$.

Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm cơ sở của 4 không gian của $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ví dụ 2: W là không gian véc tơ tạo bởi tất cả các tổ hợp tuyến tính của $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 3, 5)$. Tìm cơ sở, số chiều của W?

Ví dụ 3: Chứng minh rằng tập
$\mathrm{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0; x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.
Hãy tìm một cơ sở và số chiều của W.

Bài 8: TÍNH TRỰC GIAO-MA TRẬN TRỰC GIAO

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 10 tháng 4 năm 2020

I. TÍNH TRỰC GIAO CỦA BỐN KHÔNG GIAN CON CỦA MA TRẬN A

Nhắc lại tích vô hướng: Cho $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó: tích vô hướng: $u \cdot v = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$;

Chú ý:

- $u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
- $\|u\| = \sqrt{u^T u}$.
- v trực giao với w trong $\mathbb{R}^n$ (kí hiệu $v \perp w$) $\Leftrightarrow v^T w = 0$.

1. Tính trực giao của hai không gian con trong $\mathbb{R}^n$:

Định nghĩa. Hai không gian con V và W của $\mathbb{R}^n$ gọi là trực giao với nhau

$$V \perp W \iff v^T w = 0\ \forall v \in V;\ \forall w \in W.$$

Chú ý: Kiểm tra hai không gian con V và W trực giao trong $\mathbb{R}^n$:

- Chứng tỏ các véc tơ của tập sinh của V và W đôi một trực giao.
- Hoặc chứng tỏ các véc tơ cơ sở của V và W đôi một trực giao.

Nếu $V \perp W$ thì $V \cap W = \{0\}$

VD:

Kiểm tra xem V và W có trực giao với nhau không?
Với V sinh bởi các véc tơ

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

W sinh bởi véc tơ $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tính trực giao của bốn không gian con của ma trận A cấp $m \times n$:

$$C(A) \perp N\left(A^T\right) \text{ trong } \mathbb{R}^m \text{ và } N(A) \perp C\left(A^T\right) \text{ trong } \mathbb{R}^n$$

VD: Kiểm tra tính trực giao của 4 không gian con của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

VD:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + \frac{y}{2} - z = 0\right\},$$

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = -z\right\}$$

Chứng tỏ V và W trực giao.

Định nghĩa: Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^n$, tập tất cả các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ trực giao với mọi vécto trong V gọi là phần bù trực giao của V, kí hiệu $V^\perp$.

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \perp w, \forall w \in V\}$$

Chú ý: $(V^\perp)^\perp = V$.

VD: Cho V là tập tổ hợp tuyến tính của $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Tìm phần bù trực giao của V.

Định lí cơ bản của Đại Số Tuyến Tính (phần 2)

Cho A là ma trận cấp $m \times n$, thì

$$N(A)^{\perp} = C\left(A^T\right), \qquad C(A)^{\perp} = N\left(A^T\right).$$

VD: Cho

$$S = \left\{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}.$$

Tìm $S^{\perp}$.

VD: Cho

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x - y + z \\ y - z \\ x + y - z \end{bmatrix} \quad \middle| \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

a. Chứng tỏ S là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b. Hãy tìm một cơ sở của $S^{\perp}$

1. Định nghĩa

- Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là tập trực giao nếu $v_i{}^T v_j = 0, \forall i \neq j$.
- Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là tập trực chuẩn nếu nó là một tập trực giao và mỗi véc tơ của tập có độ dài bằng 1.
- Cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của không gian con V của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở trực giao nếu nó là một tập trực giao.
- Cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của không gian con V của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở trực chuẩn nếu nó là một tập trực chuẩn.

Chú ý:

Khi cho 1 tập trực giao $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, $v_i \neq 0$, ta có thể tạo ra một tập trực chuẩn $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$, trong đó:

$$u_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i, (i = 1, ..., k).$$

VD: +) $\{(1,1,1),(2,1,-3),(4,-5,1)\}$ là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.
+) $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

Bài toán: Cho hệ véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của không gian V trong $\mathbb{R}^n$, xây dựng một tập trực giao

$$\{u_1, u_2, ..., u_k\}$$

Công thức trực giao hóa Gram-Schmidt:

Cho $\{v_1; v_2; v_3, \ldots, v_k\}$ trong $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \left(\dfrac{{u_1}^T v_2}{{u_1}^T u_1}\right) u_1 \\ u_3 = v_3 - \left(\dfrac{{u_1}^T v_3}{{u_1}^T u_1}\right) u_1 - \left(\dfrac{{u_2}^T v_3}{{u_2}^T u_2}\right) u_2 \\ \vdots \\ u_k = v_k - \left(\dfrac{u_1^T v_k}{u_1^T u_1}\right) u_1 - \cdots - \left(\dfrac{u_{k-1}^T v_k}{u_{k-1}^T u_{k-1}}\right) u_{k-1}. \end{cases}$$

Tập trực giao $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$.

Tập trực chuẩn $\left\{w_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, w_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|}\right\}$.

VD: Trực chuẩn hóa cơ sở

$$E = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

VD: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm

- một cơ sở trực chuẩn của không gian cột của A.
- một cơ sở trực giao của không gian nghiệm của A.
- một cơ sở trực chuẩn của không gian nghiệm trái của A.

+) Định nghĩa: Ma trận A vuông cấp n gọi là ma trận trực giao nếu các cột của A là hệ véc tơ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^n$. Thường ký hiệu ma trận trực giao là Q.

+) Tính chất: Q là ma trận trực giao khi và chỉ khi $Q^T = Q^{-1}$.

+) Một số ma trận trực giao quan trọng:

Ma trận của phép quay góc θ: $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Ma trận của phép đối xứng trục theo phương $u \in \mathbb{R}^n$ là $Q = I - 2uu^T$.

Bài 9: PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 17 tháng 4 năm 2020

Đặt vấn đề:

Trong thực tế, có rất nhiều công thức được rút ra từ số liệu thực nghiệm. Ví dụ như công thức liên hệ giữa thể tích, nhiệt độ, áp suất, hoặc liên hệ giữa thời gian với quãng đường,... Vậy kĩ thuật này là như thế nào?

Ý tưởng của phương pháp:

- Bài toán đưa về hệ $Ax = b$.
- Ta đã biết : $Ax = b$ có nghiệm $\Leftrightarrow b \in C(A)$.
- Vì thế : $Ax = b$ vô nghiệm $\Leftrightarrow b \notin C(A)$.
- Lấy véc tơ $p \in C(A)$ sao cho độ dài $\|b - p\|$ là nhỏ nhất. Và khi đó $\hat{x}$ thỏa mãn $A\hat{x} = p$ gọi là nghiệm bình phương tối thiểu của $Ax = b$, $e = b - p$ gọi là sai số của phép chiếu.
- Trong hình học sơ cấp, để $\|b - p\|$ có độ dài nhỏ nhất, khi p là hình chiếu vuông góc của b lên $C(A)$.

I. Phép chiếu-Phương pháp bình phương tối thiểu

Ta mở rộng khái niệm hình chiếu trong hình học sơ cấp, thay cho đường thẳng, mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$, là không gian con $C(A)$ của $\mathbb{R}^m$.

1. Định nghĩa

Cho ma trân$A_{m\times n}$, véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$. p gọi là hình chiếu của b lên không gian $C(A)$ nếu $b - p$ vuông góc với mọi véc tơ thuộc $C(A)$.

Cách tìm. Giả sử $A_{m\times n} = [a_1\ a_2\ ...\ a_n]\,, a_i \in \mathbb{R}^m, i = \overline{1, n}$.
Khi đó: $(b-p)\perp y, \forall y \in C(A) \Leftrightarrow (b-p)\perp a_i, \forall i = \overline{1,n}$. Tức là

$$a_i{}^T.(b-p) = 0, \forall i = \overline{1,n}.$$

Hay

$$A^T(b-p) = 0. \qquad (1)$$

Mặt khác: $p \in C(A) \Rightarrow p = \widehat{x_1}a_1 + \widehat{x_2}a_2 + \cdots + \widehat{x_n}a_n$
Đặt $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n) \Rightarrow A\hat{x} = p$. Thay vào (1) được

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A^TA\hat{x} = A^Tb.$$

Giải ra ta tìm được $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$. Từ đó suy ra hình chiếu $p = A\hat{x}$.

VD:

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ và $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Tìm hình chiếu của b lên $C(A)$?

Định lí

Cho ma trận $A_{m \times n}$. Với mỗi $b \in \mathbb{R}^m$, tồn tại duy nhất hình chiếu p lên không gian cột $C(A)$. Hơn nữa : $\|b - y\| \geq \|b - p\|, \forall y \in C(A) \setminus \{p\}$. Suy ra tính chất của p hoàn toàn giống với hình chiếu sơ cấp: $b - p$ vuông góc với mọi véc tơ thuộc C(A), đồng thời độ dài $\|b - p\|$ là nhỏ nhất, tức là p là véc tơ thuộc $C(A)$ gần với b nhất.

Chú ý : Vì p luôn tồn tại, mà $p = A\hat{x}$, nên $\hat{x}$ tồn tại, $\hat{x}$ có thể không duy nhất nhưng p duy nhất.

Định lí

Nếu ma trận A^TA khả nghịch thì phương trình $A^TA\hat{x} = A^Tb$ có nghiệm duy nhất $\hat{x} = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$

Do đó $p = A\hat{x} = A\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$. Ma trận $P = A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ được gọi là ma trận chiếu.

Chú ý:

- Nói chung A không phải là ma trận vuông, nên tránh mắc sai lầm là tách $\left(A^TA\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^T\right)^{-1}$.
- P chính là ma trận của một phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^m$ cho tương ứng mỗi $b \in \mathbb{R}^m$ với hình chiếu p của nó lên $C(A)$. Đây chính là phép chiếu vuông góc lên $C(A)$.
- Khi A có cấp $m \times 1$ hay chính là véc tơ a, thì

$$\hat{x} = \left(a^Ta\right)^{-1}a^Tb = \frac{a^Tb}{a^Ta} \text{ và } P = \frac{aa^T}{a^Ta}.$$

- Do $P = A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ nên $P^T = P, P = P^2 = P^3 = ... = P^n$.

- Nếu A có các cột $a_1, a_2, \ldots, a_n$ phụ thuộc tuyến tính thì có thể thay ma trận A bởi ma trân có cỡ nhỏ hơn có các cột là tập cơ sở của $C(A)$.

VD:

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Tìm cơ sở của $C(A)$ và hình chiếu của b lên $C(A)$.

II. Ứng dụng của phương pháp bình phương tối thiểu
1. Chọn một đường thẳng gần m điểm nhất ($m > 2$)

Bài toán: Tìm đường thẳng $b = C + Dt$, gần m điểm nhất (theo phương pháp bình phương tối thiểu): $(t_1; b_1); \ldots; (t_m; b_m)$.
Cách giải: Thay m điểm đó vào phương trình đường thẳng cần tìm, sẽ có được hệ $Ax = b$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

C, D tìm được bằng cách giải gần đúng hệ phương trình $Ax = b$ theo phương pháp bình phương tối thiểu.
Vậy $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \hat{x}$, với $\hat{x}$ thỏa mãn $(A^T A)\hat{x} = A^T b$.
VD: Tìm đường thẳng $b = C + Dt$ gần nhất 3 điểm $(-1, \ -3); \ (0, \ 8); \ (2, \ 2)$.
Chú ý: có thể đường thẳng cần tìm dạng $b = Dt$ hay $b = C$. Cách xử lí tương tự. Khi đó ma trận A chỉ là véc tơ cột.

2. Chọn một đường parabol gần m điểm nhất ($m > 2$)

Bài toán: Tìm đường parabol $b = C + Dt + Et^2$, gần m điểm nhất (theo phương pháp bình phương tối thiểu): $(t_1; b_1); \dots; (t_m; b_m)$.
Cách giải: Thay m điểm đó vào phương trình đường parabol cần tìm, sẽ có được hệ $Ax = b$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

C, D, E tìm được bằng cách giải gần đúng hệ phương trình $Ax = b$ theo phương pháp bình phương tối thiểu.

Vậy $\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \hat{x}$, với $\hat{x}$ thỏa mãn $(A^T A)\hat{x} = A^T b$.

VD: Tìm đường parabol $b = C + Dt + Et^2$ gần nhất 4 điểm
$(-1;\ 1);\ (0;\ 4);\ (1;\ 1),\ (2; 8)$.
Chú ý: có thể đường parabol cần tìm dạng $b = Dt + Et^2$ hay $b = Et^2$. Cách xử lí tương tự.

Bài 10: GIÁ TRỊ RIÊNG-VÉC TƠ RIÊNG

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 22 tháng 4 năm 2020

1. Định nghĩa:

Cho A là ma trận vuông cấp n. Số λ (thực hoặc phức) được gọi là một giá trị riêng của A nếu có véc tơ $v \neq 0$ sao cho $Av = \lambda v$.
Véc tơ $v \neq 0$: véc tơ riêng của A ứng với λ.

Nhận xét:

- Ma trận đơn vị I chỉ có giá trị riêng $\lambda = 1$.
- Phương trình $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)\, v = 0$ có nghiệm $v \neq 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$.
  $|A - \lambda I|$: đa thức đặc trưng,
  $|A - \lambda I| = 0$ gọi là phương trình đặc trưng.

Bước 1: Tìm đa thức đặc trưng

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng $|A - \lambda I| = 0$ tìm giá trị riêng λ.

Bước 3: Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)\, v = 0$ tìm các véc tơ riêng.

VD 1:

Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Chú ý:

- Giả sử ma trận $A_{n\times n}$ có n giá trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Vết của A là $Tr(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ và
$$\det A = \lambda_1.\lambda_2....\lambda_n$$
- Nếu $v \neq 0$ là véc tơ riêng của A thì cv, $(c \neq 0)$ cũng là véc tơ riêng của A.
- Nếu A có giá trị riêng λ, véc tơ riêng v thì:
$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I, \ (a_i \in \mathbb{R})$$
có giá trị riêng $f(\lambda) = a_k\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0$ với véc tơ riêng$v$.

Đặc biệt:

- $aA + bI$ có giá trị riêng $a\lambda + b$, tương ứng véc tơ riêng v.
- A^{-1} có giá trị riêng λ^{-1}, tương ứng véc tơ riêng v.
- A^k có giá trị riêng λ^k, tương ứng véc tơ riêng v.

VD 2: Cho ma trận A vuông cấp 3 có các giá trị riêng là $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = 3$.

a) Tính $|A|$; $|2A^{100} - A + I|$

b) Tìm các giá trị riêng của $(A + I)^{-1}$

c) Tính $Tr(A) = ?$

Tính thế nào

$$A^k = A.A...A$$

không phải đơn giản, trừ khi A là ma trận đường chéo.

Cách giải quyết: Dùng phương pháp giá trị riêng-véc tơ riêng.

Định nghĩa:

Ma trận vuông A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại S mà $|S| \neq 0$ sao cho ma trận $S^{-1}AS = \Lambda$ có dạng đường chéo.

Định lí (điều kiện cần và đủ để chéo hóa)

Nếu ma trận $A_{n\times n}$ có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, v_2, ..., v_n$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ thì A chéo hóa được.

Dạng chéo hóa

$$S = [v_1 \ v_2 .... v_n]$$

là ma trận véc tơ riêng

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

là ma trận giá trị riêng.

Dạng chéo hóa của A: $S^{-1}AS = \Lambda$

Lũy thừa ma trận

Khi A chéo hóa được, ta có $S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = S\Lambda S^{-1}$.
Khi đó

$$\Rightarrow A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

Trong đó :

$$S = [v_1 \ \ v_2 \ \ldots \ v_n] \text{ và } \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

VD 3:

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

- Chéo hóa ma trận A.
- Tìm $A^k, k \in \mathbb{N}_+$.

2. Các bước nhận biết ma trận chéo hóa được

Bước 1: Tìm các giá trị riêng của ma trận $A_{n\times n}$
-) A có n giá trị riêng thực phân biệt: chéo hóa được
-) A có ít hơn n giá trị riêng thực phân biệt: Làm tiếp bước 2
Bước 2: Tìm các véc tơ riêng tương ứng
-) A có đủ n véc tơ riêng đltt: thì A chéo hóa được
-) A có ít hơn n véc tơ riêng đltt thì A không chéo hóa được.

VD 4:

Ma trận sau có chéo hóa được không? Nếu chéo hóa được thì hãy tìm dạng chéo của nó rồi từ đó tính A^{2020}:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

VD 5: Ma trân sau có chéo hóa được không

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

VD 6: Tính A^{2020}, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

VD 7:

a) Hãy xác định hàng thứ hai của $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ sao cho A có các giá trị riêng là 5 và 6.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Hãy tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của $A + B$

Bài 11 : MA TRẬN ĐỐI XỨNG-MA TRẬN XÁC ĐỊNH DƯƠNG

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 24 tháng 4 năm 2020

Định nghĩa

Định nghĩa (nhắc lại)

Ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là **đối xứng** nếu $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ hay $A = A^T$.

Ví dụ:

- Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ là các ma trận đối xứng.
- Với mọi ma trận thực $A_{m\times n}$ thì A^TA, AA^T đều là ma trận đối xứng.

Tính chất của ma trận đối xứng

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A + B, A - B, B - A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^k đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^T$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Ma trận xác định dương

Định nghĩa

Ma trận A vuông cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

VD: Chứng minh rằng $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ là xác định dương.

VD

a) Cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng B là ma trận nửa xác định dương.
b) Tìm m để ma trận sau là xác định dương:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & m \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ m & -9 \end{bmatrix}$$

c) Chứng minh rằng:
$-A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$ là ma trận xác định âm,
$-B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$ là bán xác định âm.

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n thì các mệnh đề sau tương đương:

(1) A xác định dương

(2) Mọi giá trị riêng của A đều dương

(3) Mọi trụ của ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss của A đều dương

(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: +) Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).
+) Ma trận đối xứng A xác định âm khi và chỉ khi các định thức con lẻ là âm, các định thức con chẵn là dương.

VD: $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ là xác định âm.

VD

CMR các ma trận sau là xác định dương

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 15 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

VD

Tìm m để ma trận sau là xác định dương $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & m \end{bmatrix}$.

Phân tích Cholesky

Cho A là ma trận **đối xứng xác định dương**, khi đó có thể biểu diễn: $A = LL^T$ với L là ma trận tam giác dưới.

CHÚ Ý: phân tích Cholesky thường dùng trong việc giải số, ví dụ như trong phương pháp Monte Carlo.

Nhận xét: A đối xứng xác định dương, phân tích $A = L_1DL_1^T$ nhìn tương tự phân tích: $A = Q\Lambda Q^T$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^T$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Ứng dụng

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến thỏa mãn các tính chất thông thường ở GTNB, đặc biệt là f thỏa mãn: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ta đã học: nếu tại $M(x_0, y_0)$ có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) > 0, f''_{xx}(M).f''_{yy}(M) - [f''_{xy}(M)]^2 > 0$$

thì f đạt cực tiểu tại M.

Diễn đạt lại điều này nhờ việc sử dụng ma trận xác định dương:

Ứng dụng 1

Nếu tại $M(x_0, y_0)$ có: $f'_x(M) = 0, f'_y(M) = 0$ và A xác định dương với $A = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M) & f''_{xy}(M) \\ f''_{yx}(M) & f''_{yy}(M) \end{bmatrix}$ thì f đạt cực tiểu tại M.

Ứng dụng

Ứng dụng 2

Cho elip $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ với $a > 0, ac > b^2$, hãy chuyển về dạng "chính tắc": $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

B1: Viết lại PT elip dưới dạng: $(**)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = 1 \qquad (**)$$

B2: Do A đối xứng nên thay $A = Q\Lambda Q^T$ vào (**) có:

$$1 = \mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \mathbf{v}^T Q\Lambda Q^T \mathbf{v} = \alpha X^2 + \beta Y^2$$

với $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ là các giá trị riêng của A, $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \mathbf{v}^T Q$ với Q là ma trận có các cột là các vector riêng tương ứng, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.
Nhận xét: các vector riêng của A chính là các vector chỉ phương của các trục của elip.

Ứng dụng

Dạng toàn phương

Đa thức n biến $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ với các hệ số thực $a_{ij} = a_{ji}$ được gọi là **dạng toàn phương**, với ma trận của dạng toàn phương tương ứng là $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

Ví dụ:

a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 4y^2$ là dạng toàn phương với ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$.

b) $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ là dạng toàn phương với
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa

Dạng toàn phương $f(\mathbf{x})$ là xác định dương nếu $f(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Dạng toàn phương $f(\mathbf{x})$ là xác định âm nếu $f(\mathbf{x}) < \mathbf{0}, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Nhận xét

Có $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ với: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Dễ CM được: Với dạng toàn phương f có ma trận tương ứng là A thì

- Dạng toàn phương f là xác định dương $\Leftrightarrow$ A là xác định dương
- Dạng toàn phương f là xác định âm$\Leftrightarrow$ A xác định âm.

VD: Tìm điều kiện của c để dạng toàn phương sau là xác định dương; là xác định âm: $f(X) = 4x^2 + y^2 + cz^2 + 2xy + 4yz - 6xz$

Chuẩn của vector

Định nghĩa

Cho kgvt V trên $\mathbb{R}$, một **chuẩn** $p : V \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$:
(1) $p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v})$, (2) $p(a\mathbf{u}) = |a| p(\mathbf{u})$,
(3) $p(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Một số chuẩn thường dùng

Cho $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta hay dùng:
- **Chuẩn Euclid** (Ơ-cơ-lít): $\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. $(p = 2)$
- **Chuẩn maximum**: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. $(p \to \infty)$
- **Chuẩn Manhattan (chuẩn taxicab)**: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $(p = 1)$

CHÚ Ý: chuẩn Euclid và chuẩn Manhattan trên là TH đặc biệt của

p-norm: $\|\mathbf{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)\right]^{1/p}, \ p \geq 1.$

Với 3 chuẩn: Euclid, maximum, Manhattan, dễ CM được:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

do đó 3 chuẩn này tương đương.

Định nghĩa

Hai chuẩn $\|.\|_\alpha$, $\|.\|_\beta$ được gọi là **tương đương** nếu tồn tại hai số dương C, D thỏa mãn:

$$C\|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq D\|\mathbf{x}\|_\alpha \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Chuẩn của ma trận

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $\|.\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau
$\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, (2) $\|kA\| = |k|.\|A\|$,
(3) $\|A\| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, ..., h_m$, vector cột $c_1, ..., c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $\|A\|_1 = \max\{\|c_1\|_1, ..., \|c_n\|_1\}$;
- $\|A\|_\infty = \max\{\|h_1\|_1, ..., \|h_m\|_1\}$;
- $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^T A$;
- $\|A\|_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}\|c_j\|_2$.
- $\|A\| = \sup\left\{\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\} = \sup\{\|A\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

CHÚ Ý:

• Cách viết khác: $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;

• $\|A\|_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$\|A\|_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

• Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty, \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$

$\forall A_{m\times n} \Rightarrow \|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ tương đương.

• $\|A\|_2 \le \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = \|A\|_F$ (**chuẩn Frobenius**).

Bài 12: MA TRẬN ĐỒNG DẠNG-PHÂN TÍCH SVD

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 29 tháng 4 năm 2020

I. Ma trận đồng dạng

1. Định nghĩa

Hai ma trận vuông cùng cấp A, B được gọi là **đồng dạng** nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp khả nghịch M thỏa mãn: $B = M^{-1}AM$.

VD: Hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ là đồng dạng vì có ma trận $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ thỏa mãn $B = M^{-1}AM$.

2. Tính chất

Cho A, B là hai ma trận đồng dạng, khi đó:

(1) Nếu ma trận A chéo hóa được thì A đồng dạng với một ma trận đường chéo Λ nào đó.

(2) Nếu λ là giá trị riêng ứng với vectơ riêng v của A thì λ sẽ là giá trị riêng ứng với vectơ riêng $M^{-1}v$ của B.

Ngoài ra, ta còn chứng minh được: A, B đồng dạng thì chúng sẽ giống nhau ở:

- giá trị riêng
- vết (tổng các phần tử thuộc đường chéo chính): $tr(A) = tr(B)$
- định thức: $\det(A) = \det(B)$
- hạng: $r(A) = r(B)$
- số véc tơ riêng độc lập tuyến tính
- dạng Jordan (tự đọc thêm).

Bài toán chứng minh hai ma trận đồng dạng

Từ định nghĩa, ta có: $A = M^{-1}BM \iff MA = BM$. Do đó, ta có một phương pháp chứng minh hai ma trận đồng dạng như sau:

1. Bước 1: Tìm ma trận M sao cho $MA = BM$
2. Bước 2: Kết luận:
   - Nếu không tồn tại M: Không đồng dạng
   - Nếu tồn tại M nhưng M không khả nghịch: Không đồng dạng
   - Tồn tại M khả nghịch: Có đồng dạng.

Trường hợp đặc biệt

Nếu A, B cùng có n giá trị riêng thực phân biệt thì chúng đồng dạng với nhau.

VD

VD1

Kiểm tra tính đồng dạng của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

VD2

Kiểm tra tính đồng dạng của $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

VD3

Kiểm tra tính đồng dạng của $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

Đặt vấn đề

Nếu A là ma trận chéo hóa được, thì có thể phân tích $A = S\Lambda S^{-1}$ (Eigen Decomposition). Hạn chế:

1. Chỉ làm được cho ma trận vuông
2. Kể cả ma trận vuông thì không phải ma trận nào cũng phân tích được.
3. Có phân tích được thì cách phân tích cũng không là duy nhất.

Việc phân tích một ma trận ra thành tích của nhiều ma trận đặc biệt khác (Matrix Factorization hoặc Matrix Decomposition) mang lại nhiều ích lợi quan trọng: *giảm số chiều dữ liệu, nén dữ liệu, tìm hiểu các đặc tính của dữ liệu, giải các hệ phương trình tuyến tính, và nhiều ứng dụng khác*.

Một trong những phương pháp Matrix Factorization rất đẹp của Đại số tuyến tính: **Singular Value Decomposition (SVD)**.

Ưu điểm: Mọi ma trận (không nhất thiết phải vuông) đều có thể phân tích thành tích của ba ma trận đặc biệt.

II. Phân tích SVD (Singular-value decomposition)

Phát biểu SVD

Cho ma trận $A_{m\times n}$, khi đó tồn tại hai ma trận trực giao $U_{m\times m}$, $V_{n\times n}$ và ma trận $\Sigma_{m\times n}$ (với $\sigma_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$ và $\sigma_{ii} \geq 0$) thỏa mãn

$$A = U\Sigma V^T$$

Cách phân tích này chính là **phân tích SVD** của ma trận A (các σ_{ii} chính là các **giá trị suy biến** của A).

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 19 \\ -2 & 20 & 8 \end{bmatrix}$.

Ma trận A có phân tích SVD là: $A = U\Sigma V^T$ với

$$U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}, V = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tính chất

Tính chất

Ma trận $A_{m\times n}$ có phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$, khi đó:

- r cột đầu tiên của V là cơ sở trực chuẩn của $C(A^T)$
- $n - r$ cột cuối của V là cơ sở trực chuẩn của $N(A)$
- r cột đầu tiên của U là cơ sở trực chuẩn của $C(A)$
- $m - r$ cột cuối của U là cơ sở trực chuẩn của $N(A^T)$.

Tại sao lại gọi là SVD: Phân tích giá trị suy biến

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Giả sử $A = U\Sigma V^T$, ta có

$$\begin{aligned} AA^T &= U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T \\ &= U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T \\ &= U\Sigma\Sigma^T U^T \\ &= U\Sigma\Sigma^T U^{-1} \end{aligned}$$

Ta có $\Sigma\Sigma^T$ là một ma trận đường chéo (vuông cấp m) với các phần tử trên đường chéo là $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots$. Vậy, phân tích trên là Eigen Decomposition của AA^T, ngoài ra $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots$ cũng chính là các giá trị riêng của AA^T. Mặc khác AA^T luôn là ma trận nửa xác định dương nên các giá trị riêng luôn không âm. Các σ_i là căn bậc hai của các giá trị riêng của AA^T còn được gọi là *singular values* của A.
Ngoài ra, mỗi cột của U là một véc tơ riêng của AA^T.

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$, có $r(A) = r$. Khi đó $A = U\Sigma V^T$, với:

- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp $m \times n$, trong đó có r giá trị $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ với $\lambda_i > 0$ là r GTR dương của cả AA^T và A^TA.
- Các cột $v_1, \ldots, v_n$ của V là các véc tơ riêng đơn vị của A^TA
- Các cột $u_1, \ldots, u_m$ của U là các véc tơ đơn vị cùng hướng với Av_i, chính là các véc tơ riêng đơn vị của AA^T.

Chú ý sự tương ứng của các GTR, véc tơ riêng khi lập các ma trận.

VD:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Các bước giải bài toán: Phân tích SVD

- Bước 1: Tính A^TA
- Bước 2: Tìm các giá trị riêng của A^TA là $\lambda_i, i = 1, .., n$, cùng với n véc tơ riêng đơn vị tương ứng $v_1, v_2, \ldots, v_n \Rightarrow V = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$.
- Bước 3: Tìm $U = [u_1\ u_2 \cdots u_m]$, với u_i tìm: cách 1: u_i là các véc tơ đơn vị cùng hướng Av_i. Cách 2: Tìm AA^T và tìm các véc tơ riêng đơn vị của AA^T tương ứng giá trị riêng λ_i như của A^TA mà cùng hướng Av_i.
- Bước 4: Kết luận $A = U\Sigma V^T$.

VD1

Phân tích SVD cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

VD2

Phân tích SVD cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

Bài 13: PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 29 tháng 4 năm 2020

1. Định nghĩa

Một ánh xạ T từ không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ vào không gian véc tơ $\mathbb{R}^m$ gọi là một phép biến đổi tuyến tính nếu với mọi $v, u \in \mathbb{R}^n$, mọi $c \in \mathbb{R}$:

$$+) T(v+u) = T(v) + T(u)$$
$$+) T(cv) = cT(v)$$

Kí hiệu: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Chú ý: Hai điều kiện trên tương đương với điều kiện sau

$$T(av+bu) = aT(v) + bT(u), \forall a, b \in \mathbb{R}, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Tính chất:

Nếu $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là phép biến đổi tuyến tính thì

+) $T(0) = 0 \in \mathbb{R}^m$

+) $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$

$T(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n),$

2. Ví dụ

VD1: Trong $\mathbb{R}^2$, phép đối xứng qua trục Ox là phép biến đổi tuyến tính:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x; y) \mapsto (x; -y)$$

Chứng minh tương tự, phép đối xứng qua trục Oy, phép đối xứng tâm, phép quay cũng là phép biến đổi tuyến tính.

- Các ánh xạ liên quan đến độ dài, tích vô hướng, bình phương của số,... ko là biến đổi tuyến tính.
- Ánh xạ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $T(x; y) = (x^2; y; 0)$ không là biến đổi tuyến tính.
- Ánh xạ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $T(x_1; x_2) = (m + x_1; x_2)$ là biến đổi tuyến tính khi $m =?$.

VD2: Chứng minh

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

$$v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto T(v)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\2x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}$$

là phép biến đổi tuyến tính.

Tìm $T(v)$ với $v=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$.

3. Ảnh và hạt nhân của biến đổi tuyến tính

a) Định nghĩa: Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là phép biến đổi tuyến tính. Khi đó

- Tập $ImT = \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ gọi là tập ảnh của T.
- Tập $KerT = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = 0\}$ gọi là hạt nhân của T.

b) Định lí: Nếu $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một phép biến đổi tuyến tính, thì

i) ImT là không gian con của $\mathbb{R}^m$

ii) $KerT$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$

iii) $\dim ImT + \dim KerT = n$

c) Ví dụ: Cho phép biến đổi tuyến tính

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_3, -x_2, x_1 - x_3)$

Tìm ảnh và hạt nhân của T?

4. Ma trận chính tắc của phép biến đổi tuyến tính

Cho phép biến đổi tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
Xét $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.
Có

$$T(e_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, i = \overline{1, n}$$

Khi đó ma trận chính tắc của T là $A = [T(e_1) \ \cdots \ T(e_n)]$
Hơn nữa, ta có $T(v) = Av$ với mọi
$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Chú ý: Nếu $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là biến đổi tuyến tính có ma trận chính tắc là A.

Khi đó: $ImT = C(A)$; $KerT = N(A)$

Ví dụ: Tìm ma trận chính tắc của phép biến đổi tuyến tính $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_3, -x_2, x_1 - x_3)$

Sau đó tìm ImT và $KerT$.

Ví dụ: Cho phép biến đổi tuyến tính $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z \\ x + y + z \end{bmatrix}$$ Tìm ma trận chính tắc của T.

Chú ý:

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là biến đổi tuyến tính có ma trận chính tắc A.

- T khả nghịch khi và chỉ khi A khả nghịch.
- Khi đó T^{-1} có ma trận chính tắc tương ứng là A^{-1}.
- Hơn nữa $T^{-1}(v) = A^{-1}v$ với mọi $v \in \mathbb{R}^n$.

Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho phép biến đổi tuyến tính: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sao cho

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ T(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

với $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận chính tắc của T

b) Tìm $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$.

c) Tìm $ImT; KerT$;

d) T có khả nghịch không? Tìm ma trận chính tắc của T^{-1} nếu T khả nghịch.

e) Tìm $v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $T(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Bài 14: CHÉO HÓA-GIẢ NGHỊCH ĐẢO

Bộ môn Toán

Khoa Công nghệ thông tin-ĐH Thủy lợi

Ngày 06 tháng 5 năm 2020

Định nghĩa: Cho cơ sở $E = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ của không gian $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $v = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, mà $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$.

Ta nói v có tọa độ $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ trong cơ sở $E = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Kí hiệu $[v]_E = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ hay $[v]_E = (c_1; \cdots; c_n)$.

Chú ý: $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là tọa độ của v trong cơ sở chính tắc $\{e_1; \cdots; e_n\}$ của $\mathbb{R}^n$.

Tức là: $v = (x_1; x_2; ...; x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.

Ví dụ: Tìm tọa độ của

$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ trong cơ sở $E = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Nếu $u = -2v_1 + 3v_2$. Hãy tìm tọa độ của u trong cơ sở E;

Tọa độ của u trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là???

2. Ma trận chuyển cơ sở:

Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$, cho hai cơ sở

$$E = \{u_1,\ u_2, ..., u_n\}, F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

Ta có $v_j = c_{1j}u_1 + c_{2j}u_2 + \cdots + c_{nj}u_n$ với $j = 1, ..., n$.

Tức là tọa độ của v_j trong cơ sở E là $[v_j]_E = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$,

Khi đó $C = [[v_1]_E\ [v_2]_E ... [v_n]_E] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

gọi là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F.

Chú ý:

+) Ma trận chuyển sơ sở từ E sang F có thể tính theo công thức

$$C = [u_1 u_2 \ldots u_n]^{-1} [v_1 v_2 \ldots v_n]$$

+) C khả nghịch và ma trận chuyển cơ sở từ F sang E là

$$C^{-1} = [v_1 v_2 \ldots v_n]^{-1} [u_1 u_2 \ldots u_n]$$

VD

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ

$E = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

sang $F = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Tọa độ của một véc tơ trong hai cơ sở khác nhau

Trong $\mathbb{R}^n$, cho hai cơ sở $E = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, và $F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
Giả sử một véc tơ bất kỳ $v \in \mathbb{R}^n$ có tọa độ trong các cơ sở E, F là

$$[v]_E = (x_1, x_2, ..., x_n) \, , \; [v]_F = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

Khi đó:

$$[v]_E = C[v]_F \text{ và } [v]_F = C^{-1}[v]_E$$

VD Quay lại ví dụ ở mục 1, với

$$E = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$F = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\},$$

nếu $v = 2v_1 - 4v_2$. Hãy tìm tọa độ v trong cơ sở E.

II. Chéo hóa ma trận

Ma trận $A_{m\times n}$, có phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$ với $U_{m\times m}$, $V_{n\times n}$ đều là ma trận trực giao và ma trận $\Sigma = (\sigma_{ij})_{m\times n}$, với $\sigma_{ij} = 0\ \forall i \neq j$ và $\sigma_{ii} \geq 0$, khi đó ta có thể **chéo hóa** A: $U^{-1}AV = \Sigma$.

III. Ma trận giả nghịch đảo

1. Định nghĩa

Ma trận $A_{m\times n}$, có phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$ với $U_{m\times m}$, $V_{n\times n}$ đều là ma trận trực giao, ma trận $\Sigma = (\sigma_{ij})_{m\times n}$, với $\sigma_{ij} = 0\ \forall i \neq j$ và $\sigma_{ij} \geq 0\ \forall i = j$, ma trận $\Sigma^+ = (b_{ij})_{n\times m}$, với $b_{ij} = 1/\sigma_{ij}$ nếu $\sigma_{ij} > 0$ và $b_{ij} = 0$ với các vị trí còn lại, khi đó **ma trận giả nghịch đảo** của A, kí hiệu A^+, được xác định bởi công thức: $A^+ = V\Sigma^+U^T$.

VD:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}^T = U\Sigma V^T.$$

Khi đó

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

CHÚ Ý

Ma trận giả nghịch đảo được định nghĩa ở trên là **ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose**, một kiểu định nghĩa khác là: A^+ là ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose của A nếu A^+ thỏa mãn 4 tính chất sau (A^{H} là ma trận chuyển vị liên hợp của A):

- $AA^+A = A$
- $(AA^+)^{\mathrm{H}} = AA^+$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(A^+A)^{\mathrm{H}} = A^+A$

Nhận xét: với $A^+ = V\Sigma^+U^T$, có thể thấy Σ^+ chính là ma trận giả nghịch đảo của Σ; $A^+\mathbf{u}_i = \sigma_{ii}^{-1}\mathbf{v}_i$ nếu $\sigma_{ii} > 0$, $A^+\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ nếu $\sigma_{ii} = 0$ ($\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ là các vector cột của U, V).

2. Tính chất

• Mọi ma trận A cỡ $m \times n$ đều có ma trận giả nghịch đảo, và ma trận giả nghịch đảo A^+ (cỡ $n \times m$) này là duy nhất.
• Nếu A khả nghịch thì $A^+ = A^{-1}$.
• $(O_{m\times n})^+ = O_{n\times m}$ với $O_{m\times n}$ là ma trận không cỡ $m \times n$.
• $(A^+)^+ = A$, $(kA)^+ = k^{-1}A^+$ $(k \neq 0)$
• $(A^T)^+ = (A^+)^T$, $(A^{\mathrm{H}})^+ = (A^+)^{\mathrm{H}}$.
• $\left(\overline{A}\right)^+ = \overline{A^+}$ ($\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ là **ma trận liên hợp** của $A = (a_{ij})_{m\times n}$).
• AA^+, A^+A lần lượt là ma trận chiếu xuống $(C(A))$, $(C(A^T))$.
• Nghiệm bình phương tối thiểu của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ chính là $\mathbf{x}^+ = A^+\mathbf{b}$.

Một số trường hợp đặc biệt khi tìm A^+ của $A_{m\times n}$:

- $r(A) = 1 \Rightarrow A$ có phân tích SVD:

$$A = \sigma \mathbf{u}\mathbf{v}^T, A^+ = \frac{1}{\sigma}\mathbf{v}\mathbf{u}^T$$

- $r(A) = n$, A có **nghịch đảo trái**:

$$CA = I_n, A^+ = C = (A^TA)^{-1}A^T$$

- $r(A) = m$, A có **nghịch đảo phải**:

$$AB = I_m, A^+ = B = A^T(AA^T)^{-1}$$

Đặc biệt hơn, nếu $AA^T = I_m$ hoặc $A^TA = I_n$ thì $A^+ = A^T$.

- Nếu A là ma trận chiếu trực giao ($A^2 = A, A = A^T$) thì $A^+ = A$.

Nếu A rơi vào các trường hợp đặc biệt đã nêu có thể tính nhanh theo các công thức đó, nếu không thì ta làm theo cách tổng quát:
Phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T$, khi đó: $A^+ = V\Sigma^+ U^T$.
VD1: Tìm A^+ của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.
Cách 1: $\exists A^{-1}$ và $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
Cách 2: phân tích SVD: $A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^+ = V\Sigma^+ U^T$.

VD2: Tìm A^+ của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Cách 1: dễ thấy $|A| = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$, phân tích SVD:

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{85} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{85} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{85} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Cách 2: dễ thấy $r(A) = 1$, ... (SV tự làm)

VD3

Tìm ma trận giả nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$