ĐỀ LUYỆN TẬP MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(Thời gian làm bài 90 phút)

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+8x_3+10x_4=12 \\ -2x_1-4x_2-3x_3-7x_4=-2 \\ 2x_1+5x_2+8x_3+11x_4=9 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=3 \end{cases}.$$

a) Viết hệ phương trình trên dưới dạng ma trận.

b) Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss.

Câu 2.

a) Tìm giá trị của m để ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 3m-7 \\ -1 & m^2+m \end{bmatrix}$ là ma trận khả nghịch, với những giá trị . vừa tìm được hãy xác đinh ma trận nghịch đảo A^{-1} .

b) Tìm ma trận X thỏa mãn: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X+2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Câu 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$

a) Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của ma trận A.

b) Tìm số chiều của phần bù trực giao của không gian cột của ma trận A.

Câu 4. Cho biến đổi tuyến tính $T:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa mãn

$$T\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};\ T\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm các số thực c_1, c_2 sao cho $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

b) Tìm ảnh của véc tơ $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ qua biến đổi tuyến tính T.

Câu 5. Tìm điều kiện của c để ma trận sau xác định dương: $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 4 & c \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x \quad + y \quad + z \quad = -7 \\ \quad - y \quad + z \quad = 8 \\ 3x + y + (m^2 - 4)z = 3 \end{cases}.$$

a) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

b) Giải hệ với giá trị vừa tìm được của m.

Câu 2. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận $M = A^T B - B^T A$. Từ đó tính M^{-1}.

Câu 3. Cho $U = \left\{ \mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

a) Chứng mính rằng là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của U.

Câu 4. Cho tương ứng $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2x - z \\ x - y + 3z \end{bmatrix} \text{ **với** } \mathbf{v} = (x, y, z).$$

a) Chứng minh rằng T là một phép biến đổi tuyến tính.

b) Tìm ma trận chính tắc của T và xác định $T(\mathbf{v})$ với $\mathbf{v} = (2; -3; 5)$.

Câu 5. Hai đại lượng x, y liên hệ theo công thức $y = ax + b$. Bảng số liệu thực nghiệm là:

x	1	2	3	4	5
y	3	4,8	7,8	13,2	17,2

Hãy xác định a, b theo phương pháp bình phương tối thiểu.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1. Tìm nghiệm của hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer:

$$\begin{cases} -x+\ \ y+\ \ z=6 \\ \ \ x+\ \ y+2z=5 \\ \ \ x+2y+\ \ z=3 \end{cases}.$$

Câu 2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1=(2;1;3), \boldsymbol{\alpha}_2=(0;1;1), \boldsymbol{\alpha}_3=(4;2;m)\}$.

a. Tìm m để hệ véc tơ trên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Với $m=7$, tìm tọa độ của véc tơ $\mathbf{v}=(3;6;7)$ trong cơ sở S.

Câu 3. Tìm một cơ sở và số chiều các không gian con $C(A)$ và $N(A)$ của ma trận:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Câu 4. Cho phép biến đổi: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y-3z \\ x+y \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng f là một phép biến đổi tuyến tính.

b) Xác định ma trận chính tắc của f và tìm $f\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Câu 5: Tìm một cơ sở của ***không gian cột*** $C(A)$ của ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Từ đó tìm một **cơ sở trực giao** của $C(A)$ bằng phương pháp Gram-Schmidt.

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -2x+y-\ \ z=-2 \\ \ \ x+y-2z=0 \\ \ 6x-\ \ \ \ \ 2z=4 \\ -4x-y+3z=-2 \end{cases}$.

Câu 2. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 2x \\ x & x & 1 & 4 \\ 1 & 3 & x & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ với $x\in\mathbb{R}$.

a) Tính $\det A$.

b) Giải phương trình $\det A=0$.

Câu 3. Cho $U=\left\{\mathbf{u}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} -x_1-x_3+x_4=0 \\ -x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}\right\}$.

a) Chứng mính rằng là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của U^T.

Câu 4. Cho ánh xạ $T:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$T(x,y)=y\mathbf{u_1}+x\mathbf{u_2}+(x-y)\mathbf{u_3}$$

trong đó $\mathbf{u_1}=(1;1;0),\ \mathbf{u_2}=(1;1;1),\ \mathbf{u_3}=(1;0;0)$.

Chứng minh rằng T là một biến đổi tuyến tính. Tìm ma trận chính tắc của T.

Câu 5. Cho hai ma trận: $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. Liệu hai ma trận trên có đồng dạng không?

ĐỀ SỐ 5

Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

a) Viết hệ dưới dạng ma trận.

b) Giải hệ phương trình

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} bằng phương pháp phần phụ đại số

b) Tìm ma trận X thỏa mãn: $XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Câu 3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -6 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của ma trận A.

b) Tìm số chiều của phần bù trực giao của không gian cột của ma trận A.

Câu 4. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm x và y sao cho $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Tìm ma trận chính tắc của f.

Câu 5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm các giá trị riêng của ma trận $A^T A$.

b) Tìm các véc tơ riêng đơn vị của ma trận $A^T A$, từ đó phân tích SVD ma trận A.