

Chương 6: **Thiết kế bộ lọc số IIR**

TS. Trần Văn Hưng
Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)
Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

- 6.1 Khái quát về thiết kế bộ lọc số IIR
- 6.2 Các cơ sở thiết kế bộ lọc số IIR
- 6.3 Các pp thiết kế bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự
- 6.4 Thiết kế và mô phỏng các bộ lọc số IIR

1.3 Thiết kế bộ lọc số IIR

- ❖ Giới thiệu thiết kế
- ❖ Thiết kế bộ lọc thông thấp tương tự
- ❖ Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

Giới thiệu thiết kế

- ❖ Bộ lọc số FIR có ưu điểm nổi bật là pha tuyến tính, đảm bảo cùng một độ trễ với các nhóm tần số. Các bộ lọc IIR không đảm bảo được tính chất này.
- ❖ Khi không có yêu cầu bắt buộc pha tuyến tính thì có thể lựa chọn FIR hay IIR. IIR thường được chọn vì:
 - Cùng yêu cầu về độ suy giảm thì bộ lọc IIR đơn giản hơn FIR
 - Bộ lọc IIR được thiết kế thông qua việc chuyển đổi các thiết kế của bộ lọc tương tự sang, các bảng thông số trong thiết kế bộ lọc số có thể tra được trong rất nhiều các tài liệu.
- ❖ Hàm truyền đạt:
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}}$$
- ❖ Có hai phương pháp thiết kế bộ lọc số dựa trên bộ lọc tương tự:
 - Thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng hệ thống (đáp ứng xung) giống với đáp ứng của bộ lọc tương tự tương ứng.
 - Thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng tần số của hệ thống giống với đáp ứng tần số của hệ thống tương tự tương ứng.

Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

- ❖ Yêu cầu về chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thông thấp tương tự thường được cho dưới dạng các tham số tuyệt đối như sau:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leq |H_a(s)|^2, \quad |\Omega| \leq \Omega_p$$

$$0 \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2}, \quad |\Omega_s| \leq |\Omega|$$

Trong đó:

- Với Ω_p và Ω_s lần lượt là các tần số cắt dải thông và tần số cắt dải chắn tính theo đơn vị rad/sec
- ε là tham số gợn sóng và A là tham số suy giảm của dải chắn.

$$R_p = -10 \log_{10} \frac{1}{1+\varepsilon^2} \rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}$$

$$A_s = -10 \log_{10} \frac{1}{A^2} \rightarrow A = 10^{A_s/20}$$

Ngoài ra, độ gợn δ_p và δ_s liên hệ với ε và A bằng các hệ thức:

$$\frac{1-\delta_p}{1+\delta_s} = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} \rightarrow \varepsilon = \frac{2 \times \sqrt{\delta_p}}{1-\delta_p} \quad \frac{\delta_s}{1+\delta_p} = \frac{1}{A} \rightarrow A = \frac{1+\delta_p}{\delta_s}$$

Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

- ❖ Có 4 định dạng cơ bản thường được vận dụng trong quá trình thiết kế bộ lọc tương tự là: bộ lọc Butterworth, bộ lọc Chebyshev-1, bộ lọc Chebyshev-2 và bộ lọc Elliptic.

❖ Bộ lọc thông thấp Butterworth

- Hàm bình phương biên độ của đáp ứng tần số bộ lọc Butterworth bậc N được cho bởi phương trình:

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\Omega_c)^{2N}} \quad \text{Với } \Omega_c \text{ là tần số cắt.}$$

- Các điểm cực của hàm bình phương biên độ: $S_{pk} = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+1+N)}$
- Dẫn đến các điểm cực của hàm truyền đạt $H_a(s)$ là N điểm nằm trên nửa đường tròn tâm O bán kính Ω_c ở nửa bên trái mặt phẳng S và N điểm này đối xứng qua trục thực.

- **Bậc bộ lọc thông thấp Butterworth:** $N = \frac{\log[(10^{R_p/10} - 1)(10^{A_s/10} - 1)]}{2 \log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}}$

Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

Bộ lọc thông thấp Chebyshev-1:

- Hàm bình phương biên độ của đáp ứng tần số bộ lọc Chebyshev-1 bậc N được cho bởi phương trình: $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$

Với: Ω_c là tần số cắt, ε là tham số gợn sóng dải thông, $T_N(x)$ là đa thức Chebyshev-1 bậc N được cho bởi công

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & -1 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases}$$

- Các điểm cực có dạng: $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k$

$$\sigma_k = (a\Omega_c) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{\pi} 2N\right)$$

$$\Omega_k = (b\Omega_c) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{\pi} 2N\right)$$

$$a = \frac{1}{2}[a^{1/N} - (1/a)^{1/N}]$$

$$b = \frac{1}{2}[a^{1/N} + (1/a)^{1/N}]$$

Bậc bộ lọc thông thấp Chebyshev-1

$$N = \frac{\log(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\log(\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1})}$$

$$g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}} \quad \Omega_r = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

Bộ lọc thông thấp Chebyshev-2:

- Hàm bình phương biên độ của đáp ứng tần số bộ lọc Chebyshev-2 bậc N được cho bởi phương trình:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)]^{-1}}$$

Với: Ω_c là tần số cắt

ε là tham số gợn sóng dải thông

$T_N(x)$ là đa thức Chebyshev bậc N

- Giá trị thích hợp của bậc bộ lọc thông thấp Chebyshev-2 được tính giống theo công thức đã cho với bộ lọc Chebyshev-1.

Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

- ❖ Tương tự với bộ lọc FIR, tổng hợp bộ lọc số IIR chỉ xét đến quá trình xác định các hệ số lọc sao cho thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật
- ❖ Nội dung các phương pháp để tổng hợp bộ lọc số IIR trên cơ sở bộ lọc tương tự, tức là tổng hợp bộ lọc tương tự trước, sau đó dùng các phương pháp chuyển đổi tương đương một cách gần đúng từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số
- ❖ Các phương pháp chính để chuyển bộ lọc tương tự sang bộ lọc số:
 - Phương pháp bất biến xung
 - Phương pháp biến đổi song tuyến
 - Phương pháp tương đương vi phân

Phương pháp bất biến xung

- ❖ Xác định đáp ứng xung $\mathbf{h(n)}$ của bộ lọc số bằng cách lấy mẫu đáp ứng xung của bộ lọc tương tự $\mathbf{h_a(t)}$.

$$h(n) \equiv h_a(nT) \quad \begin{array}{l} \text{Với: } n=0, 1, 2, \dots, \\ T \text{ là chu kỳ lấy mẫu.} \end{array}$$

- ❖ Giả thiết hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc tương tự có dạng:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

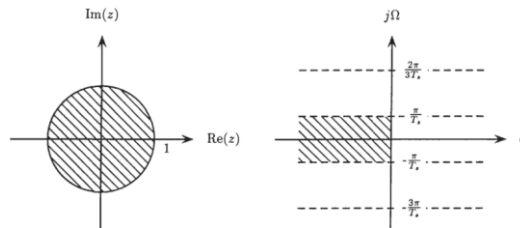
- ❖ Hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số được chuyển đổi tương đương theo phương pháp bất biến xung là:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}}$$

Ta thấy rằng bộ lọc số có các cực trị: $z_k = e^{s_{pk}T}$, $k = 1, 2, \dots, N$

Phương pháp bất biến xung

❖ So sánh tính ổn định: Ánh xạ mặt phẳng s lên mặt phẳng z



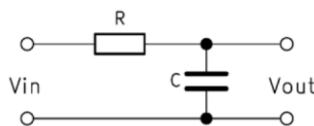
Bộ lọc số: Nếu toàn bộ các điểm cực của $H(z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị thì hệ thống ổn định

Bộ lọc tương tự: Nếu toàn bộ các điểm cực của $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s thì hệ thống ổn định

Điều kiện ổn định vẫn đảm bảo khi chuyển $H_a(s)$ thành $H(z)$

Phương pháp bất biến xung

❖ **Ví dụ:** Sử dụng phương pháp bất biến xung để chuyển bộ lọc tương tự sau thành bộ lọc số.



Bài giải:

Ta có: $H_a(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$, $V_{out} = i \frac{1}{sC}$, $V_{in} = i(R + \frac{1}{sC})$

Thay vào công thức $H_a(s)$ ta được:

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\begin{aligned} s_{p1} &= -\frac{1}{RC} \\ A_1 &= \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{A_1}{1 - e^{s_{p1}T} \cdot z^{-1}} = \frac{\frac{1}{RC}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}T} \cdot z^{-1}}$$

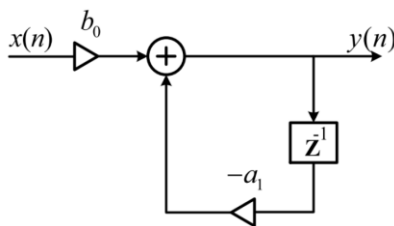
$$\begin{aligned} M = 0 &\rightarrow b_0 = \frac{1}{RC} \\ N = 1 &\rightarrow a_1 = -e^{-\frac{1}{RC}T} \end{aligned}$$

Phương pháp bất biến xung

- ❖ Phương trình sai phân của hệ thống là:

$$y(n] = b_0x(n] + (-a_1)y(n - 1]$$

- ❖ Sơ đồ thực hiện như sau:



Phương pháp biến đổi song tuyến

- ❖ Nội dung của phương pháp biến đổi song tuyến là phép ánh xạ mặt phẳng s của bộ lọc tương tự sang mặt phẳng z của bộ lọc số.
- ❖ Hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số có thể nhận được từ hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc tương tự, nếu ta thay:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

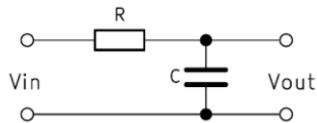
- ❖ Quan hệ giữa bộ lọc số và bộ lọc tương tự:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

- Phép biến đổi này ánh xạ toàn bộ nửa bên trái mặt phẳng S vào bên trong đường tròn đơn vị trên mặt phẳng Z trên nguyên tắc một - một nên nó bảo toàn tính ổn định của hệ thống. Mặt khác nguyên tắc ánh xạ một - một từ mặt phẳng S đến mặt phẳng Z cho phép hoàn toàn không xảy ra hiện tượng chồng phỏ.

Phương pháp biến đổi song tuyến

❖ **Ví dụ:** Sử dụng phương pháp biến đổi song tuyến để chuyển bộ lọc tương tự sau thành bộ lọc số



Bài giải:

Ta có:

$$H_a(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}, \quad V_{out} = i \frac{1}{s.C}, \quad V_{in} = i(R + \frac{1}{s.C})$$

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{s.C}}{R + \frac{1}{s.C}} = \frac{1}{RC.s + 1}$$

$$\text{Thay: } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad H(z) = \frac{1}{RC \cdot \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 1}$$

Phương pháp biến đổi song tuyến

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{RC \cdot \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 1} = \frac{T(1 + z^{-1})}{2RC(1 - z^{-1}) + T(1 + z^{-1})} \\ &= \frac{T + Tz^{-1}}{2RC + T + (T - 2RC)z^{-1}} \end{aligned}$$

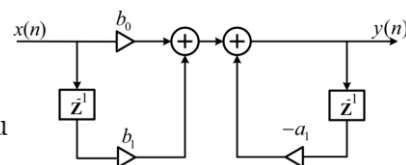
Từ đây tính được:

$$H(z) = \frac{\frac{T}{A} + \frac{T}{A}z^{-1}}{1 + \frac{T - 2RC}{A}z^{-1}}, \quad A = 2RC + T$$

$$M = 1 \longrightarrow b_0 = \frac{T}{A}, \quad b_1 = \frac{T}{A}$$

$$N = 1 \longrightarrow a_1 = \frac{T - 2RC}{A}$$

Sơ đồ thực hiện hệ thống như sau



Phương pháp tương đương vi phân

- ❖ **Nội dung của phương pháp:** Phương pháp này chuyển phương trình vi phân của bộ lọc tương tự tương đương thành bộ lọc số
- ❖ Hàm truyền đạt của bộ lọc số $\mathbf{H(z)}$ có thể nhận được từ hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $\mathbf{H_a(s)}$, nếu ta thay:

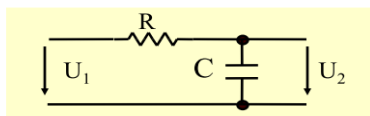
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \longrightarrow z = \frac{1}{1 - sT}$$

- ❖ Mối quan hệ giữa các hàm truyền đạt $\mathbf{H_a(s)}$ và $\mathbf{H(z)}$ là:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

Phương pháp tương đương vi phân

- ❖ **Ví dụ:** Sử dụng phương pháp tương đương vi phân để chuyển bộ lọc tương tự sau thành bộ lọc số



- Hàm truyền đạt của mạch tương tự:

$$H_a(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

\Rightarrow hàm truyền đạt của mạch số tương ứng là:

$$H(z) = \frac{1}{RC \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{T_s} + 1} = \frac{T_s / K}{1 - \frac{RC}{K} z^{-1}} \quad \text{Với: } K = RC + T_s$$

Phương pháp tương đương vi phân

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} \quad \text{Với:} \quad b_0 = \frac{T_s}{K}; \quad a_1 = \frac{RC}{K}$$

⇒ Phương trình sai phân:

$$y(n) + a_1 y(n-1] = b_0 x(n)$$

⇒ Sơ đồ thực hiện hệ thống:

