Chương 2: Phép biến đổi Fourier rời rạc - DFT

TS. Trần Văn Hưng
Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)
Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

2.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N
2.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

Nội dung

2.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N

2.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

DFT (Discrete Fourier Transform)

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n}$$

đặt: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\boxed{\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}}$$

$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$

$\tilde{x}(n) \xrightarrow{DFT} \tilde{X}(k)$

Ví dụ Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ như sau:

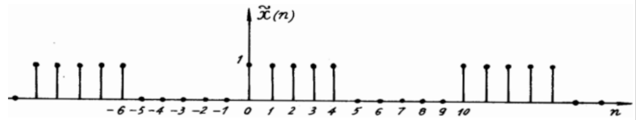
$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$$ Với chu kỳ $N = 10$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$.

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Giải :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n}$$



$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{4} \tilde{x}(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{2j\sin\frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{2j\sin\frac{\pi k}{10} e^{-j\frac{\pi}{10}k}}$$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j\pi k\frac{4}{10}} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k} = 5e^{-j\frac{4\pi}{10}k} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$$

đặt: $\tilde{A}(k) = 5\frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j\frac{4\pi}{10}k} A(k) = \left|\tilde{X}(k)\right| e^{j\arg[\tilde{X}(k)]} = \left|\tilde{X}(k)\right| e^{j\varphi(k)}$$

$\varphi(k) \equiv \arg[\tilde{X}(k)]$

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Ví dụ Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$

Giải :

$N = 4$ nên ta có: $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{-j\frac{\pi}{2}nk} = (-j)^{nk}$

$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n.0} = 1 + 2 + 4 + 3 = 10$$

$$\tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^{3} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n.1} = 1\,(-j)^0 + 2(-j)^1 + 4(-j)^2 + 3\,(-j)^3 = -3 + j$$

$$\tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = 1.(-j)^0 + 2(-j)^2 + 4(-j)^4 + 3\,(-j)^6 = 0$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^{3} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = 1(-j)^0 + 2(-j)^3 + 4(-j)^6 + 3(-j)^9 = -3 - j$$

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Biểu diễn $\tilde{X}(k)$ dưới dạng modun và argument ta có:

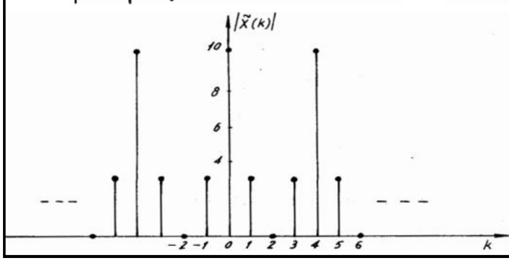
$$\tilde{X}(k) = |X(k)|e^{j\arg[\tilde{X}(k)]}$$

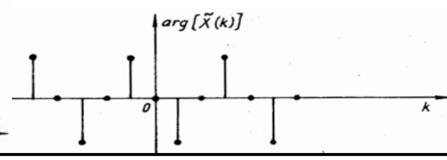
$$|\tilde{X}(0)| = 10 \qquad \arg[\tilde{X}(0)] = 0$$

$$|\tilde{X}(1)| = \sqrt{(-3^2)+1^2} = \sqrt{10} \qquad \arg[\tilde{X}(1)] = arctg\left(\frac{1}{-3}\right) = -arctg\frac{1}{3}$$

$$|\tilde{X}(2)| = 0 \qquad \arg[\tilde{X}(2)] = 0$$

$$|\tilde{X}(3)| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \qquad \arg[\tilde{X}(3)] = arctg\left(\frac{-1}{-3}\right) = arctg\frac{1}{3}$$





2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược

IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

Biến đổi Fourier rời rạc ngược được định nghĩa

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$IDFT\,[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$$

$$\tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFT} \tilde{x}(n)$$

hoặc: $$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

TÍNH CHẤT

Tính tuyến tính

$$\tilde{x}_3(n) = a\,\tilde{x}_1(n) + b\,\tilde{x}_2(n)$$

$$DFT\,[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = a\,\tilde{X}_1(k) + b\,\tilde{X}_2(k)$$

Tính chất trễ

$$DFT\,[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$DFT[\tilde{x}(n-n_0)] = W_N^{-kn_0}\tilde{X}(k)$$

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Tích chập tuần hoàn

tích chập tuyến tính:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn có chu kỳ N

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \, (\tilde{*})_N \, \tilde{x}_2(n)$$

$$\boxed{\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)}$$

2.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

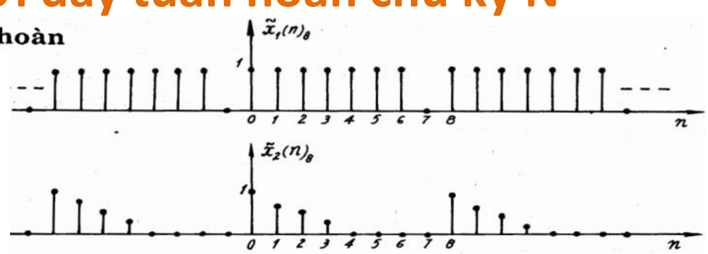
Tích chập tuần hoàn

Ví dụ

$\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$

$N = 8$

$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) (\tilde{*})_8 \tilde{x}_2(n)$



Sau khi tính toán ta thu được kết quả sau:

$\tilde{x}_3(0) = 1,75$	$\tilde{x}_3(1) = 2$	$\tilde{x}_3(2) = 2,25$	$\tilde{x}_3(3) = 2,5$
$\tilde{x}_3(4) = 2,5$	$\tilde{x}_3(5) = 2,5$	$\tilde{x}_3(6) = 2,5$	$\tilde{x}_3(7) = 1,5$

Nội dung

2.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N

2.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (*DFT*) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn *N* được định nghĩa

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$DFT\,[x(n)] = X(k) \qquad x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_n^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$IDFT\,[X(k)] = x(n) \qquad X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n)$$

$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$ $\quad |X(k)|$: Gọi là phổ rời rạc biên độ.

$\varphi(k) = \arg\,[X(k)]$ $\quad \varphi(k)$: Gọi là phổ rời rạc pha.

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Ví dụ

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây

$$x(n) = \delta(n)$$

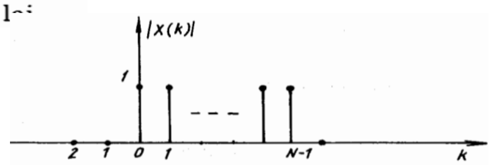
Giải

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0 \qquad \forall k$$



2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Ví dụ

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải :

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (a\, W_N^k)^n = \frac{1-(a\, W_N^k)^N}{1-a\, W_N^k}$$

mà: $W_N^{kn} = 1 \qquad \forall k$

Vậy: $X(k) = \dfrac{1-a^N}{1-a\, W_N^k}$

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \frac{1-a^N}{\sqrt{\left(1 - a\cos\frac{2\pi}{N}k\right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \frac{1-a^N}{\sqrt{1 - 2a\cos\frac{2\pi}{N}k + a^2}}$$

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

CÁC TÍNH CHẤT

Tính tuyến tính

$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \Rightarrow X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$

$L[x_1(n)] = N_1$

$L[x_2(n)] = N_2$

$L[x_3(n)] = N_3 = \max(N_1, N_2)$

Trễ vòng

trễ tuyến tính

trễ tuần hoàn có chu kỳ N

Ví dụ Cho dãy $x(n)$ sau;

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

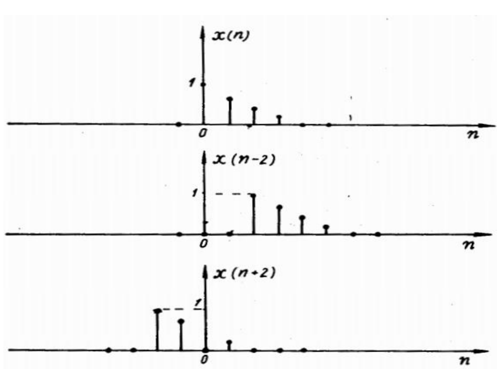
Hãy tìm trễ tuyến tính $x(n - 2)$ và $x(n + 2)$

Ví dụ Cho dãy tuần hoàn chu kỳ $N = 4$ $\tilde{x}(n)_4$

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{x}(n - 2)_4$ và $\tilde{x}(n + 2)_4$ sau đó lấy ra một chu kỳ của hai dãy này.

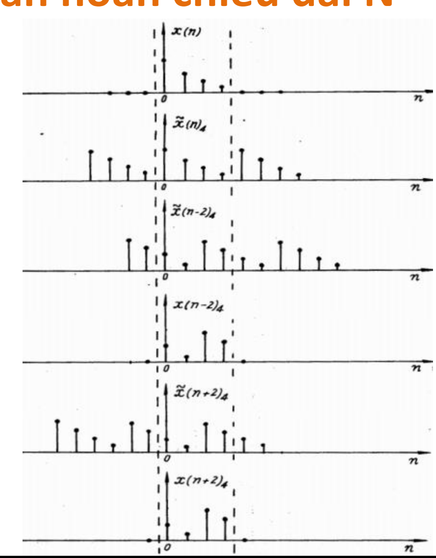
2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N



$x(n - n_0)$: Trễ tuyến tính

$\tilde{x}(n - n_0)_N$: Trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n - n_0)_N$: Trễ vòng với chiều dài N.



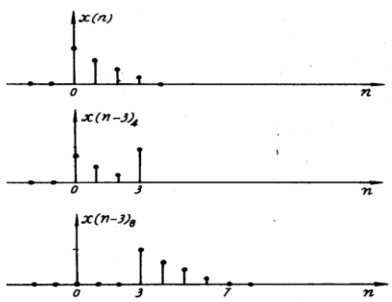
2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Ví dụ Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn như sau:

$$x_1(n)_4 = x_2(n)_8 = \begin{cases} 1-\dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Hãy vẽ $x_1(n-3)_4$ và $x_2(n-3)_8$.
- Hãy tìm $DFT\,[x_1(n-3)_4]$ và $DFT\,[x_2(n-3)_8]$.

Giải :



$$X_1(k)_4 = DFT\left[x_1(n)_4\right]$$

$$X_1(0)_4 = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)_4 W_4^{0.n} = 1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$X_1(1)_4 = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)_4 W_4^{1.n} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$X_1(2)_4 = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)_4 W_4^{2n} = \frac{1}{2}$$

$$X_1(3)_4 = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)_4 W_4^{3n} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$DFT\left[x_1(n-3)_4\right] = W_4^{3k} X_1(k)_4 = X'_1(k)_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} X_1(k)_4$$
$$= (-j)^{3k} X_1(k)_4 = (j)^k X_1(k)_4$$

$$X'_1(0)_4 = 2\frac{1}{2}$$

$$X'_1(1)_4 = j\left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$X'_1(2)_4 = j^2.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$X'_1(3)_4 = j^3\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Để tìm $DFT\,[x_2(n-3)_8]$ trước tiên ta tìm $DFT\,[x_2(n)_8\,]$ sau đó áp dụng tính chất trễ:

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Tích chập vòng

Tích chập vòng của hai dãy không tuần hoàn $x_1(n)_N$ và $x_2(n)_N$

$$x_3(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N . x_2(n-m)_N$$

$$= x_1(n)_N \; (\tilde{*})_N \; x_2(n)_N$$

$(*)_N$ là tích chập vòng chiều dài N.

$$\boxed{X_3(k)_N = X_1(k)_N \, . \, X_2(k)_N}$$

$$X_1(k)_N = DFT\,[x_1(n)_N]$$
$$X_2(k)_N = DFT\,[x_2(n)_N]$$
$$X_3(k)_N = DFT\,[x_3(n)_N]$$

Ví dụ Cho hai dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $N = 4$

$x_1(n)_4 = \delta\,(n-1)$

$$x_2(n)_4 = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập vòng chiều dài $N = 4$ của hai dãy này

Giải:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 (*)_4 x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(n-m)_4$$

2.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Tích chập vòng

$$x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(0-m)_4$$

$$x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(1-m)_4$$

$$x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(2-m)_4$$

$$x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(3-m)_4$$