# Chương 4. Thực hiện hệ thống rời rạc

## *Nội dung*

# 4.1. Giới thiệu

- Một hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân hệ số hằng:

$$y(n) = -\sum_{r=1}^{N} a_r y(n-r) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (7.1)$$

Hàm hệ thống:

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}}{1 + \sum_{r=1}^{N} a_k Z^{-r}}$$

- Giá trị của các điểm o và điểm cực phụ thuộc vào các hệ số $a_r$ và $b_k$
- Có thể thực hiện hệ thống rời rạc bằng các phương pháp khác nhau dựa trên phần cứng hoặc phần mềm máy tính
- Từ phương trình sai phân → xây dựng sơ đồ khối (gồm các phần tử trễ, bộ nhân, bộ cộng)

# 4.1. Giới thiệu

## Thực hiện hệ thống trên phần mềm

Biến đổi pt sai phân→ hệ phương trình tương đương → Xây dựng thuật toán → Viết chương trình phần mềm

## Thực hiện hệ thống trên phần cứng

Cấu trúc sơ đồ khối → Cấu hình phần cứng → Thực hiện hệ thống (bộ trễ, bộ cộng, bộ nhân)

# 4.1. Giới thiệu

## Các yếu tố chính ảnh hưởng đến thực hiện hệ thống rời rạc

1. Mức độ phức tạp trong tính toán

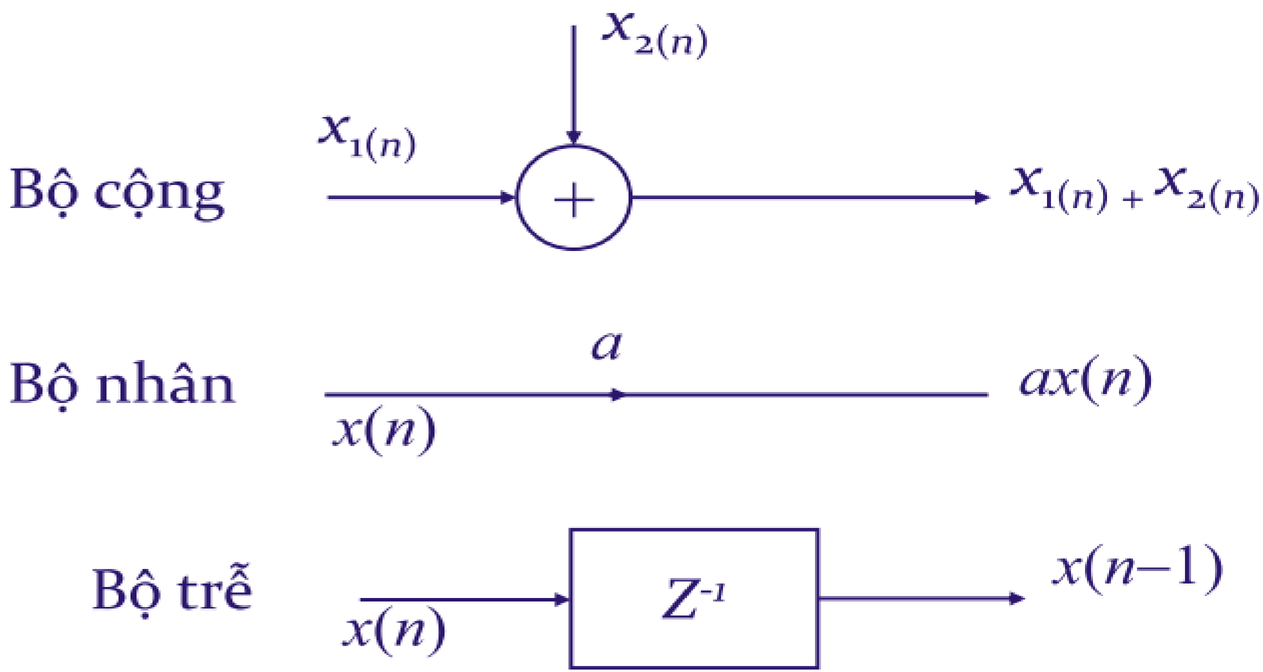
2. Yêu cầu dung lượng bộ nhớ

3. Ảnh hưởng độ dài từ hữu hạn

# 4.2. Biểu diễn hệ thống rời rạc

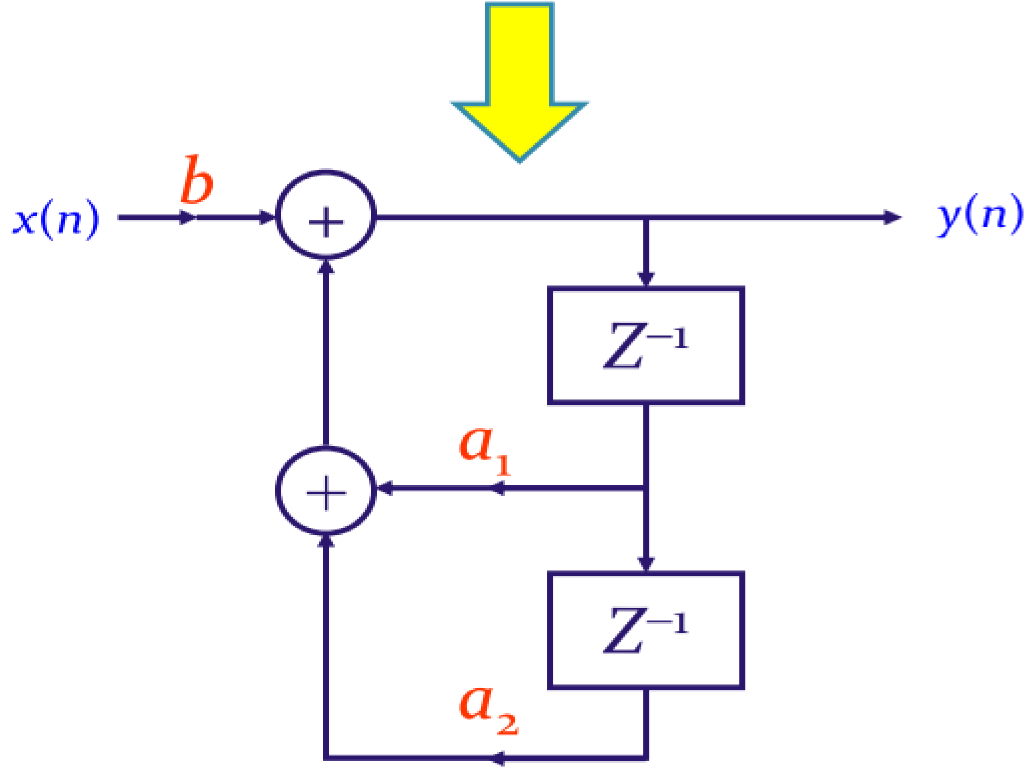
- **Có 2 phương pháp để biểu diễn một hệ thống rời rạc:**
  - Sử dụng sơ đồ khối
  - Sử dụng Graph tín hiệu

# Sơ đồ khối



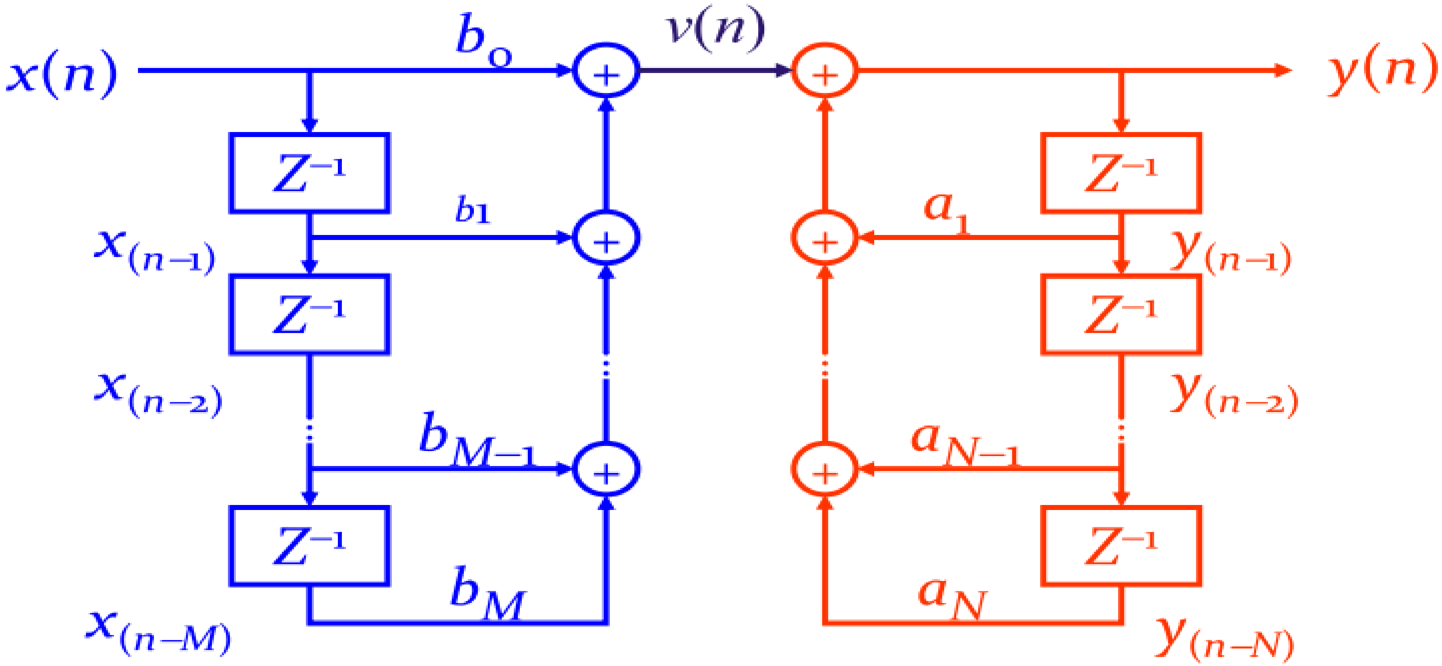
# Ví dụ

$$\boxed{y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + bx(n)}$$



# Cấu trúc trực tiếp dạng I

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$



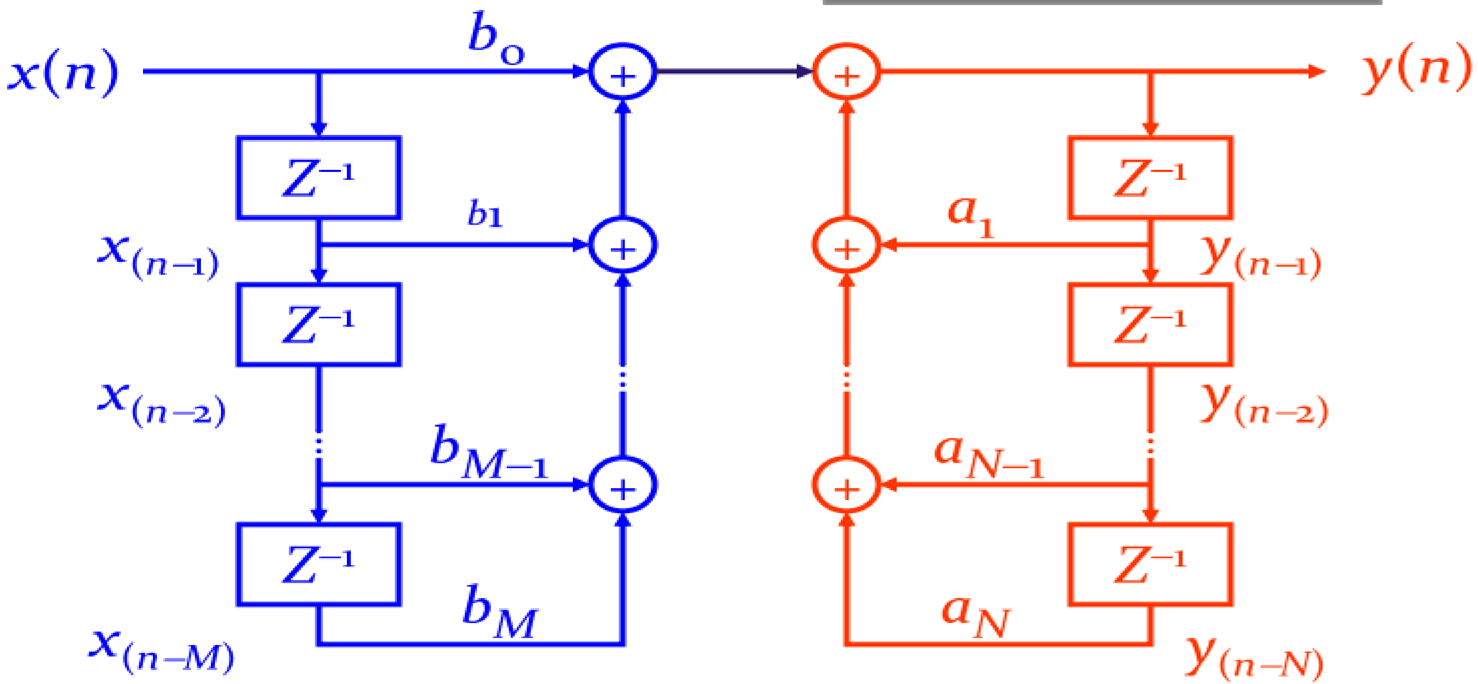

$$v(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n)$$

# Cấu trúc trực tiếp dạng I

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

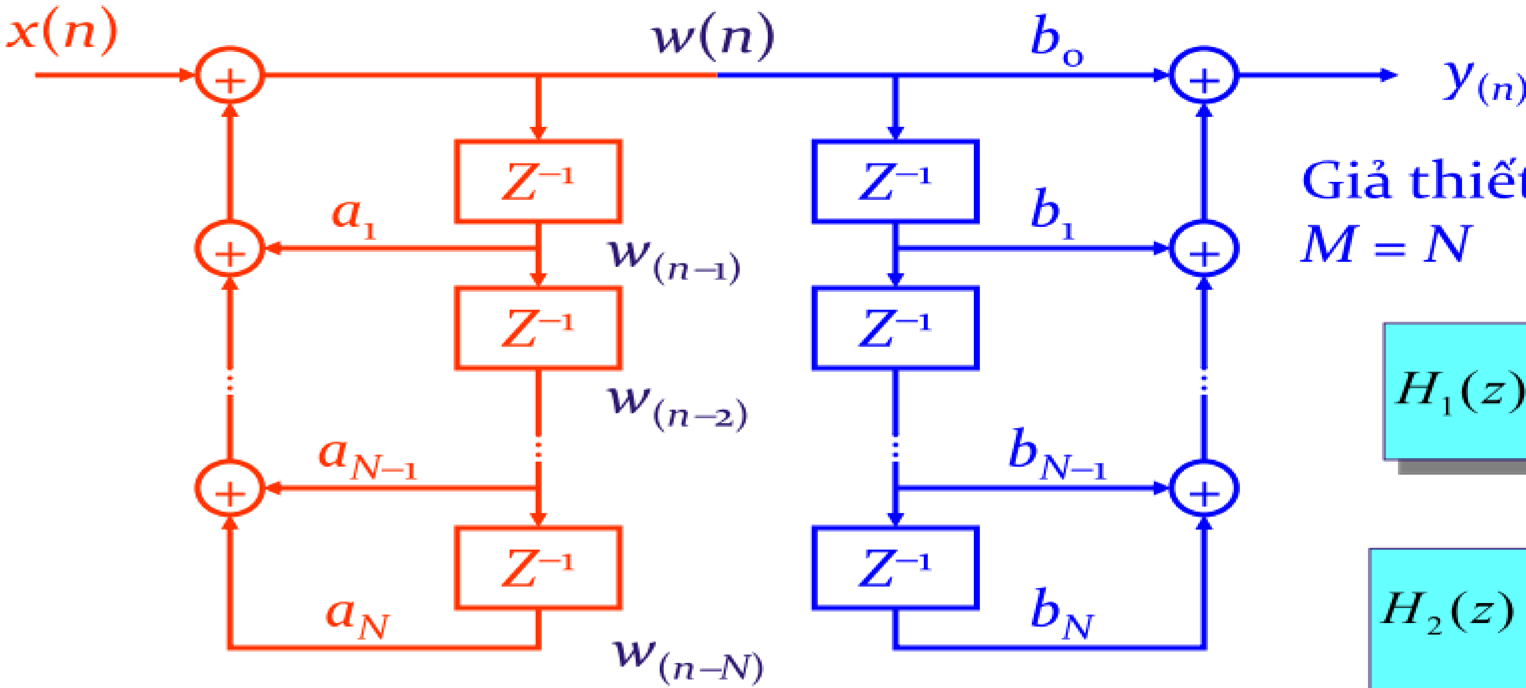
$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$



# Cấu trúc trực tiếp dạng II

$$w(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) + w(n)$$



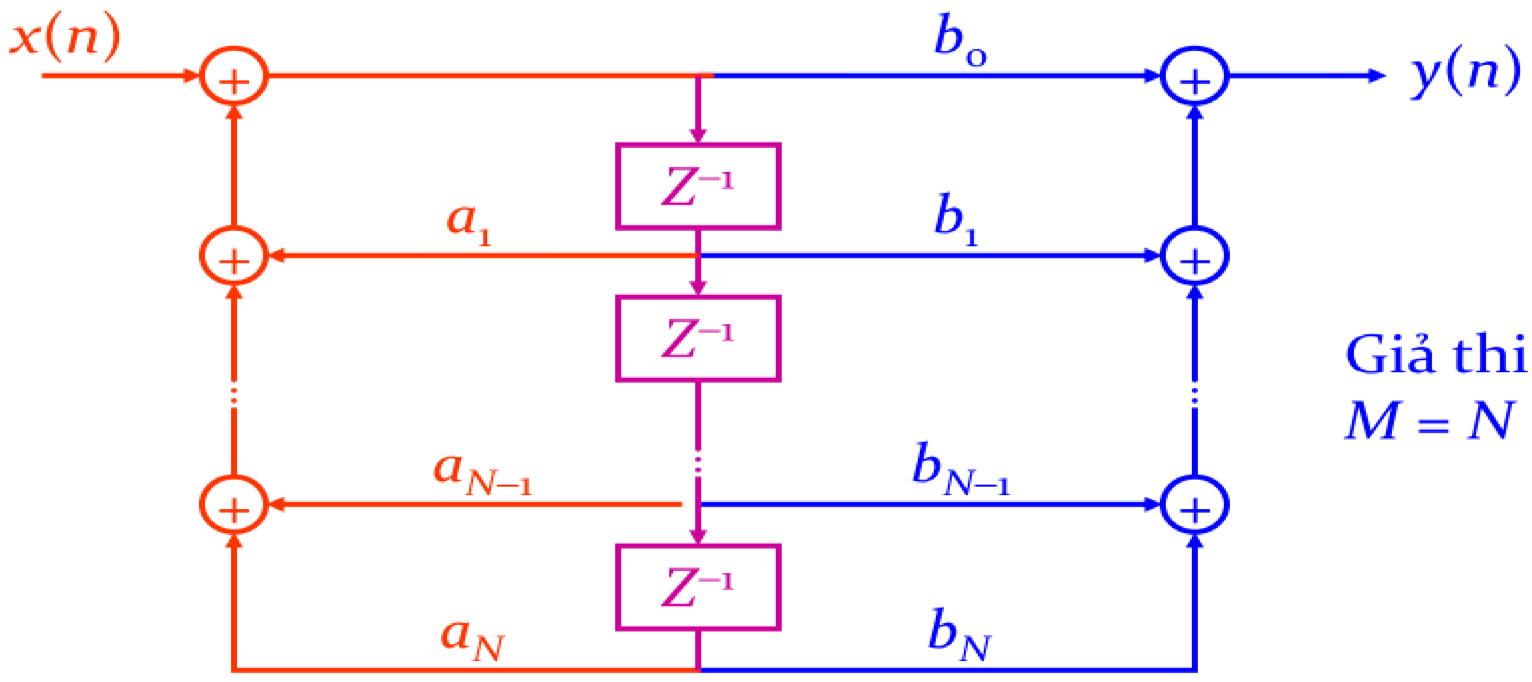

Giả thiết

$M = N$

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

# 4.2. Biểu diễn hệ thống rời rạc

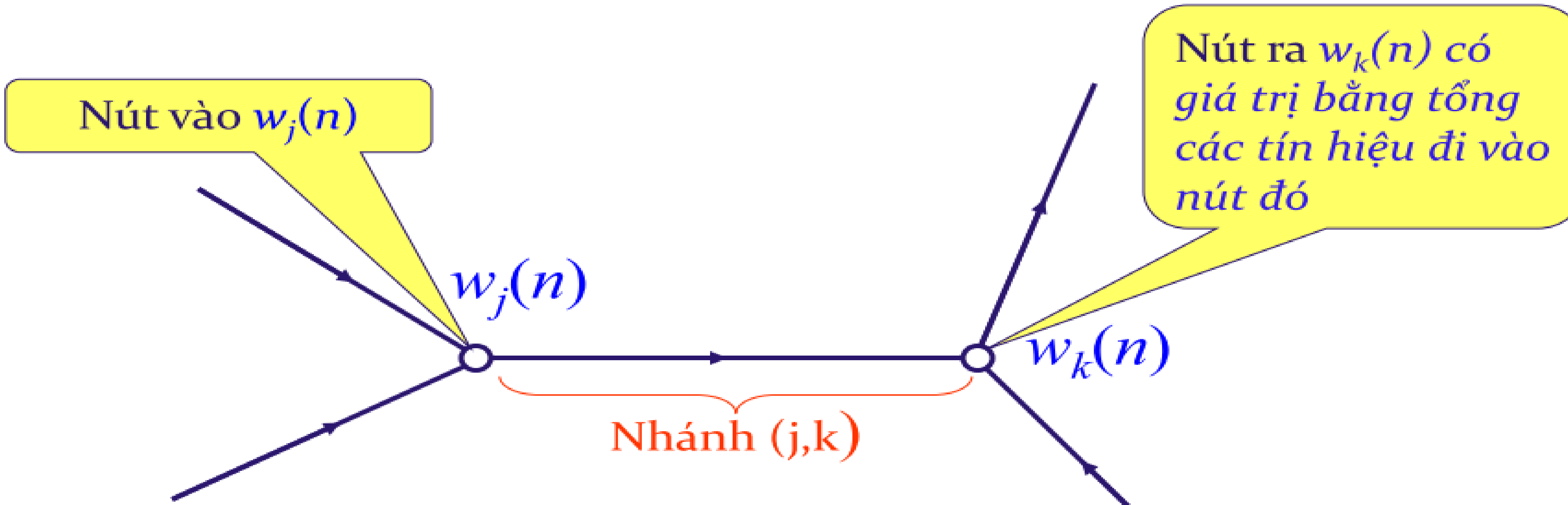



Giả thiết
$M = N$

# Cấu trúc hệ thống rời rạc

## Graph tín hiệu

# Nút và nhánh

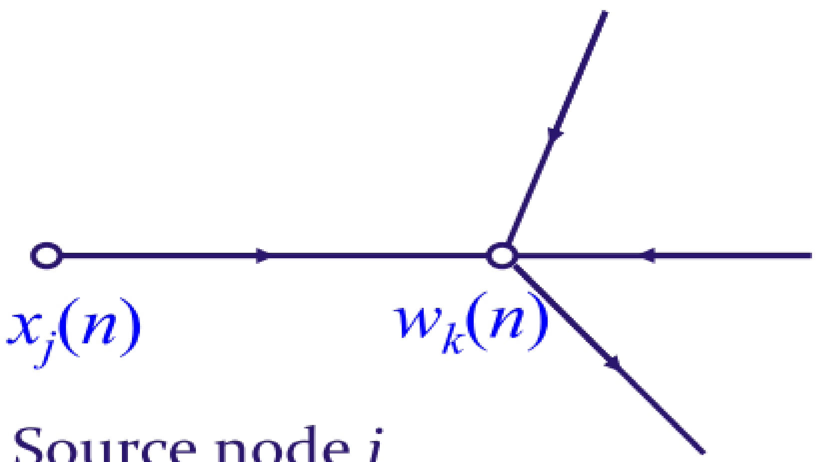



Mỗi nhánh có 1 nút tín hiệu vào và 1 nút tín hiệu ra

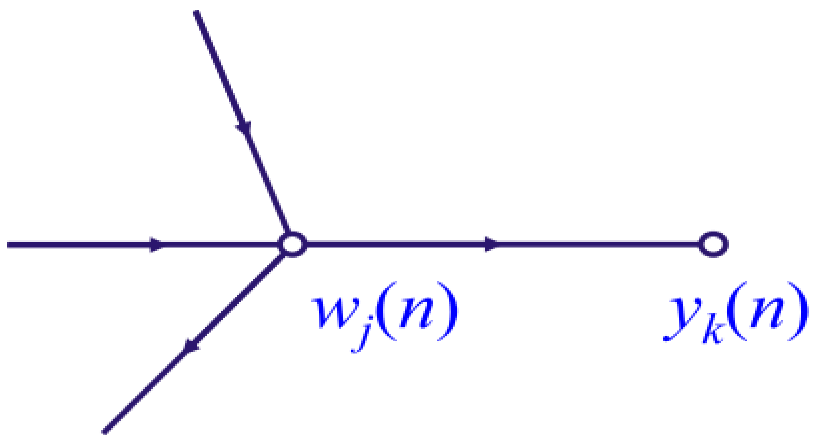
# Nút nguồn và nút đích

**Nút nguồn là nút không có nhánh nào đi vào**

**Nút đích là nút chỉ có 1 nhánh đi vào**

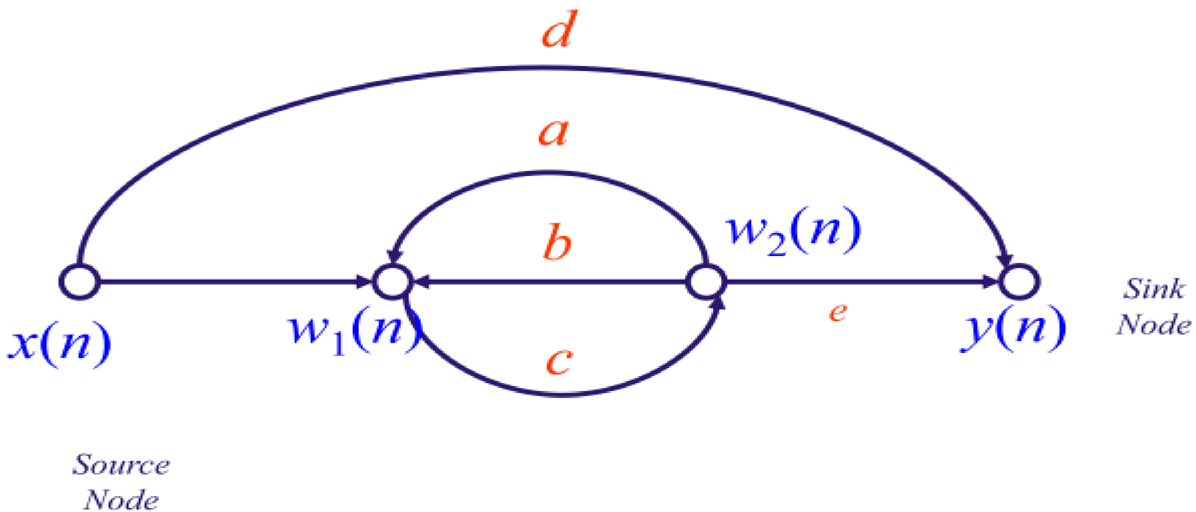



Source node $j$




Sink node $k$

# Ví dụ

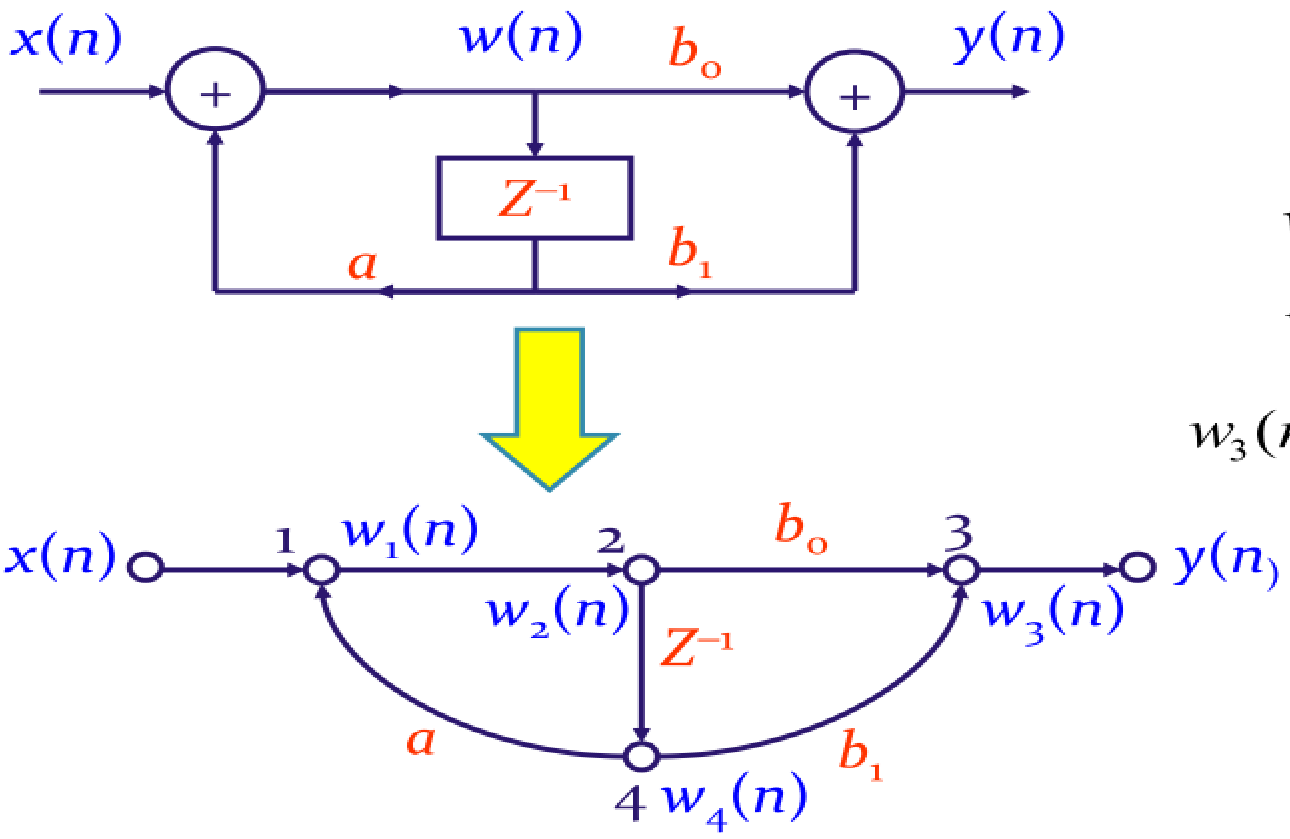



$$w_1(n) = x(n) + aw_2(n) + bw_2(n)$$

$$w_2(n) = cw_1(n)$$

$$y(n) = dx(n) + ew_2(n)$$

# Sơ đồ khối và Graph tín hiệu




$$w_1(n) = x(n) + aw_4(n)$$

$$w_2(n) = w_1(n)$$

$$w_3(n) = b_0 w_2(n) + b_1 w_4(n)$$

$$w_4(n) = w_2(n-1)$$

$$y(n) = w_3(n)$$

# Sơ đồ khối và Graph tín hiệu

$$y(n) = w_3(n) = b_0 w_2(n) + b_1 w_2(n-1)$$

$$w_2(n) = w_1(n) = x(n) + a w_2(n-1)$$

$$Y(Z) = (b_0 + b_1 Z^{-1}) W_2(Z)$$

$$W_2(Z) = X(Z) + a Z^{-1} W_2(Z)$$

$$W_2(Z) = \frac{X(Z)}{1 - aZ^{-1}}$$

$$Y(Z) = \frac{(b_0 + b_1 Z^{-1})}{1 - aZ^{-1}} X(Z)$$

$$y(n) = a y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

# Cấu trúc hệ thống rời rạc

## Cấu trúc cơ bản của hệ thống IIR

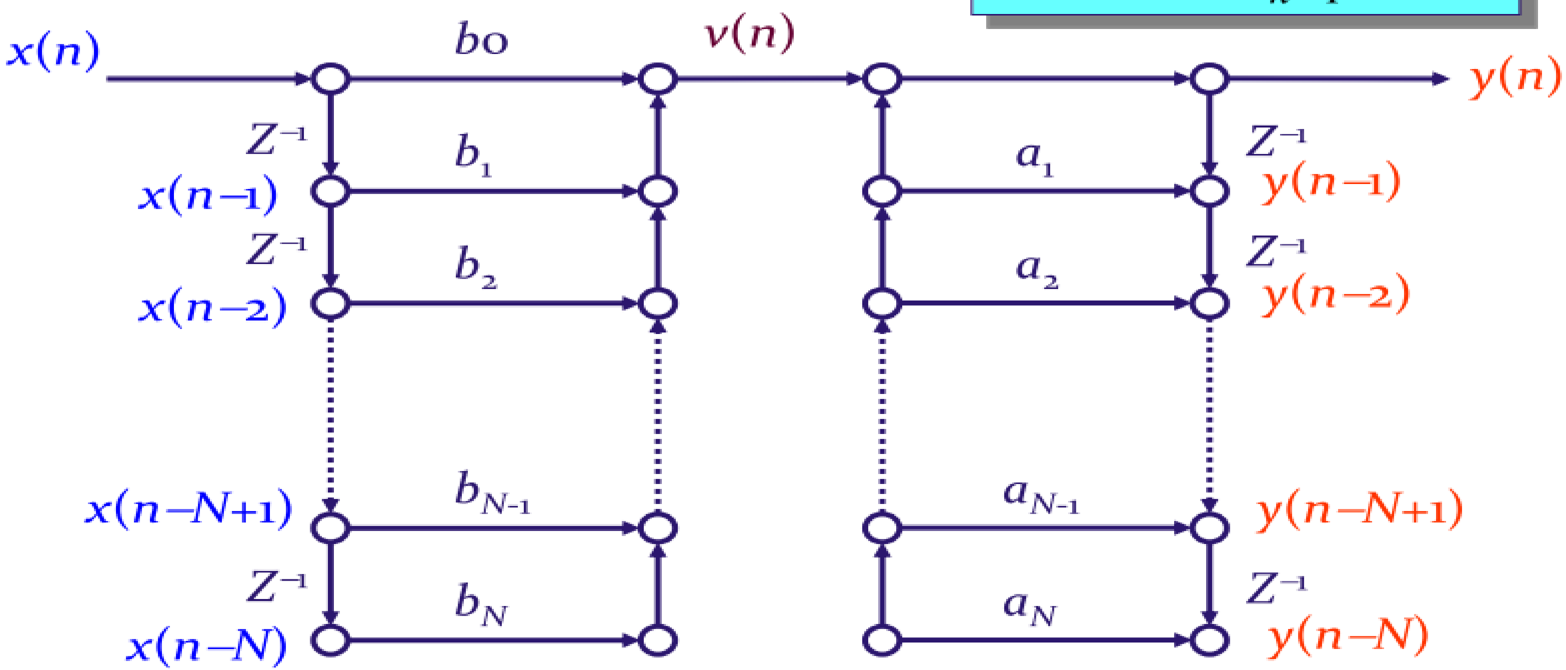
# Cấu trúc cơ bản

- Dạng trực tiếp
- Dạng nối tiếp
- Dạng song song

# Trực tiếp dạng I

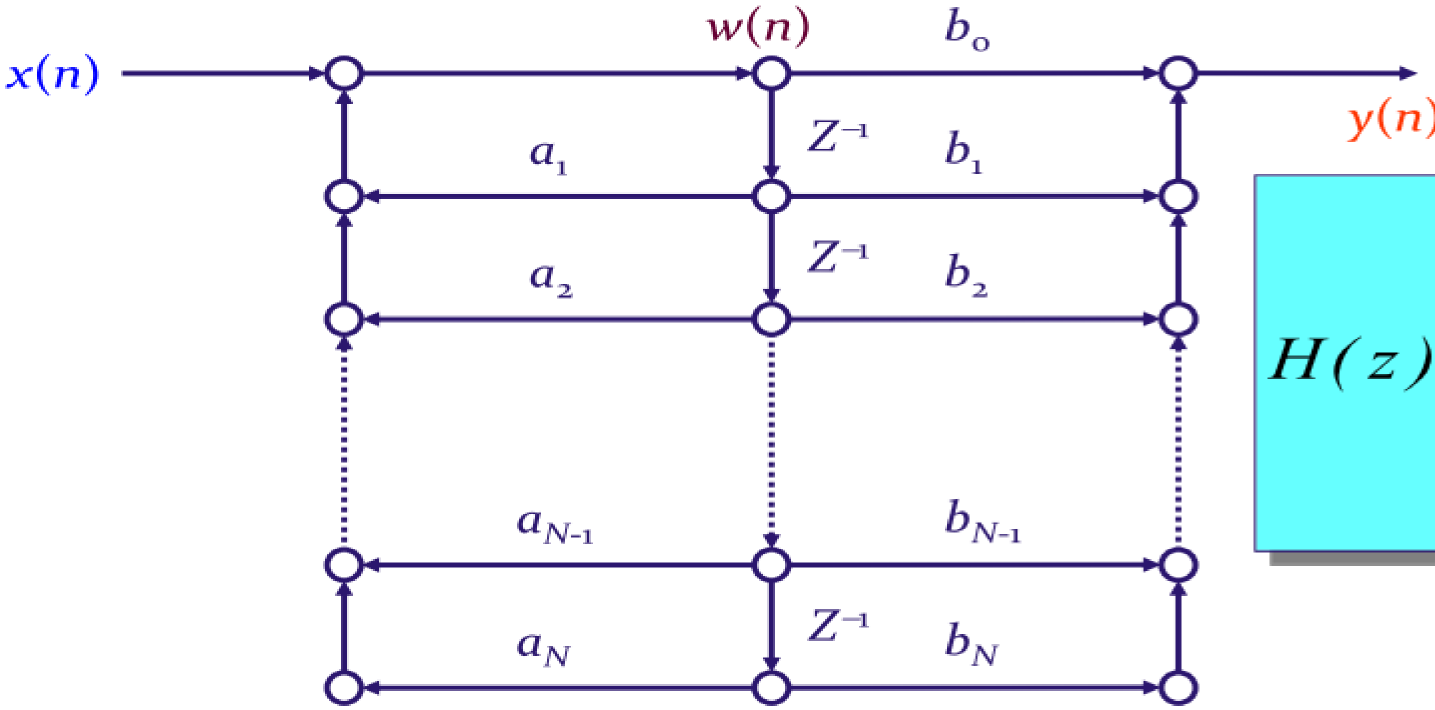
$$y(n)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

$$H(z)=\frac{\sum_{k=1}^{M}b_k Z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k Z^{-k}}$$



# Trực tiếp dạng II

$$y(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

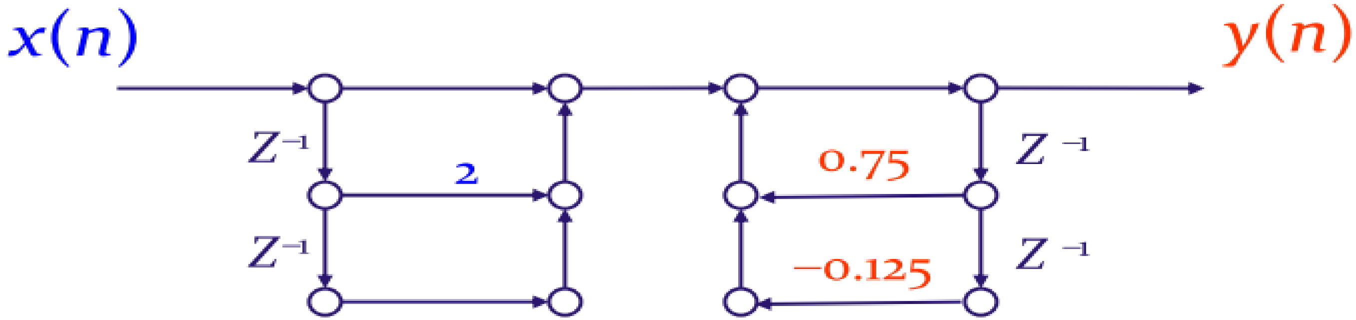



$$H(z) = \frac{\sum_{k=1}^{M} b_k Z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k Z^{-k}}$$

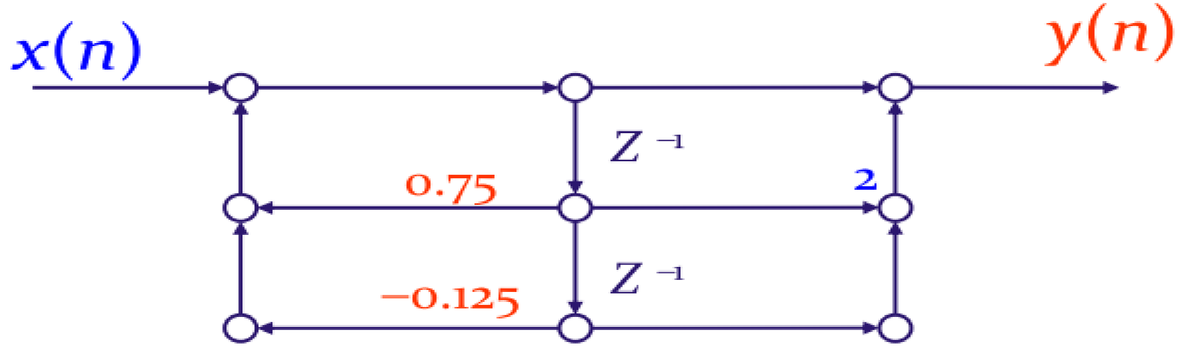
# Ví dụ

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$

## Trực tiếp dạng I




## Trực tiếp dạng II



# Dạng mắc nối tiếp

$$y(n)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

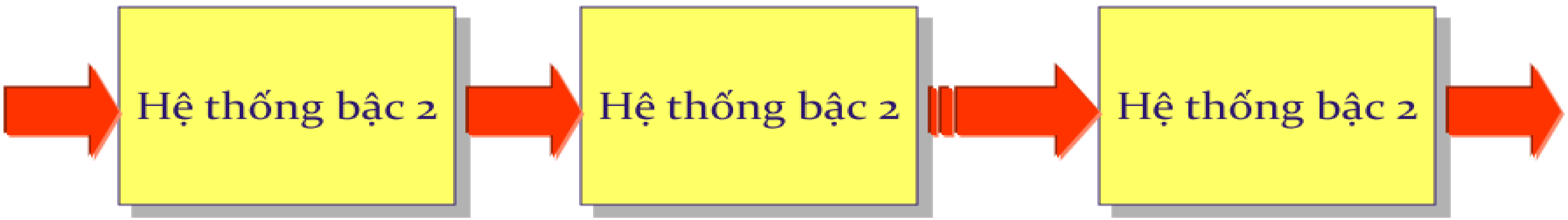
$$H(z)=\frac{\sum_{k=1}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$H(z)=\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-g_k Z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-h_k Z^{-1})(1-h_k^* Z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k Z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k Z^{-1})(1-d_k^* Z^{-1})}$$

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}Z^{-1}+b_{2k}Z^{-2}}{1-a_{1k}Z^{-1}-a_{2k}Z^{-2}}$$

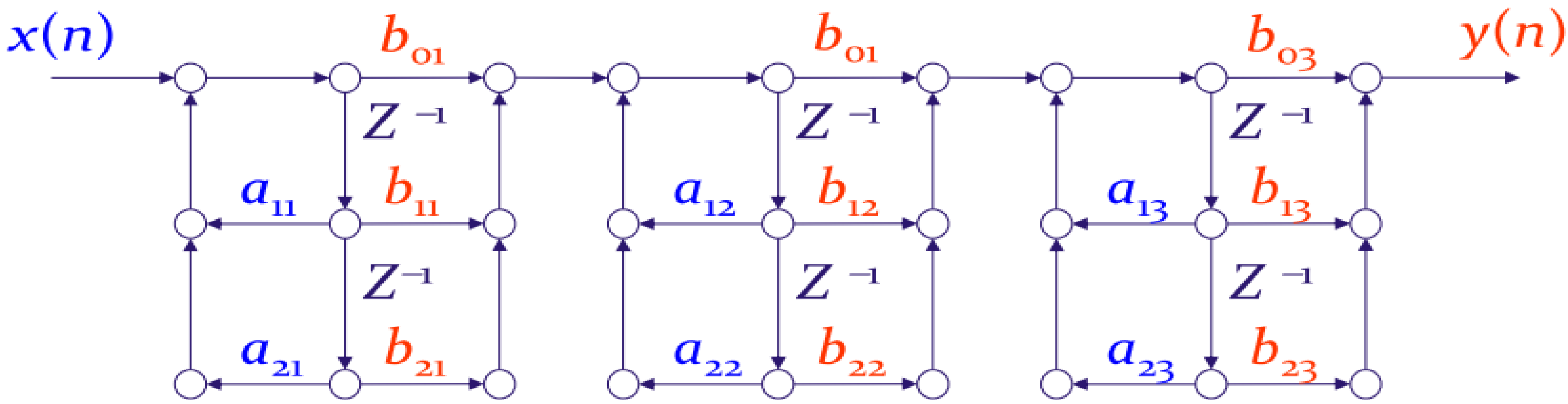
# Dạng nối tiếp

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$



# Dạng nối tiếp

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$



# Dạng nối tiếp kiểu khác

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$

$$H(z)=b_0\prod_{k=1}^{N_s}\frac{1+\widetilde{b}_{1k}z^{-1}+\widetilde{b}_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$

# Dạng song song

$$y(n)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

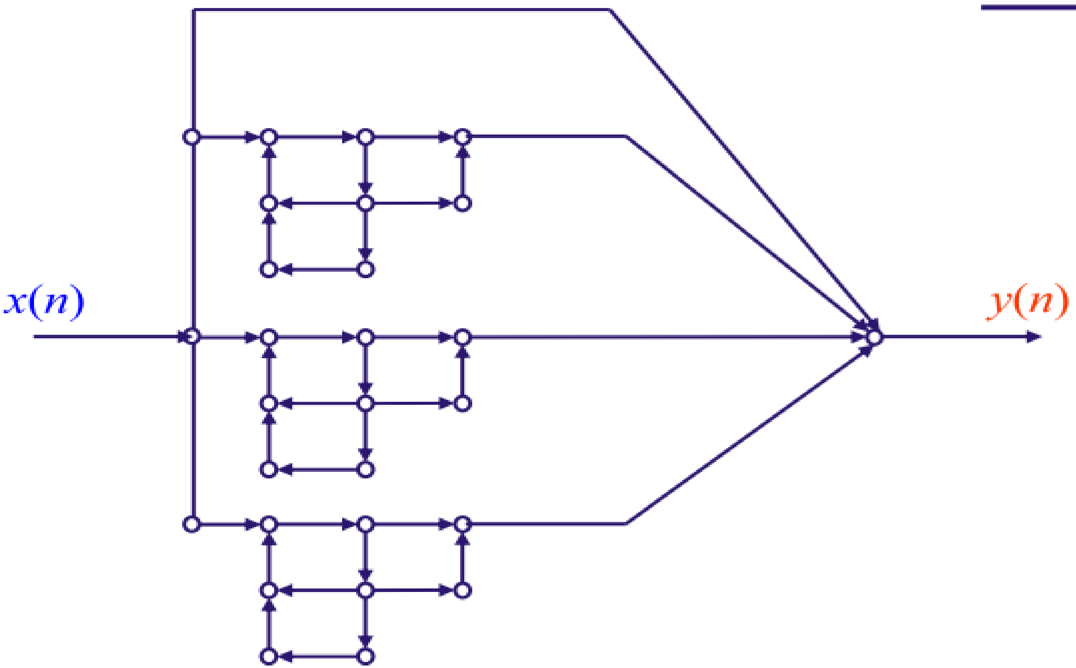
$$H(z)=\frac{\sum_{k=1}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

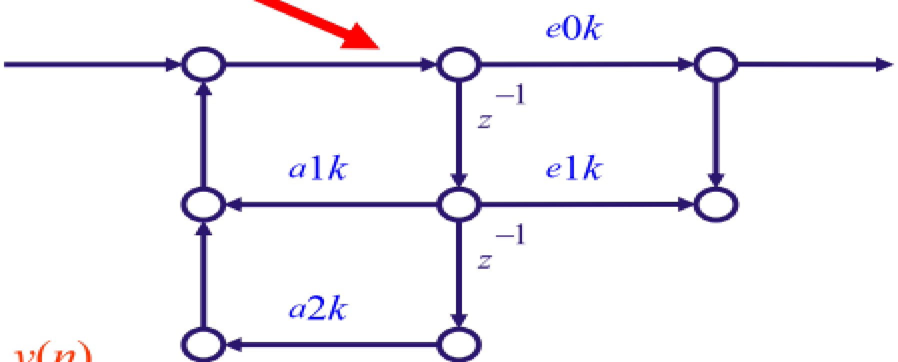
$$H(z)=\underbrace{\sum_{k=0}^{N_P}C_k z^{-k}}_{\text{Poles at zero}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}}}_{\text{Real Poles}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N_1}\frac{B_k(1-e_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}}_{\text{Complex Poles}}$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_P}C_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k}+e_{1k}z^{-1}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$

# Dạng song song

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_P} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

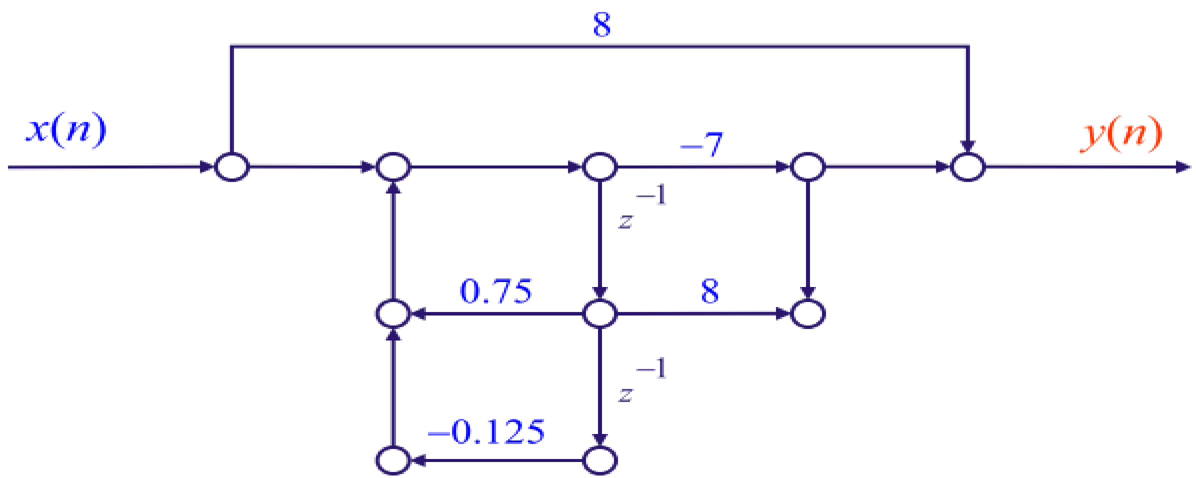


# Ví dụ

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$

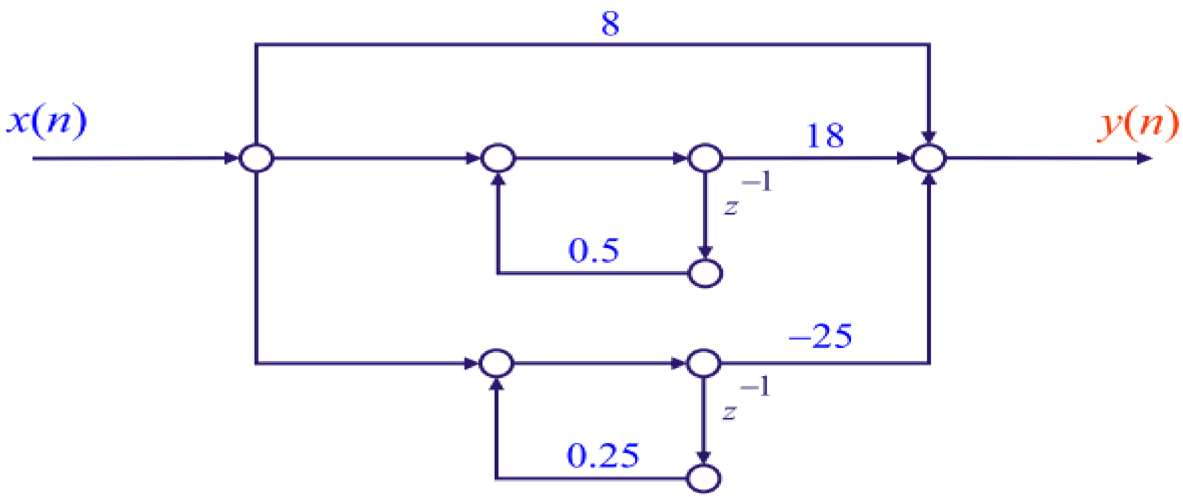
$$H(z)=8+\frac{-7+8z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+1.25z^{-2}}$$



# Ví dụ

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$

$$H(z)=8+\frac{18}{1-0.5z^{-1}}-\frac{25}{1-0.25z^{-1}}$$

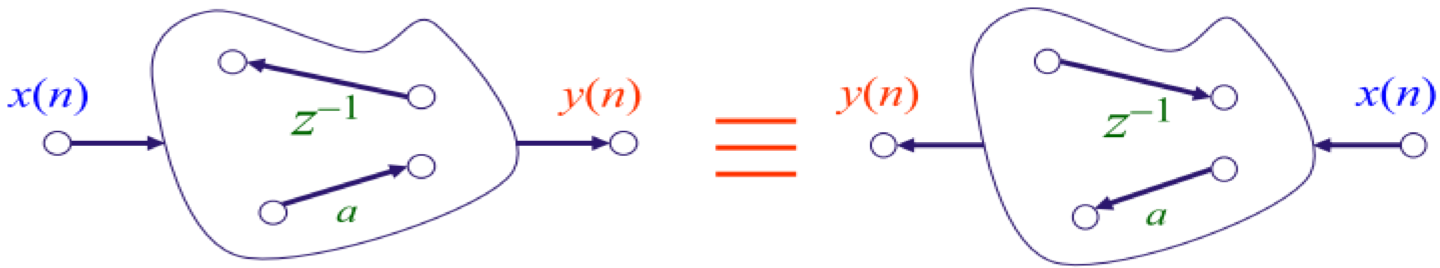


# Cấu trúc hệ thống rời rạc

## Dạng chuyển vị

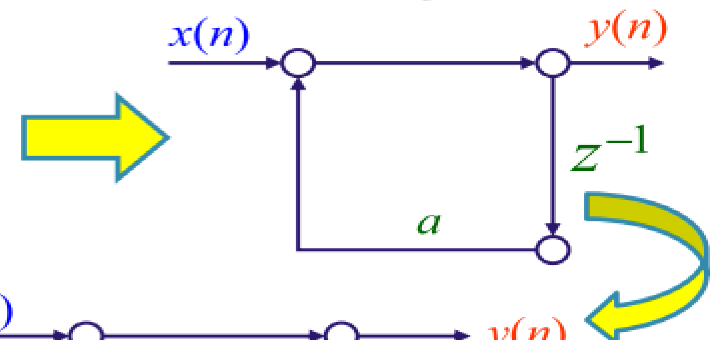
# Chuyển vị Graph tín hiệu

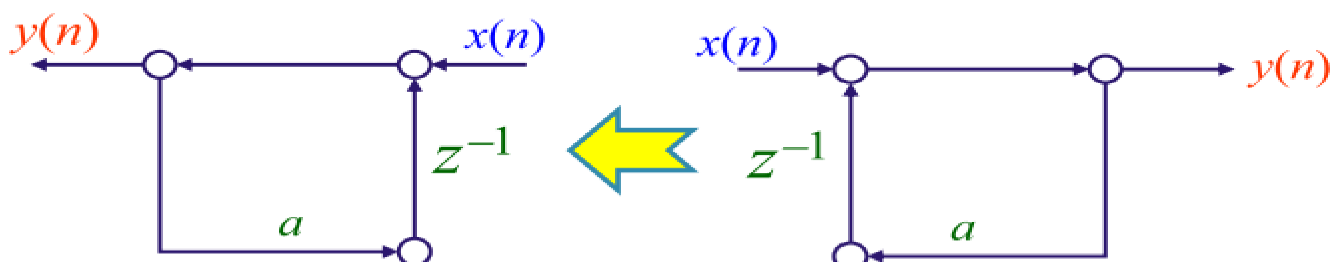
- Hướng của các mũi tên được đánh dấu ngược lại
- Đổi vai trò của đầu ra và đầu vào




- **Ví dụ:**

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



# Cấu trúc hệ thống rời rạc

## Cấu trúc cơ bản của hệ thống FIR

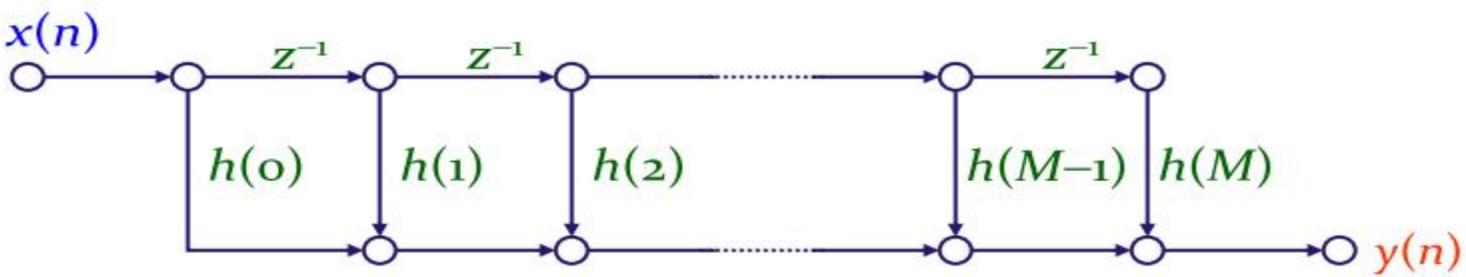
# Hệ thống rời rạc FIR

❖ **Đối với hệ thống FIR nhân quả, hàm hệ thống chỉ có các điểm o.**

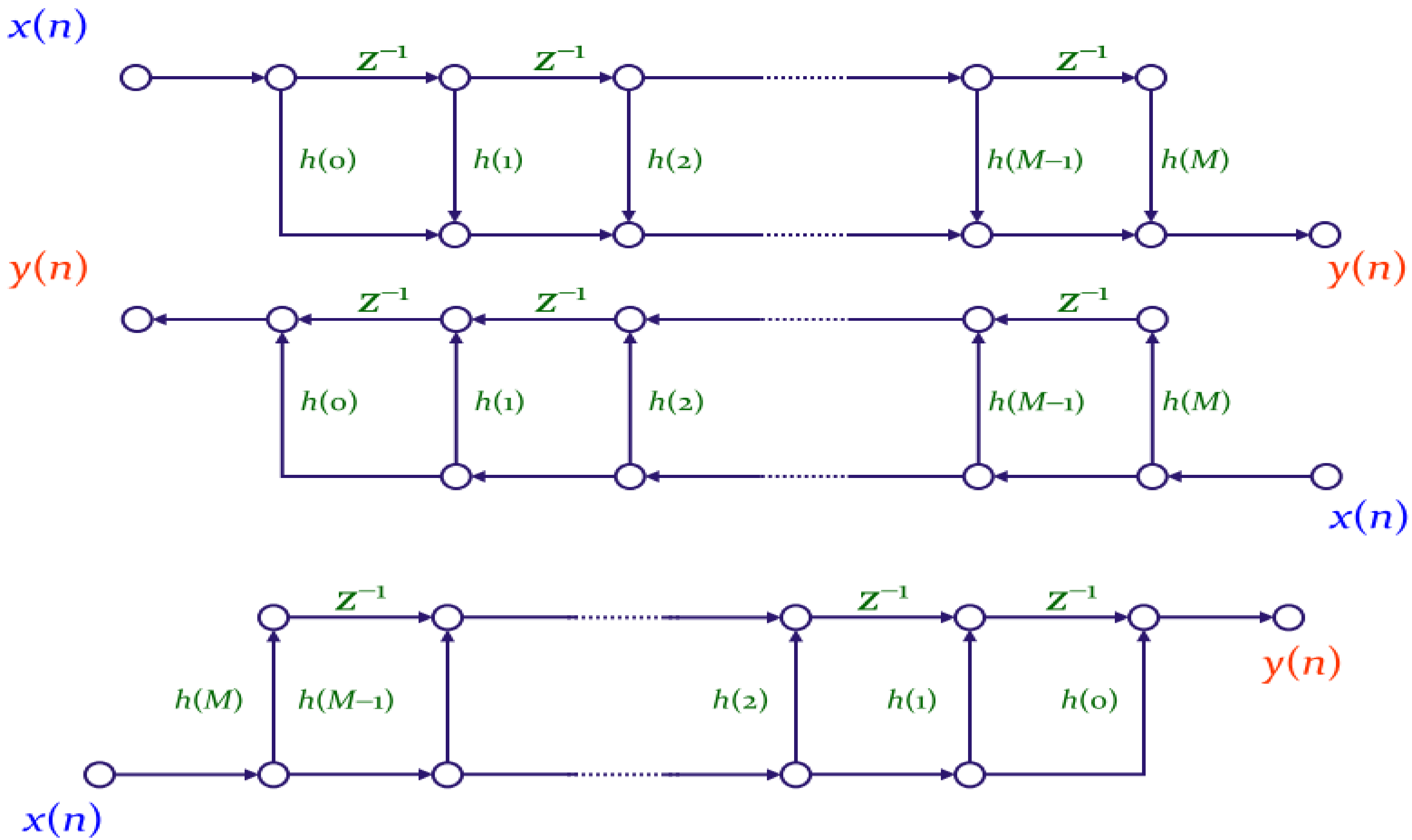
$$\boxed{y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)} \Rightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k)$$

$$\Downarrow$$

$$h(n)=\begin{cases} b_n & n=0,1,\ldots,M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



# Dạng trực tiếp

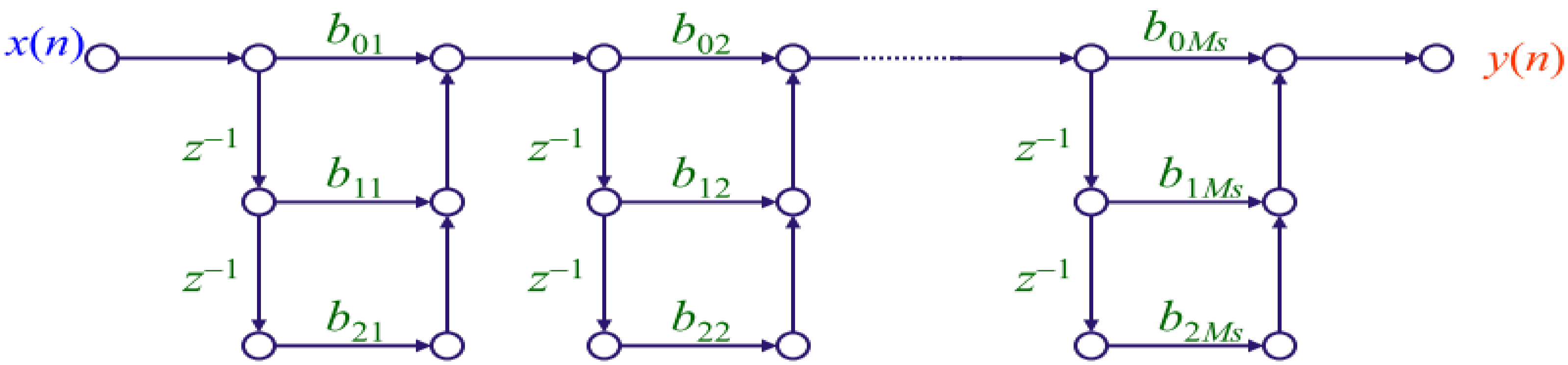


# Dạng nối tiếp

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

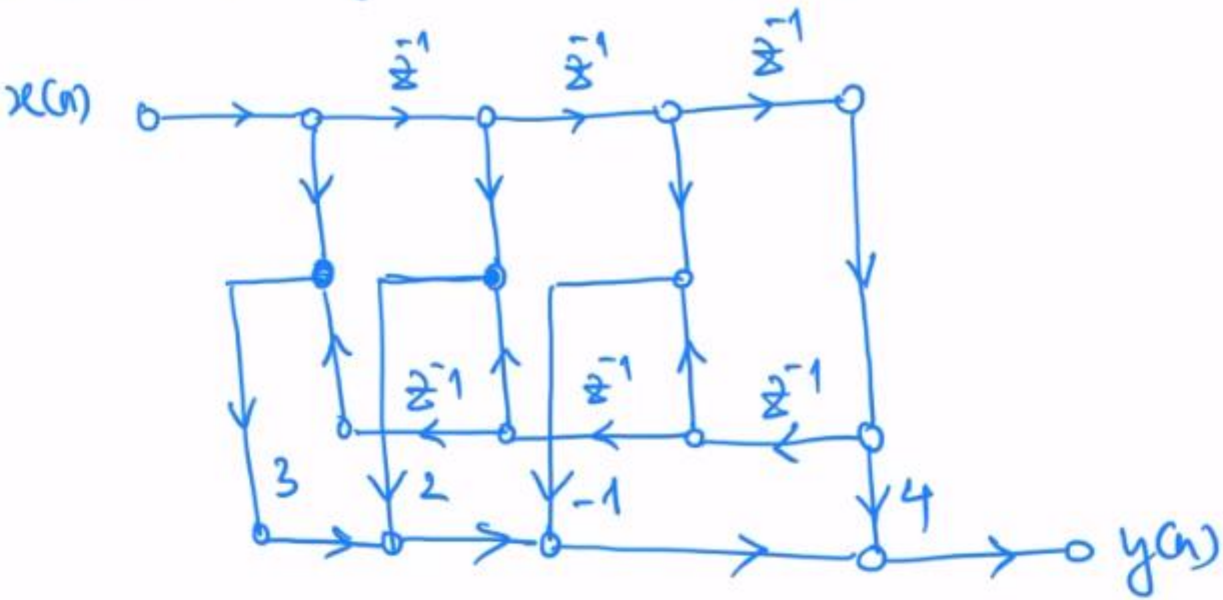
$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n) z^{-n}$$

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})$$



Bài tập:

(1) Cho hệ thống TTBB có sơ đồ phối ghép sau:




$H(z)$ ; $h(n)$ ; PTSP ; vẽ lại sđ.

Bài tập: Cho hệ thống có hàm truyền đạt $H(z)$ sau:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}-6z^{-2}}{(1+2z^{-1})(1+5z^{-1}-6z^{-2})}$$

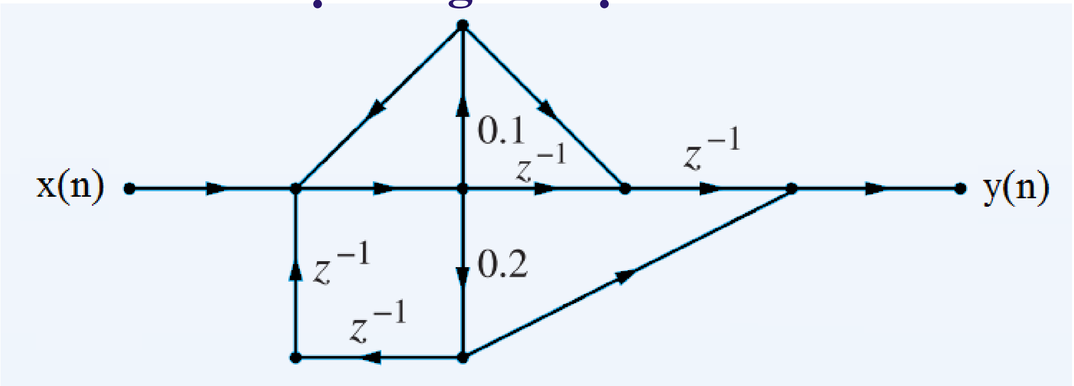
a) $h(n) = ?$ xét tính ổn định & nhân quả (làm sau)

b) Vẽ sơ đồ dạng nối tiếp & chuyển vị; song song & chuyển vị.

(Dùng hàm bài 1)

# Một số bài tập

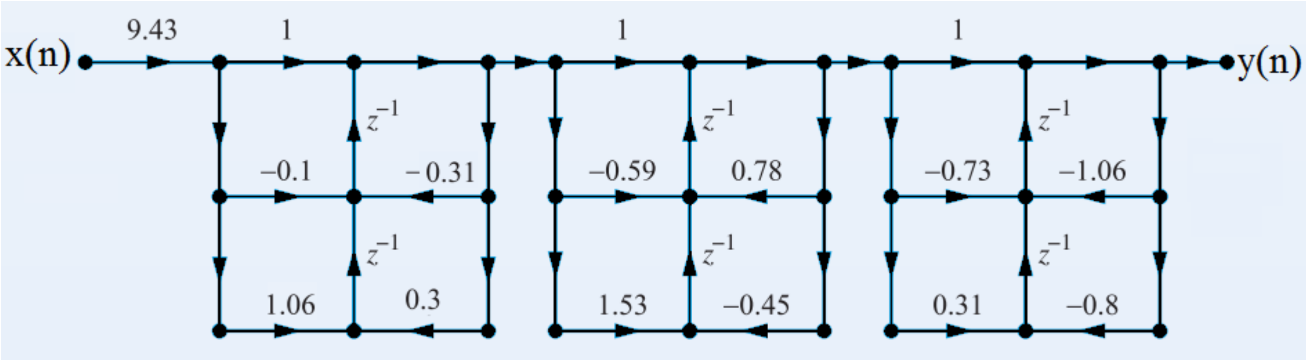
**Bài 1: Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ:**




a) Xác định H(z), h(n), viết PTSP

b) Vẽ lại sơ đồ thực hiện hệ thống (dạng nối tiếp, song song, chuyển vị)

**Bài 2: Cho hệ thống rời rạc như sơ đồ sau:**

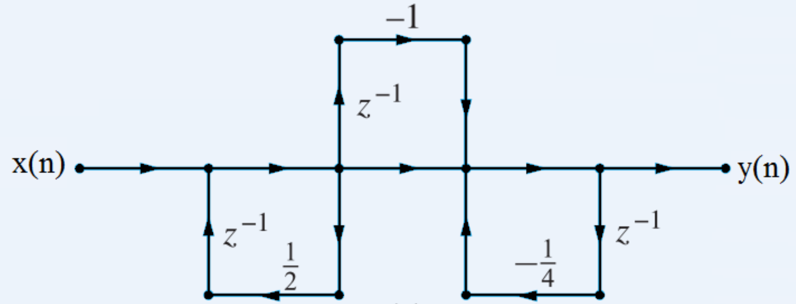



a) Xác định H(z), viết PTSP

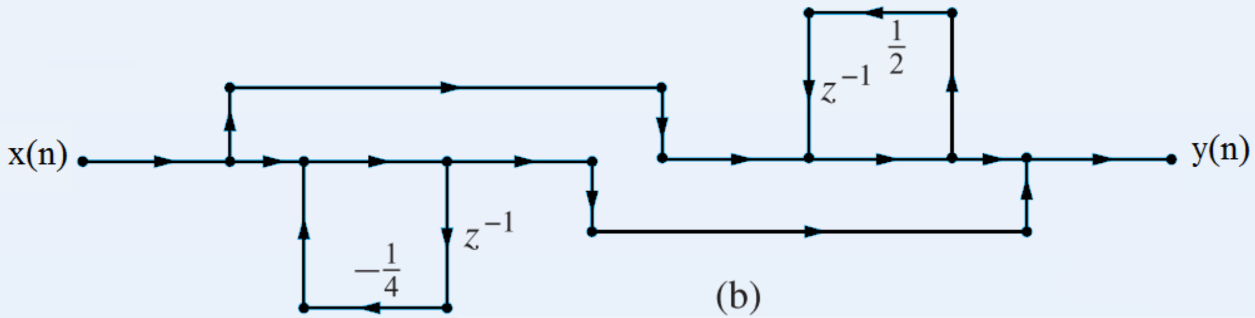
b) Vẽ dạng trực tiếp II, I

# Một số bài tập

**Bài 3: Cho hệ thống rời rạc như sơ đồ (a) và (b) sau:**




(a)




(b)

Xác định hàm truyền đạt của hai hệ thống và so sánh.

**Bài 4: Cho hệ thống:**

$$H(z) = \left(37.8 - 2.05z^{-1}\right) + \frac{-28.64 + 18.86z^{-1}}{1 - 0.32z^{-1} + 0.56z^{-2}} + \frac{-5 - 12.31z^{-1}}{1 - 0.93z^{-1} + 0.58z^{-2}}.$$

Vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống dạng: song song và chuyển vị, trực tiếp I, II, graph

# Cấu trúc hệ thống pha tuyến tính

❖ **Một hệ thống pha tuyến tính thỏa mãn điều kiện:**

$$h(M-n) = h(n) \qquad \text{với } n = 0,1,\ldots,M$$

*Hoặc:*

$$h(M-n) = -h(n) \qquad \text{for } n = 0,1,\ldots,M$$

| | M chẵn | M lẻ |
|---|---|---|
| $h(M-n)=h(n)$ | Loại I | Loại II |
| $h(M-n)=-h(n)$ | Loại III | Loại IV |

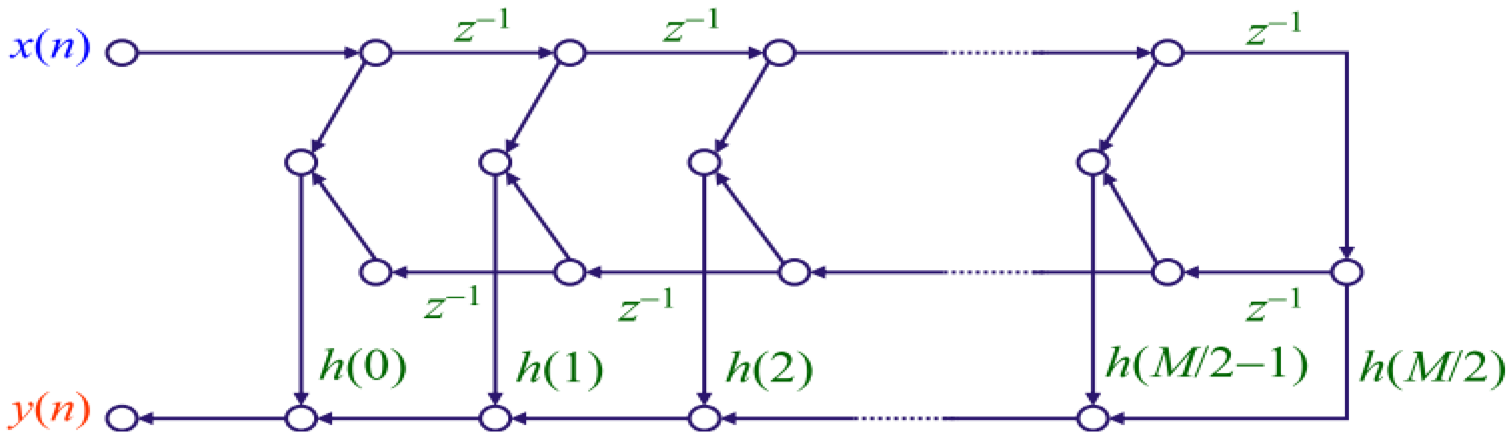
# Loại I

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M}h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{M/2-1}h(n)z^{-n}+h(M/2)z^{-M/2}+\sum_{n=M/2+1}^{M}h(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{M/2-1}h(n)z^{-n}+h(M/2)z^{-M/2}+\sum_{n=M/2+1}^{M}h(M-n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{M/2-1}h(n)z^{-n}+h(M/2)z^{-M/2}+\sum_{n=0}^{M/2-1}h(n)z^{n-M}$$

$$=\sum_{n=0}^{M/2-1}h(n)(z^{-n}+z^{n-M})+h(M/2)z^{-M/2}$$



# Loại II, III, IV

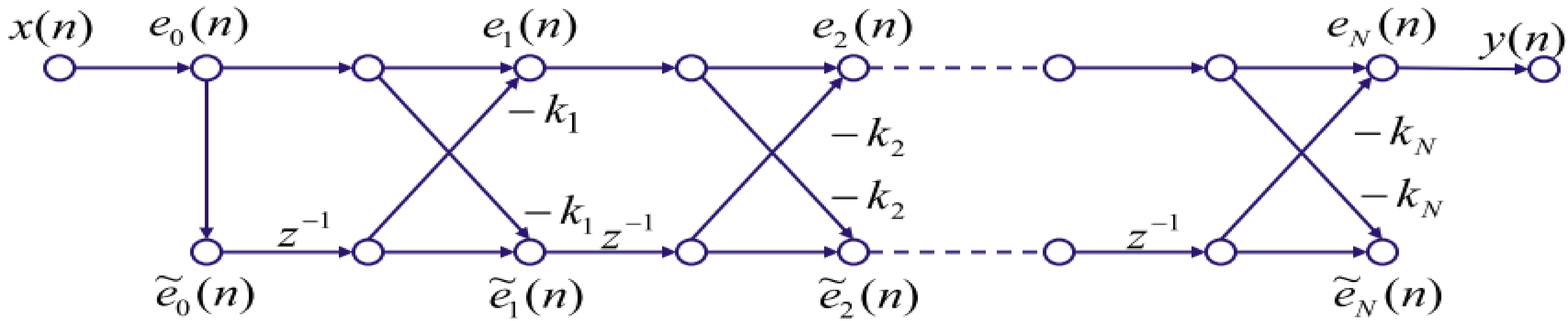
*Dành cho SV*

# Cấu trúc hệ thống rời rạc

## Cấu trúc lưới

# FIR Lattice

$$A(z) = H(z) = 1 - \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}$$

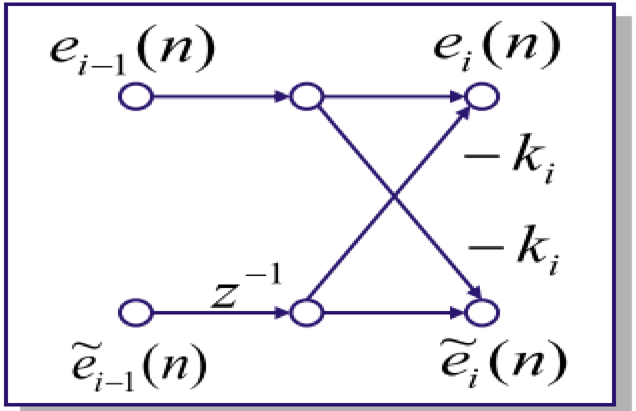



$$e_0(n) = \tilde{e}_0(n) = x(n)$$

$$e_i(n) = e_{i-1}(n) - k_i \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

$$\tilde{e}_i(n) = -k_i e_{i-1}(n) + \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

$$y(n) = e_N(n)$$



# FIR Lattice

$$e_0(n) = \tilde{e}_0(n) = x(n)$$

$$e_i(n) = e_{i-1}(n) - k_i \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

$$\tilde{e}_i(n) = -k_i e_{i-1}(n) + \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

$$y(n) = e_N(n)$$

$$\Rightarrow$$

$$E_0(z) = \tilde{E}_0(z) = X(z)$$

$$E_i(z) = E_{i-1}(z) - k_i z^{-1} \tilde{E}_{i-1}(z)$$

$$\tilde{E}_i(z) = -k_i E_{i-1}(z) + z^{-1} \tilde{E}_{i-1}(z)$$

$$Y(z) = E_N(z)$$

Đặt:

$$A_i(z) = \frac{E_i(z)}{E_0(z)}$$

$$\tilde{A}_i(z) = \frac{\tilde{E}_i(z)}{\tilde{E}_0(z)}$$

$$\Rightarrow$$

$$A_0(z) = \tilde{A}_0(z) = 1$$

$$A_i(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i} a_m^{(i)} z^{-m}$$

**Chứng minh:**

$$A_i(z) = A_{i-1}(z) - k_i z^{-i} A_{i-1}(z^{-1})$$

$$\widetilde{A}_i(z) = z^{-i} A_i(z^{-1})$$

$$A_{i-1}(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i-1} a_m^{(i-1)} z^{-m}$$

$$-k_i z^{-i} A_{i-1}(z^{-1}) = -k_i z^{-i} + k_i \sum_{m=1}^{i-1} a_m^{(i-1)} z^{-i+m} = -k_i z^{-i} + k_i \sum_{m=1}^{i-1} a_{i-m}^{(i-1)} z^{-m}$$

$$A_i(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i} a_m^{(i)} z^{-m}$$

$$A_0(z) = \widetilde{A}_0(z) = 1$$

$$a_i^{(i)} = k_i$$

$$a_m^{(i)} = a_m^{(i-1)} - k_i a_{i-m}^{(i-1)}$$

# FIR Lattice

$$A(z) = 1 - \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}$$

$$A(z) = A_N(z)$$

$$a_m = a_m^{(N)}$$

$$a_N = a_N^{(N)} = k_N$$

| | $a_m^{(0)}$ | $a_m^{(1)}$ | $a_m^{(2)}$ | $a_m^{(3)}$ | $a_m^{(4)}$ | $a_m^{(5)}$ | $a_m^{(6)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m=0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| m=1 | | $k_1$ | $a_1^{(2)}$ | $a_1^{(3)}$ | $a_1^{(4)}$ | $a_1^{(5)}$ | $a_1^{(6)}$ |
| m=2 | | | $k_2$ | $a_2^{(3)}$ | $a_2^{(4)}$ | $a_2^{(5)}$ | $a_2^{(6)}$ |
| m=3 | | | | $k_3$ | $a_3^{(4)}$ | $a_3^{(5)}$ | $a_3^{(6)}$ |
| m=4 | | | | | $k_4$ | $a_4^{(5)}$ | $a_4^{(6)}$ |
| m=5 | | | | | | $k_5$ | $a_5^{(6)}$ |
| m=6 | | | | | | | $k_6$ |

$$a_i^{(i)} = k_i$$

$$a_m^{(i)} = a_m^{(i-1)} - k_i a_{i-m}^{(i-1)} \qquad m < i$$

# FIR Lattice

| | $a_m^{(0)}$ | $a_m^{(1)}$ | $a_m^{(2)}$ | $a_m^{(3)}$ | $a_m^{(4)}$ | $a_m^{(5)}$ | $a_m^{(6)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $m=1$ | | | | | | | $a_1^{(6)}$ |
| $m=2$ | | | | | | | $a_2^{(6)}$ |
| $m=3$ | | | | | | | $a_3^{(6)}$ |
| $m=4$ | | | | | | | $a_4^{(6)}$ |
| $m=5$ | | | | | | | $a_5^{(6)}$ |
| $m=6$ | | | | | | | $a_6^{(6)}$ |

$$\boxed{k_i = a_i^{(i)}}$$

$$a_m^{(i-1)} = a_m^{(i)} + k_i a_{i-m}^{(i-1)}$$

$$a_{i-m}^{(i-1)} = a_{i-m}^{(i)} + k_i a_m^{(i-1)}$$

$$a_m^{(i-1)} = a_m^{(i)} + k_i (a_{i-m}^{(i)} + k_i a_m^{(i-1)})$$

$$\boxed{a_m^{(i-1)} = \frac{a_m^{(i)} + k_i a_{i-m}^{(i)}}{1 - k_i^2}}$$

$$\boxed{a_i^{(i)} = k_i}$$

$$\boxed{a_m^{(i)} = a_m^{(i-1)} - k_i a_{i-m}^{(i-1)}} \qquad m < i$$

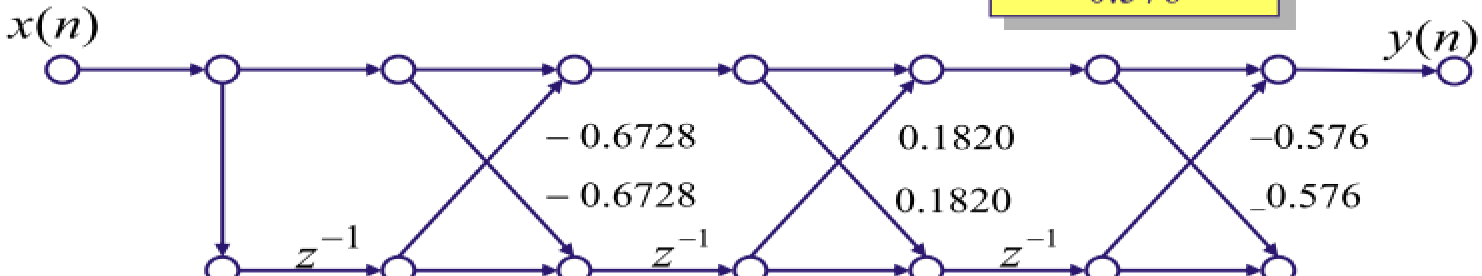
# Ví du

$$k_i = a_i^{(i)}$$

$$A(z) = (1-0.8jz^{-1})(1+0.8jz^{-1})(1-0.9z^{-1})$$
$$= 1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}$$

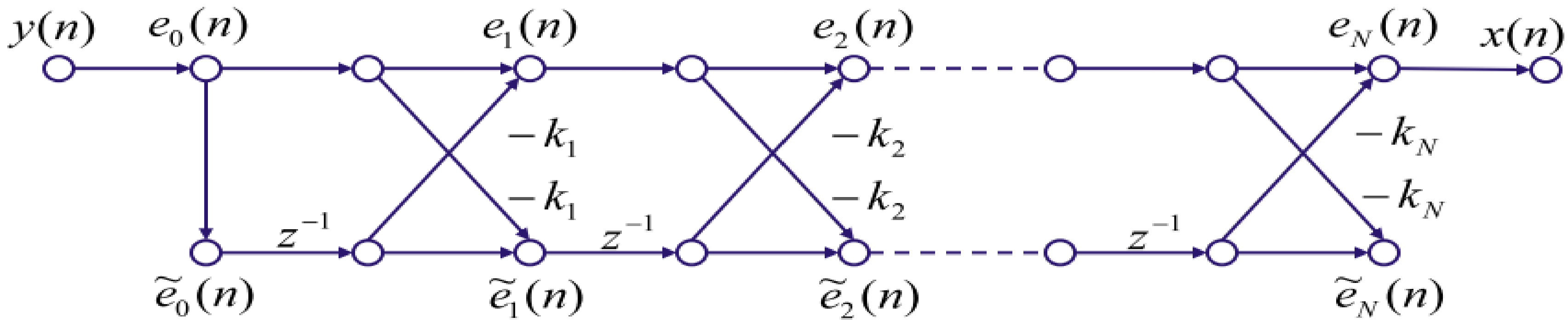
$$a_m^{(i-1)} = \frac{a_m^{(i)} + k_i a_{i-m}^{(i)}}{1-k_i^2}$$

| | $a_m^{(0)}$ | $a_m^{(1)}$ | $a_m^{(2)}$ | $a_m^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $m=1$ | | 0.6728 | 0.7952 | 0.9 |
| $m=2$ | | | −0.1820 | −0.64 |
| $m=3$ | | | | 0.576 |



# Bộ lọc toàn điểm cực

Nếu đổi vai trò của x(n) và y(n) trong sơ đồ bộ lọc lưới có hàm truyền toàn điểm o. Khi đó:




$$\frac{X(z)}{Y(z)} = A(z) = 1 - \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = A^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}}$$

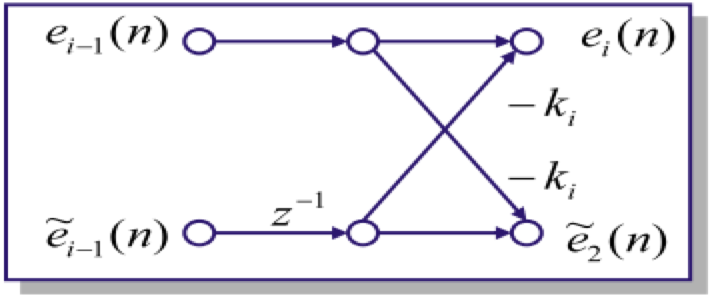
$$e_0(n) = \tilde{e}_0(n) = y(n)$$

$$e_{i-1}(n) = e_i(n) + k_i \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

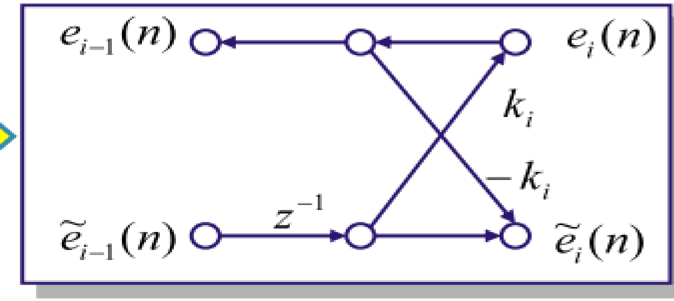
$$\tilde{e}_i(n) = -k_i e_{i-1}(n) + \tilde{e}_{i-1}(n-1)$$

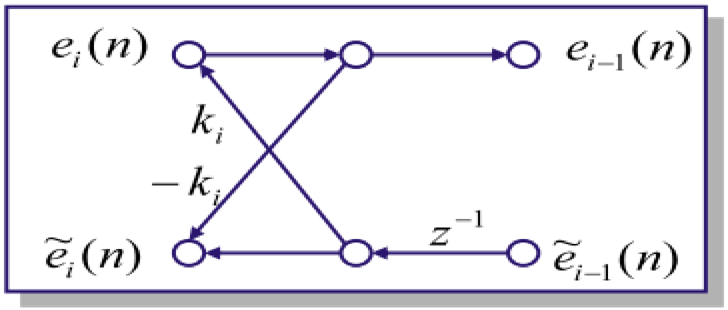
$$e_N(n) = x(n)$$

# Bộ lọc toàn điểm cực




Đảo chiều mũi tên và đổi dấu hệ số phản xạ

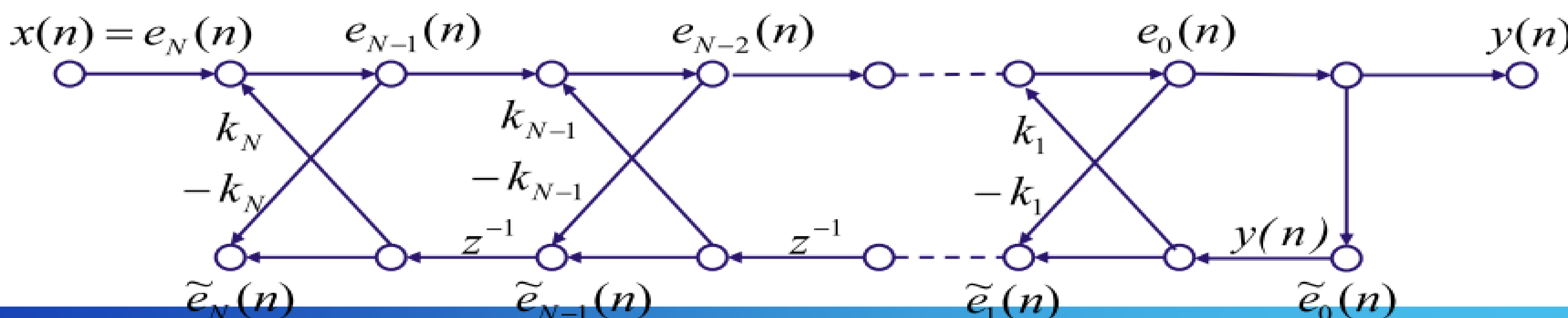



Lật sơ đồ từ trái → phải

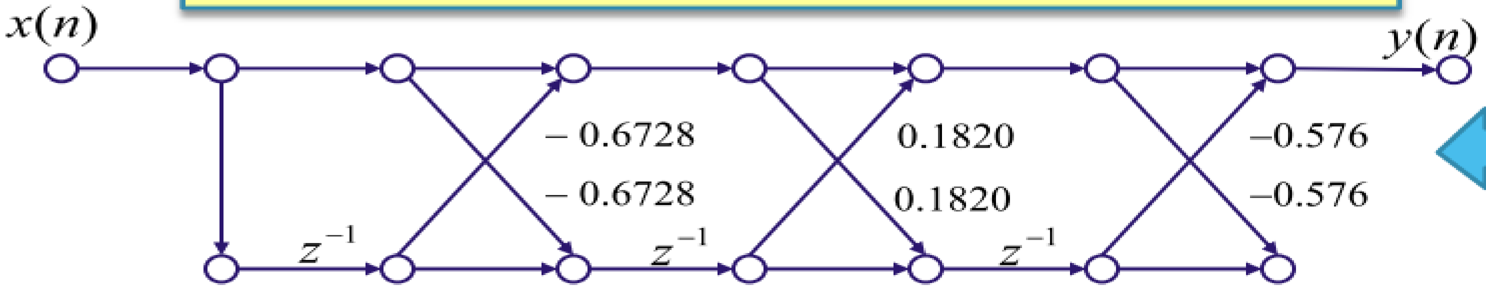
$$\widetilde{e}_i(n) = -k_i e_{i-1}(n) + \widetilde{e}_{i-1}(n-1)$$

$$e_{i-1}(n) = e_i(n) + k_i \widetilde{e}_{i-1}(n-1)$$

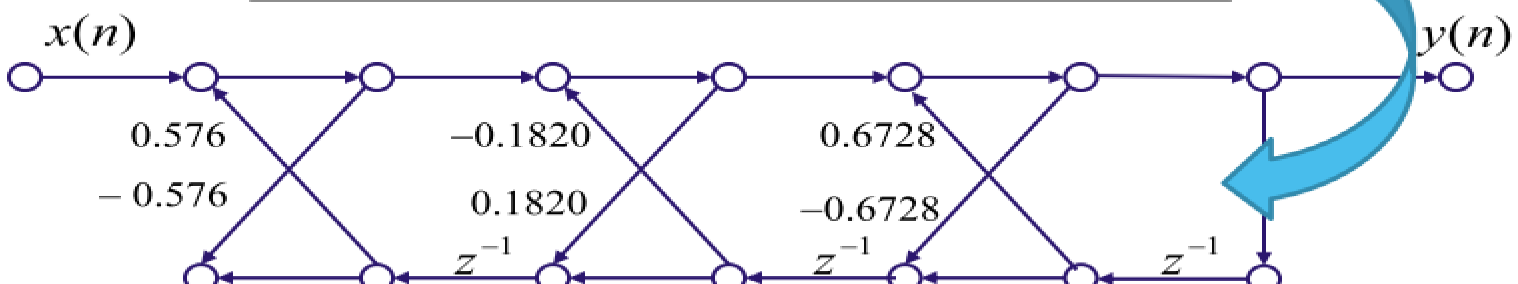


# Ví dụ

$$A(z) = (1-0.8jz^{-1})(1+0.8jz^{-1})(1-0.9z^{-1})$$
$$= 1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}$$




$$A(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}}$$



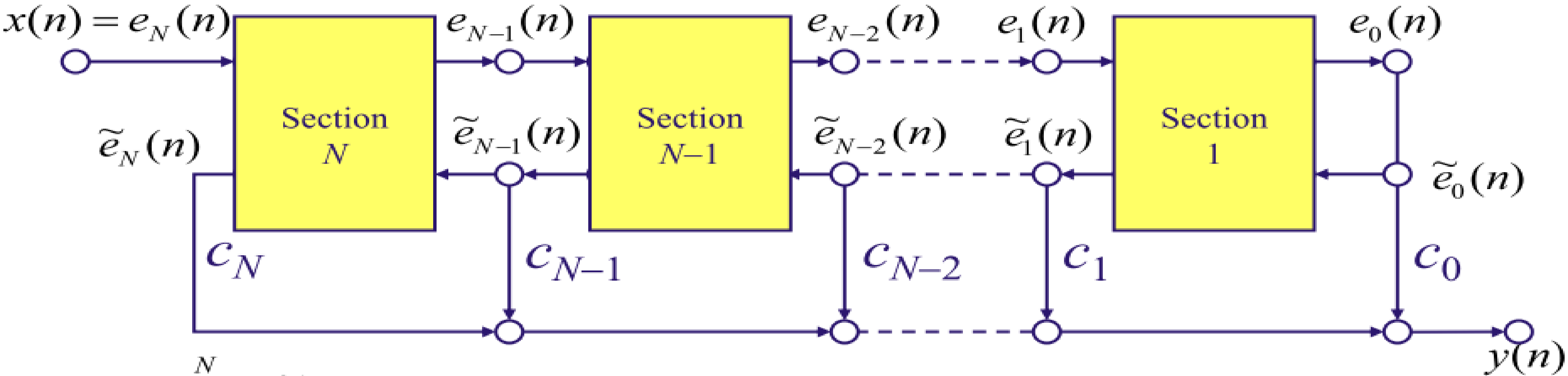
# Sự ổn định

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}}$$

Tất cả các điểm cực của H(z) phải nằm trong vòng tròn đơn vị

Điều kiện cần và đủ để bộ lọc lưới toàn điểm cực ổn định: $|k_i| < 1$

# Bộ lọc lưới có cả điểm o và điểm cực




$$Y(z) = \sum_{i=0}^{N} c_i \widetilde{E}_i(z)$$

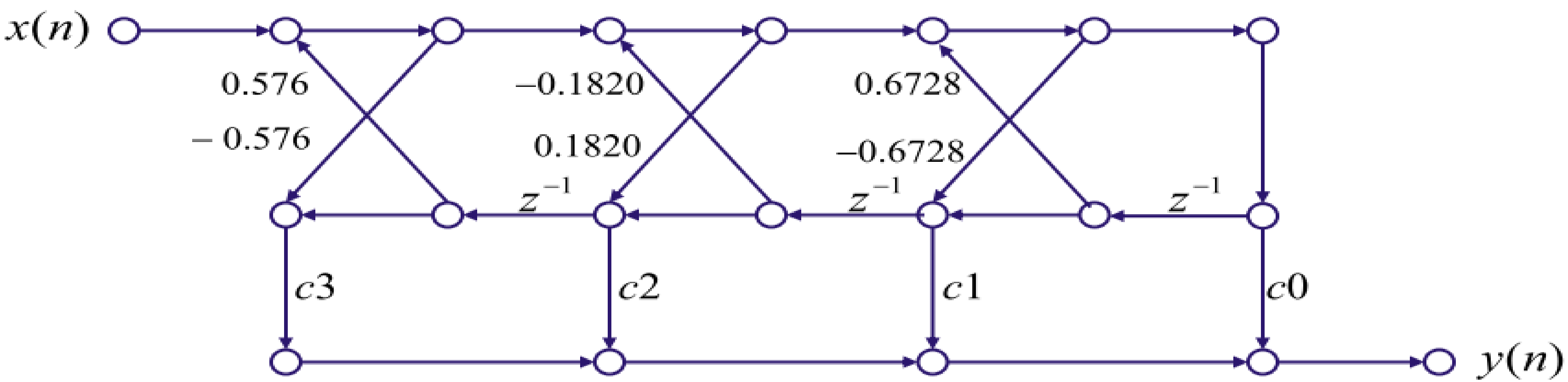
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N} c_i \frac{\widetilde{E}_i(z)}{X(z)}$$

$$\boxed{c_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{N} c_i a_{i-m}^{(i)}}$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{i=0}^{N} \frac{c_i z^{-i} A_i(z^{-1})}{A(z)}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N} b_m z^{-m}}{A(z)}$$

# Ví dụ

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.64z^{-2} - 0.576z^{-3}}$$




$$c_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{N} c_i a_{i-m}^{(i)}$$

# Ví dụ

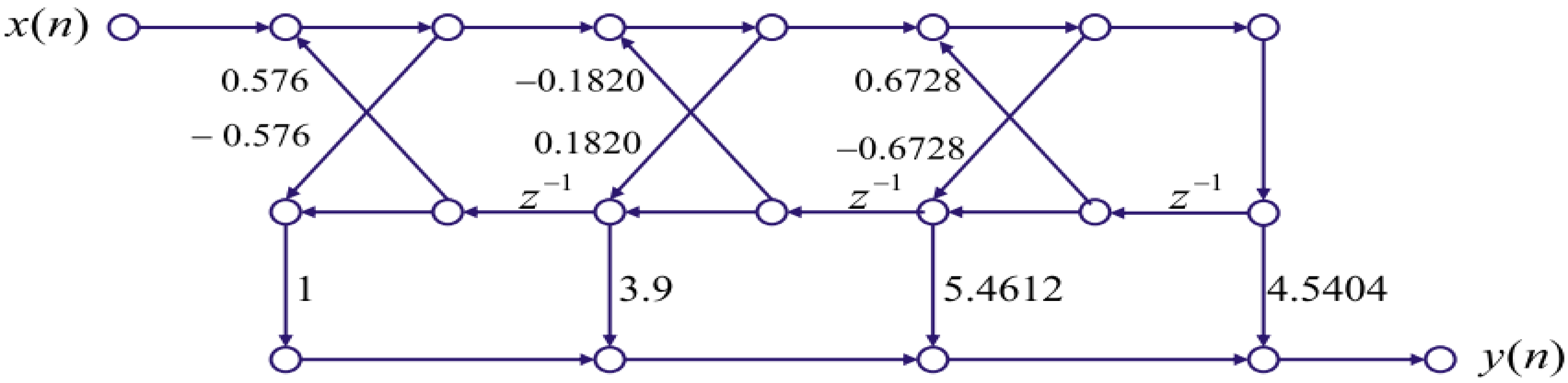
| | $a_m^{(0)}$ | $a_m^{(1)}$ | $a_m^{(2)}$ | $a_m^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $m=1$ | | 0.6728 | 0.7952 | 0.9 |
| $m=2$ | | | –0.1820 | –0.64 |
| $m=3$ | | | | 0.576 |

$$c_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{N} c_i a_{i-m}^{(i)}$$

$$\begin{cases} c_3 = b_3 = 1 \\ c_2 = b_2 + c_3 a_1^{(3)} = 3.9 \\ c_1 = b_1 + c_2 a_1^{(2)} + c_3 a_2^{(3)} = 5.4612 \\ c_0 = b_0 + c_1 a_1^{(1)} + c_2 a_2^{(2)} + c_3 a_3^{(3)} = 4.5404 \end{cases}$$

# Ví dụ

$$H(z)=\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1-0.9z^{-1}+0.64z^{-2}-0.576z^{-3}}$$




$$c_3=b_3=1$$

$$c_2=b_2+c_3a_1^{(3)}=3.9$$

$$c_1=b_1+c_2a_1^{(2)}+c_3a_2^{(3)}=5.4612$$

$$c_0=b_0+c_1a_1^{(1)}+c_2a_2^{(2)}+c_3a_3^{(3)}=4.5404$$