BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

Bài tập

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Hà Nội - 2015

Mục lục

Chương 1

Sai số

Bài tập 1.1. Đo trọng lượng $1dm^3$ nước ở O^oC nhận được

$$\rho = 999.847(g) \pm 0.001(g).$$

Hãy xác định sai số tương đối giới hạn của phép đo trên.

Bài tập 1.2. Cho các số

1. $a_1 = 1.2341$ có $\Delta_{a_1} = 0.45 \times 10^{-4}$;
2. $a_2 = 0.5364$ có $\Delta_{a_2} = 0.42 \times 10^{-3}$.

Hãy xác định chữ số tin tưởng trong các số trên.

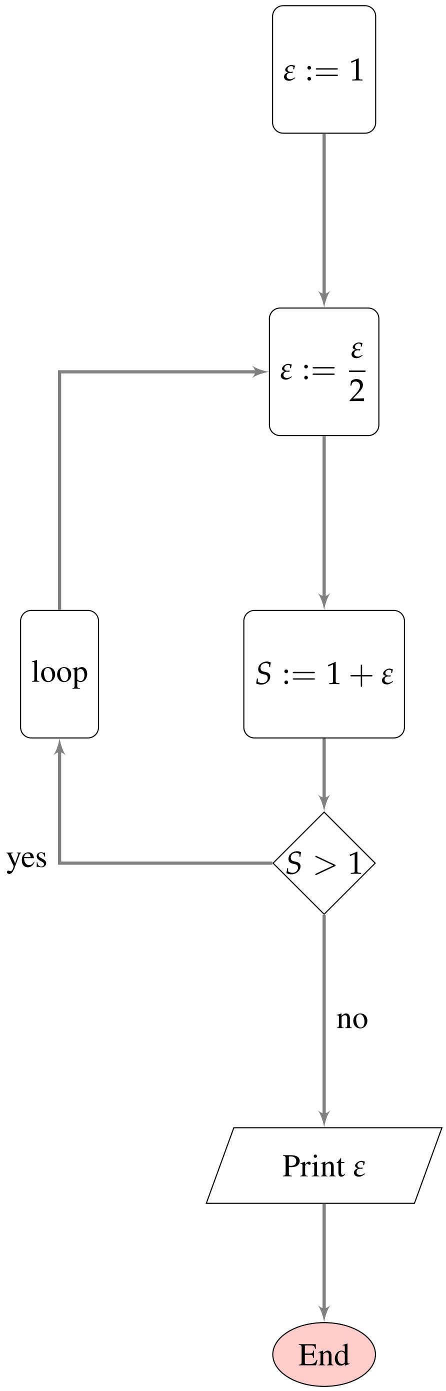
Bài tập 1.3. Cho hàm số $u = \ln\left(x_1 + x_2^2\right)$. Hãy xác định giá trị của hàm số u tại $x_1 = 0.97;\ \ x_2 = 1.132$. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u và sai số tương đối giới hạn δ_u; biết rằng trong các số x_1 và x_2 đã cho, các chữ số đều là chữ số tin tưởng (đáng tin).

Bài tập 1.4. Từ sơ đồ khối của thuật toán tìm ε (hình 1.4), hãy giải thích quá trình tính toán được thực hiện như thế nào?

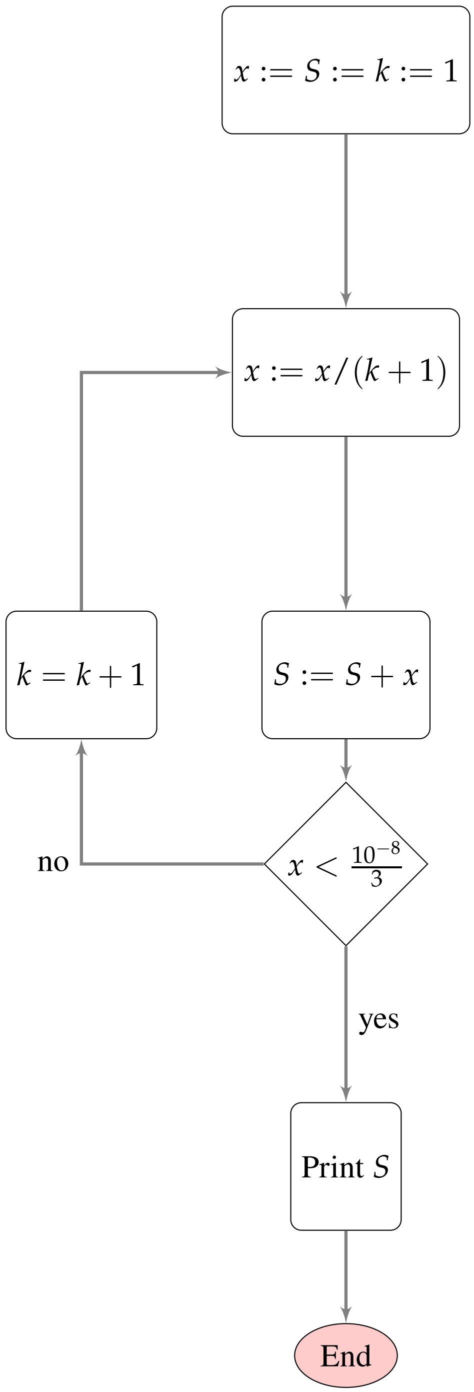
Bài tập 1.5. Để tính số e chính xác tới 8 chữ số sau dấu chấm thập phân thì trong khai triển Taylor

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} + \cdots$$

phải lấy ít nhất bao nhiêu số hạng.
Giải thích sơ đồ khối tìm số e theo yêu cầu trên được cho dưới đây (hình).



Hình 1.1: Sơ đồ khối tính số ε



Hình 1.2: Sơ đồ khối tính gần đúng số e

Chương 2

Giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$

Bài tập 2.1. Cho phương trình $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$. Biết rằng $(0, 1)$ là một khoảng phân ly nghiệm.

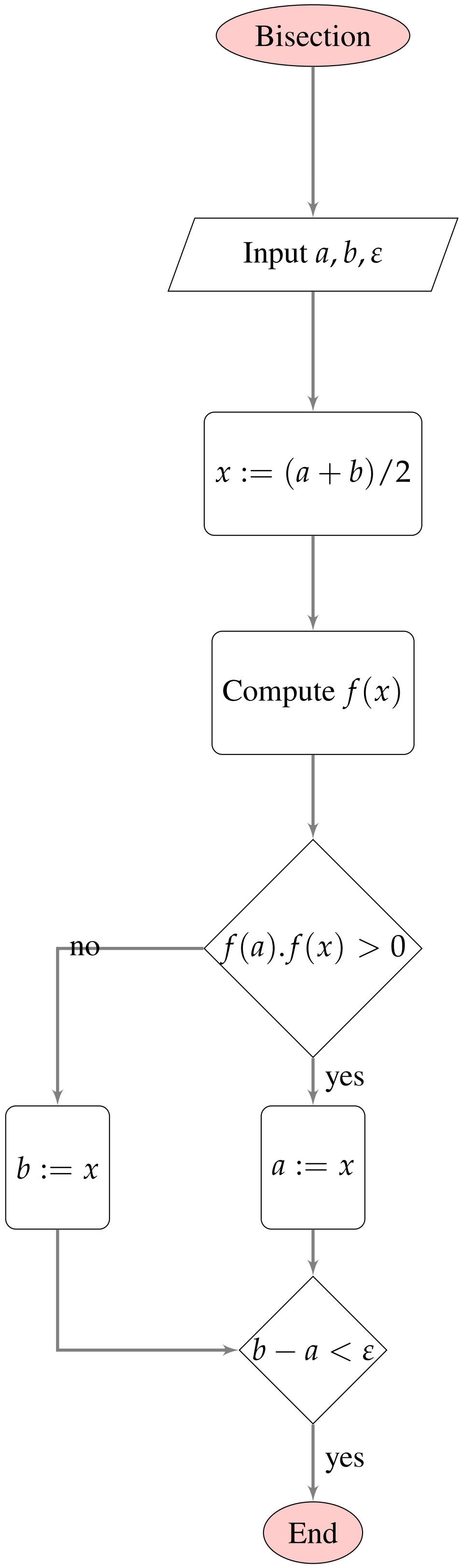
1. Hãy tìm nghiệm trong khoảng đó theo phương pháp chia đôi đến bước $n = 5$;
2. Sử dụng sơ đồ khối cài đặt trên máy và tính sao cho nghiệm gần đúng đạt sai số tuyệt đối $\varepsilon < 10^{-4}$.

Bài tập 2.2. Cho phương trình $6.5x^3 - 26x + 3.9 = 0$ và khoảng $(0, 1)$ là khoảng phân ly nghiệm.

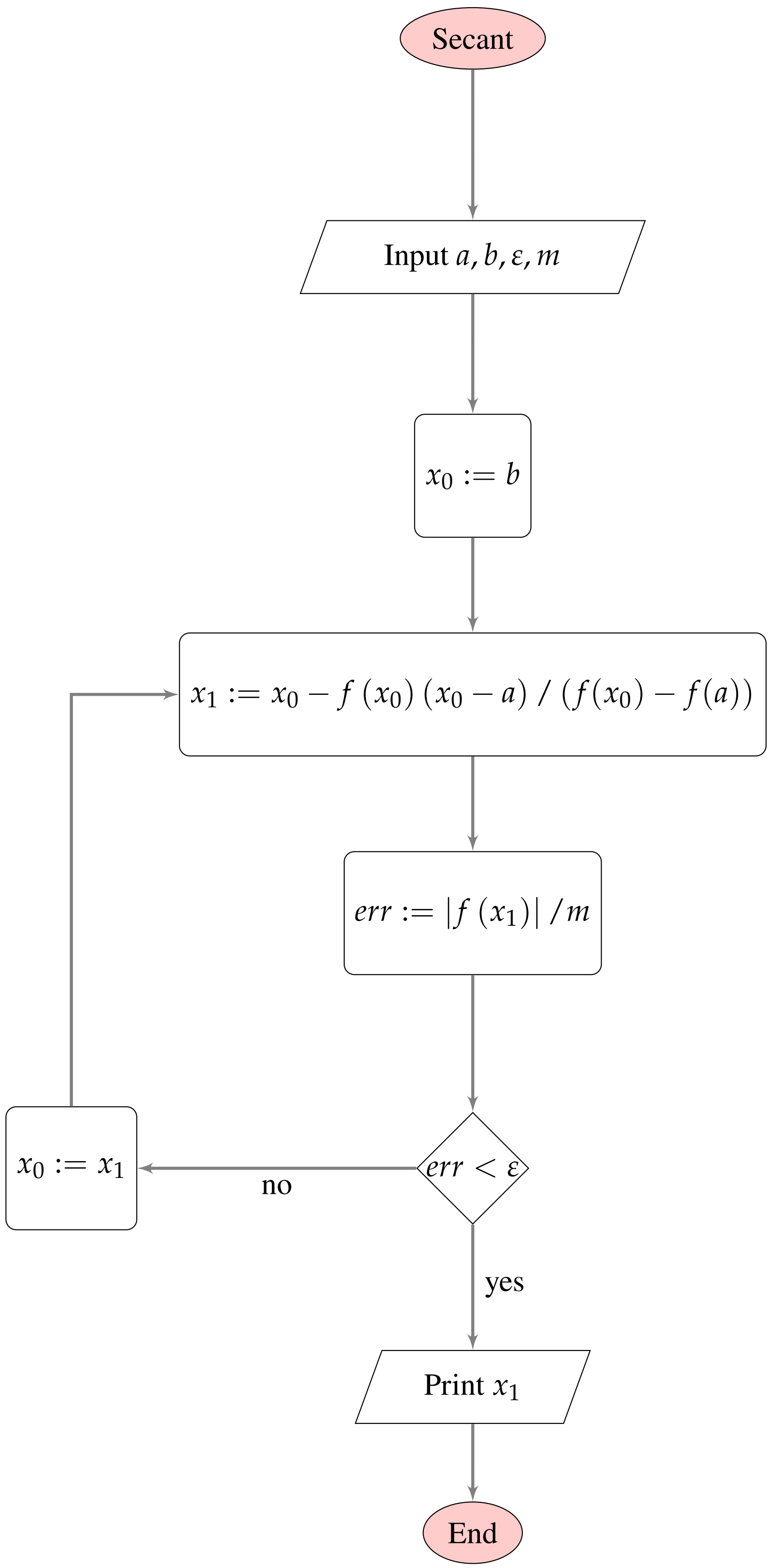
1. Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn đối với phương trình trên;
2. Tính trực tiếp tới phép lặp thứ ba với xấp xỉ đầu $x_0 = 0.5$;
3. Lập sơ đồ khối và áp dụng tính nghiệm gần đúng của phương trình đã cho trong khoảng trên sao cho đạt được sai số $\varepsilon < 10^{-6}$.

Bài tập 2.3. Cho phương trình $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ và $(-2.75; -2.5)$ là một khoảng phân ly nghiệm.

1. Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp dây cung;
2. Tính giá trị nghiệm gần đúng x_1, x_2. Đánh giá sai số của x_2;
3. Giải thích sơ đồ khối để tìm nghiệm gần đúng theo phương pháp dây cung dưới đây và áp dụng cài đặt trên máy để tìm nghiệm gần đúng của phương trình đã cho sao cho đạt sai số $\varepsilon < 10^{-4}$.



Hình 2.1: Sơ đồ khối phương pháp chia đôi



Hình 2.2: Sơ đồ khối phương pháp dây cung

Bài tập 2.4. Cho phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = 24x$.

1. Chứng minh rằng $(-6.94; -6.23)$ là một khoảng phân ly nghiệm;
2. Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp Newton (tiếp tuyến) đối với khoảng phân ly nghiệm đã cho;
3. Tính theo công thức Newton đến phép lặp thứ ba là x_3 và đánh giá sai số tại x_3;
4. Lập sơ đồ khối đối với phương pháp Newton để tìm nghiệm gần đúng sao cho đạt sai số $< \varepsilon$ cho trước. Với sai số ε được xác định trong câu 3), hãy kiểm nghiệm theo sơ đồ khối đã lập.

Chương 3

Giải gần đúng hệ đại số tuyến tính

Bài tập 3.1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 15.60x_1 - 2.73x_2 + 1.89x_3 & = 6.75 \\ 2.50x_1 - 16.50x_2 + 7.40x_3 & = 2.86 \\ 5.00x_1 + 11.56x_2 + 27.90x_3 & = 9.85 \end{cases}$$

1. Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn;

2. Tính đến xấp xỉ $X^{(3)}$ theo phương pháp trên, biết $X^{(0)} = (0.40; 0.01; 0.27)^t$ và đánh giá sai số của $X^{(3)}$.

3. Để đạt được sai số $\varepsilon \leq 10^{-6}$ thì cần tối thiểu bao nhiêu phép lặp?

Bài tập 3.2. Lập sơ đồ khối của phương pháp lặp đơn.
Áp dụng với hệ

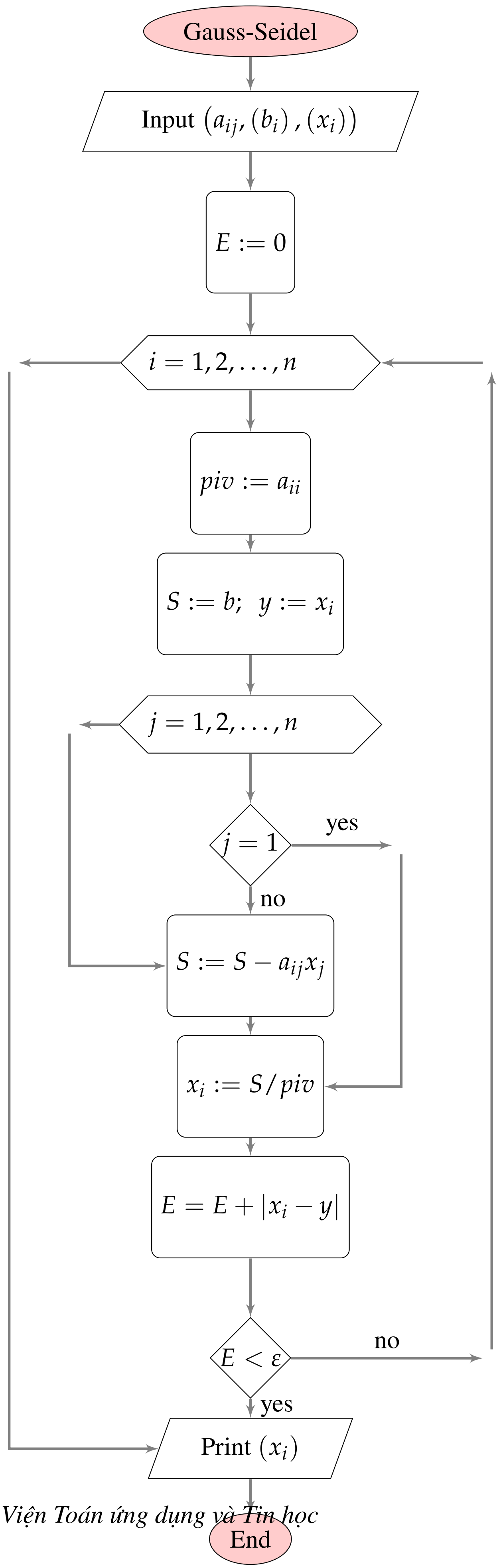
$$\begin{cases} 89.13x_1 - 13.59x_2 + 23.46x_3 & = 0.78 \\ 2.14x_1 + 1.27x_2 + 21.35x_3 & = -3.91 \\ 2.46x_1 - 81.70x_2 - 25.28x_3 & = 49.30 \end{cases}$$

để tìm nghiệm gần đúng sao cho đạt 5 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy.

Bài tập 3.3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 & = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 & = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 & = 14 \end{cases}$$

và sơ đồ khối của phương pháp Seidel:


Gauss-Seidel
Input $(a_{ij}, (b_i), (x_i))$
$E := 0$
$i = 1, 2, \ldots, n$
$piv := a_{ii}$
$S := b; \ y := x_i$
$j = 1, 2, \ldots, n$
$j = 1$
yes
no
$S := S - a_{ij}x_j$
$x_i := S/piv$
$E = E + |x_i - y|$
$E < \varepsilon$
no
yes
Print (x_i)
End

1. Hãy kiểm tra xem sơ đồ khối đúng hay sai, nếu sai thì sửa lại và áp dụng tính đối với hệ đã cho tới phép lặp thứ ba là $X^{(3)}$ với xấp xỉ đầu là $X^{(0)} = (1.2;\ 0;\ 0)^t$.

Chương 4

Nội suy và bình phương tối thiểu

Bài tập 4.1. Lập sơ đồ khối để tính giá trị của đa thức theo sơ đồ Horner.
Áp dụng tính $p(2)$, trong đó

$$p(x) = 7x^6 - 8x^5 + 7x^3 + 18x^2 - 20.$$

Bài tập 4.2. Cho sơ đồ khối của đa thức nội suy Lagrange:

1. Áp dụng lập đa thức nội suy Lagrange đối với hàm số $y = 3^x$ được cho từ bảng sau:

x	-1	0	1
$y = 3^x$	$\frac{1}{3}$	1	3

2. Kiểm tra lại bằng cách tính trực tiếp.

Bài tập 4.3. Cho bảng số của hàm $y = \ln x$:

x	2.0	2.2	2.3	2.5
$y = \ln x$	0.30103	0.34242	0.36173	0.39794

1. Xây dựng trực tiếp đa thức nội suy Lagrange;
2. Sử dụng sơ đồ khối để kiểm tra lại kết quả;
3. Từ kết quả hãy tính gần đúng giá trị hàm số tại điểm $x = 2.03$. Đánh giá sai số.

Bài tập 4.4. 1. Lập sơ đồ khối cho công thức nội suy Newton tiến có mốc cách đều;

2. Áp dụng tính giá trị gần đúng của hàm $y = \sin x$ tại $x = 1.2^o$ được cho từ bảng sau

x	10^o	15^o	20^o	25^o	30^o
$y = \sin x$	0.1736	0.2588	0.3420	0.4226	0.5

Đánh giá sai số.

Bài tập 4.5. Tìm hàm thực nghiệm dạng $y = ax^2 + bx$ từ bảng số sau bằng cách tính trực tiếp và lập sơ đồ khối để kiểm tra lại kết quả:

x	0.48	1.05	1.85	2.37	4.32	5.13
$y = f(x)$	0.185	2.574	8.536	15.478	51.984	79.123

Bài tập 4.6. Tìm hàm thực nghiệm dạng $y = ax^b$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu từ bảng số

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y = f(x)$	0.2049	0.4839	0.800	1.1429	1.5072	1.8895	2.2876	2.6995	3.1240

Chương 5

Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định

Bài tập 5.1. Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm $y = f(x)$ được cho từ 4 mốc nội suy là $x_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ (bước $h > 0$) tại các điểm x_i đó. Đánh giá sai số đối với công thức tìm được.

Bài tập 5.2. Cho tích phân $I = \int_{2.1}^{3.1} \frac{x^3}{x-1} dx$.

1. Tính trực tiếp tích phân trên theo công thức hình thang tổng quát với bước $h = 0.1$;

2. Đánh giá sai số của giá trị gần đúng tìm được;

3. Để giá trị gần đúng tìm được đạt 4 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy thì phải chia đều đoạn $[2.1; 3.1]$ bằng ít nhất bao nhiêu điểm chia nếu sử dụng công thức Simpson tổng quát.

Bài tập 5.3.

1. Kiểm tra sự đúng đắn của sơ đồ khối tính giá trị gần đúng của tích phân xác định theo công thức Simpson tổng quát;

2. Áp dụng tính câu 3) của bài 5.2.

Chương 6

Giải gần đúng phương trình vi phân thường

Bài tập 6.1. 1. Lập sơ đồ khối tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau $y^{'} = f(x, y), \;\; y(x_0) = \alpha$ theo công thức Euler

2. Áp dụng tìm nghiệm của bài toán sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \left(x^3 + \sqrt{y}\right) y^{'} &= y^{'} - y^2 \\ y(4) &= 1.2151 \end{aligned}$$

trên đoạn $[4; 5]$, lấy với $h = 0.2$.

3. Tính trực tiếp để kiểm tra lại kết quả trên.

Bài tập 6.2. Cho sơ đồ khối của công thức Euler cải tiến, tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy $y^{'} = f(x, y), \;\; y(x_0) = \alpha$ tại các nút chia $x_i = x_0 + ih$.

Áp dụng tìm nghiệm của bài toán sau: $y^{'} = x + y; \;\; y(0) = 1$ lấy với $h = 0.05$. Tính $y(0.1)$.

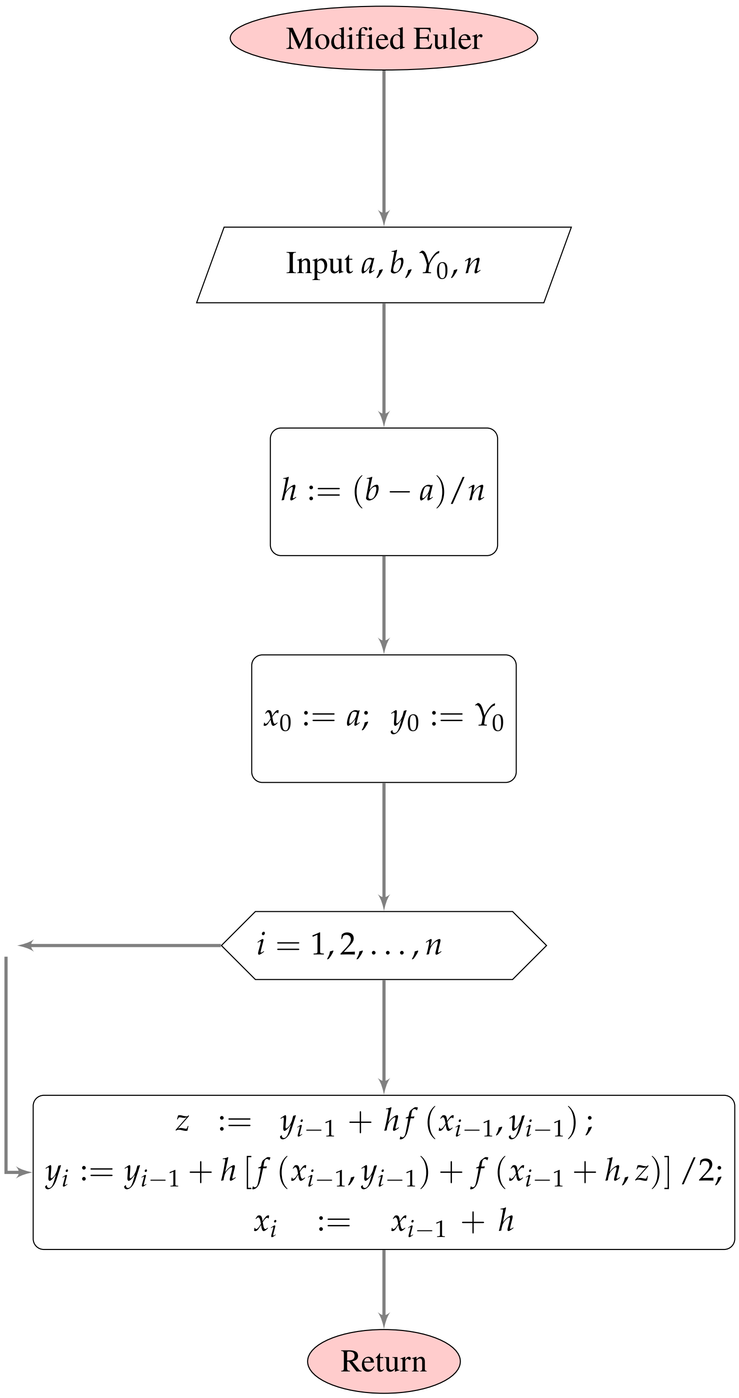
Bài tập 6.3. Sơ đồ khối của công thức dạng Runge-Kutta 4 (bậc bốn) được cho dưới đây. Hãy đọc để hiểu trình tự của quá trình tính.

1. Áp dụng cho bài toán:

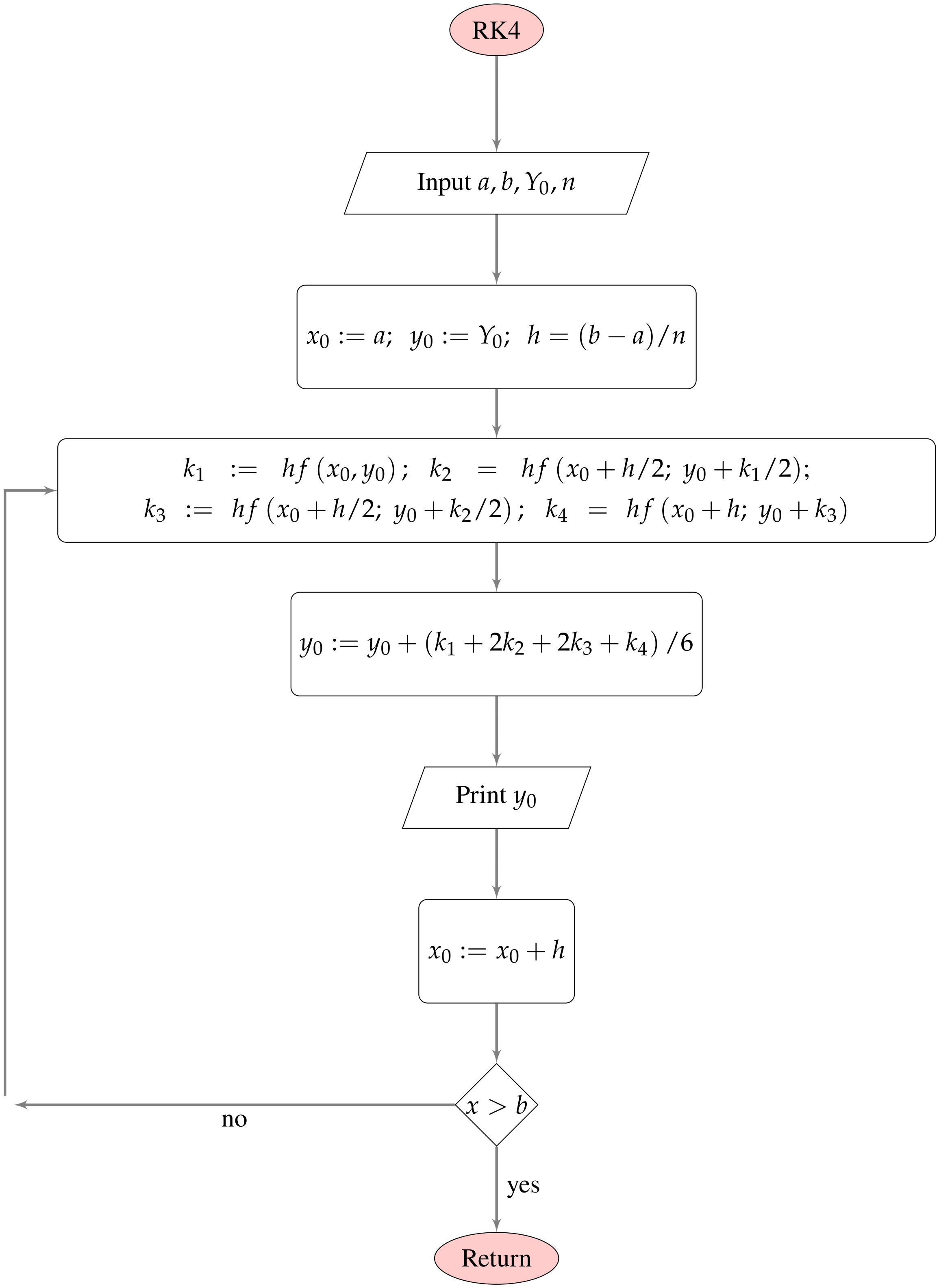
$$\begin{aligned} 3y^2 + 1.7y + 1 - (14xy + 4)\, y^{'} &= 0 \\ y(0.4) &= 0.1026 \end{aligned}$$

Tính giá trị gần đúng của nghiệm tại điểm $x = 0.5$ với bước $h = 0.1$.

2. Tính trực tiếp để kiểm tra lại kết quả.



Hình 6.1: Sơ đồ khối phương pháp Euler cải tiến



Hình 6.2: Sơ đồ khối phương pháp Euler cải tiến